不完備情報下におけるロジスティカルネットワーク均衡に関する研究

小林　潔司

社会開発システム工学科

(1990年9月1日受理)

Logistical Network Equilibria with Incomplete Information

by

Kiyoshi KOBAYASHI

Department of Social Systems Engineering

(Received September 1, 1990)

This paper presents a new analytical framework for logistical network equilibria with incomplete information. The logistical networks can be characterized by a set of hardware resources and a set of programs (software) to be accepted by the hardware. A user of logistical networks should choose an admissible program to combine input resources to hardware resources. Due to the limitation of the availability of hardware resources, there should be interactions among potential users of them. The basic element of our network equilibrium concept is differentiated information; different users have different perceptions about the availability of the software; they choose their programs based on their private information. The purpose of this paper is to develop a general equilibria concept that makes explicit information and knowledge that a user has as part of his primitive characteristics. The model we present is a reinterpretation of Harsanyi's model of incomplete information games. The difference from Harsanyi's approach is the explict consideration of the rational expectation formation by users. A numerical illustration may provide us a pedagogical insights on logistical network equilibria with incomplete information.

Key words : Logistical Network, Incomplete Information Game, Network Equilibria, Rational Expectation Equilibria, Economic Mechanism

1．はじめに

フリーマン・ダイソンは「多様性の科学」を提唱し[1]、その中で生物の多様性の進化の原因を、近代的合成がハードウェアとソフトウェアに分離されたことに求めている。種の保存という視点からは遺伝子の複製に誤りがあってはいけない。一方、人類に代表されるように種の個性はほとんど無限大であるといってもよい。このように無限大の多様性を許容しながら、かつ複製の完全性を確保するという「はなれ技」を達成できるのは、生物が遺伝子の複製の完全性と誤り許容の妥協をハードウェアとソフトウェアとの分業、すなわち遺伝装置と遺伝子との確立によって達成しているからである。すなわち、遺伝装置のハードウェアは厳格に制御され誤りは許されない。一方、ありうべき無限の多様性や誤り許容に関する負担はすべてソフトウェアに転嫁されている。

人類は長い歴史の中でハードウェアの新機軸を創造してきた。中でも、言語、貨幣というハードウェアの創造が果たした役割の重要さは特筆すべきであろう。ある経済圏の中で貨幣というハードウェアは、ほとんど完全に機能する。このような完全なハードウェアを基礎として、あらゆる種類の社会活動、経済活動が可能となった。オーケ・アンダーソンは、人類が空間・時間を克服するための新しいハードウェア（彼の言葉によればロジスティックシステム）の新機軸を創造した時、社会システムが劇的に進化するという仮説を提唱し、そのような劇的な社会システムの進化をロジスティック革命と呼んだ[2]。アンダーソンによれば、そのような革命は有史後過去４回起こっている。すなわち、1）十字軍遠征を契機とする交通革命、2）アムステルダム銀行創設にはじまる国際金融革命、3）産業革命を契機とする産業技術革命、4）現在進行しつつある通信・情報革命である。

新しいロジスティックシステムの創造が社会システムに革命的な変動をもたらす原因は、新しいハードウェアが完全に機能する（地球的規模でそれが実用化され）と同時に、それが社会に新しい行動の多様性をもたらした点にある。さらに、かつて創造されたロジスティックシステムも、時間とともにその機能をより高度化させながら進化している。このように社会システムは、人間の行動の制約をできる限りとり除き、かつより高度の自由度と多様性をもたらす方向に進化しつつあるといっても過言ではなかろう。これまでに述べてきたことをとりまとめれば、社会システムの基本的な特徴をいくつか整理できる。1）ハードウェアとソフトウェアによって構成されること、2）ハードウェアは、ある種の「完全性」を有していること、3）ソフトウェアはシステムの利用方法に多様性をもたらすものであること、4）複数の人間が同時にシステムを利用すること、換言すれば、利用主体がそれぞれ私的な情報と意志決定メカニズムを有すること等があげられよう。すなわち、情報と意志決定が分散化されていることがあげられる。また、5）多くの利用者の間で協同的な相互作用が働き、このことがシステム全体の効率性を決定することも重要な特性であろう。

本研究の最終の目的は、社会システムの基本的構造に関する基礎的な一つの理論的知見を得ることにある。もとより、本研究は緒についたばかりであり今後に残された課題はあまりにも多い。本稿では、このような考え方に基づく研究の第一歩として、社会システムの一般形を形式化するとともに、分散化情報システム、分散化意志決定システムにおける均衡の問題について一つのアプローチを試みることとする。

2．社会システムの形式化

（1）ハードウェアとソフトウェア

社会システムをソフトウェアΞ、ハードウェアΠ、環境eによって構成されるネットワーク(Ξ,Π,e)と定義する。本研究ではハードウェア、ソフトウェアを、情報工学の分野で用いられる用語よりも、より広義な意味で用いることとする。すなわち、ハードウェアは資源、エネルギーを入力したり、財や資源の配分・移動、財・サービスを生産する「メカニクス」である。ハードウェアの技術は完全にソフトウェアによって記述される。ソフトウェアは、ハードウェアの利用方法を規定する一般的なルールの集合と定義する。具体的には、入力された情報・資源・エネルギーとハードウェアの技術の結び付きを決定するルール、社会システムの異なる利用者間の協同現象(synergetics)の様式を規定するルール、異なる利用者間でのコミュニケーションの様式を規定するルール、出力のための処理方法のルールを指定する。

ハードウェアΠは、それを構成する要素空間Ｓ、ネットワーク技術Ｎによって記述できる。ハードウェアに関する知識・情報はそれを利用する人間に対して、基本的には公開されていることを原則とする。利用する側が、ハードウェアに関する知識・情報を持っているかどうかにかかわらず、それを知ろうと思えば知ることができる点に特徴がある。

一方、ソフトウェアΞを社会システムのハードウェアが許容するプログラムの集合と定義する。プログラムはハードウェアの構成要素とシステムに投入される資源を組合せることにより、何等かのアウトプットを出力する。各プログラムはハードウェアを用いるために投入される資源と情報・物質処理のために用いるハードウェアの構成要素の集合(ハードウェアの構成要素空間Sの部分集合)によって特徴づけることができる。ソフトウェアの自由度はハードウェアの技術や利用規則に本質的に依存する。社会システムの特徴は、それを利用する者の便益が、他の利用者の行動に本質的に依存している点である。異なる個人間の自由な相互依存関係が、新しい知識や情報の協同現象の原因となる。社会システムを利用するソフトウェアの自由度が高いほど、このような協同現象の効果は大きくなる。

最後に、社会システムの経済環境eを定義する。ハードウェアを利用する主体の数が有限であると仮定し、その集合を$T:=\{1,---,N\}$と表す。経済環境はシステムを利用する個人の選好関係$\gtrsim$(あるいは効用関数)、情報システム、彼が利用可能なソフトウェアの集合によって特徴づけられる。個人があるソフトウェアを利用して得られる便益は本質的に他人が当該のシステムをどのように利用するかに依存する。このように社会システムは(Ξ、Π、e)により記述することができる。

(2) 情報システムの定形化

社会システムのハードウェアを利用する利用者は、入手可能な情報を用いて期待効用を最大にするようなプログラムを選択する。このとき、プログラムを選択することにより得られる効用を出力するシステムを情報システムと定義する。つまり、情報システムとは各個人がプログラムを用いて入力情報・データ・エネルギー・財を処理し、目的とする効用・便益を出力するシステムを意味する。情報システムがどのような効用をもたらすかは、情報処理を行う目的や内容に依存する。このように情報システムの利用特性を規定する各種の要因をここでは情報と呼ぶこととする。

ロジスティックシステムの利用者tの情報集合をΩ_tと表そう。任意の情報$\omega_t\in\Omega_t$は情報システムの特性を特徴づける。Ω_tは可分距離空間であり、空間上で定義されるボレルσ-集合体を$A_t:=\beta(\Omega_t)$と表す。ここで、$\beta(\cdot)$はボレルσ-集合体を意味する。Ω_t上で定義される測度μ_tにより個人tの情報分布を定義する。測度空間$\Lambda_t=(\Omega_t, A_t, \mu_t)$を個人tの情報空間と定義する。情報空間$\Lambda_t=(\Omega_t, A_t, \mu_t)$は次の条件を満足すると考える。

