# 費用割り振り問題の理論的考察
# —費用関数の構造に着目して—

岡田　憲夫

社会開発システム工学科

(1990年9月1日受理)

# A Theoretical Study of Cost Allocation Methods
# —With Reference to Cost Function Properties

by

Norio OKADA

Department of Social Systems Engineering

(Received September 1, 1990)

This paper addresses to the need for theoretical examination of conventional cost allocation methods which have been used in practice, especially in the field of multi-purpose public enterprise. The paper bases its analytical methodology on game theory and economics, and attempts to develop some linkages between what has been intuitively or implicitly assumed to be valid in the conventional cost allocation methods and what could be theoretically sound from the viewpoint of fairness and equity as defined by the theories of games and economics.

Specifically the paper focuses on the theoretical properties of cost functions which characterize cost allocation games. As a result several useful theoretical implications have been developed for, e.g., notions of separable and nonseparable costs which are key notions to the conventional cost allocation methods.

Key words： cost allocation, game theory, theoretical study

# 1　はじめに

公共事業は多くの場合、複数の主体を巻き込む形で行なわれているが、その際の主要なコンフリクト調整問題の一つが、共同事業の費用割り振り問題である。共同の事業の中には専用費などのように特定の主体にその負担を課すべき明確な理由が示せる場合もあるが、その他の共通費用を各主体にいかに割り当てるべきかが必ずしも理論的に明らかにされていないことも多い。この種の問題はつまるところ、各主体の当該事業の費用構成に、それぞれがどの程度に貢献し（責任を有し）ているかを明らかにするとともに、それに応じて総共同費用をいかに割り振るのが公正であるかを理論的に考察することを必要としている。

一方、実際には水資源開発事業などの公共事業においては各種の実用的な費用割り振り法が開発され、用いられている。これらは大別すると、(1) ある一つの数的な基準、例えば使用量、あるいは便益の水準に比例して費用を割り振るという最も単純な方法の他に、(2)当該参加者が加わったことによって増加した付加的費用（限界費用、分離費用）を直接それぞれの主体に割り振った上で、残りの費用を何らかの形で各主体に割り振る、という方法がよく用いられる。(1)のタイプを総称して *PQBP*(*Physical quantity based proportional*) 方式という。(2)のタイプの代表としては、*TVA*で中心的役割を果たした *SCRB*(*Separable costs remaining benefits*) 方式が挙げられる。(2) の他のタイプの費用割振り法としては、*ENSC*(*Egaritarian nonseparable cost*) 方式、*NSCG*(*Nonseparable cost gap*)方式、*MCRS* (*Minimum cost remaining savings*)方式などがよく用いられる。

しかし、これらの方式は、その背後にある理論的意味づけが必ずしも明らかではない。一方、費用配分の公正解を理論的にモデル化する上で有用な方法にゲーム理論による方法がある。　この点については、たとえば *Young · Okada · Hashimoto*[1]、*Loehman* ら[2]、*Driessen* ら[3]、*James* ら[4]、*Straffin* ら[5]、*Young*[6]、鈴木[7]、森[8]らの研究があり、ゲーム理論は上記の実用的・慣用的配分解（以下「慣用的配分解」という）とは異なって、より理論的に明確な配分解を与え得ることが明らかにされている。

しかしながら、ゲーム理論に基づいた各種の理論的な配分解は実用的配分解に比べて、求解の過程が複雑で手間がかかるなどの点で簡便性に欠けているきらいがあることが指摘されている。一方、慣用的配分解の中でもたとえば*SCRB*法などは経験的に多くの実績を積み上げて現在の形に至ったものであり、それなりにその背後に妥当性、有効性が裏打ちされているはずだという主張はそれなりに考慮に値する。要はこのような経験的・直観的主張を理論的に吟味し、その意味づけを再検討する必要があるが、この点ではゲーム理論が多くのポテンシャルを秘めながらもその研究成果が十分に生かされていないきらいがある。その主な原因は、費用関数の構造特性と慣用的配分解を含む各種の配分解との関連性について理論的な考察が不足していることである。本研究ではこのような観点から、共同事業の費用割り振り問題を規定する上で決定的な要因と考えられる費用関数の構造特性に着目するとともに、これを特に経済学的視点から吟味する。ついでそこから得られた二、三の基礎的な知見に基づいて慣用的配分解の意味づけとその妥当性をゲーム理論の研究成果と関連づけながら理論的に考察することを目的とする。

