

## 水晶振動子の等価回路

戒谷 圭介・宮野 忠文・米田 勲生

電気電子工学科

(1990年9月1日受理)

### The Equivalent Circuit of the Quartz Resonator

by

Keisuke EBISUTANI, Tadafumi MIYANO and Isao YONEDA

Department of Electrical and Electronic Engineering

(Received September 1, 1990)

One of the authors proposed a new measurement method of high  $Q$  in oscillating system by using the interference of laser light between direct and reflected rays from a surface of oscillating system and could be shown experimentally with quartz resonator as an oscillating system.

On investigating this measurement method, it was found that the equivalent circuit parameters of quartz resonator at the thickness vibration mode could only be obtained from physical constants and sizes of quartz resonator used in the experiment.

It is known that the equivalent circuit of quartz resonator may be represented by the series resonant circuit, according to the vibration effect, in parallel with the static capacity of the resonator.

In such equivalent circuit, it is also known that each value of the circuit parameters, that is, series inductor,  $L$ , series capacitor,  $C$ , and parallel capacitor,  $C_a$ , may be determined only from physical constants and from such resonator sizes.

Unfortunately, since the value of the series resistor  $R$  is not well-defined theoretically, the actual value of such a resistor has generally been derived from an experimental result of attenuation on vibration.

In this paper, utilizing the complex elastic constant of the resonator crystal, it is possible to represent  $L$ ,  $C$ , and  $R$  of an equivalent circuit respectively, from the given physical constants and sizes of quartz resonator.

As a result, it can be seen clearly that the value of series resistor  $R$  properly corresponds to the normalized factor defined by the ratio of imaginary to real parts of the elastic constant and such normalized factor may be easily obtained by an experimental result of attenuation constant of the quartz crystal on acoustic transmission.

**Key words :** quartz resonator, equivalent circuit, thickness vibration mode, complex elastic constant, attenuation constant, acoustic transmission

1 はじめに

我々は、以前レーザ光を用いて振動系における高いQの値を測定する新しい方法を提案し、その等価回路定数についての研究を行ってきた。振動系として、厚み振動する水晶振動子を用いて実験を行なった。すなわち、共振周波数近傍で振幅変調された電圧によって厚み振動する水晶振動子面からの反射光とレーザ光からの直接光を混合し検波すれば、あたかも振幅変調波のような検波信号が得られ、その見掛けの変調度から、水晶振動子のQが求められる[1]。この実験結果を説明する上で、水晶振動子の等価回路定数を物理定数、物理的寸法で決定しておく必要が生じてきた。

水晶振動子は振動モード一定の場合、図1の等価回路で示されることがよく知られている。図1中、 $C_d$ は水晶振動子の静電容量、 $L_m, C_m, R_m$ はそれぞれ圧電効果による機械的振動を電気的振動に変換した場合の等価インダクタンス、等価キャパシタンス、および等価抵抗を表している。これらの内、等価インダクタンス、等価キャパシタンスは水晶振動子の物理定数、物理的寸法から決定できるが、等価抵抗についての解析は十分でなく、等価抵抗の値は実験によって決定しなければならない。

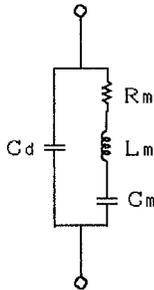


Fig. 1 An equivalent circuit of the quartz resonator

本文では、複素弾性定数を導入し、等価抵抗の値を実験から求めるのに便利な式を導いた。この結果、水晶振動子の物理定数、物理的寸法から振動子の等価抵抗、等価インダクタンス、等価キャパシタンスの値が求られ、等価抵抗も水晶中の音波の減衰定数、水晶振動子の物理定数、および物理的寸法から導かれるので、損失の評価に便利であると考えられる。

