非線形力学系の極限集合

(1) 逆問題のシンセシス

山本 祥弘*・棚瀬 隆文**・奥山 佳史*・岩花 善衛*

(1980年5月31日受理)

Limit Sets of Nonlinear Dynamical Systems

(1) Synthesis of Inverse Problem

by

Yoshihiro YAMAMOTO*, Takafumi TANASE**, Yoshifumi OKUYAMA*, and Zenei IWAHANA*

(Received May 31, 1980)

The purpose of this paper is to establish means to determine the equation of a system dynamics so that the system resulted behaves in a "satisfactory" manner. This method, so called Inverse Method, is used by many authors for two-dimensional system and/or for the analysis of stable region.

In the first part of this paper, the relationships between dynamical systems and their integrals are shown through a family of some hypersurfaces. Then, in the latter half, the construction of a set of differential equations are accomplished for the inverse problem in a n-dimensional space R^n, together with some definitions of stability for the limit sets. Many examples are given to show the effectiveness of this method.

1. 緒　　言

一般に，微分方程式系（力学系）が与えられたとき，その解に対する定量的あるいは定性的性質を調べることを，解析と呼んでいるが，逆に，得られる解の性質を一部指定し，そのような解をもつ微分方程式系を求める問題を，上記の解析（これを順問題という）に対する逆問題と呼び，その微分方程式系の構成を，逆問題のシンセシスと呼ぶことにする。

このような観点に立った研究は，すでにいくつか行なわれており，2次元空間における安定領域を求める問題[1] n次元空間における同じ問題[2]，に対して応用されている。又，安定問題と密接な関係をもつ非線形系の周期解に関する研究[3),4)]にも用いられている。これらの問題は当然，順問題の解析としても，種々研究されている[5)~7)]。

本論では，先に記した一部指定する性質として，n次元状態空間において，任意に与えられた有限個の超曲面が適当な安定性をもつことを考え，この性質をもつ力学系の微分方程式を構成する問題を考える。このとき，指定された超曲面の一番内部のものが，丁度，原点を特異

* 生産機械工学科
** 松下電器産業

点とするシステムの安定あるいは不安定領域と一致し，一方，構成したシステムが周期解をもつとき，この周期解は，指定した有界な超曲面上に含まれていることは，力学系の理論から明らかである[8),9)]。勿論，状態空間が２次元の場合には，この有界超曲面は閉曲線となり，いわゆるリミットサイクルと一致することは当然である。

2. 逆問題（その1）

最初に，以下の議論で必要となる，内積に関する次の補題をあげておく。

〔補題〕[10)] $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ を任意のn次元ベクトルとし，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ とする。このとき，$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ が直交，$(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=0$，するための必要十分条件は，交代行列 $\boldsymbol{K}$，${}^t\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{K}$，が存在して，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{y}$ と表わされることである。

次に，c を任意の実数，V を $\boldsymbol{x}$ の素直な関数として，

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = c \qquad (1)$$

で定義される超曲面を，閉不変集合，いわゆる積分曲面としてもつ力学系の微分方程式を求めてみよう。ただし，n次元ベクトル空間 R^n のほとんどあらゆる点 $\boldsymbol{x}$ で，$\mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$，とする。いま，求めるべき力学系の微分方程式を

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad (\cdot\ は時間\,t\,についての微分) \qquad (2)$$

とおくと，(1)のある超曲面の任意の点 $\boldsymbol{x}$ を通る(2)の解は，すべてその超曲面に含まれなければならない。すなわち，点 $\boldsymbol{x}$ における，(2)の速度ベクトル $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と，(1)の法線ベクトル $\mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x})$ とは直交しなければならない。$\mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ と仮定してよく，従って，
〔補題〕より

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x})) = 0,$$

がほとんどあらゆる点 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$ で成立するための必要十分条件は，ある交代行列 $\boldsymbol{K}$ が存在して，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}\ \mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x}) \qquad (3)$$

となることである。ただし，交代行列 $\boldsymbol{K}$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ に依存して決まり，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ である。これより，求める微分方程式系は，任意な交代行列 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ に対して，

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\ \mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x}) \qquad (4)$$