(仮定1) Λ_tはPolish空間である。すなわち、Λ_tは加法的に完備である。

(仮定2) Λ_tは局所コンパクトである。

(仮定3) μ_tはA_t上のnon-atomic測度である。

つぎに、すべての利用者の情報集合の集合をΩと表そう。任意の$t\in T$に対して、$\Omega-\Omega_t\neq\phi$の時、個人tの情報空間は不完備であると定義する。任意の$\omega\in\Omega$に対して個人tの情報集合の出現を規定する対応関係$\Phi_t(\omega):\omega\to\omega_t\in\Omega_t$を定義する。情報空間に不完備性が存在する場合、利用者は$\Phi_t(\omega')\neq\Phi_t(\omega'')$である場合に限って、$\omega'\neq\omega''$であると判断できる。ここで利用者の情報集合の直積集合を

$$\Theta=\mathop{\times}_{j=1}^{N}\Phi_j(\Omega) \tag{1}$$

と定義する。$\theta\in\Theta$は個々の利用者の情報構造の不完備性を明示的に表現した情報集合であり情報構造と呼ぶこととする。ある時点において、個人tが利用した情報の<u>実現値</u>を$\overline{\omega}_t(=\Phi_t(\overline{\omega}))$と、情報構造を$\overline{\theta}=\mathop{\times}_{j=1}^{N}\Phi_j(\overline{\omega})\in\Theta$と表そう。個人tが利用可能な情報は$\overline{\omega}_t$だけであり、どのような情報構造$\overline{\theta}$が実現しているかは誰も知らない。情報構造$\Theta$に関して位相Aと測度$\mu$を定義する。

$$A:=\mathop{\times}_{j=1}^{N}A_j,\quad \mu:=\bigotimes_{j=1}^{N}\mu_j \tag{2}$$

情報構造Θとその測度μは、それがすべての利用者にとって共通知識[3)]となっている必要は<u>ない</u>。しかし、議論の便宜上、以下では当面の間共通知識となっていると仮定する。この仮定は4.(3)で緩めることとする。

(3) ソフトウェア空間の定形化

個人が利用可能なハードウェアの構成要素空間をSと定義する。各プログラムはそれが利用するハードウェアの構成要素によって特徴づけることができる。Ξはボレルσ-集合体$B:=\beta(S)$を有するPolish空間である。Ξの要素$\sigma\in\Xi$は個人が利用可能なプログラムを表している。この時、可測空間$\Xi=(B, S)$をソフトウェア空間と呼ぶ。さらに、個人tが利用可能なソフトウェア空間をΞ_tと表す。Sがコンパクト距離空間であれば、ソフトウェア空間$\Xi=(B, S)$はコンパクトである。個人tが選択するプログラム集合を確率核(stochastic kernel)$K_t\in\Gamma_t:\Omega_t\times\Xi_t\to[0,1]$として以下のように定義する。

$K_t(\omega_t,\cdot)$ は任意の$\omega_t\in\Omega_t$に対してΞ_t上での確率関数である;

$K_t(\cdot,\sigma_t)$ は任意の$\sigma_t\in\Xi_t$に対してΩ_t上での可測関数である。 (3)

任意の利用者$t\in T$に対して定義される確率核K_tは任意

の情報$\omega_t \in \Omega_t$に対してプログラム選択の混合戦略を規定している。なお、Γ_tは確率核$K_t(\omega_t,\cdot)$の集合であり、個人tの戦略空間と呼ぶ。任意のプログラム集合K_tに対して測度μ_tと確率核K_tを用いて$A_t \otimes B_t$上の測度$\mu_t \otimes K_t$を定義する。Ω_tとΞ_tが可分距離空間を構成することより、戦略空間Γ_tに弱位相が定義できる。すなわち、任意の有界連続関数$h:\Omega_t \times \Xi_t \to R$に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int h d\mu_t \otimes K_t^{(n)} = \int h d\mu_t \otimes K_t \qquad (4)$$

が成立する時その時のみ、戦略空間Γ_t上の確率核の列$(K_t^{(n)} \mid n \in N)$は$K_t \in \Gamma_t$に収束すると定義する。式(4)よりΓ_t上の弱位相に距離が定義できる。また、戦略空間Γの位相をΓ_jの弱位相の直積

$$\Gamma := \mathop{\times}_{j=1}^{N} \Gamma_j \qquad (5)$$

により定義すれば、Γも距離空間となる。以下、戦略空間Γはコンパクト距離空間であると仮定する。

（4）個人行動の定式化

個人tが利用可能なソフトウェアΞ_tは、ハードウェアが許容するものでなければならない。それと同時に他の利用者の行動と彼自身がハードウェアに対して有する情報・知識に依存する。このことを明示的に示すために、個人tが利用可能なソフトウェアの集合を対応$R_t:\Omega_t \times \Xi \to \Xi_t - \{\phi\}$により定義する。対応の像が大きいほど社会システムのflexibilityは大きくなると考える。つぎに、社会システムの技術を定義する。個人tがプログラム$\sigma_t \in \Xi_t$を利用することによって得られる便益は、情報構造$\theta \in \Theta$、他の利用者のソフトウェアの選択行動$\sigma_{-t} \in \Xi_{-t}$、およびハードウェアの技術に依存する。なお、$\Xi_{-t} = (\Xi_1 \times \cdots \times \Xi_{t-1} \times \Xi_{t+1} \times \cdots \times \Xi_N)$である。個人tがプログラムを利用することによって得られる便益をペイオフ関数π_tにより定義する。

$$\pi_t : \Theta \times \Xi \to R \qquad (6)$$

により定義する。$\pi_t(\cdot,\sigma)$は可測関数であり任意の$\sigma_t \in \Xi_t$にたいしてquasi-concaveであると仮定する。すなわち、任意の$\alpha, \theta \in \Theta, \overline{\sigma}_{-t} \in \Xi_{-t}$に対して集合$\{\sigma_t \in \Xi_t \mid \pi_t(\theta,(\sigma_t,\overline{\sigma}_{-t})) > \alpha\}$は凸である。効用関数

$$U_t : R \to R \qquad (7)$$

を定義する。$U_t(\pi_t)$はNeuman=Morgenstern型効用関数であり任意のπ_tに対してquasi-concaveである。

個人のプログラム選択行動を期待効用最大化問題として定義しよう。いま、個人tがある時点において入手できる情報を$\overline{\omega}_t = \Phi_t(\omega) \in \Omega_t$とする。その時、情報構造$\overline{\theta} = \mathop{\times}_{j=1}^{N} \Phi_j(\overline{\omega}) \in \Theta$が実現したと考えよう。個人tが利用可能な情報は$\overline{\omega}_t$であり、彼はどのような情報構造$\overline{\theta}$が実現しているかは知らない。個人tは情報構造$\theta \in \Theta$の生起測度$\mu := \bigotimes_{j=1}^{N} \mu_j$に関する情報を有すると仮定しよう。$A_t \otimes B_t$上の測度$\mu_t \otimes K_t$を用いて測度$Q(K_{-t}:K_t)$を以下のように定義する。すなわち、任意の$K_{-t} = (K_1, \cdots, K_{t-1}, K_{t+1}, \cdots, K_N) \in \Gamma_{-t}$と$K_t \in \Gamma_t$に対して

$$Q(K_{-t}:K_t) = \left(\bigotimes_{j=1}^{t-1} \mu_j \otimes K_j\right) \otimes (\mu_t \otimes K_t) \otimes \bigotimes_{j=t+1}^{N} (\mu_j \otimes K_j) \qquad (8)$$

を定義する。このとき、個人tのソフトウェア選択行動はある$K_{-t} = (K_1, \cdots, K_{t-1}, K_{t+1}, \cdots, K_N) \in \Gamma_{-t}$に対して、期待効用$V_t(K_{-t}, K_t)$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}_{K_t \in \Gamma_t} \{V(K_{-t}, K_t)\} \\ &= \mathrm{Max}\ \{\textstyle\int U_t \circ \pi_t(\theta, \sigma) dQ(K_{-t}, K_t)\} \end{aligned} \qquad (9)$$

を最大にするような$K_t^* \in \Gamma_t$を求める問題として定式化できる。この時、社会システムLは

$$\begin{aligned} L &= (\Xi, \Pi, e) \\ &= \{B, S, \pi_t, (\Omega_t, A_t, \mu_t, R_t, U_t) : t \in T\} \end{aligned} \qquad (10)$$

