

不規則波の波高の相関係数の推定について

太田 隆夫・木村 晃

社会開発システム工学科

Estimations of the Correlation Coefficient for the Successive Irregular Wave Height

by

Takao OHTA and Akira KIMURA

Department of Social Systems Engineering

(Received September 1, 1991)

The statistical property of the run of zero-crossing irregular sea wave heights is characterized by the Markov chain (Kimura, 1980). Its transition probability is given by the normalized two dimensional Rayleigh distribution. Two principal methods of calculating the correlation parameter have been proposed by Longuet-Higgins (1984), Battjes et al. (1984) and Kimura (1980). Since the parameters from data by these methods involve inherent statistical errors, however, the efficiency for these methods has been discussed. This study introduces variances of the parameter theoretically by two methods. The propagation law of errors is applied to correlate the error in the spectrum and that in the envelope, which is the function of the parameter, in the first method. The probability distribution of the parameter is derived theoretically applying the relation between the envelope and this parameter in the second method. The theoretical variances of the parameter and that by the direct method (Kimura, 1980) are compared with the numerically simulated data leading to the confirmation that the direct method gives the better result than other methods.

1. はじめに

海の波の特徴はその不規則性に代表されるが、完全に不規則というわけではなく、波高の大きな波が数波連なっていて現れることがある。こうした波の特性（波群、高波の連）は以下のような現象に影響を及ぼすと考えられ、近年その研究が盛んに行われている。

①係留浮体が、それに作用する波の周期よりもはるかに長い周期でゆるやかに動く長周期動揺、②汀線付近の水位が数分の周期で変動するサーフビート、③防波堤の被覆捨石および被覆ブロックの不規則波に対する安定性、等々である。

波高の連を数学的に取り扱う方法の1つに、波高をランダム変量として解析する方法がある（Goda¹⁾）。しかし、波高は完全にランダムな変量ではなく隣合う波高の間には若干の相関があるため、この理論は観測結果とは合わない。この隣合う波高の相関を考慮して波高の連を解析したものとして、Kimuraの理論²⁾がある。この理論の適合性はすでに認められ応用もなされているが、そのキーパラメータである相関パラメータの推定法は2通りあり、それらの精度の評価は残された課題の1つである。本研究は、相関パラメータの2つの推定法の精度について検討したものである。

2. 相関パラメータ

Kimura²⁾は隣合う波高の相関を考慮するために波高の時系列をマルコフ連鎖と仮定し、その推移確率を2次元Rayleigh分布で与えて波高の連の確率分布の理論式を次のように導いた。

$$p(t) = p_{22}^{-1} (1 - p_{22}) \quad (1)$$

ただし、

$$p_{22} = \frac{\int_{h_w}^{\infty} \int_{h_w}^{\infty} p(h_1, h_2) dh_1 dh_2}{\int_{h_w}^{\infty} p(h_1) dh_1}$$

ここに、

$$p(h_1, h_2) = \frac{4h_1 h_2}{(1-\kappa^2)h_r^4} \exp\left\{-\frac{1}{1-\kappa^2} \frac{(h_1^2 + h_2^2)}{h_r^2}\right\} I_0\left[\frac{2h_1 h_2 \kappa}{(1-\kappa^2)h_r^2}\right]$$

$$p(h_1) = \frac{2h_1}{h_r^2} \exp\left\{-\frac{h_1^2}{h_r^2}\right\}$$

ここに I_0 は第1種変形ベッセル関数、 h_r はrms波高、 h_1, h_2 は隣合う2つの波高、 h_r は波高の設定値（ p_{22} は波高が h_r を連続して越える確率となる）、および κ は相関パラメータである。この理論では κ は重要なパラメータであり、波の連の統計量はその関数として与えられる。Kimuraは隣合う波高の相関係数 γ_h から次に示す関係式を用いて κ を求めている。

$$\gamma_h = \frac{E(\kappa) - (1 - \kappa^2) \frac{K(\kappa)}{2} - \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

ここに E, K はそれぞれ第1種および第2種完全楕円積分である。Battjes³⁾は式(2)の近似式として次式を与えている。

$$\gamma_h = \frac{\pi}{16 - 4\pi} \left\{ \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{16} + \frac{\kappa^6}{64} + \dots \right\} \quad (3)$$