2 厚み振動子の諸定数

一般に、圧電結晶においては、弾性係数、誘電率、および圧電定数は方向によりその値が異なる。したがって、それぞれの方向に対し、テンソル量を用いて表すことができる。圧電効果を記述する圧電基本式は次式で表すことができる[2]。

$$\begin{aligned} T_m &= c_{mn}^E S_n - e_{jm} E_j \\ D_i &= e_{in} S_n + \epsilon_{ij}^S E_j \end{aligned} \quad \dots (2-1)$$

ここで、

- $T_m$  : 機械的応力
- $S_n$  : 機械的ひずみ
- $E_j$  : 電界
- $c_{mn}^E$  : 一定電界時における弾性係数
- $e_{jm}$  : 圧電応力定数
- $\epsilon_{ij}^S$  : 一定ひずみにおける誘電率
- $D_i$  : 電束密度

$m, n$ はクライマン則表示を用いて、 $m, n=1, 2, \dots, 6$ とされている。また、 $i, j$ は座標軸にしたがって、 $i, j=1, 2, 3$ とされている。

式(2-1)を行列の形で書くと、次の様に表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{16} & -e_{11} & -e_{12} & -e_{13} \\ c_{21} & \dots & c_{26} & -e_{21} & -e_{22} & -e_{23} \\ c_{31} & \dots & c_{36} & -e_{31} & -e_{32} & -e_{33} \\ c_{41} & \dots & c_{46} & -e_{41} & -e_{42} & -e_{43} \\ c_{51} & \dots & c_{56} & -e_{51} & -e_{52} & -e_{53} \\ c_{61} & \dots & c_{66} & -e_{61} & -e_{62} & -e_{63} \\ \hline e_{11} & \dots & e_{16} & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ e_{21} & \dots & e_{26} & \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ e_{31} & \dots & e_{36} & \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad \dots (2-2)$$

式(2-2)中、 $c_{mn}^E, \epsilon_{ij}^S$ の上付添字は簡単のため省略している。

水晶は、三方晶系(3,2)に属し、図2に示されるテンソル成分を持っている。

図2のテンソル成分を式(2-2)に代入し、 $x_1$ 方向に電界をかけた場合、 $x_1$ 方向の厚み振動に対する圧電方程式を求めると式(2-3)となる。

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}^E S_1 - e_{11}^E E_1 \\ D_1 &= e_{11}^S S_1 + \epsilon_{11}^S E_1 \end{aligned} \quad \dots (2-3)$$

ここで、

$$c_{11}' = c_{11} + \frac{1}{\Delta} \{ c_{44} \{ c_{13}c_{31} (c_{12} + c_{21} - c_{11}) - c_{12}c_{21}c_{33} \} + c_{14}c_{41} \{ 4c_{13}c_{31} - c_{33} (c_{11} + c_{21}) \} \} \quad \dots (2-4)$$

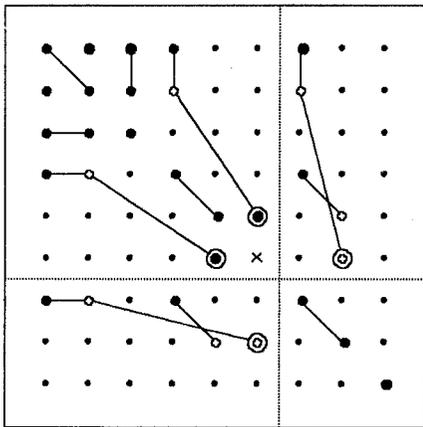
$$e_{11}' = e_{11} - \frac{1}{\Delta} \{ e_{11} \{ c_{44} (c_{13}c_{31} - c_{12}c_{33}) - c_{14}c_{33}c_{41} \} + e_{41}c_{14} \{ c_{33} (c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}c_{31} \} \} \quad \dots (2-5)$$

$$\epsilon_{11}' = \epsilon_{11} - \frac{1}{\Delta} \{ c_{33}e_{11} (c_{44}e_{11} - c_{14}e_{41}) + e_{14} \{ e_{41} (c_{33}c_{11} - c_{13}c_{31}) - c_{33}c_{41}e_{11} \} \} \quad \dots (2-6)$$