であることがわかった。

同様な考察から，力学系

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\ \mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x})$$

は，その解軌道が，超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c$ を垂直に横切るシステムであり，この形のシステムは gradient system と呼ばれている[9)]。この gradient system に対して，(3)式のシステムは tangent system とも呼ぶべきシステムであるが，超曲面の任意の点で法線ベクトルは，多くの場合一意的であるのに対し，接ベクトルは一意性がないのが特徴である。

以上をまとめて，次の結果を得る。

〔結果1〕 R^n において，超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c$，c は任意定数，を積分曲面としてもつ力学系は，任意の交代行列 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\ \mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x})$$

で与えられる。（n＝2の時，$V(\boldsymbol{x})=c$ は一般解を表わしている。）

〔結果2〕 R^n において，与えられた微分方程式系 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の積分曲面は，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\ \mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$，$V(\boldsymbol{x})$ を用いて，$V(\boldsymbol{x})=c$ で与えられる。

本節での逆問題は〔結果1〕により容易に解くことができるが，得られる解は無数であり，ここでは，$\boldsymbol{K}$ が $\boldsymbol{x}$ の関数となる1例を示すことにする。

（例1） $\dot{x}_1 = 2\,x_1 x_2$，$\dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2$，の解は，$x_1^2 + x_2^2 + c\,x_1 = 0$ であることがわかっている[11)]。逆に，

$$V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1} = c$$

を一般解としてもつ力学系は，

$$\mathrm{grad}\ V(x) = {}^t\left(1-\frac{x_2^2}{x_1^2},\ \frac{2x_2}{x_1}\right)$$

より，k をパラメーターとして，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{x_2^2}{x_1^2} \\ \dfrac{2x_2}{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2kx_2}{x_1} \\ \dfrac{k(x_2^2 - x_1^2)}{x_1^2} \end{pmatrix}$$

を得る。ここで，例えば $k = x_1^2$ とおくと，もとの微分方程式系，$\dot{x}_1 = 2\,x_1\,x_2$，$\dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2$，が得られる。

次に順問題，すなわち〔結果2〕に対する例を示す。

（例2） Duffing 方程式（保存系の場合）

$$\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0$$

これは，$x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$ とおくと，

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\ \dot{x}_2 = -x_1 - \mu x_1^3$$

となる。このとき(3)式は，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \mu x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\dfrac{\partial V}{\partial x_2} \\ -k\dfrac{\partial V}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

となる。例えば $k=½$ として解くと，

$$V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}\mu x_1^4 + x_2^2$$

を得る。従って（周期）解として，

$$x_1^2 + \frac{1}{2}\mu x_1^4 + x_2^2 = c$$

が求まる。

これはきれいに解けた例であるが，行列 $\boldsymbol{K}$ が定数ならともかく，$\boldsymbol{x}$ の関数にもなり得るので，一般的解法として〔結果2〕を用いるのは，限界がある。

3. 逆問題（その2）—安定問題への応用

前節では，(1)式で表わされる（n－1）次元超曲面が，任意のパラメーター c に対して閉不変集合（積分曲面）となる場合を考察したが，以下では，特定なパラメーターの値 c に対して，対応する超曲面が，その近傍に対するある種の極限集合となる場合を考察する。

本論で考察する超曲面は次のようなものである。いま，R^n において，超曲面

$$V(\boldsymbol{x}) = c_{\mathrm{B}} \tag{5}$$

が与えられたとき，c_{B} の代りに c を代入して得られる超曲面

$$V(\boldsymbol{x}) = c \tag{6}$$

は，$0 < c < c_{\mathrm{B}}$ においてコンパクトであり，より小さい c をもつ超曲面を，完全にその内部に包含し，かつ $c \longrightarrow 0$ で，(6)は原点に縮退するものとする。ここに，超曲面の内部とは，その超曲面が全空間 R^n を2分するうちの原点を含む側をいう。

