

直交射影適応アルゴリズムを用いた適応制御系設計

山本 祥弘・奥山 佳史・塩津 伸豪

生産機械工学科

(1987年9月1日受理)

Adaptive Control System Synthesis via an Orthogonal Projection Adaptive Algorithm

by

Yoshihiro YAMAMOTO, Yoshifumi OKUYAMA and Shingo SHIOTSU

Department of Mechanical Engineering

(Received September 1, 1987)

A synthesis method for adaptive control system and an adaptive algorithm are proposed.

The synthesis method presented here is the simplest one among the other methods already reported and includes the freedom of the design parameters to deal with an uncertainty like a system noise, etc. The adaptive algorithm is made up based on the method of schmidt's orthogonalization well known in the field of linear algebra and is called an orthogonal projection adaptive algorithm. This algorithm acts as the minimum time parameter identifier which is valid not only for constant parameters but also for varying parameters.

Details and some extension are examined by the simulation studies.

Key words : Adaptive control, Adaptive algorithm, MRACS, Adaptive parameter identifier, Orthogonal projection adaptive algorithm.

1. はじめに

一般に制御系の設計は、制御対象（プラント）の動特性を表す数学モデル（伝達関数、状態方程式など）をもとにして進められるので、プラントの動特性は設計に先立って十分によく把握されていなければならない。しかし、実在のプラントの中には、環境条件あるいは動作条件に応じて動特性に変動をきたし、前もってこれを正確に知ることができないものが多々ある。例えば、航空機や船舶の自動操縦、電動機の負荷変動による影響などはよく知られている。

プラントの動特性の変動が比較的小さい場合には、フィードバック制御系固有の外乱抑制効果により、ある程度は、その影響を抑えることができる。また、感度論的立場からその特性変動の影響の少ない構造を持つ制御系を設計することもできる。しかし特性変動が大きい場合には、制御則を固定した従来の制御方式ではもはや対処できず、制御系としての性能は著しく低下し、場合によっては不安定になってしまうことも起こり得る。このような場合に、プラントの特性変動に応じてコントローラのパラメータをオンライン的に自動調整し、制御系としての性能を常に最良の状態に保持するような制御方式として、適応制御の研究が進められてきている。

適応制御の方式としては、これまで各種各様のものが提案されてきたが、現在、最も活発に研究が進められ、実プラントへの応用が試みられているのは、モデル規範形適応制御系(MRACS; Model Reference Adaptive Control System)と呼ばれるものである。これは、プラントとコントローラとを一体とした制御系の特性が、規範モデルと呼ばれる理想モデルの特性に一致するようにコントローラを適応的に構成しようとするものであり、問題は、(1)コントローラの構成法、と (2)コントローラのパラメータの調整法、の2点として考えることができる。これら(1)、(2)の問題に対し、全制御系の安定性を保証するいくつかの方策が提案され、成書[1]～[4]にもなっているが、残念ながら、産業界で十分安心して使うことができるとは言い難い。実際においては、安定性の保証のみでは不十分であり、プラントに付随する非線形性、コントローラの駆動部、出力の検出部などに関する種々の制約のもとで、プラント出力のみならず、プラント入力信号も実用に耐え得るもの（なめらかな信号）でなければならない。

本論では、すでに筆者らが提案しているコントローラ

の構成法[5]を2章で記す。この方法は、全制御系が規範モデルと一致するように構成されている他に、さらに独立なパラメータで外乱等の不確定性に対処できる自由度を含んでいるのが特徴である。これは、先に記した(1)コントローラの構成法の問題であり、3章では、(2)コントローラパラメータの調整法を議論する。ここで提案する調整法は、シュミットの正規直交化法を用いた直交射影適応アルゴリズムであり、実際のプラントが、仮定したシステム構造と一致すれば、プラントパラメータの推定値が真値に最短時間で収束するすぐれたものである。4章では数値シミュレーションによって本論で提案した手法の有効性を検討する。

2. 適応制御系設計法

本章では適応制御系の設計法、すなわちコントローラの構成法を記す。最初に、プラントパラメータが既知とした場合に適当なフィードバック制御系を構成し、この閉ループ系が規範モデルと一致するようにコントローラのパラメータを決定する。これは通常モデルマッチング法と呼ばれ、これ自身、フィードバック制御系の設計法の1つであり、任意の他の設計法とも対応できる一般的なものである。次に、プラントパラメータが未知となる場合を考えると、対応してコントローラのパラメータも未知となる。こうして適応制御系の構成が得られ、残る問題はコントローラの未知パラメータの調整法であり、3章でこの問題に対する解法を示す。

2.1 問題の設定

適応制御の対象となるプラントは1入力1出力の離散時間システムで、次のように記述される。

$$P(z)y(k) = R(z)u(k) \quad (2.1)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n \\ R(z) &= r_0 z^m + r_1 z^{m-1} + \dots + r_{m-1} z + r_m \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ここで、 $u(k)$ 、 $y(k)$ は k 時点におけるプラントの入力と出力であり、 z は時間進み演算子とする。以下の議論は、 z を s 、 k を t と置き換えて連続時間システムとしても扱うことができる。また、このプラントに対し、以下の仮定を設ける。