また、

$$\Delta = c_{44} (c_{11}c_{33} - c_{23}^2) - c_{14}^2 c_{33}$$

とおいている。



- : zero component    ● : non-zero component
- : equal components
- : components numerically equal, but opposite in sign
- ⊙ : a component equal to twice the heavy dot component to which it is joined
- ⊗ : a component equal to minus 2 times the heavy dot component to which it is joined
- × :  $(c_{11} - c_{12}) / 2 = c_{66}$

Fig.2 The trigonal tensor component

### 3 複素弾性係数を用いた水晶振動子の等価回路定数

図3のような真空中で振動するX-cut厚み振動子を考える。座標原点は振動子の中心にとっており、かつ $x_1$ 軸は振動子のX-cut面に垂直に選んでいる。振動子の両X-cut面に電極を蒸着し、電極間に厚み振動子の共振周波数を持つ電界を加えることにする。

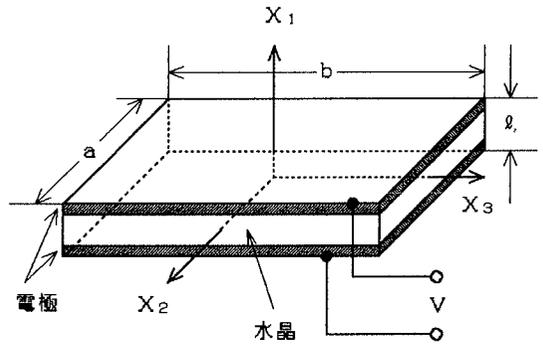


Fig.3 X-cut quartz

この場合、圧電方程式は式(2-3)の諸定数 $e_{11}'$ ,  $e_{11}^s$ ,  $c_{11}^{E'}$ をあらためて $e_{11}$ ,  $e_{11}^s$ ,  $c_{11}^E$ とおきかえると、次式となる。

$$T_1 = c_{11}^E S_1 - e_{11} E_1 \quad \dots (3-1)$$

$$D_1 = e_{11} S_1 + e_{11}^s E_1 \quad \dots (3-2)$$

ここで、各変数および係数は $x_1$ 軸に関するものである。

- $T_1$  ; 応力
- $S_1$  ; 機械的歪
- $E_1$  ; 電界
- $D_1$  ; 電束密度
- $c_{11}^E$  ; 電界一定時の弾性係数
- $e_{11}^s$  ; 歪一定時の誘電率
- $e_{11}$  ; 圧電応力係数

いま、 $c_{11}^E$ を複素弾性係数と考え、

$$c_{11}^E = c_{11}^{E'} + j c_{11}^{E''}$$

とおくと、式(3-2)より電界 $E_1$ は

$$E_1 = \frac{1}{e_{11}^s} (D_1 - e_{11} S_1) \quad \dots (3-3)$$

上式を式(3-1)に代入すると、応力 $T_1$ は次式で表わされる。

$$T_1 = (c_{11}^{E'} + \frac{e_{11}^2}{e_{11}^s}) S_1 - \frac{e_{11}}{e_{11}^s} D_1 = c_{11}^E S_1 - \frac{e_{11}}{e_{11}^s} D_1 \quad \dots (3-4)$$

ここで、 $c_{11}^D$ は電束密度一定の場合の複素弾性係数で、

$$c_{11}^D = c_{11}^E + \frac{e_{11}^2}{\epsilon_{11}^S} \equiv c_{11}^{D'} + j c_{11}^{D''} \quad \dots (3-5)$$

とおいている。

この複素弾性係数 $c_{11}^D$ を用いれば、式(3-4)は

$$T_1 = (c_{11}^{D'} + j c_{11}^{D''}) S_1 - \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} D_1 \quad \dots (3-6)$$

厚み振動する水晶振動子に対する運動方程式は、 $x_1$ 方向の変位を $u_1$ 、水晶振動子の密度を $\rho$ とおけば、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}$$