超曲面(6)を表わす集合 S_c を，

$$S_c = \{\boldsymbol{x} \mid V(\boldsymbol{x}) = c\}$$

で定義し，R^n における S_c の近傍 $N(S_c)$ を定めると，この $N(S_c)$ は，S_c によって，その内部と外部に2分される。これを各々，$N^i(S_c)$，$N^o(S_c)$ とすると，結局，

$$N(S_c) = N^i(S_c) \cup S_c \cup N^o(S_c)\,.$$

となっている。

〔定義1〕 ある力学系に対して，集合 S_c が安定であるとは，ある近傍 $N(S_c)$ に含まれる任意の近傍 $N_\varepsilon(S_c)$ に対し，ある近傍 $N_\delta(S_c)$ が存在して，$N_\delta(S_c)$ の任意の点を出発した軌道はそれ以降すべて $N_\varepsilon(S_c)$ に含まれることをいう。同じく，集合 S_c が外から（内から）漸近安定であるとは，S_c が安定であり，かつ，ある近傍 $N(S_c)$ に対し，$N^o(S_c)$ $(N^i(S_c))$ の任意の点を通る軌道は，時間の経過とともに，すなわち時間の正の極限で，集合 S_c に漸近することをいう。又，集合 S_c が外から（内から）不安定であるとは，同じく，$N^o(S_c)(N^i(S_c))$ の任意の点を通る軌道が，逆時間で，すなわち時間の負の極限で S_c に漸近することをいう。

本論で興味をもつ超曲面(6)は，不変集合として孤立している場合であるので，〔定義1〕に従って，超曲面(6)の安定性（局所安定性）は，次の様に分類される。（安定性の形態としては，これ以外にも存在する。）

〔定義2〕 集合 S_c，従って超曲面 $V(\boldsymbol{x}) = c$，が漸近安定極限集合であるとは，集合 S_c が外からおよび内から漸近安定であることをいう。同様に，外からおよび内から不安定であるとき，不安定極限集合；外から漸近安定，内から不安定のとき，漸近半安定極限集合；外から不安定，内から漸近安定のとき，半不安定極限集合，と各々呼ぶことにする。

以上の準備により，考察する逆問題は，次のように表わされる。

n次元状態空間 R^n において，任意に指定された超曲面が，〔定義2〕の意味で，任意の安定性をもった極限集合となるような力学系の微分方程式を求めてみよう。

いま，(6)式で表わされる超曲面（群）に対し，次式を考えてみる。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = h(V(\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{K}\,\mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

ここに $h(\cdot)$，$\boldsymbol{g}(\cdot)$ は，各々，スカラー値，n次元ベクトル値の連続関数である。

$0 < c < c_{\mathrm{B}}$ なる任意の c に対する超曲面(6)の任意の点 $\boldsymbol{x}$ で，(6)の法線ベクトルと(7)の速度ベクトルの内

積を考えると，$\boldsymbol{K}$ が交代行列より，

$$(\mathrm{grad}\, V(\boldsymbol{x}),\ h(V(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{K}\ \mathrm{grad}\, V(\boldsymbol{x})) = h\,(V(\boldsymbol{x}))\ (\mathrm{grad}\, V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})), \tag{8}$$

となり，ここで $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ としては（例えば）

$$(\mathrm{grad}\, V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}\,(\mathrm{x}))>0,\ \ ^{\forall}\boldsymbol{x}\neq 0, \tag{9}$$

を満たすように選べば，(8)式の内積の符号は，$h(V(\boldsymbol{x}))$ の符号によって決定される。

（Ｉ）指定される超曲面が１個で，(5)式によって表わされる場合

(i) $h(V(\boldsymbol{x}))= V(\boldsymbol{x})-c_B$，とおくと，$h(\bullet)$ の符号は，$\boldsymbol{x}$ が超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_B$ の内部，上，外部にあるに従い，各々負，０，正の値をとる。これが，(8)式の内積の符号と一致し，内部，外部の軌道は，ともに超曲面から遠ざかる傾向を示している。結局，超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_B$ は，不安定極限集合となっている。

同様な議論から，力学系(7)式に対し，

(ii) $h(V(\boldsymbol{x}))=-(V(\boldsymbol{x})-c_B)$ のとき，超曲面 $V(\boldsymbol{x}) = c_B$ は，漸近安定極限集合，

(iii) $h(V(\boldsymbol{x}))=(V(\boldsymbol{x})-c_B)^2$ のとき，超曲面 $V(\boldsymbol{x}) = c_B$ は，半不安定極限集合，