# 2　費用関数の特性と費用配分法との関連

## 2.1　慣用的配分解についてのレビュー[1),2),3)]

従来からよく用いられてきた費用割振り法の一つの基本的な考え方は、各参加者にまずその当事者が加わったことによって生ずる限界費用を負担させ、その残りを適当な形で按分して各参加者に分担させるというものである。ゲーム理論の用語を用いて説明すると次のようになる。同一目的(たとえば水道)ではあるが異なる複数の主体(たとえば別々の都市の水道事業体)間における共同事業の場合には各主体を、多目的な(たとえば水道と灌漑と発電などの)計画事業の場合には各目的を、それぞれプレイヤーと考えよう。$n$人からなるプレイヤー全体の集合、$N=\{1,2,\cdots,n\}$ を考え、これを全提携という。これは費用割振りが問題になっている当該事業の参加者すべてを指している。このときの全費用は$C(N)$である。次に$N$の部分集合を部分提携$S$とよぶ。提携$S$のメンバーによって行われる事業の費用を$C(S)$としよう。$C(i)$はプレイヤー$i$が単独で事業を行った時の費用である。そしてプレイヤー$i$の分離費用$sc_i$は

$$sc_i=C(N)-C(N-\{i\})$$

として定義される。これは全提携に最後にプレイヤー$i$が加わることによって生じる限界費用であるといえる。各プレイヤーはそれぞれの分離費用を負担するので、こ

れらを全費用$C(N)$から控除した残りの費用$nsc$は

$$nsc = C(N) - \sum_{i\in N} sc_i$$

である。ここに$nsc$は*Nonseparable costs* (非分離費用)と呼ばれる。慣用的費用割振り法(配分解)の多くはこの非分離費用の付加的配分の仕方の相違に帰着される。以下、慣用的費用割振り法である*ENSC*、*SCRB*、*NSCG*方式について説明する。

**(1) ENSC (Egalitarian nonseparable cost method)[3)]**

**(均等分担方式)**

まず考えられる方法は各自にまず分離費用を負担させた上で、さらに非分離費用$nsc$を均等に各プレイヤーに付加的に配分する方法である。プレイヤー$i$の費用負担$B$は

$$ENSC(i) = sc_i + nsc/n$$

と表される。

**(2) SCRB (Separable costs remaining benefits method)[3)]**

**(分離費用身替り妥当支払い方式)**

この方法は各プレイヤーに分離費用を負担させた上で、さらに非分離費用を$\min[b(\{i\}), C(\{i\})] - sc_i$ (残余便益) に比例して各プレイヤーに付加的に割り振るというものである。ここで$b(\{i\})$はプレイヤー$i$が単独で事業を行ったときの便益を意味する。よって残余便益はプレイヤー$i$の支払い意志額から分離費用を差し引いた額である。一般的に$C(\{i\})$は$b(\{i\})$より小さいのでプレイヤー$i$の費用負担は

$$SCRB(i) = sc_i + [C(\{i\}) - sc_i]\left[\sum_{i\in N}\{C(\{i\}) - sc_i\}\right]^{-1} \cdot nsc \quad (1)$$

と表される。

**(3) NSCG (Nonseparable cost gap method) [3)]**

**(非分離費用差方式)**

SCRBは単独行動(単独事業)のみについて残余便益を定義し、それに基づいて非分離費用を付加的に割り振っている。しかしながら、非分離費用を割り振る上でより小さな他の提携に関する残余便益を考慮に入れなくてもよいという理由は何もない。そこで任意の提携Sの残余便益を表わす費用差関数$g^c(S)$を導入する。この費用差関数$g^c(S)$を

$$g^c(S) = C(S) - \sum_{i\in S} sc_i \quad (2)$$

と表す。一般に費用差関数は非負であることが多いので

$$g^c(S) \geq 0 \quad (\forall S \subset N) \quad (3)$$

と仮定する。ここでプレイヤー$i$の譲歩額$\lambda_i$を

$$\lambda_i = \min_{i\in S} g^c(S) \quad (4)$$

と定義する。ここでさらに

$$\sum_{i\in N} \lambda_i \geq nsc \quad (5)$$

と仮定すると、プレイヤー$i$の費用負担は次のようになる。

$$NSCG(i) = \begin{cases} sc_i & (nsc = 0 \text{のとき}) \\ sc_i + [\lambda_i / \sum_{i\in N} \lambda_i] \cdot nsc & (nsc > 0 \text{のとき}) \end{cases} \quad (6)$$

## 2.2 提携の関数としてみた費用関数の諸特性

費用関数$C$が任意の提携$S, T \subset N$について

$$C(S) + C(T) \geq C(S \cap T) \quad (S \cap T = \phi) \quad (7)$$

を満たすならば、このとき費用関数Cは劣加法的であるという。提携$S \cup T$の費用負担は最悪の場合でも$C(S) + C(T)$より大きくなることはない。よって劣加法性が成立するということは、利害の対立する状況においては$S$と$T$が$S \cup T$という提携を組んだ場合に経済的にみてお互いに有利であるということを示している。また同様に、節約ゲームにおいては

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad (\forall S,\ T \subset N,\ S \cap T = \phi) \quad (8)$$

を満たすときに、特性関数$v$は優加法的であるという。

次の三つの費用関数の形態はいずれも劣加法性を満たすものである。

**(1) Convex Cost Game**

$$C(S) + C(T) \geq C(S \cup T) + C(S \cap T) \quad (\forall S,\ T \subset N) \quad (9)$$