上式の $T_1$ に式(3-6)を代入し、 $S_1 = \partial u_1 / \partial x_1$ の関係を代入すれば、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (c_{11}^{D'} + j c_{11}^{D''}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} \frac{\partial D_1}{\partial x_1} \quad \dots (3-7)$$

準静的な場合を考えれば、 $\partial D_1 / \partial x_1 = 0$ とおけるので、運動方程式(3-7)は

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (c_{11}^{D'} + j c_{11}^{D''}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad \dots (3-8)$$

と書きかえられる。

水晶振動子は厚み振動するので、振動子のX-cut面を自由端面と考えれば、振動子の変位 $u_1$ は次式のように仮定することができる。

$$u_1 = U_1 \exp(j\omega t) \sinh(\gamma x_1) \quad \dots (3-9)$$

ここで、 $U_1$ は変位の振幅、 $\gamma$ は $x_1$ 方向の伝搬定数、 $\omega$ は振動子の印加電圧の角周波数である。

式(3-9)を式(3-8)に代入すると伝搬定数 $\gamma$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega \left\{ \frac{\rho}{c_{11}^{D'}} \frac{1}{(1+j\delta)} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{j\omega}{v} (1+j\delta)^{-1/2} \quad \dots (3-10) \end{aligned}$$

$\delta \ll 1$ とおくと、

$$\gamma \doteq \frac{j\omega}{v} (1 - j \frac{\delta}{2}) \quad \dots (3-11)$$

上式中、 $\delta$ は複素弾性係数の虚数部を実数部で正規化した係数、 $v$ は振動子中の音速であり、それぞれ次式の様においている。

$$\delta = c_{11}^{D''} / c_{11}^{D'} \quad \dots (3-12)$$

$$v = (c_{11}^{D'} / \rho)^{1/2} \quad \dots (3-13)$$

また式(3-2)より

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} = e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + e_{11}^S \frac{\partial E_1}{\partial x_1} \quad \dots (3-14)$$

ここで、 $\phi$ をポテンシャルとおけば、電界は $\phi$ のスカラポテンシャルで表わされ、 $E_1 = -\partial \phi / \partial x_1$ とおける。従って、準静的な場合を考えれば、式(3-14)は次のように書きかえられる。

$$e_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0 \quad \dots (3-15)$$

式(3-15)を積分すれば、ポテンシャル $\phi$ は

$$\phi = \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} u_1 + L_1 x_1 + L_2 \quad \dots (3-16)$$

ここで、 $L_1, L_2$ は積分定数とする。

この積分定数は境界条件から次の様に定めることができる。 $x_1 \equiv \pm \ell / 2$ 、すなわち振動子両端面におけるポテンシャルを $\pm \phi_0$ とおくと、式(3-16)より

$$\phi_0 = \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} u_1 + L_1 (\ell / 2) + L_2 \quad \dots (3-17)$$

$$-\phi_0 = -\frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} u_1 + L_1 (-\ell / 2) + L_2 \quad \dots (3-18)$$

式(3-17)、(3-18)から $L_1, L_2$ を求めると、

$$L_1 = \frac{V}{\ell} \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} - \frac{2U_1}{\ell} \sinh(\gamma \ell / 2) \quad \dots (3-19)$$

$$L_2 = 0 \quad \dots (3-20)$$

ここで、 $V$ を振動子面間の電位差とすれば、 $V = 2\phi_0$ とおけるので、振動子内のポテンシャル $\phi$ は、式(3-16)、(3-19)、(3-20)より次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} U_1 \sinh(\gamma x_1) \\ &+ \left\{ \frac{V}{\ell} - \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}^S} \frac{2U_1}{\ell} \sinh(\gamma \ell / 2) \right\} x_1 \quad \dots (3-21) \end{aligned}$$

電束密度 $D_1$ は、式(3-2)、(3-9)、(3-23)より

$$\begin{aligned} D_1 &= e_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - e_{11}^S \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ &= -e_{11}^S \frac{V}{\ell} + e_{11} \frac{2U_1}{\ell} \sinh(\gamma \ell / 2) \quad \dots (3-22) \end{aligned}$$