により完全に記述できる。また、社会システムLにおいて、各利用者が非協力的に競争した場合に実現するナッシュ均衡解を不完備情報下でのシステム均衡（不完備情報均衡と略す）と呼ぶこととする。

3．不完備情報均衡

（1）従来の研究の概要

2．で定形化したような不完備情報下の均衡問題に関してはいくつかの研究の蓄積がある。Harsanyi (1967)[4]の先駆的研究にはじまり、Milgrom and Weber (1980)[5]，Radner and Rosenthal (1982)[6]，Aumann et al. (1983)[7]によって理論的精緻化が図られた。これらの研究は制約条件が存在しないような条件の下での不完備情報均衡の公理化を進めたものである。後二者は有限可算個の戦略を対象としている。さらに、制約条件を明示的にとりあげたゲーム理論に関しては、Wieczorek (1984)[8]が先鞭をつけた。後に、Meister (1990)[9]は制約条件を明示的に考慮したゲーム理論を不完備情報下における均衡問題に拡張している。さらに、Aumann[7]，Meister[9]は、不完備情報ゲームにおける純粋最適戦略の存在可能性について詳細に検討している。彼らは、純粋最適戦略の存在に関して否定的な結論を得ているが、ある特殊なペイオフ関数の下では、最適混合戦略を純粋最適戦略により近似できることを証明している。

一方、Mertens and Zamir (1985)[10]はプレイヤーがペイオフ関数に対して不完全情報を持つような不完備情報ゲームについて研究を行っている。本稿では、Meisterに

よる制約条件付き不完備情報ゲーム理論の枠組の下で、Mertens and Zamirが提案したペイオフ関数を用いた不完備情報ゲームを拡張する。以上のゲーム理論では各プレイヤは情報分布に関する先験的な共有情報を有することを仮定していた。本研究では2．で述べたような社会システムの本質的な特性(分散情報)に着目し、各プレイヤは情報分布に関する先見情報を有さないと考える。プレイヤは日常的な選択行動の反復により各自のペイオフの出現を支配する確率分布に関する合理的期待を形成すると考える。そして、すべてのプレイヤが合理的期待を形成した時、システムに実現する均衡解を合理的期待均衡と定義することとした。以下、本章では、既存の研究の成果に基づいて、以下の議論に必要となるいくつかの事項を補題としてとりまとめるとともに、一般的な状況の下での均衡解の存在性について述べることとする。

(2) 数学的準備

システム均衡を定義するにあたっていくつかの用語を定義しておく。いま、任意の$K:=(K_1,---,K_N)\in\Gamma$に対して、ある個人tの戦略$L_t$が

$$L_t(\omega_t,R_t(\omega_t,K))=1 \qquad (11)$$

を満足する時、L_tを受容可能戦略(admissible strategy)と呼ぶこととする。さらに、すべての個人tの受容可能な戦略$L_t\in\Gamma_t$に対して、

$$V_t(K_{-t}^*,K_t^*)\geqq V_t(K_{-t}^*,L_t) \quad (t\in T) \qquad (12)$$

が同時に成り立つようなナッシュ均衡解 $\{K_t^*\in R_t(\omega_t,K^*)\}$をシステム均衡と定義する。

ペイオフ関数$\pi:\Theta\times\Xi\rightarrow R^N$が条件

(1) $\pi(\cdot,\sigma)$は任意の$\sigma\in\Xi$に対してA－可測である(位相Aに対して可測である);

(2) $\pi(\theta,\cdot)$は任意の$\theta\in\Theta$に関して連続である;

(3) $|\pi_t(\theta,\sigma)|\leqq Z(\theta),\theta\in\Theta,\sigma\in\Xi,t\in T$, ただし、$Z(\omega)$はある有界な連続関数である;

を満足する時、関数πは測度μに対してμ-Carathéodory関数(μ-C-関数と略す)であると定義する。したがって、すべてのμ-C-関数はA⊗Bに関して可測であり、任意の戦略$K\in\Gamma$と測度$\mu\otimes K$に関して積分可能である。ここで、以下の議論で必要となる事項を補題としてとりまとめる。証明の詳細に関しては参考文献[8)9)10)11)]に譲る。

[補題1] 任意のμ-C-関数$\pi:\Omega\times\Xi\rightarrow R^N$に対して定義される関数$V:K\in\Gamma\rightarrow R$

$$V(K)=\int\pi d\mu\otimes K \qquad (13)$$

はすべての$K\in\Gamma$に関して連続である。

つぎに対応関係に関するいくつかの補題をとりまとめておく。ここで$C(\Xi)$を集合Ξのコンパクト部分集合の集合と定義する。対応$F:\Theta\rightarrow C(\Xi)$を位相Aと$\beta(C(\Xi))$に関して可測(A-$\beta(C(\Xi))$-可測)な対応と定義する。このとき以下の補題が成立する。

[補題2]
A-$\beta(C(\Xi))$-可測な対応$F:\Theta\rightarrow C(\Xi)$を考える。この時、集合$\Gamma_F$

$$\Gamma_F:=\{K\in\Gamma\,|\,K(\omega,F(\omega))=1\} \qquad (14)$$

は、nonempty, convexな集合Γのコンパクト部分集合である。

[補題3]
距離空間Eを定義する。対応$F:\Theta\times E\rightarrow C(\Xi)$が条件

(1) $F(\theta,\cdot)$は$\theta\in\Theta$に対して任意の$e\in E$に関して連続である、

(2) $F(\cdot,e)$は任意の$e\in E$に関してA-$\beta(C(\Xi))$-可測である、

を満足すると仮定しよう。この時、対応$\xi:E\rightarrow C(\Xi)$

$$\xi(e):=\Gamma_{F(\cdot,e)} \qquad (15)$$

は$e\in E$において連続である。

(3) 均衡解の存在定理

以上の補題に基づけば以下の定理が証明できる。

[定理1] 均衡解の存在
社会システムLが以下の条件を満足すると仮定する。

(1) (Ω_t,A_t,μ_t)はPolish空間であり、局所コンパクな情報空間である。

(2) μ_tは確率測度である。

(3) $\Xi_t:t\in T$はコンパクト距離空間である。

(4) R_tはCarathéodory対応$\Omega_t\times\Xi\rightarrow C(\Xi_t)$である。

a) $R_t(\cdot,K)$は任意の$K\in\Gamma$に対してA－$\beta(C(\Xi_t))$-可測である。

b) $R_t(\omega_t,\cdot)$は任意のω_tに関して連続である。

(5) ペイオフ関数$\pi_t(\theta,\sigma)$は任意の$\theta\in\Theta,\overline{\sigma}_{-t}\in\Xi_{-t}$において$\sigma_t$に関する準凹な可測関数である。

(6) 効用関数U_tは準凹である。

この時、式(12)を満足するような均衡解$\{K_t^*:t\in T\}$が存在する。

[証明] 補題1より戦略空間$\Gamma:=\bigtimes_{t=1}^{N}\Gamma_t$は、nonempty、凸

かつコンパクトである。集合ξ_tを$K\in\Gamma$に対して

$$\xi_t(K):=\{L_t\in\Gamma_t | L_t\text{はKに関してadmissibleである}\}$$
$$=\{L_t\in\Gamma_t | L_t(\omega_t,R_t(\omega_t,K))=1\} \quad (16)$$

と定義する。この時、補題２，３よりContinuous, convex, compact-valuedな対応$\xi_t:\Gamma\to C(\Gamma_t)$を得る。さらに、$\xi^*:\Gamma\to C(\Gamma)$を

$$\xi^*(K):=\bigtimes_{t=1}^{N}\{L_t\in\xi_t(K) | V_t(K_{-t},L_t)=\max_{L_t'\in\xi_t(K)} V_t(K_{-t},L_t')\} \quad (K\in\Gamma) \quad (17)$$

と定義する。補題１よりV_tは連続であり、ξ^*はnonempty, compact-valuedで上半連続な対応である。さらに、V_tはL_tに関して準凹でありξ^*はcovex-valuedである。したがって、Ky Fanの不動点定理[12]より$K^*\in\xi^*(K^*)$なる$K^*\in\Gamma$が存在する。ξ_tとξ^*の定義より、任意の$t\in T$に対してK_t^*は$K^*\in\Gamma$に対して受容可能(admissible)であり、任意の受容可能なL_tに対して

$$V_t(K_{-t}^*,L_t)\leqq V_t(K_{-t}^*,K_t^*) \quad (18)$$

が成立する。 (Q.E.D)