(1) 多項式 $P(z)$ 、 $R(z)$ は互いに既約で、その次数 n 、 m は既知とする。ただし、 $m \leq n-1$

(2) $R(z)$ は漸近安定多項式、すなわち、プラントは

最小位相系とする。

式(2.1)のプラントに対し、式(2.3)で記述されるような規範モデルを考える。

$$Pd(z)y_d(k) = Rd(z)u_d(k) \quad (2.3)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} Pd(z) &= z^{nd} + p_{d1}z^{nd-1} + \dots \\ Rd(z) &= r_{d0}z^{nd} + r_{d1}z^{nd-1} + \dots \\ &\quad + p_{dnd-1}z + p_{dnd} \\ &\quad + r_{dnd-1}z + r_{dnd} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ここで、 $u_d(k)$ 、 $y_d(k)$ は規範モデルの入力と出力であり、 Pd は漸近安定多項式とする。

以上の設定に対し問題はどのような入力信号として u を定めれば、出力 y が希望出力 y_d と一致したものとして得られるか、換言すれば、 u をどのように合成すれば、プラントの閉ループ系が規範モデル(2.3)と一致するか、というモデルマッチングの問題となる。

2.2 モデルマッチング

(2.1)~(2.4)式が与えられたとき、我々が利用できる信号はプラントと規範モデルの各入出力信号のみである。従って入力信号の合成を考えるとき、 u はこれら入手可能な信号による情報をすべてとり入れて合成されるものとするのが最も一般的である。 y_d と u_d は情報として基本的に同じであるので、結局、次式のように仮定することができる。

$$u = \frac{1}{K} \left\{ \frac{C}{GD} u_d + \frac{A}{GD} u + \frac{B}{GD} y \right\} \quad (2.5)$$

ここに、 K は定数、 $\{A, B, C, G, D\}$ は適当な次数の z の多項式である。以下、内容から明らかであるので変数 k, z の記述は省略する。(2.5)式は信号 u_d, u, y を各々適当なフィルタを通して線形結合したものとして u が得られることを示しており、各フィルタの物理的実現性から、 $C/GD, B/GD$ はプロバ、 A/GD は強プロバでなければならない。(2.5)式を(2.1)式に代入すると、

$$\{(KGD-A)P-BR\}y = RCu_d \quad (2.6)$$

が得られ、これが(2.3)式と一致するためには、

$$Rd\{(KGD-A)P-BR\} = RCPd \quad (2.7)$$

でなければならない。(2.7)式は $RCPd$ が Rd をその因子として含まなければならない、一般に

$$C = TRd \quad (2.8)$$

とおくことになる。すると(2.7)式は

$$(KGD-A)P-BR = RTPd \quad (2.9)$$

$$(KGD-A)P = (TPd+B)R \quad (2.10)$$

P と R は一般に互いに素であるから

$$(KGD-A) = QR \quad (2.11)$$

$$TPd+B = QP \quad (2.12)$$

となる Q が存在する。以上をまとめると、最初に多項式 T を選び

$$TPd = QP + S \quad (2.13)$$

となる Q, S を求める。このとき、

$$A = KGD - QR \quad (2.14)$$

$$B = -S \quad (2.15)$$

$$C = TRd \quad (2.16)$$

と選べばモデルマッチングは達成される。ここで多項式の次数を $\partial[\cdot]$ で表すことにすると

$$\partial[T] = \rho \quad (2.17)$$

なる T をモニック漸近安定多項式に選ぶことができる。

このとき

$$\partial[Q] = \rho + nd - n \quad (2.18)$$

$$\partial[S] = \beta \quad (2.19)$$

とおくと、 P, Pd もモニックより Q もモニックとなる。

(2.13)式より Q, S が求まるためには、(未知数の数) \geq (条件式の数)と、 S の次数が TPd のそれ以下であることより

$$n-1 \leq \beta < \rho + nd \quad (2.20)$$

次に、(2.14)式において

$$\partial[GD] = \partial[QR] = \rho + nd - n + m \quad (2.21)$$

なる安定多項式に GD を選び

$$\partial[A] = \partial[GD] - 1 = \rho + nd - n + m - 1 \quad (2.22)$$

となるように A を求める。すなわちスカラ K は最高次の係数が0となるように選ぶ。こうして未知の A, B, C, GD, K が求まるが(2.5)式の実現性を考慮して、

$$\partial[GD] \geq \partial[B] \text{ より}$$

$$\beta \leq \rho + nd - n + m \quad (2.23)$$

$$\partial[GD] \geq \partial[C] \text{ より}$$

$$nd - md \geq n - m \quad (2.24)$$

でなければならない。(2.24)式は相対次数に関する条件であり、また(2.20)、(2.23)式より

$$n-1 \leq \beta \leq \rho + nd - n + m \quad (2.25)$$

が β に関する条件である。(2.25)式の両端の式より

$$2n - nd - m - 1 \leq \rho \quad (2.26)$$

が ρ に関する制約となる。

以上によりモデルマッチングは達成され、閉ループ系

の目標値応答特性は規範モデルと一致する。一方、実際の系では外乱等の不確定性が存在し、これらに対する対処も重要な制御問題の1つである。いま、プラント入力端に加法的な外乱 w が加わるとすると、この外乱 w に対するフィードバック特性 (w から y への伝達特性)は、

$$G_{yw} = \frac{QR}{TPd} \quad (2.27)$$

となり、感度特性 S_0 は

$$S_0 = \frac{QP}{TPd} \quad (2.28)$$

となる事が知られている[6]。このように T , Q の選び方がフィードバック特性に直接影響することがわかるが、(2.13)式で(未知パラメータ数) - (条件式の数) = $\beta - n - 1$ 、の個数のパラメータは(2.13)式とは独立な、フィードバック特性改善のための設計パラメータとなる。例えば最終値定理から明らかに、