(9)式が成立するような費用関数によって決定される協力ゲームをConvex Costゲームという。このような場合にはたくさんの都合のよい特徴がある。たとえば(9)式において$T = N - i$とおくと

$$C(S) + C(N - \{i\}) \geq C(N) + C(S - \{i\}) \quad (i \in S)$$

$$\therefore\ C(S) - C(S - \{i\}) \geq C(N) - C(N - \{i\}) = pc_i$$

つまりConvex cost gameにおいては、プレイヤー$i$の分離費用(最後に全提携に加わったときの限界費用)$pc_i$は、任意の部分集合にプレイヤー$i$が加わったときの限界費用を上回ることはないことが常にいえる。これはさらに書き換えると

$$g^c(S - i) \leq g^c(S) \quad (\forall S \subset N)$$

が成立することを意味する。

$$g^c(S) = C(S) - \sum_{its} sc_i$$

で定義されるもので、提携$S$の費用差関数という。

**(2) Semi-Convex Cost Game**

提携$S$および単独行動$i$に関する費用差関数$g^c(S)$、$g^c(\{i\})$について

$$g^c(\{i\}) \leq g^c(S) \qquad (\forall i \in N \;\; S \subset N \;\; i \in S) \qquad (10)$$

が成立するとき、この協力ゲームをSemi-convexであるという。任意$i$のConvex Cost GameはSemi-convex Cost Gameであることが容易に示される。Semi-convex条件(10)式は

$$C(\{i\}) + \sum_{j \in T-1} sc_j \leq C(T) \qquad (\forall i \in T \subset N) \qquad (11)$$

と書き直すことができる。(11)式は任意の提携$T$の共同費用が、その提携に参加しているプレイヤー$i$を除いたメンバー全員が負担すべき最小費用(すなわち$sc_i$)の総和とプレイヤー$i$が負担すべき最大費用(すなわち身替り費用)の和を下回ることはないことを意味している。

**(3) One − Convex Cost Game**

費用差関数$g^c(S)$において

$$g^c(N) \leq g^c(S) \qquad (\forall \phi \neq S \subset N) \qquad (12)$$

$$g^c(N) \geq 0 \qquad (13)$$

を満足する協力ゲームをOne-convexゲームであるという。

One-convex条件(12)、(13)式は

$$\begin{aligned} C(N) &\leq \; C(T) + \textstyle\sum_{j \in N-T} sc_j \quad (\forall \phi \neq T \subset N) \\ nsc &\geq \; 0 \end{aligned}$$

となる。これより非分離費用$nsc$が非負であることはOne-convex条件の十分条件であることが分かる。また、劣加法性から

$$C(N) \leq C(T) + \sum_{j \in N-T} C(\{j\}) \qquad (\forall \phi \neq T \subset N) \qquad (14)$$

を得る。したがって(14)式は、プレイヤー$i$が負担すべき最大費用(すなわち一人提携の身替り費用)が最小費用(すなわち分離費用)に置き代わってもOne-convexの性質は保たれることを意味している。

### 2.3　規模の経済性・範囲の経済性と費用関数

**(1) 規模の経済性**

費用割振り法が対象としうる配分問題の基本的条件として、上述した議論とは別に規模の経済性や範囲の経済性などの費用関数に関する諸特性が関係していることが従来から暗に想定されていたように思われる。しかしながら、この点について厳密な理論的考察はなされていないと考える。そこで以下ではこの点について若干の分析をする。

規模の経済性を表す指標$ESL$ (*economies of scale*) は$n$個の結合生産物$Y_N = (Y_1, \cdots, Y_n)$について

$$ESL = \frac{C(Y_N)}{\sum_{i \in N} Y_i \cdot MC_i} \qquad (15)$$

で定義される[9]。ここで$C(Y_N)$は$Y$全体を生産するのに要する総費用、$Y_i$は生産物$i$の生産量である。$MC_i$は生産物$i$の限界費用である。もし、$ESL > 1$なら規模の経済性が存在し、$ESL < 1$のときは規模の経済性は存在しない。

いま、$n$個の結合生産システムを整備・運用することを水資源開発事業に即して解釈すれば、$n$種類の目的(用途)を持った多目的施設の整備・運用問題と考えることができる。あるいは目的は単一であっても$n$種類の管理・運営主体からなる共同利用施設の整備・運用問題とみなすこともできる。このことをゲーム論的に解釈すると、プレイヤー$i(=1, \cdots, n)$がそれぞれ生産物$i(=1, \cdots, n)$の生産を担当する部門であり、各プレイヤーは提携$N = 1, \cdots, n$を形成することによって、$n$個の結合生産が可能なシステムを整備・運用することを想定しているとモデル化できる。この場合、各プレイヤー$i$は単独で生産物$i$を生産することも可能であり、その場合の生産費用は$C(Y_i)$である。また複数のプレイヤーが提携$S \subset N$を形成して、結合生産システムを整備・運用することもできるが、その場合の生産費用は$C(Y_S)$である。ここに$Y_S$は提携$S$に属するプレイヤーが担当している生産物(の生産量)一式を表すベクトルである。以下、上述したゲーム論的意味づけを念頭におきながら議論を進めよう。