振動子両端面は自由端と考えているので、 $x_1 = \pm \ell / 2$ における応力 $T_1 = 0$ とおけ、式(3-4)より次式となる。

$$\gamma U_1 \cosh(\gamma \ell / 2) = \frac{e_{11}}{c_{11}^{D'} e_{11}^S (1+j\delta)} D_1 \quad \dots (3-23)$$

式(3-22)、(3-23)を書き直せば次式となる。

$$D_1 - e_{11} \frac{2U_1}{\ell} \sinh(\gamma \ell / 2) = -e_{11}^S \frac{V}{\ell} \quad \dots (3-24)$$

$$D_1 - \frac{c_{11}^{D'} e_{11}^S (1+j\delta)}{e_{11}} \gamma U_1 \cosh(\gamma \ell / 2) = 0 \quad \dots (3-25)$$

式(3-24), (3-25)から振動子の変位振幅 $U_1$ を求めれば、次のような式が導かれる。

$$U_1 = \frac{-e_{11}^s V / l}{\frac{e_{11}^s c_{11}^{D'}}{e_{11}} \gamma (1+j\delta) \cosh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) - \frac{2e_{11}}{l} \sinh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}$$

電気機械変換係数 $k_{11} = e_{11} / (e_{11}^s c_{11}^{D'})^{1/2}$ を用いて、上式を整理すると、

$$U_1 = \frac{-V}{\gamma l \cosh(\gamma l / 2)} \frac{e_{11}}{c_{11}^{D'} (1+j\delta)} \frac{1}{1 - \frac{k_{11}^2 \tanh(\gamma l / 2)}{(1+j\delta)(\gamma l / 2)}} \quad \dots (3-26)$$

電源から水晶振動子に流れる電流 $I_1$ は、振動子内を流れる変位電流と等しくなり、 $I_1 = \partial D_1 / \partial t$ で与えられる。図3のように座標軸をとった場合、電流 $I_1$ は振動子の面積に関して面積分すれば、式(3-22)より次式で表わすことができる。

$$I_1 = j\omega \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} D_1 dy dz = j\omega \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \frac{2e_{11} U_1}{l} \sinh\left(\frac{\gamma y}{2}\right) e_{11}^s \frac{V}{l} \right\} dy dz$$

上式に式(3-26)を代入すると、次の式が得られる。

$$I_1 = j\omega \frac{e_{11}^s ab}{l} \frac{(-V) + j\omega \frac{2e_{11} ab}{l} \frac{1}{(\gamma l) \cosh(\gamma l / 2)}}{c_{11}^{D'} (1+j\delta)} \frac{\sinh(\gamma l / 2)}{1 - \frac{k_{11}^2 \tanh(\gamma l / 2)}{(1+j\delta)(\gamma l / 2)}} \quad \dots (3-27)$$

式(3-27)中、 $e_{11}^s ab / l$ は振動子の静電容量 $C_d$ を表わしているの、 $C_d = e_{11}^s ab / l$ とおくと、上式は次式となる。

$$I_1 = j\omega C_d (-V) + j\omega \frac{2e_{11} ab}{l^2} \frac{(-V) \sinh(\gamma l / 2)}{c_{11}^{D'} (1+j\delta)} \frac{1}{1 - \frac{k_{11}^2 \tanh(\gamma l / 2)}{(1+j\delta)(\gamma l / 2)}} \quad \dots (3-28)$$

式(3-28)中、第一項目は振動子の静電容量を流れる電流、第二項目は圧電効果による電流を表していると考えられる。従って、水晶振動子の等価入力アドミタンス $Y$ は、次式で定義することができる。

$$Y = I_1 / (-V) = j\omega C_d + j\omega C_d k_{11}^2 \frac{1}{(1+j\delta)(\gamma l / 2) \coth(\gamma l / 2) - k_{11}^2}$$

$$= j\omega C_d + j\omega C_d \frac{1}{-1 + \frac{1+j\delta}{k_{11}^2} (\gamma l / 2) \coth(\gamma l / 2)} = j\omega C_d + \frac{1}{\frac{1}{-j\omega C_d} + \frac{1}{j\omega C_d} \frac{k_{11}^2 \tanh(\gamma l / 2)}{1+j\delta} \frac{1}{\gamma l / 2}} = Y_d + Y_m \quad \dots (3-29)$$