$$Q = Q_t(z-1)^\xi \quad (2.29)$$

と定めると、外乱の型に応じて ξ ($= 0, 1, 2, \dots$) を選ばば、定常特性の改善が達成される。このとき、与えられた T に対し(2.13)式は、

$$TPd = Q_t(z-1)^\xi P + S \quad (2.30)$$

$$\partial [Q_t] = \rho + nd - n - \xi \quad (2.31)$$

$$n + \xi - 1 \leq \beta \leq \rho + nd - n + m \quad (2.32)$$

$$2n - nd - m + \xi - 1 \leq \rho \quad (2.33)$$

となる。

2.3 適応制御

前節ではプラントのパラメータ p_i , r_i が既知として、閉ループ系が規範モデルと一致するような制御入力 u を求めた。 p_i , r_i が未知であると、(2.1)式のプラント表現は用いることができない。従って(2.1)式と等価なプラントの別表現が必要となる。(2.11), (2.12)式を用いると、

$$y = \frac{R}{P}u = \frac{QR}{QP}u = \frac{KGD - A}{TPd + B}u \quad (2.34)$$

これより

$$y = \frac{KGD}{TPd}u - \frac{A}{TPd}u - \frac{B}{TPd}y \quad (2.35)$$

となる。これは信号 u , y をそれぞれの強プロバなフィルタを通して左辺の y が得られることを示しており実現可能である。ここに多項式 A , B は

$$\begin{aligned} A &= KGD - RQ_t(z-1)^\xi \\ &= a_0z^\rho + a_1z^{\rho-1} + \dots + a_{\alpha-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\alpha = \rho + nd - n + m - 1$$

$$\begin{aligned} B &= Q_t(z-1)^\xi P - TPd \\ &= b_0z^\beta + b_1z^{\beta-1} + \dots + b_{\beta-1} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$n + \xi - 1 \leq \beta \leq \rho + nd - n + m$$

なる形をしている。さらに a_i , b_i はすべてが独立なパラメータでなく、

$$A^{(i)}(1) = K(GD)^{(i)}(1), \quad 0 \leq i \leq \xi - 1 \quad (2.38)$$

$$B^{(j)}(1) = -(TPd)^{(j)}(1), \quad 0 \leq j \leq \xi - 1 \quad (2.39)$$

ここに上付き(k)は z に関する k 次導関数を、(1)その $z=1$ における値を示す。

なる制約が付き、これらの式を(2.36), (2.37)式に代入すると、

$$A = a_0W_0^0 + a_1W_0^1 + \dots + a_{\alpha-1}W_0^{\alpha-1} + KW^0 \quad (2.40)$$

$$B = b_0W_0^0 + b_1W_0^1 + \dots + b_{\beta-1}W_0^{\beta-1} + W^0 \quad (2.41)$$

ここに W_j^0 , W_j^1 等は a_i , b_j に独立な z の多項式。

なる形にまとめることができる。すなわち、プラントパラメータ p_i , r_i が未知のときは、(2.40), (2.41)式のコントロールパラメータ a_i , b_i , K が未知パラメータとなることを示している。ただし、 A に関しては次のように考えると簡単である。(2.36)式で

$$D = (z-1)^\xi \quad (2.42)$$

にとると

$$A = A_1(z-1)^\xi \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= KG - RQ_t \\ &= a_0z^\rho + a_1z^{\rho-1} + \dots + a_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。ただしこの a_i は(2.36)式の a_i とは異なる。

いま(2.40), (2.41)式を(2.35)式に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} y &= K \frac{GD - W^0}{TPd} u - \sum_{i=0}^{\xi-1} a_i \frac{W_0^i}{TPd} u \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\beta-1} b_j \frac{W_0^j}{TPd} y - \frac{W^0}{TPd} y \\ &= \theta^T V - v_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$v_0 = \frac{W^0}{TPd} y \quad (2.46)$$

$$\theta^T = (K, a_0, \dots, a_{\alpha-1}, b_0, \dots, b_{\beta-1}) \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} V^T &= \left(\frac{GD - W^0}{TPd} u, \dots, \frac{W_0^{\alpha-1}}{TPd} u, \dots, \frac{W_0^{\beta-1}}{TPd} y, \dots, \frac{W_0^{\beta-1}}{TPd} y \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる。ここにベクトル V と信号 v_0 は既知信号、 θ は

未知パラメータベクトルである。(2.45)式で未知パラメータベクトル θ の代わりにその推定ベクトル $\hat{\theta}$ を代入すれば

$$\hat{y} = \hat{\theta}^T V - v_0 \quad (2.49)$$

となり、これはプラントのパラメータ推定器あるいは、同定器となる。これに対応して制御入力 u も(2.5)式で K , A , B の代わりにその推定値 \hat{K} , \hat{A} , \hat{B} を用いて、

$$u = \frac{1}{K} \left\{ \frac{TRd}{GD} u_d + \frac{\hat{A}}{GD} u + \frac{\hat{B}}{GD} y \right\} \quad (2.50)$$

となる。(2.45), (2.49)式より

$$\tilde{e} = y - \hat{y} = (\theta - \hat{\theta})^T V \quad (2.51)$$

となる。これはプラントの推定誤差を表しており、適当な方法で $\hat{\theta}$ を θ に収束させることができれば、 \tilde{e} は漸近的に0となる。一方、モデルマッチングが達成できれば \hat{y} は y_d に漸近的に一致する。すなわち、

$$\tilde{e} = y_d - \hat{y} \quad (2.52)$$

は漸近的に0となる。従って、

$$e = y_d - y = \tilde{e} - \tilde{e} \quad (2.53)$$

も漸近的に0となることが示され、適応制御が実行される。以上で、適応制御系の設計は完了し、残る問題は、 $\hat{\theta}$ をいかに θ に収束させるかである。