生産物$i$に関する規模の経済性を$ESL_i$で表すと、これは限界費用に対する平均率として次のように定義される。

$$ESL_i = \frac{IC_i}{Y_i \cdot MC_i} = \frac{AIC_i}{MC_i} \qquad (16)$$

である。ここで

$$IC_i = C(Y_N) - C(Y_{N-\{i\}})$$

$$AIC_i = \frac{IC_i}{Y_i}$$

である。ここに$IC_i$は結合生産システム$Y_N$の整備・運用費用から、生産物$i$を担当するプレイヤー$i$のみが離脱し

たときの結合生産費用の減少分とみなすことができる。これは費用配分問題でよく現われる「分離費用」$sc_i$の概念に相当していると解釈される。(15)式より

$$ESL = \frac{C(Y_N)}{\sum_i Y_i \cdot MC_i} = \sum_{i'} \frac{IC_{i'}}{\sum_i Y_i \cdot MC_i} \cdot \frac{C(Y_N)}{\sum_{i'} IC_{i'}} \quad (17)$$

(16)式より、$IC_{i'} = ESL_{i'} \cdot Y_{i'} \cdot MC_{i'}$ (18)

(18)式を(17)式へ代入すると

$$ESL = \sum_{i'} \left( \frac{Y_{i'} \cdot MC_{i'}}{\sum_i Y_i \cdot MC_i} \right) \cdot ESL_{i'} \cdot \frac{C(Y_N)}{\sum_{i'} IC_{i'}} = \frac{\sum_{i'} \alpha_{i'} \cdot ESL_{i'}}{\sum_{i'} IC_{i'}/C(Y_N)} \quad (19)$$

ここで、$\sum_{i'} \alpha_{i'} = \sum_{i'} MC_{i'} / \sum_i Y_i \cdot MC_i = 1$である。

**（２）範囲の経済性**

範囲の経済性を表す指標$ESC$ (economies of scope) は

$$ESC = \frac{\sum_i C(Y_i) - C(Y_N)}{C(Y_N)} \quad (20)$$

と定義される。$ESC$は結合生産$Y_N$を行うことによって、単品生産$Y_i$を個別に行うのに比べてどの程度生産費用を節約できるかという割合を表している。これをゲーム論的に解釈すれば$ESC$は提携$N$を組むことによって各プレイヤーが単独で行動したときに比べて全体として費用がどの程度節約(あるいは増加)できるかという割合を表していると考えられる。$ESC > 0$の時は範囲の経済性が存在し、$ESC < 0$のときは範囲の不経済性が存在するという。

$ESC$を次のように拡張しよう。結合生産$Y_N$から生産物$i$の生産を除いた結合生産$Y_{N-i}$を考え、次いで生産物$i$の生産を含めた結合生産$Y_N$にシステムを拡張したとする。ゲーム論的には任意のプレイヤー$i$を除いた提携$N-i$にプレイヤー$i$が加わって全提携$N$ができたと考えることに相当している。このような結合生産システムの拡大（提携の拡大）に関する範囲の経済性を

$$ESC_{N-\{i\},\{i\}} = \frac{C(Y_{N-\{i\}}) + C(Y_i) - C(Y_N)}{C(Y_N)} \quad (\forall i \in N) \quad (21)$$

として定義しよう。（なお$ESC_{N-\{i\},\{i\}}$の添字$N-\{i\},\{i\}$は$Y_{N-\{i\}}$の結合生産に$Y_i$の生産が付加されることを示している。以下$ESL$についても同様である。）

このことを３種類の結合生産システム(３人ゲーム)について説明しよう。上式は生産物（プレイヤー）$A$、$B$、$C$について

$$ESC_{AB,C} = \frac{C(Y_{AB}) + C(Y_C) - C(Y_{ABC})}{C(Y_{ABC})} \quad (22)$$

$$ESC_{BC,A} = \frac{C(Y_{BC}) + C(Y_A) - C(Y_{ABC})}{C(Y_{ABC})} \quad (23)$$

$$ESC_{CA,B} = \frac{C(Y_{CA}) + C(Y_B) - C(Y_{ABC})}{C(Y_{ABC})} \quad (24)$$

となる。まず劣加法性が満たされていれば、(22)、(23)、(24)式の分子が非負となることが分かる。つまり$C(Y_{ABC}) > 0$である限り、$ESC_{AB,C} \geq 0$、$ESC_{BC,A} \geq 0$、$ESC_{CA,B} \geq 0$がすべて満たされることと、劣加法性が成立すること（(22)～(24)式の右辺の分母が非負であること）は同等であることが示される。これは劣加法性の性質として既に知られた事実である。

いま、(22)、(23)、(24)式を両辺について加えると

$$\begin{aligned} & ESC_{AB,C} + ESC_{BC,A} + ESC_{CA,B} \\ &= \frac{C(Y_A) + C(Y_B) + C(Y_C) - C(Y_{ABC})}{C(Y_{ABC})} \\ &\quad + \frac{\{C(Y_{AB}) - C(Y_{ABC})\} + \{C(Y_{BC}) - C(Y_{ABC})\} + \{C(Y_{CA}) - C(Y_{ABC})\}}{C(Y_{ABC})} \\ &\quad + \frac{C(Y_{ABC})}{C(Y_{ABC})} \\ &= ESC - \frac{IC_C + IC_A + IC_B}{C(ABC)} + 1 \end{aligned} \quad (25)$$