(iv) $h(V(\boldsymbol{x}))=-(V(\boldsymbol{x})-c_B)^2$ のとき，超曲面 $V(\boldsymbol{x})= c_B$ は，漸近半安定極限集合，

が各々得られる。

超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_B$ が不安定極限集合となる場合，その超曲面の原点を含む内部は，システム(7)の原点（平衡点）に関する漸近安定領域であり，超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_B$ は，その安定限界曲面となっている。何故なら，(8)式の左辺は，正の関数 $V(\boldsymbol{x})$ の(7)式の軌道に沿った時間微分となっており，従って，関数 $V(\boldsymbol{x})$ は，超曲面 $V(\boldsymbol{x}) =c_B$ の内部に対する局所的 Lyapunov 関数となっているからである。同様に，超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_B$ が漸近安定極限集合となる場合，その内部は原点に対する不安定領域となることは明らかである。

（例３）ｎ次元空間における単位球

$V(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^2$，$c_B=1$ の場合を考えると，$\mathrm{grad}\, V(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}$，より，条件 (9)式は，$(2\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))>0$，$^{\forall}\boldsymbol{x}\neq 0$，となる。ここで，例えば，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ と選ぶことができ，この時，任意の交代行列 $\boldsymbol{K}$ に対して，

$$\dot{x} = (\|\boldsymbol{x}\|^2-1)\ x+2\boldsymbol{K}x,$$

$$\dot{x} = -(\|x\|^2-1)\ x+2Kx,$$

$$\dot{x} = (\|x\|^2-1)^2\ x+2Kx,$$

$$\dot{x} = -(\|x\|^2-1)^2 + 2Kx,$$

は，単位球を各々，不安定，漸近安定，半不安定，漸近半安定な極限集合とするシステムである。例えば，ｎ＝３のとき，

$$K=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

と定めると，単位球内を漸近安定領域とする３次元システムとして，

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2-x_2+x_1\,(x_1^2+x_1^2+x_3^2-1)\\ \dot{x}_2 = x_2-x_1+x_2\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)\\ \dot{x}_2 = x_1-x_2+x_2\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)\end{cases}$$

が得られる。

（例４）３次元空間における平面

$x_1>-0.5$ で表わされる半空間領域を漸近安定領域とするようなシステムを求めてみよう。いま，

$$\left(x_1-\frac{c^2}{1-c^2}\right)^2+x_2^2+x_3^2=\left(\frac{c}{1-c^2}\right)^2$$

を考えると，これは，$0<c<1$ では閉曲面を示し，$c\longrightarrow 0$ で原点に縮退，c の増加とともに膨張し，$c\longrightarrow 1$ で $x_1=-0.5$ なる平面に漸近する。さらにこの式を変形して，

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_1+1)^2+x_2^2+x_3^2}=c^2$$

とすると，これは(6)式に対応し，$c=1$ とすれば，(5)式に対応する式が得られる。ここで，

$$\mathrm{grad}\ V(x)=\frac{2}{\{(x_1+1)^2+x_2^2+x_3^2\}^2}\times\begin{pmatrix} x_1^2+x_1-x_2^2-x_3^2\\ x_2\,(2x_1+1)\\ x_3\,(2x_1+1)\end{pmatrix},$$

であるから，ベクトル $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})={}^t(g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x))$ は，条件(9)より，

$$g_1(x)\,(s_1^2+x_1-x_2^2-x_3^2)+g_2(x)\ x_2\,(2x_1+1)+g_3(x)\ x_3\,(2x_1+1)>0,$$

を満たさなければならず，例えば，$g_1(\boldsymbol{x})=g_2(\boldsymbol{x})=0$，$g_3(\boldsymbol{x})=x_3(2x_1+1)((x_1+1)^2+x_2^2+x_3^2)$と選ぶことができる。（考察1参照）又，$\boldsymbol{K}$としては，

$$\boldsymbol{K}=\frac{\{(x_1+1)^2+x_2^2+x_3^2\}^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，求めるシステムの1例として，

$$\begin{cases} \dot{x}_1=(2x_1+1)(x_2-x_3), \\ \dot{x}_2=x_3(2x_1+1)-(x_1^2+x_1-x_2^2-x_3^2) \\ \dot{x}_3=-x_3(2x_1+1)+(x_1^3+x_1-x_2^2-x_3^2) \\ \quad -x_2(2x_1+1) \end{cases}$$