3. 直交射影適応アルゴリズム

3.1 アルゴリズムの導出

前章で明らかのように、次式で表されるプラントを考える。

$$y_k = V_k^T \theta + v_{0k} \quad (3.1)$$

ここに添字 k は離散時間ステップを表し、 $k=0, 1, 2, \dots$ とする。

このプラントの推定器は

$$\hat{y}_k = V_k^T \theta_k + v_{0k} \quad (3.2)$$

さらに(3.1), (3.2)式より誤差システムは

$$e_k = y_k - \hat{y}_k = V_k^T (\theta - \theta_k) \quad (3.3)$$

と表される。ここに θ は未知パラメータベクトル、 V_k は既知信号ベクトル、 θ_k は可調整パラメータベクトルで、すべて N 次元ベクトルとする。本論で提案するアルゴリズムは次のような考え方を基本としている。すなわち、

θ_k の次のステップ θ_{k+1} は、

$$e_k = V_k^T (\theta_{k+1} - \theta_k) \quad (3.4)$$

を満たすようにする。

これは与えられた現時点の情報(e_k, θ_k, V_k)から、次のステップ θ_{k+1} を導くための唯一の条件である。この条件を満たす θ_{k+1} は N 次元パラメータ空間での超平面となるが、真値 θ も、その値は未知であるが、同じ超平面に存在していることを(3.3), (3.4)式は表している。いま θ_k からその超平面に下した垂線の足を θ_{k+1} とする。1ステップ増すごとに、制約される超平面の次数が1ずつ減少し、最終的に真値に到達する。これが提案するアルゴリズムの要約であり、具体的には以下の様になる。

$k=0$ のとき、(3.3)式は

$$e_0 = V_0^T (\theta - \theta_0) \quad (3.5)$$

ここに θ_0 は初期推定値であり任意でよいが、全く初期情報がなければ0とすればよい。ただし、ベクトル θ_0 の最初の成分 K_0 は(2.50)式で割り算に用いられるので非零の値とする。通常その符号は既知であると仮定して差しつかえない。(3.4)式は、

$$e_0 = V_0^T (\theta_1 - \theta_0) = V_0^T \Delta \theta_0 \quad (3.6)$$

となり $\Delta \theta_0$ を(3.6)式を満たすような V_0 に平行なベクトルにとる。そのために

$$\bar{V}_0 = V_0 / \|V_0\| \quad (3.7)$$

として V_0 を正規化し、

$$\Delta \theta_0 = e_0 \bar{V}_0 \quad (3.8)$$

と(3.6)式に代入すると e_0 は、

$$e_0 = \frac{e_0}{V_0^T \bar{V}_0} \bar{V}_0 \quad (3.9)$$

と求まる。これより

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta \theta_0 = \theta_0 + \frac{e_0}{V_0^T \bar{V}_0} \bar{V}_0 \quad (3.10)$$

となる。次に $k=1$ とすると

$$e_1 = V_1^T (\theta - \theta_1) = V_1^T (\theta_2 - \theta_1) = V_1^T \Delta \theta_1 \quad (3.11)$$

が得られる。まず、 V_1 を \bar{V}_0 に対し直交化し、それを正規にする。すなわち

$$V_1' = V_1 - (V_1^T \bar{V}_0) \bar{V}_0, \quad \bar{V}_1 = V_1' / \|V_1'\| \quad (3.12)$$

とすると(3.10)式と同様にして

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta \theta_1 = \theta_1 + \frac{e_1}{V_1'^T \bar{V}_1} \bar{V}_1 \quad (3.13)$$

が求まる。(3.12)式の過程は線形代数で良く知られているシュミットの正規直交化法そのものである。こうして一般に

$$\begin{aligned} e_k &= V_k^T (\theta - \theta_k) \\ &= V_k^T (\theta_{k+1} - \theta_k) = V_k^T \Delta \theta_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

に対し、

$$V_k' = V_k - \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i \quad (3.15)$$

$$\bar{\nabla}_k = V_k' / \|V_k'\| \quad (3.16)$$

とおいて、

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k + \Delta\theta_k \\ &= \theta_k + \frac{e_k}{V_k^T \bar{\nabla}_k} \bar{\nabla}_k \end{aligned} \quad (3.17)$$

とすればよいことになる。次節で説明されるようにこのアルゴリズム(3.14)～(3.17)式は、雑音などの不確定性のない条件のもとで最短時間Nステップでパラメータが真値に収束するものであるが、実際の制御系ではNステップを越えて適応制御をし続けなければならない。すなわち、 $k \geq N$ に対しては(3.15)式を修正しなければならない。そのための方法として、

(方法1)

$$V_k' = V_k - \sum_{i=k-(N-1)}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i \quad (3.18)$$

とすることができる。これは現時点kからさかのぼって最も新しい(N-1)個の過去のデータ $\bar{\nabla}_i$ と現時点 V_k とから次に進むべき方向 V_k' を求める式であり合理的であると思われる。しかし、これは θ が未知ではあるが一定の値をとり続ける場合には有効であるが、 θ が変化する場合には有効でない。次に、別の方法として

(方法2)