(25)式より

$$\frac{IC_A + IB_B + IC_C}{C(Y_{ABC})} = 1 - (ESC_{AB,C} + ESC_{BC,A} + ESC_{CA,B} - ESC) \quad (26)$$

(19)式より

$$ESL = \frac{\alpha_A \cdot ESL_A + \alpha_B \cdot ESL_B + \alpha_C \cdot ESL_C}{\left\{ \frac{IC_A + IC_B + IC_C}{C(Y_{ABC})} \right\}} = \frac{\alpha_A \cdot ESL_A + \alpha_B \cdot ESL_B + \alpha_C \cdot ESL_C}{1 - (ESC_{AB,C} + ESC_{BC,A} + ESC_{CA,B} - ESC)}$$

いま、$\overline{ESC} = ESC_{AB,C} + ESC_{BC,A} + ESC_{CA,B} - ESC$とおくと

$$ESL = \frac{\alpha_A \cdot ESL_A + \alpha_B \cdot ESL_B + \alpha_C \cdot ESL_C}{1 - \overline{ESC}}$$

を得る。一方、(26)式より

$$C(Y_{ABC}) - (IC_A + IC_B + IC_C) = (ECS_{AB,C} + ESC_{BC,A} + ESC_{CA,B} - ESC) \cdot C(Y_{ABC})$$

$C(Y_{ABC}) - (IC_A + IC_B + IC_C)$は非分離費用$nsc$と等しいと考えられるので

$$\overline{ESC} = \frac{nsc}{C(Y_{ABC})} \quad (27)$$

$$= ESC_{AB,C} + ESC_{BC,A} + ESC_{CA,B} - ESC \quad (28)$$

となる。これは興味深い知見を提供する。すなわち$\overline{ESC}$を費用割振り問題に即して解釈すれば、$\overline{ESC}$は全提携費用に対する非分離費用の比率を表しているといえる。こ

れより全提携に対する非分離費用の比率は、(拡張された意味での) 一種の規模の経済性を表す指標そのものに相当していることが示されるのである。

$C(Y_{ABC})>0$である限り、$\overline{ESC}>0$と$nsc>0$は同値であり、このとき上式の拡張した意味での範囲の経済性が存在する。同様に、$\overline{ESC}<0$と$nsc<0$とは同値でありこのとき範囲の不経済性が存在する。$\overline{ESC}=0$と$nsc=0$とも同値であり、これは結合してもしなくても経済効率上は同じということを意味している。以上の説明はそのまま$n$個の結合生産システム ($n$人ゲーム) の場合にも容易に拡張が可能であり、結局

$$\overline{ESC}=\frac{nsc}{C(Y_N)}$$

を得る(証明省略)。また、$n=2$のときは$ESC=\overline{ESC}$となって

$$ESC=\frac{nsc}{C(Y_N)}$$

となる。

**(3) Convex ゲームとの関係**

3人ゲームでConvex性が成立するための条件は

$$C(Y_{AB})+C(Y_{CA})\geq C(Y_{ABC})+C(Y_A) \tag{29}$$

$$C(Y_{AB})+C(Y_{BC})\geq C(Y_{ABC})+C(Y_B) \tag{30}$$

$$C(Y_{BC})+C(Y_{CA})\geq C(Y_{ABC})+C(Y_C) \tag{31}$$

である。ここで(22)～(24)式の両辺を加えて整理すると

$$\frac{C(Y_{AB})+C(Y_{BC})+C(Y_{CA})-2C(Y_{ABC})}{C(Y_{ABC})}$$
$$=ESC_{AB,C}+ESC_{BC,A}+ESC_{CA,B}-ESC$$
$$=\overline{ESC} \text{ を得る。} \tag{32}$$

(29)式の両辺に$C(Y_{BC})$を加えて整理すると

$$C(Y_{AB})+C(Y_{CA})+C(Y_{BC})-2C(Y_{ABC})$$
$$\geq C(Y_A)+C(Y_{BC})-C(Y_{ABC}) \tag{33}$$

(33)式は(32)式より

$$\overline{ESC}\geq ESC \tag{34}$$

を得る。$Y_{AB}$、$Y_{CA}$、$Y_{BC}$に関する対称性より(30)、(31)式についても同様に(34)式を得る。

**(4) Semi-Convex ゲームとの関係**

3人ゲームでSemi-convex性が成立するための条件は

$$C(Y_{AB})+C(Y_{BC})+C(Y_{CA})-2C(Y_{ABC})$$
$$\geq C(Y_A)-\{C(Y_{ABC})-C(Y_{BC})\} \tag{35}$$

$$C(Y_{AB})+C(Y_{BC})+C(Y_{CA})-2C(Y_{ABC})$$
$$\geq C(Y_B)-\{C(Y_{ABC})-C(Y_{CA})\} \tag{36}$$

$$C(Y_{AB})+C(Y_{BC})+C(Y_{CA})-2C(Y_{ABC})$$
$$\geq C(Y_A)-\{C(Y_{ABC})-C(Y_{AB})\} \tag{37}$$

である。(35)式と(32)より

$$\overline{ESC}\geq ESC \tag{38}$$

を得る。$Y_{AB}$、$Y_{CA}$、$Y_{BC}$に関する対称性より(36)、(37)式についても(32)式を用いることにより同様に(38)式の条件を得る。