しかし相関係数を求めるには波形記録が必要であり、また波浪統計の分野では伝統的にスペクトルと関連付けて研究が行われてきた経緯もある。したがって κ を相関係数から求めることに対しては反論があり、 κ をスペクトルから求める研究がなされている。Battjes³⁾は包絡波の振幅間の相関パラメータである次式の κ' を用いることを提案している。

$$\kappa' = \frac{1}{m_0} \sqrt{\left[\int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau_0 df \right]^2 + \left[\int_0^{\infty} S(f) \sin 2\pi f \tau_0 df \right]^2} \quad (4)$$

ここに m_0 はスペクトルの0次モーメント、 τ_0 は包絡波形上の2点間の時間差である。木村⁴⁾も式(1)~(3)の相関パラメータ κ をスペクトルと関連付ける研究を行っており、 κ を次のように与えている。

$$\kappa = \frac{1}{m_0} \sqrt{\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2} \quad (5)$$

ただし、

$$\mu_{13} = \int_0^{\infty} S(\sigma) \cos(\sigma - \bar{\sigma}) \tau d\tau \quad (6)$$

$$\mu_{14} = \int_0^{\infty} S(\sigma) \sin(\sigma - \bar{\sigma}) \tau d\tau$$

ここに、 τ は時間差パラメータである。

以上のように、相関パラメータ κ は隣合う波高の相関係数からも、またスペクトルからも独立に求められる。

ここで考慮しなければならないのは、相関係数、スペクトルともに推定誤差を含み、したがって κ も誤差を含んでいることである。本研究では相関係数から κ を求める方法と、スペクトルから κ を求める方法との精度を検討する。

3. 相関係数の推定誤差

3-1 概説

2. で述べたように、本研究の目的は相関パラメータ κ の算定法の精度を検討することにある。したがって、本来ならば κ に含まれる誤差をもって精度を議論しなければならない。しかし、相関係数 γ_h に含まれる誤差から式(2)あるいは(3)を用いて κ の誤差を求めることは困難であるため、次の2つの手順によりスペクトルを介して γ_h に含まれる誤差に置き換えて検討を行う。すなわち、まずスペクトルに含まれる誤差から式(6)を用いて μ_{13} 、 μ_{14} の期待値と分散を求め、さらに式(5)を用いて κ の期待値と分散を求める。続いて式(2)を用いて γ_h の期待値、分散を求める。この方法については3-3で述べる。いま1つの方法は、 κ の確率密度関数を求め、これと μ_{13} 、 μ_{14} の期待値と分散、さらに式(3)を用いて γ_h の期待値、分散を求める。この方法については3-4で述べる。一方、データから求める γ_h の分散は上の2つと独立に与える。これらの分散を相関係数 γ_h の計算が含む誤差とし、これらを比較して、相関パラメータ κ の算定法の精度を推測する。

3-2 積分変換の級数近似

式(6)に示したように、 μ_{13} はスペクトル $S(\sigma)$ のCOS変換、 μ_{14} はSIN変換である。これより直接、 μ_{13} 、 μ_{14} の誤差を推定することはできないので、ここではまず次のように無限級数で近似する。

$$\begin{aligned}\mu_{13} &\approx \sum_{i=1}^{\infty} S(i\Delta\sigma) \cos(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma \\ \mu_{14} &\approx \sum_{i=1}^{\infty} S(i\Delta\sigma) \sin(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma\end{aligned}\quad (7)$$

ここに、 $\Delta\sigma$ は角周波数の微小区間、 $S(i\Delta\sigma)$ はスペクトルの各角周波数成分である。 $S(i\Delta\sigma)$ は互いに独立な確率変数であるから、 μ_{13} と μ_{14} の期待値および分散は次式で与えられる。

$$E_X[\mu_{13}] \approx \sum_{i=1}^{\infty} E_X[S(i\Delta\sigma)] \cos(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma \quad (8)$$

$$E_X[\mu_{14}] \approx \sum_{i=1}^{\infty} E_X[S(i\Delta\sigma)] \sin(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma$$

$$V_{ar}[\mu_{13}] \approx \sum_{i=1}^{\infty} V_{ar}[S(i\Delta\sigma)] \cos^2(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma^2 \quad (9)$$

$$V_{ar}[\mu_{14}] \approx \sum_{i=1}^{\infty} V_{ar}[S(i\Delta\sigma)] \sin^2(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma^2$$