数学的には、式(12)で定義されるような均衡解は不完備情報ゲームにおけるベイズ=ナッシュ均衡解(Bayesian =Nash equilibria)(Harsanyi=Selten均衡)[4]の概念を混合戦略の下に拡張したものに他ならない。

４．合理的期待均衡

（１）合理的期待形成仮説

以上の均衡解の導出においては、すべての個人がシステムを支配する情報構造θの生起測度$\mu=\bigotimes\mu_t$、ペイオフ関数$\pi_t(\theta,\sigma)$に関する完全情報を有すると仮定していた。しかし、システムの利用者数が多くなると、利用者がこのような完全情報を有するとは考えにくい。むしろ、利用者は彼の日常的なソフトウェアの選択行動を通じて獲得したペイオフ値の変動から間接的に他の利用者の選択行動を推測すると考える方が自然であろう。

各個人はソフトウェアを利用する場合、ソフトウェアを利用することによって得られる効用を事前に想定する。しかし、ソフトウェアの効用が他人がハードウェアをどのように利用するかに本質的に依存しており、彼はソフトウェアの効用を確定的にはとらえられない。利用者が不確実な環境の下でソフトウェアの選択を行う以上、彼はソフトウエェアの不確実な便益に関して何らかの期待を形成する。Muth[13], Lucas[14]等は「合理的主体の長期的な学習行動の結果、彼の主観的な期待は客観的な実現値に一致する」という合理的期待（以下、ＲＥと略す）仮説を提唱した。その後、ＲＥ仮説に関する研究[15)16]が進展し、不確実性下での合理的行動に関する行動仮説として定着しつつある。いま、ロジスティックシステムの利用者が合理的主体であると仮定しよう。彼は、利用可能な情報に基づいて選択可能なソフトウェアの便益を主観的に予測する。ソフトウェアを選択することより獲得した新しい情報は、過去の経験として蓄積される。利用者は日々の選択行動を通じて彼の予測メカニズムを逐次修正していく。この時、一つの長期的な社会システムの均衡概念として、「利用者が考える主観的なソフトウェアの便益の不確実な変動が実際に実現する変動と一致する」ような状態を考えることができる。すなわち、利用者はソフトウェア利用がもたらす便益に関して合理的な期待を形成すると考える。合理的期待の下では、利用者は彼の予測メカニズムを修正する誘因を持たない。このような均衡状態を合理的期待均衡（ Rational Expectation Equilibrium：以下ＲＥＥと略す）と呼ぶ。

（２）不完備ペイオフ情報下での選択行動

利用者ｔのペイオフ関数を次式のように特定化しよう。

$$\pi_t:\bigtimes_{j=1}^{N}\Omega_j\times\bigtimes_{j=1}^{N}\Xi_j\to R \quad (t\in T) \quad (19)$$

さらに、情報空間Θの位相$A=\bigtimes_{j=1}^{N}A_j$に対応する測度μを確率密度関数$f:\bigtimes_{j=1}^{N}\Omega_j\to R_+$に関する有限測度により定義する。すなわち、Jordan測度μを測度積$\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N$上で定義される確率密度関数ｆを用いて

$$\mu=f(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N)<\infty \quad (20)$$

と定義する。当面、すべての利用者は測度μに関する知識を共有していると仮定する。ペイオフ関数 π_tが測度μに関してμ-Carathéodory関数であると仮定する。この時、任意の混合戦略$(K_1,\cdots,K_N)$に対して確率核$K_1\otimes\cdots\otimes K_N$を次のように定義する。

$$K_1\otimes\cdots\otimes K_N(\omega_1,\cdots,\omega_N,\sigma_1,\cdots,\sigma_N):=K_1(\omega_1,\sigma_1)\cdot\cdots\cdot K_N(\omega_N,\sigma_N)$$
$$\theta=(\omega_1,\cdots,\omega_N)\in\Theta,\quad \sigma_t\in\Xi_t \quad (21)$$

この時、個人tの期待効用$V_t:\Gamma\to R$は

$$V_t(K_1,\cdots,K_N):=\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma)d\mu\otimes(K_1\otimes\cdots\otimes K_N) \quad (22)$$

と表現できる。この時、つぎの補題が成立する。

［補題４］期待効用関数$V_t:\Gamma\to R$は連続である。

（証明）仮定より

$$V_t(K_1,\cdots,K_N):=\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma)f(\theta)\cdot d(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_N)\otimes(K_1\otimes\cdots\otimes K_N)$$
$$=\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma)f(\theta)d\bigotimes_{j=1}^{N}(\mu_j\otimes K_j)$$

$$(K_1,----,K_N)\in\Gamma \qquad (23)$$

である。式(20)(21)より任意の$\theta\in\bigtimes_{j=1}^{N}\Omega_j$, $\sigma\in\bigtimes_{j=1}^{N}\Xi_j$に対して関数$U_t^*(\theta,\sigma):=U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma)f(\theta)$は、測度$\mu$に関するCarathéodory関数である。したがって写像

$$(\mu_1\otimes K_1,---,\mu_N\otimes K_N)\to\bigtimes_{j=1}^{N}(\mu_j\otimes K_j) \qquad (24)$$

は連続写像となる。したがって、V_tは補題1より連続となる。 (Q.E.D.)

ここで、社会システムの均衡解を定義する。すなわち、K-受容可能な任意の戦略$L_t\in R_t(\omega_t,K)$に対して

$$V_t(K_1,---,K_{t-1},L_t,K_{t+1},---,K_N)$$
$$\leq V_t(K_1,---,K_{t-1},K_t,K_{t+1},---,K_N) \qquad (25)$$

となる受容可能戦略$K_t\in R_t(\omega_t,K)$がすべてのtに対して存在する時、戦略$K=(K_1,---,K_N)\in\Gamma$をシステム均衡と定義する。定理1より次の系が成立する。

[系1] 均衡の存在
社会システムが定理1の条件、及び式(20),(21)を満足する時、均衡解が存在する。

ここで、条件付きペイオフ関数を導入しよう。

$$W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}):=\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma)f(\theta)d\bigotimes_{j\neq t}\mu_j\otimes K_j \qquad (26)$$

ただし、$(\theta=(\omega_1,---,\omega_N)\in\bigtimes_{j=1}^{N}\Omega_j$, $\sigma=(\sigma_1,---,\sigma_N)\in\bigtimes_{j=1}^{N}\Xi_j$, $K_{-t}=(K_1,---,K_{t-1},K_{t+1},---,K_N)\in\bigtimes_{j=1}^{N}\Gamma_j)$である。この時、個人tの期待効用は

$$V_t(K_1,---,K_N)=\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t})d\mu_t\otimes K_t \qquad (27)$$

と表すことができる。つぎの補題が成立する。

[補題5]
$W_t:\Omega_t\times\Xi_t\to R$を$\mu_t$に関するCaratheodory関数、$F_t:\Omega_t\to C(\Xi_t)$を位相$A_t\otimes\beta(C(\Xi_t))$に関する可測対応と仮定する。この時、すべての個人$t\in T$のK-受容可能な戦略$K_t^*\in\Gamma_{Ft}$がシステムの均衡解であれば、以下の(1)と(2)は同値である。

(1) $\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes K_t^*$
$=\max_{L_t\in\Gamma_{Ft}}W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes L_t \qquad (28)$

(2)測度μ_tの意味でほとんどすべての$\omega_t\in\Omega_t$に対して方程式
$W_t(\omega_t,\sigma_t^*;K_{-t}^*)$
$=\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*) \qquad (29)$
の解σ_t^*は$\sigma_t^*\in \mathrm{spt}K_t^*(\omega_t,\cdot)$を満足する。

ただし、spt Pは確率Pに関して測度1となる確率変数の最小閉集合を表す。

(証明) まず、(2)→(1)を証明する。任意の$L_t\in\Gamma_{Ft}$に対して、$W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)\leq\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*)$。この式の両辺を$\mu_t\otimes L_t$に対して積分しよう。$W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)=\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*)$の両辺を$\mu_t\otimes K_t$に関して積分する。この時、$\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes K_t^*=\max_{\sigma_t\in F_t(\omega_t)}\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes K_t\geq\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes L_t$ が任意の$L_t\in\Gamma_{Ft}$に対して成立する。ゆえに、(1)が成立。今度は反対に(1)が成立すると仮定しよう。対応$G_t:\Omega_t\to C(\Xi_t)$を任意の$\omega_t\in\Omega_t$に対して$G_t(\omega_t)=\{\sigma_t\in F_t(\omega_t)|W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)=H_t(\omega_t;K_{-t}^*)\}$を定義する。$H_t(\omega_t;K_{-t}^*)=\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*)$は、$A_t$に関する可測関数である。この時、$G_t$は可測グラフであり、可測選択子$f_t:\Omega_t\to\Xi_t$が存在する。純粋戦略$\varepsilon_f$($\varepsilon_f$の意味については後述、5.(1)参照)は、$\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes\varepsilon_f=\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*)d\mu_t$を満足する。一方、$K_t\in\Gamma_t$だから$\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes K_t=\int(\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)K_t(\omega_t,d\sigma))d\mu_t$。$W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)\leq\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*)$より、$\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes K_t\geq\int W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)d\mu_t\otimes\varepsilon_f$。ゆえに、$W_t(\omega_t,\sigma_t;K_{-t}^*)=\max_{\sigma_t'\in F_t(\omega_t)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*)$。したがって、(2)が成立する。 (Q.E.D.)