**(5) One-Convex ゲームとの関係**

3人ゲームでOne-convex性が成立するため条件は(35)～(37)式の不等号を逆向きにした式である。従って(33)式よりOne-convex性が成立すれば

$$\overline{ESC}\leq ESC \tag{39}$$

が成立する。

## 3　多目的ダムの費用関数の特殊性に関する考察

発電$(P)$と上水$(M)$および工水$(I)$の三つの目的を有する多目的ダムを考える。発電は貯水量$Y$をエネルギーとして、また上水および工水は水量の消費(経済学でいう「消費」ではなく、水資源工学の述語としての量的利用を指す)としてそれぞれ異なる目的で利用するが、場合によっては同一の貯水量を発電と他の目的に同時に利用することができる。従って消費目的での水量が、所与のエネルギーを生み出すのに必要な水量を下回る限り、消費目的の水量の生産に要する付加的費用は零である。換言すればエネルギー用としての水量の生産に要する費用と、それに消費目的の(より少ない)水量の生産を結合させた場合とでは生産費用に差はないと考えられる。同様にして消費目的の水量がエネルギー目的の水量を上回るときは、前者の生産に要する費用とそれに後者の生産を結合させた場合の費用とは基本的に一致することになる。以上のことを費用関数として定式化すると次のようになる。

$$C(Y_I,Y_M,Y_P)=\begin{cases} C(\sum_{i=I,M}Y_i) & for \quad \sum_{i=I,M}Y_i\geq Y_P \\ C(Y_P) & for \quad \sum_{i=I,M}Y_i<Y_P \end{cases}$$

$$C(Y_I,Y_P)=\begin{cases} C(Y_P) & for \quad Y_p>Y_I \\ C(Y_I) & for \quad Y_p\leq Y_I \end{cases}$$

$$C(Y_M,Y_P)=\begin{cases} C(Y_P) & for \quad Y_P>Y_M \\ C(Y_M) & for \quad Y_P\leq Y_M \end{cases}$$

$$C(Y_M,Y_I)=\sum_{i=I,M} Y_i$$

ここに、$Y_M$、$Y_I$、$Y_P$はそれぞれ上水、工水、発電を目的とする用水の生産量を表す。いま、$Y$を用水の生産量としたとき、$C(Y)=\beta Y^\alpha$ ($\alpha$、$\beta$は定数、$\alpha$、$\beta>0$) と表されるとして以下の三つの場合に分けて考察する。

**(1－1) $Y_M<Y_I<Y_P$ かつ $Y_M+Y_I<Y_P$ の場合**

このとき各提携に関する費用は以下のようになる。

$$\begin{aligned} C(Y_i)&=\beta Y_i^\alpha \quad (i=M,I,P)\\ C(Y_M,Y_I)&=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha\\ C(Y_M,Y_P)&=\beta Y_P^\alpha\\ C(Y_I,Y_P)&=\beta Y_P^\alpha\\ C(Y_M,Y_I,Y_P)&=\beta Y_P^\alpha \end{aligned}$$

Convex性を満たすための条件は

$$C(Y_M,Y_I)+C(Y_M,Y_P)\geq C(Y_M,Y_I,Y_P)+C(Y_M) \quad (40)$$

$$C(Y_M,Y_I)+C(Y_I,Y_P)\geq C(Y_M,Y_I,Y_P)+C(Y_I) \quad (41)$$

$$C(Y_M,Y_P)+C(Y_I,Y_P)\geq C(Y_M,Y_I,Y_P)+C(Y_P) \quad (42)$$

である。(40)～(42)式は具体的に次のように書き下せる。

$$\beta(Y_M+Y_I)+\beta Y_P^\alpha\geq \beta Y_P^\alpha+\beta Y_M^\alpha \quad (43)$$

$$\beta(Y_M+Y_I)+\beta Y_P^\alpha\geq \beta Y_P^\alpha+\beta Y_I^\alpha \quad (44)$$

$$\beta Y_P^\alpha+\beta Y_P^\alpha\geq \beta Y_P^\alpha+\beta Y_P^\alpha \quad (45)$$

(43)～(45)式は明らかに成立する。従ってConvex性が成立する。

**(1－2) $Y_M<Y_I<Y_P$ かつ $Y_M+Y_I>Y_P$ の場合**

このとき各提携に関する費用は以下のようになる。

$$\begin{aligned} C(Y_i)&=\beta Y_i^\alpha \quad (i=M,I,P)\\ C(Y_M,Y_I)&=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha\\ C(Y_M,Y_P)&=\beta Y_P^\alpha\\ C(Y_I,Y_P)&=\beta Y_P^\alpha\\ C(Y_M,Y_I,Y_P)&=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha \end{aligned}$$

Convex性を満たすための条件(40)～42)は具体的に次のように書き下せる。

$$\beta(Y_M+Y_I)+\beta Y_P^\alpha\geq \beta(Y_M+Y_I)^\alpha+\beta Y_M^\alpha \quad (46)$$

$$\beta(Y_M+Y_I)+\beta Y_P^\alpha\geq \beta(Y_M+Y_I)^\alpha+\beta Y_I^\alpha \quad (47)$$

$$\beta Y_P^\alpha+\beta Y_P^\alpha\geq \beta(Y_M+Y_I)^\alpha+\beta Y_P^\alpha \quad (48)$$