が得られる。

（例5）楕円を漸近半安定極限集合とする場合

$$V(\boldsymbol{x})-c_B\equiv x_1^2-x_1x_2+x_2^2-1=0$$

とおくと，$\mathrm{grad}\,V(\boldsymbol{x})={}^t(2x_1-x_2,\ -x_1+2x_2)$ であるから，条件式(9)は，$\boldsymbol{g}=(g_1, g_2)$ として，

$$(2x_1-x_2)\,g_1(\boldsymbol{x})+(-x_1+2x_2)\,g_2(\boldsymbol{x})>0,$$

これより，例えば，$g_1(\boldsymbol{x})=x_1$，$g_2(\boldsymbol{x})=x_2$ を得る。また，交代行列 $\boldsymbol{K}$ としては

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと，求めるシステムの1例として，

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-(x_1^2-x_1x_2+x_2^2-1)^2x_1+2x_2-x_1, \\ \dot{x}_2=-c\,x_1^2-x_1x_2+x_2^2-1)^2x_2+x_2-2x_1, \end{cases}$$

が得られる。このシステムをシミュレートしたのが，Fig. 1である。

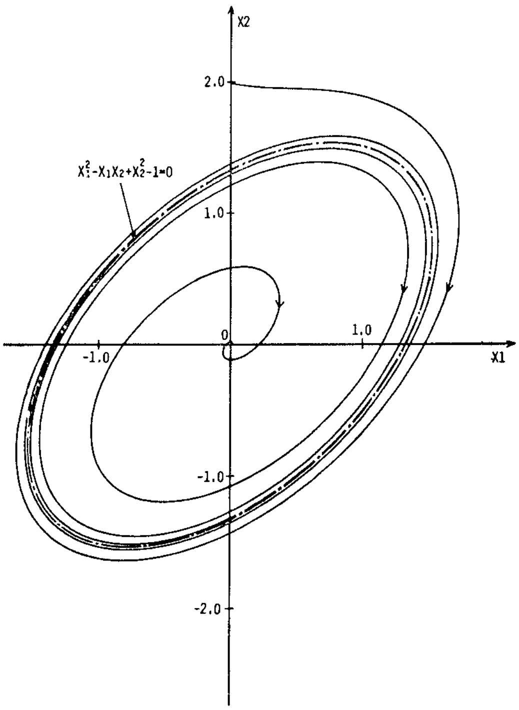

Fig. 1 Result for example 5

（II）指定される超曲面が2個の場合

指定される超曲面 S_1，S_2 が各々，

$$S_1: V(\boldsymbol{x})=c_1, \qquad S_2: Y(\boldsymbol{x})=c_2,$$
$$0<c_1<c_2=c_B,$$

と表わされるとする。この2つの超曲面に対し，安定特性として〔定義2〕の4種類のどれかが指定されることになり，結局，実現性を考慮して，8通りの場合があり得る。しかし，これらはいずれも，以下の様な同一形式で表わすことができる。すなわち，(7)式の $h(V(\boldsymbol{x}))$ としては，

$$h_1(V(\boldsymbol{x}))=(-1)^{t-1}(V(\boldsymbol{x})-c_1)^{d1}(V(\boldsymbol{x})-c_2)^{d2}$$

又は

$$h_2(V(\boldsymbol{x}))=(-1)^{t}(V(\boldsymbol{x})-c_1)^{d1}(V(\boldsymbol{x})-c_2)^{d2}$$