ここで、 $Y_d, Y_m', Y_m$ を以下の様においている。

$$Y_d = j\omega C_d$$

$$Y_m' = j\omega C_d \frac{k_{11}^2 \tanh(\gamma l / 2)}{1+j\delta} \frac{1}{\gamma l / 2} \quad \dots (3-30)$$

$$Y_m = Y_d + \frac{1}{\frac{1}{-Y_d} + \frac{1}{Y_m'}} \quad \dots (3-31)$$

$Y_d$ は水晶振動子の静電容量によるサセプタンス、 $Y_m$ は振動子の圧電効果に伴うサセプタンスで、水晶振動子の全アドミタンス $Y$ は $Y_d$ と $Y_m$ の並列接続となる等価回路で表わすことができる。一方、式(3-31)において $Y_m$ は $-Y_d$ と $Y_m'$ の各アドミタンスの直列接続を示しているの、水晶振動子の等価回路は図4(a)で表わすことができる。

水晶振動子は直列共振周波数 $\omega_0$ 付近では、 $|Y_m'| \ll |-Y_d|$ と考えられるので、式(3-29)は図4(b)とおける。

$$Y \approx Y_d + Y_m' \quad \dots (3-32)$$

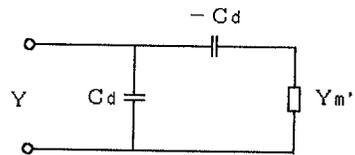


Fig. 4 (a)

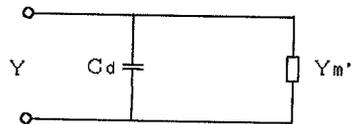


Fig. 4 (b)

An equivalent circuit of the quartz resonator at the vibration mode thickness

従って、水晶振動子の等価回路定数は式(3-30)の $Y_m'$ から以下の様に求めることができる。

式(3-30)中、 $\gamma \ell / 2$ は式(3-11)および

$$\Delta \equiv \frac{\omega_0 \ell}{2v} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (\text{但し、}\omega \doteq \omega_0) \quad \dots(3-33)$$

を用いて、

$$\frac{\gamma \ell}{2} = j \left( \frac{\omega_0}{2v} - \Delta \right) + \frac{\omega \ell \delta}{4v} \quad \dots(3-34)$$

とおき、 $\omega_0 v / \ell = \pi$ の条件を用いて、式(3-34)を次式に書き直しておく。

$$\frac{\gamma \ell}{2} = j \left( \frac{\pi}{2} - \Delta \right) + \frac{\pi}{4} \delta \quad \dots(3-35)$$

また、式(3-30)中、 $\tanh(\gamma \ell / 2)$ を式(3-35)を用いて、次式に書き直しておく。

$$\tanh(\gamma \ell / 2) = \frac{j + j\Delta(\pi \delta / 4)}{\Delta + j(\pi \delta / 4)} \doteq \frac{j}{\Delta + j(\pi \delta / 4)} \quad \dots(3-36)$$

式(3-35)、(3-36)を用いて $Y_m'$ を求めれば、次式で与えることができる。

$$Y_m' = j\omega C_d \frac{k_{11}^2}{1 + j\delta} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\Delta + j\pi \delta / 4} \quad \dots(3-37)$$

便利のため、アドミタンス $Y_m'$ をインピーダンス $Z_m'$ で表わすと、

$$\begin{aligned} Z_m' &= \frac{1}{Y_m'} = \frac{1}{j\omega C_d} \frac{1 + j\delta}{k_{11}^2} \frac{\pi}{2} (\Delta + j\pi \delta / 4) \\ &= \frac{\pi}{2k_{11}^2 \omega C_d} \left( \frac{\pi \delta}{4} - j\Delta \right) \quad \dots(3-38) \end{aligned}$$