(3.14)～(3.17)式をそのまま用いるが、Nステップごとに $k=0$ とする。すなわちパラメータの同定区間をNステップとし、それを繰り返す用いる。

この(方法2)は未知パラメータベクトル θ が突変する場合にも有効であることが4章で実証される。

3.2 アルゴリズムの諸性質

前節で導いた直交射影適応アルゴリズムに関する種々の性質を記す。

[性質1] $\bar{\nabla}_i^T \bar{\nabla}_j = \delta_{ij}$

[性質2] $V_k^T V_k' = V_k'^T V_k'$

[性質3] $V_k^T \bar{\nabla}_k = \|V_k'\|$

[性質4] $\bar{\nabla}_k / V_k^T \bar{\nabla}_k = V_k' / V_k^T V_k'$

これらの性質は、 $\bar{\nabla}_i$ ($0 \leq i \leq N-1$)が正規直交基底をなすことより導かれる。又、[性質4]は、更新アルゴリズム(3.15)式で $\bar{\nabla}_k$ を用いなくても V_k' で十分であることを示している。すなわち直交基底であることが必

要であり、正規系であることは本質的ではない。

[性質5] $\theta_k = \theta_i + \sum_{j=i}^{k-1} \Delta\theta_j$, $i < k$

これは(3.17)式から明らかである。

[性質6] $(V_k^T \bar{\nabla}_k) \bar{\nabla}_k^T (\theta - \theta_k) = e_k$

(証明) $k=0$ のとき、

$$(V_0^T \bar{\nabla}_0) \bar{\nabla}_0^T (\theta - \theta_0)$$

$$= \|V_0'\| \bar{\nabla}_0^T (\theta - \theta_0)$$

$$= V_0^T (\theta - \theta_0) = e_0.$$

つぎに $i=0, 1, \dots, (k-1)$ に対し

$$(V_i^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_i) = e_i$$

と仮定すると

$$(V_k^T \bar{\nabla}_k) \bar{\nabla}_k^T (\theta - \theta_k) = V_k'^T (\theta - \theta_k)$$

$$= V_k^T (\theta - \theta_k) - \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_k)$$

$$= e_k - \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_i) - \sum_{j=i}^{k-1} \Delta\theta_j$$

$$= e_k - \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T \left(\sum_{j=i}^{k-1} \frac{e_j}{V_j^T \bar{\nabla}_j} \bar{\nabla}_j \right)$$

$$= e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{V_k^T \bar{\nabla}_i}{V_i^T \bar{\nabla}_i} (V_i^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{V_k^T \bar{\nabla}_i}{V_i^T \bar{\nabla}_i} e_i$$

$$= e_k.$$

Q. E. D.

[性質7] $\bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_k) = 0$, $i < k$

[性質8] $V_i^T (\theta - \theta_k) = 0$, $i < k$

これらの証明は[性質6]の証明と同様である。

[性質9] $\bar{\nabla}_i^T \Delta\theta_k = V_i'^T \Delta\theta_k = 0$, $i \neq k$

(証明) $\bar{\nabla}_i^T \Delta\theta_k = e_k \bar{\nabla}_i^T \bar{\nabla}_k = 0$, $i \neq k$.

Q. E. D.

[性質10] $V_i^T \Delta\theta_k = 0$, $i < k$

(証明) $V_i^T \Delta\theta_k = V_i'^T \Delta\theta_k$

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} (V_i^T \bar{\nabla}_j) \bar{\nabla}_j^T \Delta\theta_k = 0$$
, $i < k$.

Q. E. D.

[定理3.1] もし $V_k' = 0$ 、従って $\bar{\nabla}_k = 0$ ならば $e_k = 0$ である。

(証明) $V_k' = V_k - \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i = 0$

とすると、 $V_k = \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i$

$$e_k = V_k^T (\theta - \theta_k)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (V_k^T \bar{\nabla}_i) \bar{\nabla}_i^T (\theta - \theta_k) = 0.$$

Q. E. D.

[定理3.2] もし $e_k=0$ でなければ、 V_k^T, \bar{V}_k ともに 0 とはならない。

これは [定理3.1] の対偶より明らかである。更新アルゴリズム (3.17) 式で割り算が含まれており、分母が 0 となると不都合であるが、このときは e_k も 0 となり、従って

$$\theta_{k+1} = \theta_k \quad (3.19)$$

とすればよいことを [定理3.1] は示している。(3.17) 式か (3.19) 式かの選択は、最初に e_k が 0 かどうかを判定しておけばよいことを [定理3.2] は示している。

[定理3.3] もし $k=0, 1, \dots, N-1$ に対して、 e_k が 0 でなければ、 $\theta_N = \theta$ 、すなわち、推定パラメータ θ_k は最短時間 N ステップで真値に収束する。

(証明) $k=0, 1, \dots, N-1$ に対して、 e_k が 0 でなければ [定理3.2] より \bar{V}_k も 0 とならない。従って、 $\{\bar{V}_k, k=0, 1, \dots, N-1\}$ は N 次元パラメータ空間での正規直交基底となる。一方、[性質7] より $\bar{V}_k^T (\theta - \theta_k) = 0$ が $k=0, 1, \dots, N-1$ に対して成立する。すなわち $\theta - \theta_N = 0$ 、従って、 $\theta_N = \theta$ となる。

Q. E. D.

[定理3.4] $\|\theta - \theta_{k+1}\| \leq \|\theta - \theta_k\|$ 、すなわち θ_k の θ への収束は単調減少 (非増加) である。