ただし，d_1，$d_2=1$又は2，$l=d_1+d_2$．

この時(I)と同様，hの符号，従って(8)式の内積の符号を調べることにより，以下の結論が導かれる。（ただし，l. s. は，極限集合 limit set の略）

(i) $h(V(\boldsymbol{x}))=h_1(V(\boldsymbol{x}))$ を用いると，

∘ $d_1=1$，$d_2=1$の時，
　S_1：不安定 l. s.,　S_2：漸近安定 l. s.,

∘ $d_1=1$，$d_2=2$の時，
　S_1：不安定 l. s.,　S_2：半不安定 l. s.,

∘ $d_1=2$，$d_2=1$の時，
　S_1：漸近半安定 l. s.,　S_2：不安定 l. s.,

∘ $d_1=2$，$d_2=2$の時，

S_1 ：漸近半安定 $l.$ s.,　　S_2 ：漸近半安定 $l.$ s.,

(ii) $h(V(\boldsymbol{x}))=h_2(V(\boldsymbol{x}))$ を用いると，

∘ $d_1=1$, $d_2=1$ の時，

S_1 ：漸近安定 $l.$ s.,　　S_2 ：不安定 $l.$ s.,

∘ $d_1=1$, $d_2=2$ の時，

S_1 ：漸近安定 $l.$ s.,　　S_2 ：漸近半安定 $l.$ s.,

∘ $d_1=2$, $d_2=1$ の時，

S_1 ：半不安定 $l.$ s.,　　S_2 ：漸近安定 $l.$ s.,

∘ $d_1=2$, $d_2=2$ の時，

S_1 ：半不安定 $l.$ s.,　　S_2 ：半不安定 $l.$ s..

この結果において容易にわかるように，$d_i=2$ とした時の対応する S_i は，つねに「半」のついたものになってる。これは超曲面 S_i が，その近傍において因子

$$(V(\boldsymbol{x})-c_i)^{di}$$

の符号を変えないことからも明らかである。また，$h(V(\boldsymbol{x}))$ として $h_1(V(\boldsymbol{x}))$ を用いた (i) の場合は，超曲面 S_1 の内部が，原点に関して漸近安定領域となっており，一方，$h_2(V(\boldsymbol{x}))$ を用いた (ii) の場合は，不安定領域となっていることが確認される。

（例6）楕円，円を各々，不安定，漸近安定な極限集合とする場合，

$$x_1^2+(10-c)\,x_2^2=c$$

を考えると，これは，$c=9$ で円，$0<c<9$ で楕円であり，$c\longrightarrow 0$ で原点に縮退す。しかし，この式は(5)式の形をしていないので，変形して，

$$V(\boldsymbol{x})-c\equiv\frac{x_1^2+10x_2^2}{1+x_2^2}-c=0$$

を得る。ここで，$c=5$ および 9 として，各々指定する楕円，円を与えると，この楕円，円を各々，不安定，漸近安定な極限集合とするシステムとして，

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\left(\frac{x_1^2+10x_2^2}{1+x_2^2}-5\right)\left(\frac{x_1^2+10x_2^2}{1+x_2^2}-9\right)g_1(\boldsymbol{x})\\&\quad+\frac{2kx_2(10-x_1^2)}{(1+x_2^2)^2},\\\dot{x}_2&=-\left(\frac{x_1^2+10x_2^2}{1+x_2^2}-5\right)\left(\frac{x_1^2+10x_2^2}{1+x_2^2}-9\right)g_2(\boldsymbol{x})\\&\quad-\frac{2kx_1}{1+x_2^2},\end{aligned}\right.$$

を得る。ただし，k は任意スカラーで，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})={}^t(g_1(\boldsymbol{x}),\ g_2(\boldsymbol{x}))$ は条件式(9)を満たさなければならない。例えば，$k=(1+x_2^2)^2$，$g_1(\boldsymbol{x})=x_1(1+x_2^2)^2$，$g_2(\boldsymbol{x})=x_2(1+x_2^2)^2$ とおくことができ，求めるシステムは，次の式で，そして，そのグラフがFig. 2で示される。

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1&=-(x_1^2+5x_2^2-5)(x_1^2+x_2^2-9)x_1\\&\quad+2x_2(10-x_1^2),\\\dot{x}_2&=-(x_1^2+5x_2^2-5)(x_1^2+x_2^2-9)x_2\\&\quad-2x_1(1+x_2^2.\end{aligned}\right.$$