ここで、 $E_X[\]$ は期待値を、 $V_{ar}[\]$ は分散を表す。スペクトルの期待値は平滑化した推定スペクトルの値を、分散は正規化した分散である $1/n$ を用いる⁵⁾。ここに、 n は平滑化の等価自由度の1/2なる値である。したがって式(9)は次のようになる。

$$V_{ar}[\mu_{13}] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \cos^2(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma^2 \quad (9)'$$

$$V_{ar}[\mu_{14}] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \sin^2(i\Delta\sigma - \bar{\sigma}) \tau \cdot \Delta\sigma^2$$

3-3 誤差伝播則を用いた方法

式(6)に示したように、 κ は μ_{13} と μ_{14} の関数である。 κ の統計量を導く前にまず $Y=g(X_1, X_2)$ なる2変数関数 Y を考える。ここで X_1, X_2 は確率変数であり、いまその期待値を μ_1, μ_2 とする。 $g(X_1, X_2)$ を期待値のまわりにテーラー展開し、1次の項で打ち切ると Y の1次近似の期待値と分散が得られる⁶⁾。

$$\begin{aligned}E_X[Y] &\approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}) \\ \text{Var}(Y) &\approx \text{Var}(X_1) \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 + \text{Var}(X_2) \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \\ &+ 2 \text{Cov}[X_1, X_2] \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2}\end{aligned}\quad (10)$$

ここで、 $\text{Cov}[\]$ は共分散を表す。 X_1, X_2 が独立ならば $\text{Cov}[X_1, X_2]$ はゼロである。2次近似の分散は必ずみ度および先鋭度を要するため、ここでは1次近似でとどめる。

式(10)を用いて相関パラメータ κ の期待値および分散を求めると以下ようになる。

$$E_X[\kappa] \approx \frac{1}{m_0} \sqrt{E_X^2[\mu_{13}] + E_X^2[\mu_{14}]}$$

$$\text{Var}[\kappa] \approx \frac{\text{Var}[\mu_{13}] E_{\kappa}^2[\mu_{13}] + \text{Var}[\mu_{14}] E_{\kappa}^2[\mu_{14}]}{m_0^2 \{E_{\kappa}^2[\mu_{13}] + E_{\kappa}^2[\mu_{14}]\}} \quad (11)$$

つぎに、 $E_x[\kappa]$ 、 $\text{Var}[\kappa]$ を用いて相関係数の期待値および分散を計算する。式(2)に示したように、相関係数は κ の関数となっている。このような1変数関数の場合も2変数関数の場合と同様、期待値および分散の近似式を求めることができる。すなわち $Y=g(X)$ なる関数 Y を考えた場合、

$$\begin{aligned} E_x[Y] &\approx g(\mu_x) \\ \text{Var}[Y] &\approx \text{Var}[x] \left(\frac{dg}{dX} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

となる。これらの式を用いて相関係数の期待値、分散を求めるには、式(2)の κ による微分が必要である。第1種および第2種完全楕円積分の微分は次のようになる。

$$\frac{dE(\kappa)}{d\kappa} = \frac{E(\kappa) - K(\kappa)}{\kappa}, \quad \frac{dK(\kappa)}{d\kappa} = \frac{E(\kappa)}{\kappa(1-\kappa^2)} - \frac{K(\kappa)}{\kappa} \quad (13)$$

したがって、式(2)の1次導関数は以下のようにになる。

$$\frac{dY_h}{d\kappa} = \frac{2}{4-\pi\kappa} \{E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa)\} \quad (14)$$

式(12)、(14)を用いると相関係数の1次近似の期待値と分散はつぎのように与えられる。

$$E_x[Y_h] \approx \frac{4}{4-\pi} \left\{ \frac{E(\bar{\kappa}) - (1-\bar{\kappa}^2)K(\bar{\kappa})}{2} - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (15)$$

$$\text{Var}[Y_h] \approx \text{Var}[\kappa] \left(\frac{2}{4-\pi\kappa} \right)^2 \{E(\bar{\kappa}) - (1-\bar{\kappa}^2)K(\bar{\kappa})\}^2$$