系1および補題6より直ちに次の定理を導ける。

[定理2]
すべての個人$t\in T$のK-受容可能な戦略$\sigma_t\in R_t(\omega_t,K^*)$が任意の$\omega_t\in\Omega_t$に対して
$W_t(\omega_t,\sigma_t^*;K_{-t}^*)=$
$\max_{\sigma_t'\in R_t(\omega_t,K^*)}W_t(\omega_t,\sigma_t';K_{-t}^*) \qquad (30)$
を満足し、$\sigma_t^*\in\mathrm{spt}\ K_{-t}^*$となるような均衡解$K^*=(K_1^*,---,K_N^*)$が存在する。

定理2より、各個人が自分のペイオフ関数に関する正確な情報を持ちえず、ペイオフ値(効用値)の変動だけに基づいてプログラムを選択する場合、純粋最適戦略により均衡解を特徴づけることができる。

(3) 合理的期待均衡解の存在

以上の議論では、利用者は測度$\mu=\bigotimes_{j=1}^{N}\mu_j$に関する完全情報を共有することを前提としていた。システムを利用する利用者が多くなれば、利用者が測度μに関する完全情報を有するとは考えにくい。むしろ、利用者は自己のペイオフの実現結果より間接的に他人が保有する情報や行動を推測すると考えるほうが自然である。したがって、

各利用者はペイオフπ_tの分布状態に関する情報に基づいて各プログラムの期待効用を推測していると考える。

仮定よりペイオフ関数$\pi:\Theta\times\Xi\rightarrow R^N$は測度$\mu$に関する$\mu$-C-関数である。したがって、ペイオフ関数は$A\otimes B$に関して可測であり、任意の戦略$K\in\Gamma$と測度$\mu\otimes K$に関して積分可能であり、かつ$\theta\in\Theta$に関して連続である。したがって、関数の像空間$R^N$上のJordan測度を自然に定義できる。いま、ペイオフ空間R^N上の可測空間(Δ,ρ)を、ボレルσー集合体$\rho=\beta(\Delta)$により定義する。ここで、ペイオフ関数$\pi:\Theta\times\Xi\rightarrow R^N$が測度空間$((\Theta\times\Xi),(A\otimes B),(\mu\otimes K))$より$R^N$上の可測空間$(\Delta,\rho)$への可測関数であることに着目しよう。したがって、$\pi^{-1}(\rho)\subset(A\otimes B)$が成立する。測度空間$((\Theta\times\Xi),(A\otimes B),(\mu\otimes K))$は測度$(\mu\otimes K)$に関して確率空間を構成している($\int_{(\Theta\times\Xi)}d\mu\otimes K=1$)ことは自明である。いま、確率空間$((\Theta\times\Xi),(A\otimes B))$から$(\Delta,\rho)$への関数$\pi:\Theta\times\Xi\rightarrow R^N$が与えられた時、任意のK-受容可能な確率核$K\in R(\omega,K(\omega))$と任意の$\upsilon\in\rho$に対して像関数(image function) $\tau(\upsilon;K)$

$$\tau(\upsilon;K)=(\mu\otimes K)\circ\pi^{-1}:\Delta\rightarrow R_+^N \tag{31}$$

を定義する。この時、$\tau(\upsilon;K)$は(Δ,ρ)上で定義された像測度(確率測度)となる。また、(Δ,ρ,τ)はπによって$((\Theta\times\Xi),(A\otimes B),(\mu\otimes K))$から誘導された確率空間である。ここで、集合$\{\pi^{-1}(\upsilon):\upsilon\in\rho\}$は$(A\otimes B)$に含まれる集合族である。これが完全加法族になることは容易に示すことができる。以下、これをπによって誘導された$(A\otimes B)$の加法族と呼び$(A\otimes B)_\pi$と表す。

[補題6] (Doob-Dykin Lemma)[18]
可測空間$((\Theta\times\Xi),(A\otimes B))$から可測空間$(\Delta,\rho)$への$A\otimes B$-可測関数$\pi$と$(\Theta\times\Xi)$上で定義された$A\otimes B$-可測関数$U^*$が$(A\otimes B)_\pi$-可測となるための必要十分条件は$\Delta$で定義された$\rho^-$可測関数$U$を適当にとればすべての$\theta\times\sigma\in(\Theta\times\Xi)$に対して$U^*=U\circ\pi(\theta\times\sigma)$が成立することである。

補題6よりつぎの補題が導ける。

[補題7]
関数$\tau_t:=(\mu\otimes K)\circ\pi_t^{-1}:\Delta\rightarrow R_+$が像関数(image function)と関数$U_t:\Delta\rightarrow R$が$\rho$-可測であれば任意の$K\in R(\omega,K)$に対して

$$\int_{(\Theta\times\Xi)}U_t\circ\pi_t(\omega,\sigma)d\mu\otimes(K_1\otimes\cdots\otimes K_N)$$
$$=\int_\Delta U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;K) \tag{32}$$

が成立する。

(証明) 任意の$A\in\rho$上において$U_t(\upsilon_t)=\lambda_{A_{it}}(\upsilon_t)$となる階段関数$\lambda_{Ai}$に対して式(32)の左辺は

$$\int_{(\Theta\times\Xi)}\lambda_{A_{it}}\circ\pi_t(\omega,\sigma)d\mu\otimes(K_1\otimes\cdots\otimes K_N)$$
$$=\int_{(\Theta\times\Xi)}\lambda_{\pi_t^{-1}(A)}d\mu\otimes(K_1\otimes\cdots\otimes K_N)$$
$$=\int_\Delta\lambda_{A_{it}}d\tau_t(\upsilon_t;K)=\int_\Delta U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;K)$$

となる。U_tが階段関数$U_{tn}:=\Sigma_{i=1,n}\alpha_i\lambda_{A_{it}}(\alpha_i\geqq 0)$であると仮定すれば、$\tau_t$が積分可能で$\sigma$-加法的であることより、式(32)は明らかに成立する。さらに、関数$U_t\geqq 0$が可測であれば、$0\leqq\lim_{n\rightarrow\infty}U_{tn}\rightarrow U_t$となる階段関数$U_{tn}$が存在する。したがって、Lebesgue単調収束定理より式(32)が成立する。任意の可測関数 $U_t=U_t^+-U_t^-$は可測関数U_t^+, $U_t^-(U_t^+,U_t^-\geqq 0)$の和であり可測である。したがって、任意の$U_t$に対して式(32)が成立する。　(Q.E.D)

ここで、$K_{-t}\in\Xi_{-t}$を与件としよう。任意の$K_t\in R_t(\omega_t,K)$に対して個人tの条件付き像測度$\tau_t(\upsilon_t;K_t,K_{-t}):\Delta\rightarrow R_+$を

$$\tau_t(\upsilon_t;K_t,K_{-t}):=Q(K_{-t}:K_t)\circ\pi^{-1} \tag{33}$$

と定義する。ただし、$Q(K_{-t}:K_t)=\mu\otimes(K_1\otimes\cdots\otimes K_{t-1}\otimes K_t\otimes K_{t+1}\otimes\cdots\otimes K_N)$である。この時、定理1、補題6，7よりつぎの定理が成立する。

[定理3] (合理的期待均衡の存在)
像関数$\tau_t(\upsilon_t;K_t,K_{-t}):\Delta\rightarrow R_+$が$\rho$-可測であり、関数$U_t:\Delta\rightarrow R$が$(A\otimes B)_\pi$-可測であれば、すべての$t\in T$と任意の$L_t\in R_t(\omega_t,K)$に対して