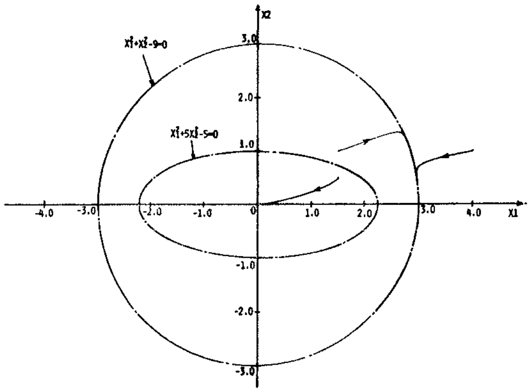

Fig. 2 Result for example 6

(Ⅲ)（Ⅰ），（Ⅱ）の結果から容易に，次の様な一般化が可能となる。すなわち，m個の超曲面

$$V(\boldsymbol{x})=c_i,\quad i=1,\ 2\cdots\cdots,\ m,$$
$$0<c_1<c_2<\cdots\cdots<c_m=c_B,$$

が，各々〔定義2〕の適当な安定性とともに指定された極限集合であるような力学系の微分方程式は，

$$h(V(x))=(-1)^p(V(\boldsymbol{x})-c_1)^{d1}(V(\boldsymbol{x})-c_2)^{d2}\cdots\cdots(V(\boldsymbol{x})-c_m)^{dm}\tag{10}$$

ただし，$d_i=1$ 又は 2，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

$$P=l-1\ \text{又は}\ l,\quad l=\sum_{i=1}^{m}d_i\,,$$

を用いた時のシステム(7)で与えられる。ここに，$p=l-$

1の時は，超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_1$ の内部が，原点に関する漸近安定領域と一致する場合であり，p$=l$ の時は，不安定領域となる場合である。また，$d_j=1$ であれば，対応する超曲面 $V(\boldsymbol{x})=c_j$ は，漸近安定あるいは不安定な極限集合であり，$d_j=2$ であれば，漸近半安定あるいは半不安定な極限集合であり，さらに，この各々の場合の二者択一に関しては，1つ内側の超曲面の安定性によって決ってくる。例として，3個の極限集合をもつ場合を考えてみよう。

(例7) 2次元平面 R^2 において

$$V(\boldsymbol{x})-c_i\equiv x_1^2\left(1+\frac{x_1^2}{2}\right)+x_2^2-c_i=0,$$

$$i=1,2,3,\ c_1=0.4,\ c_2=1,\ c_3=2,$$

として3個の超曲面が与えられ，内側から順に，漸近安定，不安定，漸近安定な極限集であることが要請されているとする。このとき，原点近傍は不安定領域となっているから，(10)式において，p$=l$ が対応する。また，$d_i=1$ (i＝1，2，3) より $l=3$．さらに，grad $V(\boldsymbol{x})={}^t(2x_1(1+x_1^2),\ 2x_2)$ より，条件式(9)は，$\boldsymbol{g}={}^t(g_1,\ g_2)$ として，

$$2x_1(1+x_1^2)g_1(\boldsymbol{x})+2x_2g_2(\boldsymbol{x})>0$$

となり，例えば，$g_1(\boldsymbol{x})=0$，$g_2(\boldsymbol{x})=x_2$，と選ぶ。(考察1参照) さらに，

$$\boldsymbol{K}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

とおくと，求めるシステムは，

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2, \\ \dot{x}_2=-x_1-x_1^3+(x_1^2(1+\frac{x_1^2}{2})+x_2^2-0.4) \\ \times(x_1^2(1+\frac{x_1^2}{2})+x_2^2-1)\ (x_1^2(1+\frac{x_1^2}{2})+x_2^2 \\ -2)\ x_2,\end{cases}$$

となり，そのシミュレーションの結果が Fig. 3 である。このシステムは，保存系の Duffing 方程式に，非線形減衰項を加えて極限集合をもつようにしたものと考えられる。