ここに、 $\bar{\kappa} = E_x[\kappa]$ である。

3-4 相関パラメータの確率密度関数を用いた方法

式(5)に示したように相関パラメータ κ は

$$\kappa = (\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2)^{1/2} / m_0$$

で求められる。いま

$$R = (\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2)^{1/2}$$

とおくと、 R は正弦波と雑音の合成波の包絡線と式の形の上で一致する。 μ_{13} と μ_{14} が相等しい分散をもつ正規確率変数であれば、包絡線の確率密度関数を求める方法に準じて R の確率密度関数が求められる。 m_0 を定数とすれば κ の確率密度関数も求められ、これを用いて相関係数 γ_h の期待値および分散を求めることができる。以下この方法について述べる。

式(7)に中心極限定理を適用すると、 μ_{13} と μ_{14} はそれぞれ式(8)、(9)に示される期待値と分散をもつ正規確率変数となる。 μ_{13} の分散は COS の2乗和、 μ_{14} の分散は SIN の2乗和であるから両者は等しい。ここで $\mu_{13} = x$ 、 $\mu_{14} = y$ 、 $E_x[\mu_{13}] = \eta_1$ 、 $E_x[\mu_{14}] = \eta_2$ 、 $\text{Var}[\mu_{13}] = \text{Var}[\mu_{14}] = \psi_0$ とおくと、 x と y の結合確率密度関数 $p(x, y)$ は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{2\pi\psi_0} \exp \left\{ -\frac{(x-\eta_1)^2 + (y-\eta_2)^2}{2\psi_0} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\psi_0} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 - 2(x\eta_1 + y\eta_2) + \eta_1^2 + \eta_2^2}{2\psi_0} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

いま $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 、 $\eta = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2}$ とおき、さらに $x = R \cos \theta$ 、 $y = R \sin \theta$ 、 $\eta_1 = \eta \cos \phi$ 、 $\eta_2 = \eta \sin \phi$ とおくと、式(16)は次のようになる。

$$p(R \cos \theta, R \sin \theta) = \frac{1}{2\pi\psi_0} \exp \left\{ -\frac{R^2 - 2\eta R \cos(\theta - \phi) + \eta^2}{2\psi_0} \right\} \quad (17)$$

また、

$$p(x, y) dx dy = p(R \cos \theta, R \sin \theta) R dR d\theta \quad (18)$$

である。式(17)を式(18)の右辺に代入し0から 2π まで積分すると、2次の R の確率密度関数が得られる⁷⁾。

$$\begin{aligned} p(R) dR &= \int_0^{2\pi} p(R \cos \theta, R \sin \theta) dR d\theta \\ &= \frac{R}{2\pi\psi_0} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{R^2 - 2\eta R \cos(\theta - \phi) + \eta^2}{2\psi_0} \right\} dR d\theta \\ &= \frac{R}{\psi_0} \exp \left\{ -\frac{R^2 + \eta^2}{2\psi_0} \right\} I_0 \left(\frac{\eta R}{\psi_0} \right) dR \end{aligned}$$

したがって

$$p(R) = \frac{R}{\psi_0} \exp \left\{ -\frac{R^2 + \eta^2}{2\psi_0} \right\} I_0 \left(\frac{\eta R}{\psi_0} \right) \quad (19)$$

ここに、 I_0 は第1種変形ベッセル関数である。式(19)に変数変換を施すと κ の確率密度関数が求められる。

$$p(\kappa) = \frac{m_0^2 \kappa}{\psi_0} \exp \left\{ -\frac{m_0^2 \kappa^2 + \eta^2}{2\psi_0} \right\} I_0 \left(\frac{m_0 \kappa \eta}{\psi_0} \right) \quad (20)$$

つぎに、 $p(\kappa)$ を用いて相関係数 γ_h の期待値と分散を求める。式(2)に示したように相関係数は相関パラメータの関数($\gamma_h = g(\kappa)$)である。この場合、相関係数の期待値と分散は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 E_x[\gamma_h] &= \int_0^{\infty} g(\kappa) p(\kappa) d\kappa \\
 \text{Var}[\gamma_h] &= \int_0^{\infty} \{g(\kappa) - E_x[g(\kappa)]\}^2 p(\kappa) d\kappa \\
 &= \int_0^{\infty} g^2(\kappa) p(\kappa) d\kappa - E_x^2[g(\kappa)]
 \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、式(2)の右边を $g(\kappa)$ としてその近似式、式(3)を第3項で打ち切って用いる。

$$\gamma_h = g(\kappa) \approx \frac{\pi}{16-4\pi} \left\{ \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{16} + \frac{\kappa^6}{64} \right\} \quad (22)$$