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad & \|\theta - \theta_{k+1}\|^2 = \|\theta - \theta_k - \Delta\theta_k\|^2 \\ & = \|\theta - \theta_k\|^2 - 2 \Delta\theta_k^T (\theta - \theta_k) + \|\Delta\theta_k\|^2 \\ & = \|\theta - \theta_k\|^2 - 2 \frac{e_k}{V_k^T \bar{V}_k} \bar{V}_k^T (\theta - \theta_k) \\ & \quad + \left(\frac{e_k}{V_k^T \bar{V}_k} \right)^2 \bar{V}_k^T \bar{V}_k \\ & = \|\theta - \theta_k\|^2 - \left(\frac{e_k}{V_k^T \bar{V}_k} \right)^2 \leq \|\theta - \theta_k\|^2 \end{aligned}$$

ここで等号は $e_k=0$ のときである。 Q. E. D. この証明は $V(k) = \|\theta - \theta_k\|^2$ として、 V がリアプノフ関数となることを示している。

4. 数値シミュレーション

本章では、2章、3章の結果の有効性を調べるため、具体的数値例でのシミュレーション結果を述べる。例題とするプラントは最も簡単な1次系で次式で表されるものとする。

$$y = \frac{R}{P} u = \frac{r}{z+p} u \quad (4.1)$$

ここに p, r は未知のプラントパラメータである。

つぎに規範モデルであるが、これは (2.24) 式の相対次数に関する条件を満たすものであれば何でもよいが、通

常、速応性、減衰性などを考慮して決められる。ここでは

$$y_d = \frac{R_d}{P_d} u_d = \frac{0.2}{z-0.8} u_d \quad (4.2)$$

と決める。ここに $n=nd=1, m=md=0$ であり、(2.24) 式を満たしている。

4.1 モデルマッチング

いまステップ状外乱を考慮するために、 $\xi=1$ 、と選ぶと、(2.33) 式より $\rho \geq 1$ 、従って $\rho=1$ に選ぶ。これより

$$T = z + a \quad (4.3)$$

$$Q = z + b \quad (4.4)$$

とする。 a, b は設計パラメータであり、 $b=-1$ とおくと、 $\xi=1$ としたことに対応する。(2.32) 式より、 $\beta=1$ となり、これより

$$B = b_0 z + b_1 \quad (4.5)$$

とおける。コントロールパラメータ b_0, b_1 は互いに独立でなく、 $B = -S = QP - TPd$ の関係式で $z = -b$ における値より

$$-b_0 b + b_1 = -(-b+a)(-b-0.8)$$

$$b_1 = b_0 b + (a-b)(b+0.8)$$

これより

$$B = b_0(z+b) + (a-b)(b+0.8) \quad (4.6)$$

と求まる。これは $B = QP - TPd$ の関係より

$$b_0 = b - a + p + 0.8$$

$$b_1 = b p + 0.8 a$$

が求まり、第1式の p を第2式に代入しても得られる。つぎに A を求めることになるが

$$D = (z+b) \quad (4.7)$$

とおくと、

$$A_1 = KG - r = 0 \quad (4.8)$$

ここに

$$G = 1 \quad (4.9)$$

$$K = r \quad (4.10)$$

従って、

$$A = 0 \quad (4.11)$$

となる。(2.16) 式より

$$C = 0.2(z+a) \quad (4.12)$$

と定まり、(4.6)~(4.12) 式より制御入力 u は

$$u = \frac{1}{K} \left\{ \frac{0.2(z+a)}{z+b} u_d + \frac{b_0(z+b) + (a-b)(b+0.8)}{z+b} y \right\} \quad (4.13)$$

と求まる。(4.1)式で p, r を既知とすれば、(4.13)式はモデルマッチングを達成する制御入力を与えている。設計パラメータ a, b の与え方により、外乱等の不確定性に対するフィードバック特性が影響を受ける。ちなみに、 $a=b$ とすると(4.13)式は

$$u = \frac{1}{K} (0.2ud + b\theta y) \quad (4.14)$$

となり、1次系に対するスカラー・フィードバックというフィードバック制御理論で良く知られた結果と一致している。これは $\rho=0$ と選んだ場合に対応している。 ρ を1より大に選ぶことにより、より複雑な制御入力が必要だが、自由度が多くなり過ぎて設計の指針は厄介になってくる。

4.2 適応制御

つぎに、 p, r が未知の場合を考えると、(4.6), (4.10)式より、 $b\theta, K$ は未知パラメータとなる。従って、(4.13)式で $b\theta, K$ を各々その推定値 $\hat{b}\theta, \hat{K}$ でおきかえた

$$u = \frac{1}{\hat{K}} \left\{ \frac{0.2(z+a)}{z+b} ud + \hat{b}\theta y + \frac{(a-b)(b+0.8)}{z+b} y \right\} \quad (4.15)$$

が適応制御入力となる。

(1) 外乱同定を考慮しない場合

(2.35)あるいは(2.45)式は、

$$y = \frac{K(z+b)}{(z+a)(z-0.8)} u - \frac{b\theta(z+b) + (a-b)(b+0.8)}{(z+a)(z-0.8)} y = \theta^T V - v_\theta \quad (4.16)$$

$$\theta^T = (K, b\theta) \quad (4.17)$$

$$V^T = \left(\frac{z+b}{(z+a)(z-0.8)} u, -\frac{z+b}{(z+a)(z-0.8)} y \right) \quad (4.18)$$