(1) $$\int_{(\Theta\times\Xi)}U_t\circ\pi_t(\omega,\sigma)dQ(K_{-t}:K_t)=\int_\Delta U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;L_t,K_{-t}^*) \tag{34}$$

(2) $$\int_\Delta U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;K^*_t,K_{-t}^*)\geqq\int_\Delta U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;L_t,K_{-t}^*) \tag{35}$$

が成立する$K^*=(K_1^*,\cdots,K_N^*)\in R(\omega,K)$が存在する。

いま、関数$\tau_t^\circ(\upsilon_t;L_t):\Delta\rightarrow R_+$を個人tが戦略$L_t\in R_t(\omega_t,K)$の下で予測する条件付き像測度であると考えよう。個人$t\in T$の日常的なプログラム選択行動の繰返しにより、$\tau_t^\circ(\upsilon;L_t):\Delta\rightarrow R_+$が長期的な均衡解において実現する客観的な像測度$\tau_t(\upsilon_t;K_t,K_{-t}^*)$に一致したとしよう。この時、個人tはペイオフ値の変動に関して合理的期待を形成すると呼ぶこととする。個人tの合理的期待τ_t^*は長期的均衡において実現する像測度

$$\tau_t^*(\upsilon_t;L_t):=Q(K^*_{-t}:L_t)\circ\pi_t^{-1} \tag{36}$$

として定義できる。定理3はすべての個人が合理的期待を有する場合、合理的期待が実現する客観的なペイオフの変動に一致し、このような合理的期待の下でシステムに均衡解(合理的期待均衡解)が存在することを保証している。さらに、定理2より測度μに関してほとんどすべてのθに関して純粋戦略による均衡解が存在することが保証される。

5．離散型システムにおけるREE

着目している社会システムのハードウェアの構成要素集合Sの濃度が可算有限個であると仮定する。ソフトウェアはハードウェアの構成要素の部分集合の集合C(S)として規定される。この時、空間$\Xi_0=(C(S), S)$を離散的ソフトウェア空間と呼ぶこととする。さらに、個人tの離散的ソフトウェア空間を$\Xi_{0t}=(C(S_t), S_t)$と呼ぶことにする。ここで、離散的ソフトウェア空間における離散的戦略$K_0\in\Gamma_0$を定義する。Γ_0は離散的戦略空間である。ソフトウェア集合C(S)の濃度を$r\in N$としよう。$\sum_{i=1}^{r}\alpha_{it}(\omega_t)=1$となる確率$\alpha_{it}(\omega_t)\ (i=1,---,r):\Omega_t\to[0,1]$と可測関数$f_{it}\ (i=1,---,r):\Omega_t\to\Xi_{0t}$を定義する。離散的戦略$K_{0t}(\omega_t,\cdot)\in\Gamma_{0t}$を

$$K_{0t}(\omega_t,\sigma_{0t})=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{it}(\omega_t)\,\varepsilon_{f_{it}}(\omega_t) \tag{37}$$

と定義する。ここに、$\sigma_{0t}\in\Xi_{0t}$である。また、$\varepsilon_{f_{it}}(\omega_t)$は任意の$\omega_t$に対して離散的戦略$\sigma_{0t}=i$の時のみ、点測度$f_{it}(\omega_t)=1$を与える特性関数である。この時、任意の離散的戦略$K_{0t}\in\Gamma_{0t}$を便宜的に

$$K_{0t}:\gamma_t(f_1,---,f_r,\alpha_1,---,\alpha_r)(\omega_t,\sigma_{0t}) \tag{38}$$

と表記しよう。ここで、個人tの期待効用$Vt(\gamma_t)$を

$$V_t(\gamma_t)=\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma_0)\bigotimes_{j=1}^{N}d\mu_j\otimes\gamma_j(\omega_j,d\sigma_{0j}) \tag{39}$$

と表そう。すべての$t\in T$と任意の$\gamma_t'\in\Gamma_{0t}$に対して

$$V_t(\gamma_1^*,---,\gamma_{t-1}^*,\gamma_t',\gamma_{t+1}^*,---,\gamma_N^*)$$
$$\leqq V_t(\gamma_1^*,---,\gamma_N^*) \tag{40}$$

が成立する時、$\gamma^*\in\Gamma_0$を離散的均衡解と呼ぶ。

[補題8] (Meister, 1990)[9]

任意の$K_0\in\Gamma_0$, $\pi\in L^N$, および可測なグラフを有する対応$F:\Omega\to\Xi_0$に対して

$$K_{0t}(\omega,F(\omega))=1 \tag{41}$$

を仮定しよう。この時、任意の$\theta\in\Theta$に対して条件

(1) $$\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma_0)d\mu\otimes\gamma(\theta,d\sigma_0)=$$
$$\int U_t\circ\pi_t(\theta,\sigma_0)d\mu\otimes K_0(\theta,d\sigma_0) \tag{42}$$

(2) $$f_1(\theta),---,f_r(\theta)\in F(\theta) \tag{43}$$

を満足するような離散的戦略$\gamma(f_1,---,f_r,\alpha_1,---,\alpha_r)$が存在する。ただし、$L^N$は任意の可測関数$\pi:\Theta\times\Xi_0\to R^N$の集合である。

補題8より式(42)(43)を特徴づけるような離散的戦略γが存在することが明らかである。この時、離散型システムの均衡問題は4．で述べた均衡問題の特殊形に該当する。したがって、定理1、系1より直ちに以下の系を導出することができる。

[系2] 離散的均衡解の存在

社会システムLが以下の条件を満足すると仮定する。

(1) (Ω_t, A_t, μ_t)はPolish空間であり、局所コンパクな情報空間である。

(2) μ_tは確率測度である。

(3) $\Xi_{0t}:t\in T$は離散的ソフトウェア空間である。

(4) ペイオフ関数$\pi_t(\theta,\sigma)$はσ_tに関して準凹な可関数である。

(6) 効用関数U_tは準凹である。

この時、式(12)を満足するような均衡解$\{\gamma_t^*:t\in T\}$が存在する。

離散的戦略が純粋戦略である場合には、$\varepsilon_f=\gamma(f,1)$が成立する。このような純粋戦略が一意的に決定できるとは限らないが、離散的混合最適戦略と同値な期待効用を与える純粋最適戦略が存在する。このような純粋戦略の存在性に関する議論は本稿の域をこえるので、ここではとりあげないこととする。さらに、4.(3)と同様な方法で合理的期待均衡解の存在を示すことができる。ここでは、系として示すにとどめる。

[系3] (合理的期待離散均衡解の存在)

像関数$\tau_t(\upsilon_t;\gamma_t,\overline{\gamma}_{-t}):\Delta\to R_+$が$\rho$-可測であり、関数$U_t:\Delta\to R$が$\rho$-可測であれば、すべての$t\in T$と任意の$\gamma_t'\in F_t(\omega_t,\gamma)$に対して

(1) $$\int_{(\Theta\times\Xi_0)}U_t\circ\pi_t(\omega,\sigma)dQ_0(K_{-t}:K_t)$$
$$=\int_{\Delta}U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;\gamma_t',\overline{\gamma}_{-t}^*) \tag{44}$$

(2) $$\int_{\Delta}U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;\gamma_t^*,\overline{\gamma}_{-t}^*)\geqq$$
$$\int_{\Delta}U_t(\upsilon_t)d\tau_t(\upsilon_t;\gamma_t',\overline{\gamma}_{-t}^*) \tag{45}$$

を満足するような離散的戦略$\gamma^*=\{\gamma^*_t(f_1,---,f_r,\alpha_1,---,\alpha_r):t\in T\}$が存在する。$Q_0(K_{-t}:K_t)=\mu\otimes(\overline{\gamma}_1\otimes---\otimes\overline{\gamma}_{t-1}\otimes\gamma_t\otimes\overline{\gamma}_{t+1}\otimes---\otimes\overline{\gamma}_N)$である。

6．合理的期待均衡の具体例[19]