式(21), (22)より

$$\begin{aligned}
 E_x[\gamma_h] &\approx \frac{\pi}{16-4\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{16} + \frac{\kappa^6}{64} \right\} p(\kappa) d\kappa \\
 &= \frac{\pi}{16-4\pi} \left\{ \overline{\kappa^2} + \frac{\overline{\kappa^4}}{16} + \frac{\overline{\kappa^6}}{64} \right\} \\
 \text{Var}[\gamma_h] &\approx \left(\frac{\pi}{16-4\pi} \right)^2 \int_0^{\infty} \left\{ \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{16} + \frac{\kappa^6}{64} \right\}^2 p(\kappa) d\kappa - E_x^2[\gamma_h] \\
 &= \left(\frac{\pi}{16-4\pi} \right)^2 \left\{ \overline{\kappa^4} + \frac{\overline{\kappa^6}}{8} \right\} - E_x^2[\gamma_h]
 \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、

$$\overline{\kappa^n} = E_x[\kappa^n] = \int_0^{\infty} \kappa^n p(\kappa) d\kappa$$

式(19)の場合、 R^n の期待値は

$$E_x[R^n] = \int_0^{\infty} R^n p(R) dR = \sqrt{2\psi_0} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(-\frac{n}{2}; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \quad (24)$$

で表される⁸⁾。ここに $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 ${}_1F_1(\cdot)$ は合流型超幾何関数である。式(24)に式(19)を代入し、 $R = m_0 \kappa$ とおくと以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 E_x[R^n] &= \int_0^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\psi_0} \exp\left(-\frac{R^2 + \eta^2}{2\psi_0}\right) I_0\left(\frac{\eta R}{\psi_0}\right) dR \\
 &= m_0^n \int_0^{\infty} \frac{\kappa^n m_0^2 \kappa}{\psi_0} \exp\left(-\frac{m_0^2 \kappa^2 + \eta^2}{2\psi_0}\right) I_0\left(\frac{\eta m_0 \kappa}{\psi_0}\right) d\kappa
 \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)と式(20)より

$$E_x[R^n] = m_0^n \int_0^{\infty} \kappa^n p(\kappa) d\kappa = m_0^n E_x[\kappa^n]$$

したがって

$$E_x[\kappa^n] = \frac{E_x[R^n]}{m_0^n} \quad (26)$$

式(24)と式(26)より以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
 E_x[\kappa^2] &= \frac{2}{m_0^2} \psi_0 {}_1F_1\left(-1; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \\
 E_x[\kappa^4] &= \frac{8}{m_0^4} \psi_0^2 {}_1F_1\left(-2; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \\
 E_x[\kappa^6] &= \frac{48}{m_0^6} \psi_0^3 {}_1F_1\left(-3; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right)
 \end{aligned} \quad (27)$$

式(23)と式(27)より、相関係数 γ_h の期待値と分散は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 E_x[\gamma_h] &\approx \frac{\pi}{16-4\pi} \left\{ \frac{2}{m_0^2} \psi_0 {}_1F_1\left(-1; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{m_0^4} \frac{\psi_0}{2} {}_1F_1\left(-2; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{m_0^6} \frac{3\psi_0}{4} {}_1F_1\left(-3; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \right\} \\
 \text{Var}[\gamma_h] &\approx \left(\frac{\pi}{16-4\pi} \right)^2 \left\{ \frac{8}{m_0^4} \psi_0^2 {}_1F_1\left(-2; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{6}{m_0^6} \psi_0 {}_1F_1\left(-3; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) \right\} - E_x^2[\gamma_h]
 \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)中の合流型超幾何関数 ${}_1F_1(\cdot)$ は次式で求められる。

$${}_1F_1(-a; c; -Z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{Z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{Z^2}{2!}$$