上式から、このインピーダンス $Z_m'$ の実数部分は振動子の等価抵抗 $R_m'$ 、虚数部分は振動子の等価リアクタンス $X_m'$ を表わしており、これらが直列接続になっていることがわかる。すなわち、

$$Z_m' = R_m' + jX_m' \quad \dots(3-39)$$

式(3-38)、(3-39)を見れば、等価抵抗 $R_m'$ は次式のように表わすことができる。

$$R_m' = \frac{\pi^2 \delta}{8k_{11}^2 \omega C_d} \doteq \frac{\pi^2 \delta}{8k_{11}^2 \omega_0 C_d} = \frac{\pi \delta \ell}{8k_{11}^2 v C_d} \quad \dots(3-40)$$

上式から、水晶振動子の等価直列抵抗 $R_m'$ は複素弾性係数の虚数部を実数部で正規化した $\delta$ に比例しており、水晶振動子の損失は複素弾性係数の虚数部から生じることがわかる。

リアクタンス部 $X_m'$ は式(3-38)の虚数部に式(3-33)を代入すれば、

$$X_m' = - \frac{\pi \Delta}{2k_{11}^2 \omega C_d}$$

$$\begin{aligned} &\doteq \frac{\pi}{4k_{11}^2 C_d v} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ &\equiv \omega_0 L_m' \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \dots(3-41) \end{aligned}$$

式(3-41)から等価回路のインダクタンス $L_m'$ 、キャパシタンス $C_m'$ は次の様に表わすことができる。

$$L_m' = \frac{\pi \ell}{4k_{11}^2 C_d v \omega_0} = \frac{\ell^2}{4k_{11}^2 C_d v^2} \quad \dots(3-42)$$

$$C_m' = \frac{1}{\omega_0^2 L_m'} = \frac{4k_{11}^2 C_d}{\pi^2} \quad \dots(3-43)$$

式(3-42)、(3-43)は $L_m'$ 、 $C_m'$ は水晶振動子の直列共振周波数 $\omega_0$ における水晶振動子の等価インダクタンス、キャパシタンスの大きさを決定する式で、水晶の物理定数及び物理的寸法で決定できることがわかる。

等価抵抗 $R_m'$ の値を求めるには、 $\delta$ の値を決定する必要がある。以下、実験的に決定する方法について考察する。

一般に、結晶中を $x_1$ 方向に伝搬する音波の変位 $u(x_1, t)$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= U_0 \exp\{j(\omega t - kx_1)\} \\ &= U_0 \exp\{j(\omega t - \omega x_1 / v)\} \quad \dots(3-44) \end{aligned}$$

ここで、 $U_0$ は変位の振幅、 $\omega$ は角周波数、 $k$ は結晶中の伝搬定数である。いま、結晶中の音速を $v$ とし、複素数で表わされるものとすれば、

$$\begin{aligned} v &= v_r + jv_i \\ &= v_r \left(1 + j \frac{v_i}{v_r}\right) \quad (v_r \gg v_i) \quad \dots(3-45) \end{aligned}$$

結晶中の音波の伝搬定数 $k$ は上式を用いて、次式と書き直すことができる。

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{v_r \left(1 + j \frac{v_i}{v_r}\right)} \\ &\doteq \frac{\omega}{v_r} \left(1 - j \frac{v_i}{v_r}\right) \equiv \alpha + j\beta \quad \dots(3-46) \end{aligned}$$

$\alpha$ は結晶中の音波の減衰定数、 $\beta$ は位相定数である。

上式を式(3-44)に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= U_0 \exp\{j(\omega t - \omega x_1 / v_r)\} \exp(-\omega v_i x_1 / v_r^2) \\ &= U_0 \exp(-\alpha x_1) \exp\{j(\omega t - \beta x_1)\} \quad \dots(3-47) \end{aligned}$$