（1）ネットワーク構造の特定化

ネットワークのハードウェアの離散的な構成要素の集合をSとする。可能な離散的ソフトウェアの集合をΞ、利用者の集合を$T=\{1,---,N\}$とする。プログラムaが利用するハードウェアの構成要素の集合をκ_aと定義する。また、個人tの戦略空間をΓ_{0t}と定義しよう。ここで、プレイヤが純粋戦略を採用すると仮定しよう。個人tが$\overline{\omega}_t$の下で選択するプログラム$a\in\Gamma_{0t}$を選択し、残りのプレイヤが戦略$\overline{\gamma}_{-t}{}^{*}$を採用したとしよう。ここで、$\overline{\gamma}_a(\theta)=\{\overline{\gamma}_1(\omega_1),---,\overline{\gamma}_{t-1}(\omega_{t-1}),a,\overline{\gamma}_{t+1}(\omega_{t+1}),---,\overline{\gamma}_N(\omega_N)\}$と定義しよう。さらに、個人tがプログラムaを選択した場合の期待効用$V_{at}(\overline{\omega}_t)$を

$$V_{at}(\overline{\omega}_t)=\int U(\pi_a(\overline{\gamma}_a(\theta))d\mu+\overline{\omega}_{at} \tag{46}$$

と特定化しよう。$d\mu:\bigtimes_{j=1}^{N}d\omega_j$、$\pi_a$:プログラムaの利用によりもたらされる便益である。$E[\omega_{at},\omega_{a't'}]=0(a_t,a_t'\in\Xi_{0t};t,t'\in T)$を仮定する。私的情報が独立である場合、情報は他人の行動に関する情報を伝達しない。プログラムaに係わる私的情報を確率変数ω_{at}で表し、生起確率密度関数$\phi(\omega_{at})$が互に独立な分散$1/\lambda^2$のワイブル分布$f(\omega_{at})=\lambda\exp(-\lambda\omega_{at})\exp(-\exp(-\lambda\omega_{at}))$に従うと仮定しよう。

一方、π_aに関するREが平均$\mu_a{}^{*}$，分散$\sigma_a{}^{2*}$の正規分布ϕに従うと仮定する。のちに、線形ペイオフ関数の下ではπ_aに関するREχ^{*}が正規分布に従うことを示す。危険回避度一定の効用関数$U(\tau)=-\exp(-\xi\tau)$を仮定する。REχ^{*}の下での個人tのプログラム$a\in\Gamma_{0t}$に対する期待効用(46)を

$$V_{at}(\omega_t:\chi^{*})=\mu_a{}^{*}+\eta(\sigma_a{}^{2*})+\omega_{at} \tag{47}$$

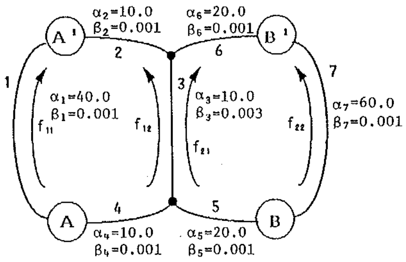
と表現しよう。$\eta(\cdot)$はリスクプレミアムであり$\eta(\sigma_a{}^{2*})=-\sigma_a{}^{2*}U''/2U'(>0)$と定義する。絶対危険回避度が一定$(\xi=U''/2U')$の場合、$\eta(\sigma_a{}^{2*})=-\xi\sigma_a{}^{2*}/2$(定数)となる。RE$\chi^{*}$と情報$\overline{\omega}_t$が実現した時に彼が選択するプログラム$\gamma_t(\overline{\omega}_t:\chi^{*})$は

$$\gamma^{*}{}_t(\overline{\omega}_t:\chi^{*})=\arg\max_a\{V_{at}(\omega_t:\chi^{*})\} \tag{48}$$

となる。式(47)の右辺に含まれる$\mu_a{}^{*},\sigma_a{}^{2*}$は各プログラムの便益のRE値とその分散を示しており未知数である。RE仮説の下では、その値はそれぞれ実際に実現する値と一致する。式(46)より任意のtと$\overline{\omega}_t$に対して

$$\gamma^{*}{}_t(\overline{\omega}_t:\chi^{*})=\arg\max_a\{\int U[\pi_a(X(\theta:\chi^{*}))]\phi(\theta)d\mu+\omega_{at}\} \tag{49}$$

が成立するようなχ^{*}が存在しなければならない。換言



図－1　配分対象ネットワーク

すれば、REEを求める問題は常に式(49)が成立するような$\mu_a{}^{*},\sigma_a{}^{2*}$を求める問題に帰着する。なお、$\pi_a(\cdot)$:プログラムaのペイオフ関数、$X(\theta:\chi^{*})$:合理的情報システム$\chi^{*}$と情報構造$\theta$の下でプログラムzの利用者数を表すベクトル$X(\theta:\chi^{*})=\{\Sigma_{t\in T}\delta_a[\gamma^{*}{}_t(\omega_t:\chi^{*})]:a\in\Gamma_0\}$である。$\delta_a$はプログラム$\gamma^{*}{}_t(\omega_t:\chi^{*})$がaと一致する時に1、そうでない時に0をとる関数である。

（2）REEモデルの導出

ロジスティックシステムを利用する個人の総数をNとしよう。すべての個人が選択可能なプログラム集合が同一であると仮定し、その集合をΞと表そう。各プログラムを利用する個人の総数を$q=(q_1,---,q_M)$と表記する。式(47)において情報ω_{at}が独立なワイブル分布に従って分布するとしよう。この時、ある個人がプログラム$a\in\Xi$を選択する確率P_aは

$$P_a=\mathrm{Prob}\{EU_a\geq EU_b;b\in\Xi\}$$

$$=\frac{\exp\{\lambda EU_a\}}{\Sigma_{b\in\Xi}\exp\{\lambda EU_b\}} \tag{50}$$

$EU_a=\mu_a-\xi\sigma_a{}^2/2$である。各プログラムの利用者が$q=(q_1,---,q_M)$となる同時生起確率は

$$P(q)=N!\Pi_{a\in\Xi}(p_a)^{q_a}/q_a! \tag{51}$$

となる。利用者の数が十分多い場合、各プログラムの利用者の分布は期待値$E[q]$、共分散行列Σを持つ正規分布$MVN(E[q],\Sigma)$より近似できる。$E[q]=\{E[q_a]\}$であり、その各要素は

$$E[q_a]=NP_a \tag{52}$$

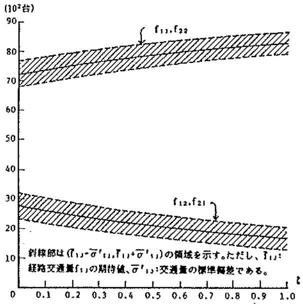
となる。共分散行列の各要素は次のようになる。

$$\mathrm{var}[q_a]=NP_a(1-P_a)$$

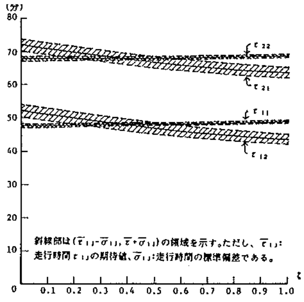
$$\mathrm{cov}[q_a,q_{a'}]=-NP_aP_{a'}\quad(a\neq a') \tag{53}$$

いま、ハードウェアの各構成要素zの利用によってもたらされる便益が

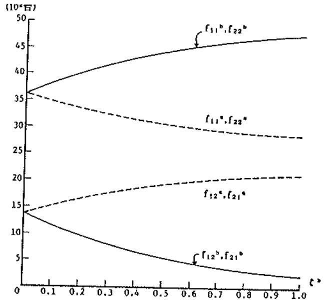
$$\pi_z=\alpha_z+\beta_z(\Sigma_{a\in\Xi}\delta_{a,z}q_a) \tag{54}$$



図－２　経路交通量とξの関係（Case 1: λ=0.3)



図－３　走行時間とξの関係(Case 1: λ=0.3)



図－４　経路交通量とξの関係(Case 2: λ=0.3)

で表されると仮定しよう。$\delta_{a,z}$はプログラムaが構成要素zを利用する時1、そうでない時0を取る変数である。この時、客観的に実現する各構成要素の便益の期待値$\bar{\mu}_z$およびその分散$\bar{\sigma}_z^2$は

$$\bar{\mu}_z=\alpha_z+\beta_z N\Sigma_a \delta_{a,z} P_a$$
$$\bar{\sigma}_z^2=\beta_z^2 N\Sigma_a \delta_{a,z} P_a(1-P_a) \qquad (55)$$

となる。したがって、各プログラムの便益の期待値$\bar{\mu}_a$およびその分散$\bar{\sigma}_a^2$は

$$\bar{\mu}_a = \Sigma_{z\in\kappa_a} \bar{\mu}_z \ , \ \bar{\sigma}_a^2 = \Sigma_{z\in\kappa_a} \bar{\sigma}_z^2 \qquad (56)$$