上式を用いると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
 {}_1F_1\left(-1; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) &= 1 + \frac{\eta^2}{2\psi_0} \\
 {}_1F_1\left(-2; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) &= 1 + \frac{\eta^2}{\psi_0} + \frac{1}{8} \frac{\eta^4}{\psi_0} \\
 {}_1F_1\left(-3; 1; -\frac{\eta^2}{2\psi_0}\right) &= 1 + \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{\psi_0} + \frac{3}{8} \frac{\eta^4}{\psi_0} + \frac{1}{48} \frac{\eta^6}{\psi_0}
 \end{aligned} \quad (29)$$

4. 数値シミュレーション

本研究では、3-3, 3-4で導いた式を用い、数値シミュレーションを行って相関係数の分散を計算した。

4-1 不規則波の数値シミュレーション

本研究では100波の規則波の重ね合わせで不規則波形をシミュレートする。すなわち不規則波形は次式で与えられる。

$$\eta(t) = \sum_{m=1}^{100} a_m \cos(2\pi f_m t + \epsilon_m) \quad (30)$$

ここに、 a_m , f_m , ϵ_m はそれぞれ m 成分波の振幅、周波数および初期位相角である。この式を用いる場合、成分波の振幅は与えられたスペクトル形より次式で定める。

$$a_m^2 = 2 S(f_m) \Delta f_m \quad (31)$$

ここに、 $S(f_m)$ は周波数 f におけるスペクトルの値、 Δf_m は $(f_m - f_{m-1})$ である。シミュレーションに用いるスペクトルは次式で与えられる。

$$S(f) = f^{-s} \exp\left\{\frac{S}{4}(1-f^{-4})\right\} \quad (32)$$

ここに、 s はスペクトルの形状パラメータである。スペクトルの値が 10^{-3} になる周波数でその上限と下限を定め、その間を100等分する。この分割幅を Δf とすると、 f_m は $m \Delta f$ で、 Δf_m は Δf で与えられる。しかしこの値を式(31), (32)に代入して求められる不規則波形は、ある間隔で同じ波形が繰り返すようになる。これを避けるため乱数を用いて $m \Delta f$ に $0 \sim 0.1 \Delta f$ の範囲の変動を付加し、この値を f_m とする。また Δf は $(f_m - f_{m-1})$ で、初期位相角 ϵ_m は乱数を $[0, 2\pi]$ に引き伸ばして与える。こうして求められる $\eta(t)$ を0.05秒間隔で1ケースにつき4096個求め、1つのスペクトル形につき10ケース求めた。スペクトル形は式(32)において s が5, 7, 10, 20の4種類について行った。

以上の方法で求めた不規則波形に、1ケース毎に高速フーリエ変換と平滑化操作を施し推定スペクトルを求めた。平滑化は方形ウィンドーを用い、等価自由度は50とした。

4-2 時間差パラメータ τ の算定法

式(8)および(9)'を計算するに際して、時間差パラメータ τ を決定する必要がある。Battjesら³⁾は式(4)の τ_0 として $(m_0/m_2)^{1/2}$ の値を用いている。 m_n は周波数スペクトル $S(f)$ の n 次モーメントである。狭帯域スペクトルの場合はこの値を用いてもよいが、広帯域スペクトルの

場合はデータをもとに計算した値と差のあることが知られている⁹⁾。木村⁴⁾は広帯域スペクトルに対しては次式で与えられる t_m を τ として用いることを提案している。

$$t_m = \int_0^{\infty} \int_{h^*}^{\infty} t p(h, t) dh dt \int_{h^*}^{\infty} p(h, t) dh \quad (33)$$

ここに、 $p(h, t)$ は波高と周期の結合確率密度関数、 $p(h)$ は波高の確率密度関数である。 $p(h, t)$ および $p(h)$ としてはLonguet-Higgins¹⁰⁾による次式を用いる。

$$p(h, t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{h^2}{\nu t^2} \frac{\exp\left[-h^2 \left\{1 + \frac{(1-t)^2}{\nu^2}\right\}\right]}{1 + \sqrt{1 + \nu^2}}$$

$$p(h) = \frac{4h \exp(-h^2) \int_{-\infty}^{h\nu} \exp(-\beta^2) d\beta}{\sqrt{\pi} (1 + \sqrt{1 + \nu^2})}$$