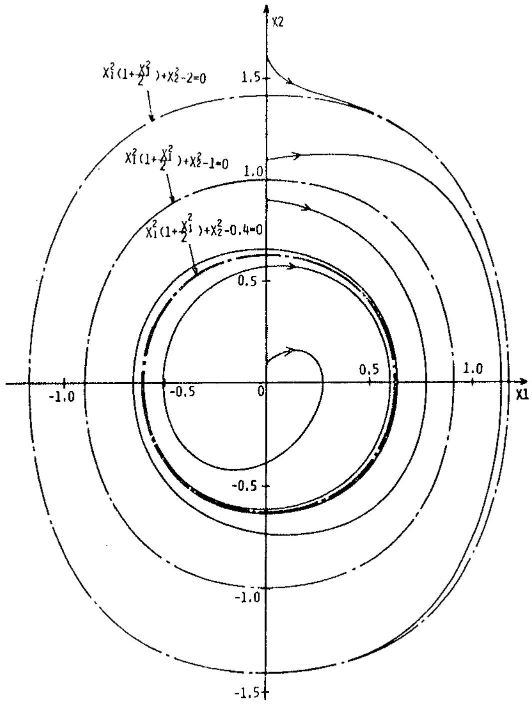

Fig. 3 Result for example 7

4. 考 察

1. (9)式での不等号に，等号をつけ加えても，システムの軌道に沿って等号が恒等的でない，という条件のもとで成立することは，通常のリアプノフの安定論の場合[12]と同様である。
2. 与えられた非線形系

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

が，(7)式と等価であるためには例えば $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ として，

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{h(V(\boldsymbol{x}))}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{K}\ \mathrm{grad}\ V(\boldsymbol{x}))$$

と，形式的に選ぶことができる。これを条件式(9)に代入すると，

$$(\mathrm{grad}\ V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$$
$$=\frac{1}{h(V(\boldsymbol{x}))}(\mathrm{grad}\ V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))>0$$

となり，原点近傍で $h(V(\boldsymbol{x}))<0$ とすれば，これは，

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) = \mathrm{grad}\ V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))<0$$

となる。すなわち，与えられた非線形系を(7)式の形に変形することは，局所リアプノフ関数 $V(\boldsymbol{x})$ をみつけることを含んでいる。従って，本論での $V(\boldsymbol{x})$ は，従来のリアプノフ関数の，ある種の拡張したものと考えられる。

3．前もって指定される超曲面の形には，若干の条件が付加され，また，超曲面が複数の場合のお互いの関数形の間には，ある種の拘束が必要であり，全く任意ではないことは，理論およびその例題から明らかであろう。これらの理由の1つとして，以下の事柄が挙げられる。すなわち，任意の微分方程式系に対しては，必らずその解の流れ（Flow）のパターンが状態空間に一意に決定されるが，逆に，任意な流れのパターンが与えられたとき，対応する微分方程式系が必ず存在するとは限らないからである。このように，より広いクラスの力学系に対する理論が，数学の1分野を成しているが[9),11)]，用語の定義等において，それらと必ずしも一致していないことを付記しておく。

4．本研究は，緒言に述べた順問題，すなわち，微分方程式系が与えられたとき，本論の意味での極限集合を求める問題に対して利用することが可能であり，実際，かなり満足すべき結果を得ているが，詳しくは続報で述べることにしたい。また，本論は，自律系，すなわち時不変系を対象としてきたが，$V=V(x,\ t)$ としても同様な議論が可能と思われ，この時変系に対する研究は，今後の課題としたい。

文　　献

1）市川，計測自動制御学会論文集，4，250/254，1969.

2）M. Hirai, Int. J. Control, 13, 1073/1081, 1971.

3）B. Z. Kaplan, Int. J. Non-Linear Mechanics, 13, 43/51, 1978.

4）T. Koga, et al., Proc. of 1979 ISCAS, 408/414, 1979.

5）K. Klotter, et al., J. of Applied Mechanics, 31, 321/324, 1964.

6）R. K. Jonnada, et al., J. of Franklin Inst., 291, 195/209, 1971.

7）J. E. Prussing, et al., AIAA J., 14, 320/326, 1976.

8）斎藤，力学系入門，朝倉書店，1972.

9）M. W. Hirsch, et al., Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

10) R. Liu, et al., SIAM Control, 4, 678/685, 1966.

11) G. Sansone, et al., Nonlinear Differential Equations, Pergamon Press, 1964.

12) J. P. LaSalle, et al., Stability by Lyapunov's Direct Method, Academic Press, 1961.