(46)、(47)式は自明に成立するが、明らかに(48)式は成立しない。従ってConvex性は満たさない。

上水($M$)と工水($I$)および発電($P$)の付加的費用$IC_i$、すなわち分離費用$sc_i(i=M,I,P)$は

$$\begin{aligned} IC_M&=sc_M=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_P^\alpha\\ IC_I&=sc_I=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_P^\alpha\\ IC_P&=sc_P=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta(Y_M+Y_I)^\alpha=O \end{aligned}$$

である。また費用差関数$g_c(S)$はそれぞれ

$$\begin{aligned} g^c(M)&=\beta Y_M^\alpha-\{\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_P^\alpha\}\\ g^c(I)&=\beta Y_I^\alpha-\{\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_P^\alpha\}\\ g^c(P)&=\beta Y_P^\alpha\\ g^c(N)&=2\beta Y_P^\alpha-\beta(Y_M+Y_I)^\alpha \quad (N=\{M,I,P\}) \end{aligned}$$

である。Semi-convex性を満たすための条件は

$$g^c(M)\leq g^c(N) \quad (49)$$

$$g^c(I)\leq g^c(N) \quad (50)$$

$$g^c(P)\leq g^c(N) \quad \text{である。} \quad (51)$$

(49)～(51)式は具体的に次のように書き下せる。

$$Y_M^\alpha\leq Y_P^\alpha \quad (52)$$

$$Y_I^\alpha\leq Y_P^\alpha \quad (53)$$

$$(Y_M+Y_I)\leq Y_P^\alpha \quad (54)$$

(52)、(53)式は成立するが(54)式は成立しない。従ってSemi-convex性は成り立たない。

One-convex性を満たすためには(49)～(51)式、すなわち(51)～(54)式の不等号を逆向きにした条件が成立する必要がある。このときは明らかに、三つのうち二つの不等式が成立しなくなる。よってOne-convex性は成立しない。

**(2) $Y_M<Y_P<Y_I$ (すなわち $Y_M+Y_I>Y_P$)の場合**

このとき各提携に関する費用は以下のようになる。

$$\begin{aligned} C(Y_i)&=\beta Y_i^\alpha \quad (i=M,I,P)\\ C(Y_M,Y_I)&=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha\\ C(Y_M,Y_P)&=\beta Y_P^\alpha\\ C(Y_I,Y_P)&=\beta Y_I^\alpha\\ C(Y_M,Y_I,Y_P)&=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha \end{aligned}$$

また、付加的費用$IC_i$、すなわち分離費用$sc_i$はそれぞれ

$$\begin{aligned} IC_M&=sc_M=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_I^\alpha\\ IC_I&=sc_I=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_P^\alpha\\ IC_P&=sc_P=\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta(Y_M+Y_I)^\alpha=0 \end{aligned}$$

である。また費用差関数$g_c(S)$はそれぞれ

$$\begin{aligned} g^c(M)&=\beta Y_M^\alpha-\{\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_I^\alpha\}\\ g^c(I)&=\beta Y_I^\alpha-\{\beta(Y_M+Y_I)^\alpha-\beta Y_P^\alpha\}\\ g^c(P)&=\beta Y_P^\alpha\\ g^c(N)&=\beta(Y_P^\alpha+Y_I^\alpha)-\beta(Y_M+Y_I)^\alpha \quad (N=\{M,I,P\}) \end{aligned}$$

である。Semi-convex性が成立するための条件(48)～(50)式は具体的には次のように整理するとされる。

$$Y_M^\alpha \leq Y_P^\alpha \tag{55}$$

$$0 \leq 0 \tag{56}$$

$$(Y_M + Y_I)^\alpha \leq Y_I^\alpha \tag{57}$$

(55)、(56)式は成立するが(57)式は成立しない。従ってSemi-convex性は満たさない。すなわち自動的にConvex性も満たさないことになる。

またOne-convex性を満たすためには(55)～(57)式の不等号を逆向きにした条件が成立しなければならないが、明らかに不等式のうち二つが成り立たなくなるので、One-convex性も満たさない。

範囲の経済性を表す指標$ESL$、規模の経済性を表す指標$ESC$、$\overline{ESC}$は具体的には以下のようになる。

**（1－1）$Y_M < Y_I < Y_P$　かつ　$Y_M + Y_I < Y_P$　の場合**

$$ESL = \frac{1}{\beta\{Y_P^\alpha - (Y_M + Y_I)^\alpha\}} \tag{58}$$

(58)式は条件より$Y_M + Y_I < Y_P$であるから$ESL > 0$となる。

$$ESC = \frac{Y_M^\alpha + Y_I^\alpha}{Y_P^\alpha} \tag{59}$$

(59)式は明らかに正となるから$ESC > 0$となる。

$$\overline{ESC} = \frac{(Y_M + Y_I)^\alpha}{Y_P^\alpha} \tag{60}$$

(60)式は明らかに正となる。さらに$Y_M + Y_I$は$Y_P$を超えることはないから、$0 \leq \overline{ESC} \leq 1$である。また(59)式と(60)式を比較すると

$$\overline{ESC} \geq ESC \qquad (\text{等号成立は}\alpha = 1\text{のとき})$$

であることが分かる。これは(34)式が示すConvexゲームの性質と一致している。

**（1－2）$Y_M < Y_I < Y_P$　かつ　$Y_M + Y_I > Y_P$　の場合**

$$ESL = \frac{(Y_M + Y_I)^\alpha}{\beta\{(Y_M + Y_I)^\alpha - Y_P^\alpha\}(Y_M^\alpha + Y_I^\alpha)} \tag{61}$$