ここに、 $\nu^2 = m_0 m_2 / m_1^2 - 1$
 h は $(2m_0)^{1/2}$ で、 t はその平均値で正規化した波高および周期

また、式(33)の h_* の値として $p(h)$ から求めた有義波高を用いる。

4-3 相関係数の分散

隣合う波高の相関係数は次式で与えられる。

$$r_h = \frac{\sum_{i=1}^n (h_{1i} - \bar{h}_1)(h_{2i} - \bar{h}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (h_{1i} - \bar{h}_1)^2 \sum_{i=1}^n (h_{2i} - \bar{h}_2)^2}} \quad (34)$$

ここに、 h_1, h_2 は隣合う2つの波高であり、 \bar{h}_1, \bar{h}_2 はその平均値である。標本数 n が大きく、しかも相関があまり高くなければ相関係数は真値 r のまわりに $(1-r^2)^2/(n-1)$ という分散をもって正規型に分布する¹¹⁾。したがって、観測された r_h の値には分散

$$(1-r_h^2)^2/(n-1) \quad (35)$$

を付与する。

4-4 計算結果

図-1および図-2に計算結果を示す。これらの図において○は相関パラメータ κ の確率密度関数を用いて推定した相関係数の分散、×は誤差伝播則を用いて推定した相関係数の分散、●は不規則波形から式(35)で求めた相関係数の分散を示したものである。また、図中の実線および破線で示した曲線は式(32)で表される理論スペクトルを用いて求めたものである。この図より、○および

×で示される、スペクトル形状から推定した相関係数の分散は不規則波形から求めた相関係数の分散よりもかなり大きいことがわかる。これより、 ϵ の算定法としては相関係数から求めるほうがより高精度であることが推測される。

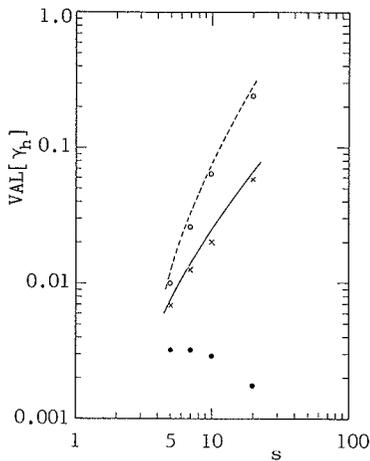


図-1 スペクトルの形状パラメータと相関係数

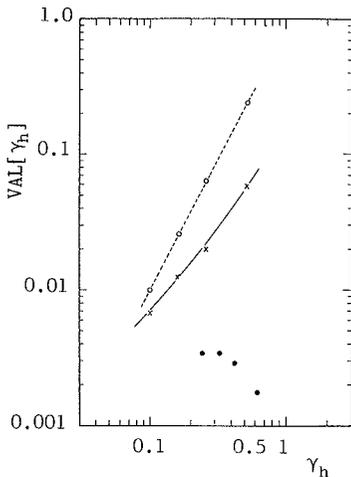


図-2 相関係数とその分散

参考文献

- 1) Goda, Y. : Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rept. of Port and Harbour Res. Inst. Vol.9. No.3, pp.3-57, 1970
- 2) Kimura, A. : Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th ICCE, pp.2955-2973, 1980
- 3) Battjes, J.A. and G.Ph.van Vledder : Verification of Kimura's theory for wave group statistics, Proc. 19th ICCE, pp.642-648, 1984
- 4) 木村 晃 : 不規則波浪の隣合う波高の相関性について, 第34回海岸工学講演会論文集, pp.136-140, 1987
- 5) 日野幹夫 : スペクトル解析, 朝倉書店, p.174, 1977
- 6) Ang, A.H-S and W.H.Tang (伊藤学, 亀田弘行訳) : 土木・建築のための確率・統計の基礎, 丸善, pp.189-198, 1977
- 7) Papoulis, A. (平田寛二訳) : 工学のための応用確率論・基礎編, 東海大学出版会, pp.194
- 8) Rice, S.O. (宮脇一男他訳) : 雑音理論, 電気書院, pp.111, 170, 1955
- 9) 合田良実・永井康平 : 波浪の統計的性質に関する調査・解析, 港湾技術研究所報告, 第13巻第1号, pp.3-37, 1974
- 10) Longuet-Higgins, M.S. : On the joint distribution of wave period and amplitudes in a random wave field, Proc. Roy. Soc. London, A389, pp.241-258, 1983
- 11) Fisher, R.A. (近藤健児, 鍋谷清治訳) : 研究者のための統計的方法, 森北出版, pp.151-152