となる。$\bar{\mu}_a, \bar{\sigma}_a^2$が選択確率$P=\{P_a\}$の関数となることを明示的に示すために$\bar{\mu}_a(P), \bar{\sigma}_a^2(P)$と表記する。系３より合理的期待$(\mu_a^*, \sigma_a^{2*})$はすべての$a\in\Xi$に対して

$$\gamma^*{}_t(\bar{\omega}_t : \chi^*)=\arg\max_a \{EU_a(P)+\bar{\omega}_t\} \qquad (57)$$

を満足する$(\bar{\mu}_a(P^*), \bar{\sigma}_a^2(P^*))$として求まる。$EU_a(P)=\bar{\mu}_a(P)-\xi\bar{\sigma}_a(P)^2/2$である。式(57)がすべての$\bar{\omega}_t$に対して成立する。式(57)の両辺を$\bar{\omega}_t$に関して積分しよう。この時、ＲＥＥは

$$P_a=\frac{\exp\{\lambda EU_a(P)\}}{\Sigma_{b\in\Xi}\exp\{\lambda EU_b(P)\}} \qquad (58)$$

を同時に満足する$P^*=\{P_a^*\}$ $(a\in\Xi)$として求めることができる。ＲＥＥモデルではプログラム選択行動の確率、および各ハードウェアの利用者数の確率分布が均衡解として求まる。均衡条件(58)は、利用者がプログラムを選択することにより得られる便益の分布に対する主観的期待が、その客観的な分布状態と一致するための条件を示している。ＲＥＥではあくまでも事前の期待において均衡が成立している。利用者がその時々に実現する(他人に知られない)私的情報に基づいてプログラム選択する以上、各時点で実現するプログラム選択行動に静学的な均衡が生じることは期待できない[20]。しかし、長期的には利用者行動の集計結果の分布に関する利用者の期待に均衡が生じ、長期的に実現するプログラム選択行動の分布を式(58)を用いて予測することが可能となる。

（３）数値計算事例の概要

数値計算事例として図－１に示す離散的ネットワークをとりあげる。この場合、このネットワークの利用形態を示すプログラムは移動経路によって示される。また、ソフトウェア空間は利用可能な経路の集合となる。さらに、利用者をＯＤが異なる二つのグループに分類する。各利用者グループは異なった戦略空間を有していると考えることができる。このように離散的ネットワークは本稿でこれまで考察してきたようなロジスティックシステムの典型例と考えることができる。

式(58)によって求まるＲＥＥの特性を数値計算によって分析しよう。式(58)の右辺を$F(P)=\{f_a(P):a\in\Xi\}$と表記する。この時、$F(P)$はコンパクト集合$D=\{P|\Sigma_a P_a=1\}$上で定義される連続写像である。したがって、Brouwerの不動点定理[21]より式(58)に不動点が存在することが保証される。いま、図－１に示すようなネットワークを考えよう。要素リンクの便益関数$\upsilon_z=-\alpha_z-\beta_z(\Sigma_{a\in\Xi}\delta_{a,z}q_a)$の各パラメータ値は図－１に示すとおりである。利用者を異なるＯＤを持つ二つのグループに分解する。計算ケースとして、1)ドライバーが均質な場合(Case1)、2)ドライバーが均質でない場合(Case2)を考える。Case2ではドライバーをa)危険中立型(ａ群)、b)危険回避型(ｂ群)の二つのグループに分類する。

１）利用者が均質な場合 (Case １)

(ペア１:A-A'),(ペア２:B-B')の利用者をそれぞれ10000単位とする。図-1に示すように経路を定義し各経路を利用する利用客数を$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$と表す。図-2は利用者の絶対危険回避度$\xi=-U''/U'$とＲＥＥの関係を示している。ξ値が大きくなる程、リスクが大きい(β_zが大きい)要素リンク３を含む経路の利用者数f_{12}, f_{21}が減少する。利用者の費用の変化を図－３に示している。

２）ドライバーが均質でない場合 (Case ２)

図-4はｂ群の利用者の絶対危険回避度ξ^bと均衡解の

関係を示している。ξ^b値が大きくなる程、確実性を重視するｂ群の利用客は要素リンク３を通過する経路を避ける傾向が強くなる。すなわち、利用者数f_{12}^b,f_{21}^bは減少していく。このことより、ｂ群の利用者が確実性を重視する程、本来利便性の高いはずの経路が危険中立的なａ群の利用者に占拠されるメカニズムが理解できる。

７．おわりに

本研究では、分散情報、分散意志決定下における社会システムの均衡に関する理論的な分析枠組を提案した。本研究の最終的な目的は、社会システムにおける情報の役割を積極的に分析できるような新しい情報均衡理論を開発することにある。このような均衡理論、公共主体が提示する情報が社会システムの各構成員の行動に及ぼすメカニズムについて分析するために基礎的な分析枠組を提供しうると考える。このような研究は情報化社会の基礎的なメカニズムを研究していくうえでの基礎研究となりうると考える。本研究は緒についたばかりであり、今後に残された研究課題も数多く存在する。すなわち、１）ＲＥＥの存在条件と一意性、およびその局所的・大域的安定性に関する理論的検討、２）ＲＥの形成メカニズムに関する研究、３）共有情報・公共情報の取扱い等が不可欠である。このように今後に残された研究課題は多いが、本稿で提案した分析枠組は分散情報下における個人のプログラム選択行動や社会システムの均衡に関する研究の方向づけに寄与しうると考える。

参考文献

1) Freeman J. Dyson:Infinite in All Directions, Harper & Row, Publishers, 1988.
2) Åke E.Andersson:Presidential Address; The Four Logistical Revolution, Papers of the Regional Science Association, Vol.59,pp.1-12,1986.
3) Aumann, R.: Agreeing to disagree,Annals of Statistics,Vol.4,pp.1236-1239,1976.
4) Harsanyi, J.C.:Games with incomplete information played by Bayesian' players, Management Science, No.I,II,III, Vol.14, pp.159-182,320-334,486-502, 1967-1968.
5) Milgrom,P.and Weber,R.:Distribution strategies for game with incomplete information; Math. of Oper. Research,Vol.10,No.4,pp.619-632,1985.
6) Radner R. and Rosenthal, R.W.: Private information and pure-strategy equilibria; Math. of Oper. Research, Vol.7,No.3,pp.401-409,1982.
7) Aumann,R.J., et al.: Approximate purification of mixed strategies; Math. of Oper. Research, Vol.8,No.3,pp.327-341,1983.
8) Wieczorek,A.:Constrained and indefinite games and their applications; Institute of Computer Science, Polish Ac.of Science, 1984.
9) Meister,H.:The Purification Problem for Constrained Games with Incomplete Information, Lecture Notes,Vol.295,Springer-Verlag,1990.
10) Mertens,J.-F.and Zamir,S.:Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information, I.Jour.of Game Th.,Vol.14,pp.1-29,1985.
11) 丸山徹:均衡分析の数理、日本経済新聞社,1985.
12) Ky Fan:Fixed-point and minimax theorem in locally convex topological linear spaces,Proc. of the Nat. Ac. of Science 38, 121-126, 1952.
13) Muth, J. F.: Rational expectations and the theory of price movements,Econometrica, Vol. 29,pp.315-335,1961.
14) Lucas,R.E.Jr.:Asset prices in an exchange economy, Econometrica, Vol.46,pp.1429-1445,1978.
15) Sheffrin, S. M.: Rational Expectations, Cambridge University Press,1983.
16) Lippman,S.A.et al.:Economics of Uncertainty, in Arrow,K.J. et al.eds, Handbook of Mathematical Economics,Vol.I,pp.211-278,1982.
17) Rao,M.M.:Probability Theory with Applications,Academic Press,Inc.,1984.
18) Doob,J.L. Stochastic Processes, Wiley, 1953.
19) 小林潔司:不完備情報下における交通均衡に関する研究、土木計画学研究・論文集、Vol.8,(登載決定), 1990..
20) Postlewaite,A. and Schmeidler,D.:Differential Information and Strategic Behavior in Economic Environments, in Groves, T.et al. eds.:Information, Incentives, & Economic Mechanisms,Basil Blackwell, 1987.
21) Takayama,A.:Mathematical Economics, Chapter 4,The Dryden Press, Hinsdale,Ill,1974.