式(3-47)から、減衰定数 $\alpha$ 、位相定数 $\beta$ は次式の様に表わすことができる。

$$\alpha = \omega \frac{v_i}{v_r^2} \quad \dots(3-48)$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_r} \quad \dots(3-49)$$

複素弾性係数  $c_{11}^p = c_{11}^{p'} + jc_{11}^{p''}$  を持つ結晶中の音波の位相速度は式(3-13)を考慮すれば、次の様における。

$$\begin{aligned} v &= (c_{11}^p / \rho)^{1/2} \\ &= \{(c_{11}^{p'} + jc_{11}^{p''}) / \rho\}^{1/2} \\ &= (c_{11}^{p'} / \rho)^{1/2} (1 + j\delta)^{1/2} \\ &\doteq v_r (1 + j\delta/2) \\ &\equiv v_r + jv_i \end{aligned} \quad \dots (3-50)$$

従って、式(3-48)、(3-50)より

$$\delta = \frac{2v_i}{v_r} = \frac{2\alpha v_r}{\omega} \doteq \frac{2\alpha v}{\omega} \quad \dots (3-51)$$

式(3-51)中、 $\alpha$ は結晶中の音波の減衰定数であるから、この値を測定すれば、 $\delta$ が決定できることを表わしている。水晶結晶に対する $\alpha$ の値については、結晶中の転移によるもの、熱弾性効果によるものについては理論計算が行なわれている[3]。その他、振動子端面における気体、及び支持の影響について種々検討がされているが、水晶振動子の損失の決定には実験によらなければならない様に思われる[4]。

#### 4. まとめ

複素弾性定数を用いて、水晶振動子の厚み振動に対する等価回路定数を求めることができた。すなわち、等価インダクタンス、等価キャパシタンスは式(3-42)、(3-43)で示されるように、物理定数、物理的寸法から決定されることがわかった。

また、式(3-40)から、等価抵抗は水晶振動子の複素弾性係数の虚数部を実数部で正規化した係数 $\delta$ 及び物理的寸法、物理定数で決定されることがわかった。

この $\delta$ の値は水晶中の音波の減衰率 $\alpha$ を実測するか、あるいは音波減衰についての機構を理論的に解析することによって決定することができる。以上、水晶振動子の等価回路定数は物理定数、物理的寸法から求められることを明らかにした。等価抵抗、等価インダクタンス、等価キャパシタンスの式を改めて書けば、

$$R_m' = \frac{\pi \delta l}{8k_{11}^2 v C_d} \quad \dots (4-1)$$

等価インダクタンス  $L_m'$

$$L_m' = \frac{l^2}{4k_{11}^2 C_d v^2} \quad \dots (4-2)$$

等価キャパシタンス  $C_m'$

$$C_m' = \frac{4k_{11}^2 C_d}{\pi^2} \quad \dots (4-3)$$

従って、水晶振動子の直列共振時における $Q$ は

$$Q = \frac{\omega_0 L_m'}{R_m'} = \frac{2\omega_0}{\pi \delta} \quad \dots (4-4)$$

として求めることができる。

式(4-2)、(4-3)を計算した結果、直列共振周波数の実測値とよく一致することがわかった。

#### 謝辞

本研究を進めるにあたり、協力して頂いた本学科卒業生、井上雅彦氏(三菱農機欄)、桂木保氏(欄ダイフク)、石川忠義氏(欄シバソク)、及び大学院卒業生、中川久暢氏(トヨタ自動車欄)の各位に御礼申し上げます。

#### 参考文献

- [1] K. Ebisutani and M. Contreras, Trans. of IECE of Japan, Vol. E68, No. 12, Dec., 1985
- [2] J. F. Nye, "Physical Properties of Crystals" Oxford Univ. Press. (1979)
- [3] R. T. Beyer and S. V. LETCHER, "Physical Ultrasonics" Academic Press. (1969)
- [4] G. Kossoff, IEEE, Trans. on Sonic and Ultrasonics, Vol. SU-13, No. 1, Mar., 1966