(61)式は明らかに正であるので$ESL > 0$である。

$$ESC = \frac{Y_M^\alpha + Y_I^\alpha + Y_P^\alpha - (Y_M + Y_I)^\alpha}{(Y_M + Y_I)^\alpha} \tag{62}$$

(62)式は$Y_P^\alpha \geq (Y_M + Y_I)^\alpha - (Y_M^\alpha + Y_I^\alpha)$であるならば$ESC \geq 0$である。

$$\overline{ESC} = \frac{2Y_P^\alpha - (Y_M + Y_I)^\alpha}{(Y_M + Y_I)^\alpha} \tag{63}$$

(63)式は$Y_P \geq (Y_M + Y_I)^\alpha/2$である限り$\overline{ESC} \geq 0$である。

**（2）$Y_M < Y_P < Y_I$　（すなわち$Y_M + Y_I > Y_P$）の場合**

$$ESL = \frac{(Y_M + Y_I)^\alpha}{Y_M[\beta\{(Y_M + Y_I)^\alpha - \beta Y_I^\alpha\}]} + Y_I^\alpha[\beta\{(Y_M + Y_I)^\alpha - Y_P^\alpha\}] \tag{64}$$

(64)式は明らかに正であるので$ESL > 0$である。

$$ESC = \frac{Y_M^\alpha + Y_I^\alpha + Y_P^\alpha - (Y_M + Y_I)^\alpha}{(Y_M + Y_I)^\alpha} \tag{65}$$

(65)式は(62)式と同様に$Y_P^\alpha \geq (Y_M + Y_I)^\alpha - (Y_M^\alpha + Y_I^\alpha)$であるならば$ESC \geq 0$である。

$$\overline{ESC} = Y_I^\alpha + Y_P^\alpha - \frac{(Y_M + Y_I)^\alpha}{(Y_M + Y_I)^\alpha} \tag{66}$$

(66)式は$Y_P$と$Y_M$、$Y_I$の相互の関係によってその正負が決まることを示している。以上のことから、Convex性を満たすときは規模の経済性を表す指標$ESL$および範囲の経済性を表す指標$ESC$と$\overline{ESC}$は必ず正になることが分かる。しかし、Convex、Semi-convex、One-convex性のいずれも満たさない場合は$ESC$と$\overline{ESC}$の正負は$Y_P$、$Y_M$、$Y_I$の間の条件しだいである。

## 4　むすび

以上、本研究では共同事業の費用割り振りのための慣用的配分解の妥当性と意味づけならびにその適用上の限界について、理論的な側面から２、３の考察を行った。その際、費用割り振り上の「公正」さや交渉能力を裏づける代替的提携可能性に着目し、ゲーム理論によるモデル化の有効性を指摘した。ついで、費用関数の構造特性に着目し、「規模の経済性」や「範囲の経済性」等の経済学的特性と費用関数の構造特性との関連性について考察し、分離費用や非分離費用などの諸概念の理論的意味づけを提示した。なお本研究の遂行にあたっては、木下省二氏（現鳥取三洋電機）の協力を得た。付して感謝の意を表する。

## 参考文献


1) Young, H.P., N.Okada, T.Hashimoto : Cost Allocation in Water Resources Development, Water Resources Research, vol.18, pp.463-475, 1982.

2) Loehman, E., Orlando, J., Tschirhart, J., and Whinston, A. : Cost Allocation for a Regional Water Treatment System, Water Resources Research, vol.15, pp.193-202, 1979.

3) Driessen, T.S.H., and Tijs, S.H. : The Cost Gap Method and Other Cost Allocation Methods for Multipurpose Water Projects, Water Resources Research, vol.21 , pp.1469-1475, 1985.

4) James, P.H., and Dickinson R.E. : Method for Apportioning the Cost of a Water Resource Project, Water Resources Research, vol.18, 476-482, 1982.

5) Straffin, P.D., Beloit, and Heaney, J.P., Gainesville : Game Theory and Tennessee Valley Authority, Int., Journal of Game Thoery, Vol.10, pp.35-43, 1980.

6) Young, H.P. : Method and Principles of Cost Allocation, pp.3-29,Methods, Principles, Applications, IIASA, 1985.

7) 鈴木光男：費用分担ゲームの解，数理科学，NO 256, pp.63-68, 1984.

8) 森統:費用配分の考え方:展望，日交研シリーズ, A-129, 1989.

9) Clark, R.M. : Economies of Scale and Scope in Water Supply, Regional Science and Urban Economies, 18, pp.479-502, 1988.