$$v_\theta = -\frac{(a-b)(b+0.8)}{(z+a)(z-0.8)} y \quad (4.19)$$

となる。これよりプラントの推定器は

$$\hat{y} = \hat{\theta}^T V - v_\theta \quad (4.20)$$

$$\hat{\theta}^T = (\hat{K}, \hat{b}\theta) \quad (4.21)$$

推定誤差 \tilde{e} (第3章では e_k に対応) は

$$\tilde{e} = y - \hat{y} = (\theta - \hat{\theta})^T V \quad (4.22)$$

と求まる。以上で適応制御系の設計は完了し、これに、

3章で記した直交射影適応アルゴリズムを用いてシミュレーションした結果を[図1]に示す。ただし、[図1-1]は外乱のない場合、[図1-2]はプラント入力端にステップ状外乱が加法的に入った場合を示し、さらにAはプラントと規範モデルの出力と入力信号を、Bは推定パラメータを示している。シミュレーションに用いたプラントパラメータの値は $r=1$ で一定、 p の値は

$$p = \begin{cases} -1.0, & 0 \leq k < 40 \\ -1.2, & 40 \leq k < 80 \\ -1.1, & 80 \leq k \end{cases} \quad (4.23)$$

と変化させている。従って、適応アルゴリズムは3.1節の(方法2)を用いた。また、設定入力は $ud=1$ 、 $\hat{\theta}$ の初期値は真値 $\times 0.5$ としている。外乱がなければ推定パラメータは最短時間で真値に収束し[図1-1-B]、出力も良好な応答を示している[図1-1-A]。しかしながら外乱が持続して混入すると、出力応答からその外乱による項のみを分離することができず、推定パラメータはこの外乱による成分を丸め込んだ形の別の値に収束する。このようなステップ状外乱が定常的に入るシステムに対しては、この外乱を含めてプラントとみなし、収束したパラメータ値をその同定結果とみなすのも1つの考え方であるが、このような確定信号外乱(あるいは一定バイアスのある不規則外乱)に対しては、外乱同定を考慮したプラントのパラメータライゼーションが可能である。

(2) 外乱同定を考慮した場合

プラントを表す式は(2.34)式と同様にして

$$y = \frac{r}{z+p} (u+w) = \frac{(z+b)r}{(z+b)(z+p)} (u+w) = \frac{(z+b)K}{(z+a)(z-0.8)b\theta(z+b)} (u+w) \quad (4.24)$$

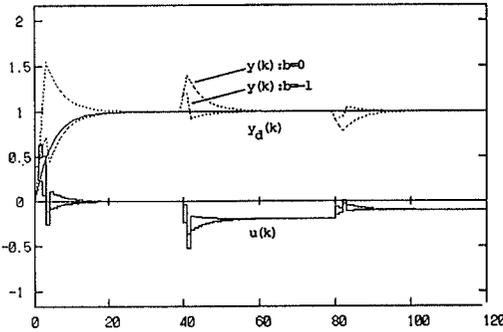
$$y = \frac{K(z+b)}{(z+a)(z-0.8)} u - \frac{b\theta(z+b)}{(z+a)(z-0.8)} y + \frac{K(z+b)}{(z+a)(z-0.8)} w - \frac{(a-b)(b+0.8)}{(z+a)(z-0.8)} y = \theta^T V - v_\theta \quad (4.25)$$

$$\theta^T = (K, b\theta, K w_\theta) \quad (4.26)$$

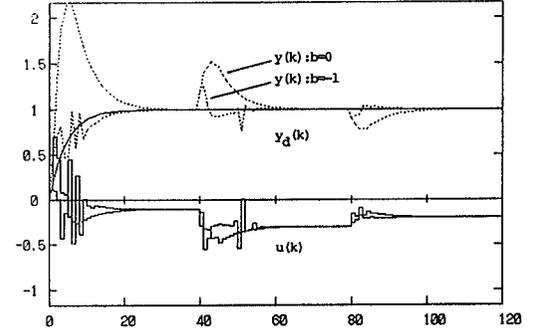
$$V^T = \left(\frac{z+b}{(z+a)(z-0.8)} u, -\frac{z+b}{(z+a)(z-0.8)} y, \frac{z+b}{(z+a)(z-0.8)} 1 \right) \quad (4.27)$$

$$v_\theta = -\frac{(a-b)(b+0.8)}{(z+a)(z-0.8)} y, \quad (4.28)$$

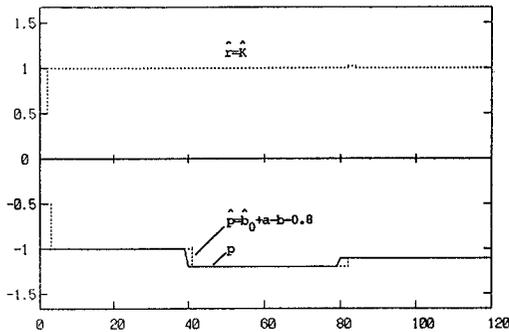
$$w = w_\theta 1 \quad (4.29)$$



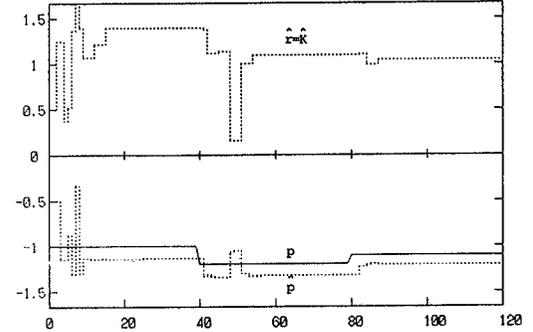
【図1-1-A】 外乱同定ない場合のプラント出力、入力信号 ($a=0, w=0$)



【図1-2-A】 外乱同定ない場合のプラント出力、入力信号 ($a=0, w=0.1$)



【図1-1-b】 外乱同定ない場合のパラメータ応答 ($a=0, b=0, w=0$)



【図1-2-B】 外乱同定ない場合のパラメータ応答 ($a=0, b=-1, w=0.1$)

これより

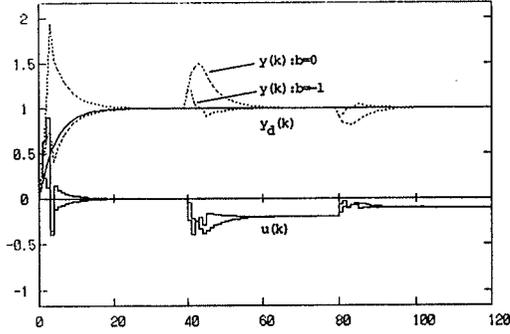
$$\hat{y} = \hat{\theta}^T V - v_0 \quad (4.30)$$

となり、(4.20)式とその形は同じであるが、推定パラメータの次数が1だけ増加している。この増えた推定パラメータが外乱のゲインを推定することになる。この場合のシミュレーション結果を【図2】に示す。種々の条件は【図1】と同じである。推定パラメータの真値への収束は、【図1】と比べて1ステップ遅れてしまうのは止むを得ないが、外乱がある場合にも実行されているのは大きな利点である【図2-2-B】。しかし1ステップの遅れが、その分だけ出力の過渡特性を悪化させており【図2-1-A】、外乱が実際に入ると、その定常特性も悪くなる【図2-2-A】。しかしながらこの点に関しては、設計パラメータ b をステップ状外乱に対する補償に用いることができる、すな

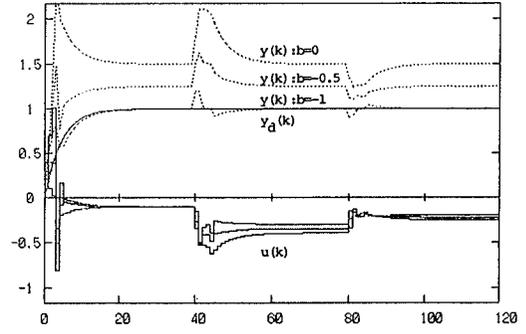
わち、 $b=-1$ とするとオフセットがなくなることを【図2-2-A】は示している。

5. まとめ

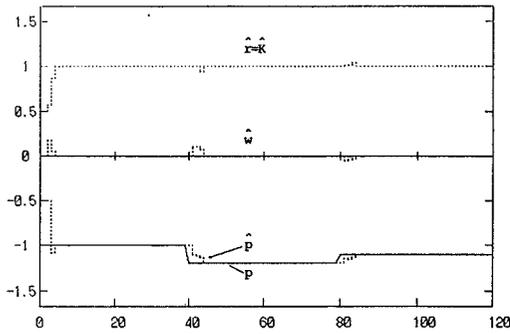
未知でかつ可変なパラメータを持つプラントに対する適応制御系の設計法とその適応アルゴリズムを述べた。本論で述べた適応制御系の設計法は、多くの研究者によっていろいろ提案されている設計法と比べて最も簡単でかつ汎用性のあるものと思う。特に、外乱等の不確定性に対する補償が自然な形で導入されているのが特徴である。一方、そこで用いられる適応則も、適応制御系としての性能に大きく影響し重要な問題である。提案した直交射影適応アルゴリズムは、真値への収束が最も早く、従って適応同定としての役割のみならず適応制御としてもその過渡特性の改善に貢献している。このアルゴリズム



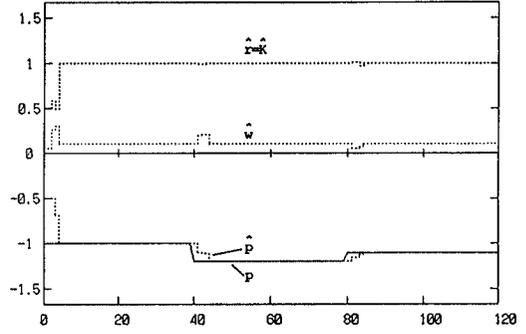
【図2-1-A】 外乱同定を含む場合のプラント出力、入力信号 ($a=0, w=0$)



【図2-2-A】 外乱同定を含む場合のプラント出力、入力信号 ($a=0, w=0.1$)



【図2-1-B】 外乱同定を含む場合のパラメータ応答 ($a=0, b=0, w=0$)



【図2-2-B】 外乱同定を含む場合のパラメータ応答 ($a=0, b=-1, w=0.1$)

ムが優れていることは理論的に3章で保証されているが、実際への応用においては、4章でみたように、外乱同定を考慮するかどうか等、どこまで詳しくプラントを記述すべきか、それぞれの問題に応じて判断しなければならない。

参考文献

- [1] Y. D. Landau: Adaptive Control, Marcel Dekker, 1979.
- [2] G. C. Goodwin and K. S. Sin: Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice Hall, 1984.
- [3] ランダウ, 富塚誠義: 適応制御システムの理論と実際, オーム社, 1981
- [4] 市川邦彦(編): 適応制御, 昭晃堂, 1984.

- [5] 山本祥弘: モデルマッチング法による適応制御系設計, 第15回制御理論シンポジウム資料, pp. 7-10, 1986.
- [6] 山本祥弘: モデルマッチングと適応制御, 第7回適応制御シンポジウム資料, pp. 97-100, 1987.