

## 岩質粒状体の重力流動に関する基礎研究 (2)

— 静止時粒状体圧の検討 —

木山 英郎\*・藤村 尚\*・小西 正郎\*・太田 圭哉\*

(1979年6月30日受理)

Mass Flow of Rock-like Granular Materials (2)

—Static Pressures of Bulk Solid in a Bin—

by

Hideo KIYAMA\*, Hisashi FUJIMURA\*, Masao KONISHI\*, and Kei-ya OHTA\*

(Received June 30, 1979)

The containing structures such as bins, silos, and bunkers are usually designed according to either Janssen theory (1895) or Reimbert theory (1962), which are both recommended by ACI Committee 313 in "Proposed ACI Standard (1975)".

Those theories are very simple and convenient for the design purpose indeed, but are not complete in the sense that the plastic characteristics of bulk solids are not fully considered.

Recently the authors have been carried out the minute analysis of static stress states in rock-like granular materials stored in a cylindrical containing structure by using the Kötter method of soil mechanics. The results of the analysis and the laboratory model test are reviewed in this paper.

### 1 はじめに

今日、さまざまな分野で粒状体が原料、加工原料、あるいは製品として取扱われるようになり、各種の容器構造物（ビン・サイロ・バンカー等）が構築されている。

容器構造物の多くは垂直壁部分とそれにつづく底部のホッパーと呼ばれる傾斜した壁とからなっている。

従来、この種の容器構造物の設計応力の算定には、粒状体を鉛直管内に静置したときの剛体的な力のつり合いから誘導された Janssen 式 (1895)<sup>1)</sup> が用いられていた。ところが、この規準に則して設計された構造物が、しばしば亀裂を生じたり、破壊を起こす事故例が報告さ

れるにいたり、Janssen 式により算定される圧力以上の過大な圧力が排出時に生じるのではないかという疑いが持たれるようになった。その後、この点に関する数多くの実験的あるいは理論的研究がなされ、例えば Walker (1966)<sup>2)</sup> は粒状体を排出するときに静止堆積圧よりも大きな圧力が発生することを従来の剛塑性論の土圧論によって考察し、静止時と流動時の極限状態の変化（主働状態から受働状態へ）によって説明した。

Jenike (1969)<sup>3)</sup> は近代塑性論の立場から流動時の応力場と速度場の新しい構成法を提案するとともに、ホッパー内で流動時主働状態から流動時受働状態に移る傾

\* 土木工学科 Department of Civil Engineering

域に動的過圧力が生じることを明らかにし、これは Nanninga (1956)<sup>4)</sup> によって実験的に明らかにされた主働領域から受働領域に移る点で過圧力が作用するという事実と合致している。ところが、最近になって P. M. Blair-Fish (1973)<sup>5)</sup> らによって行なわれた応力場と速度場の同時観測の結果は、粒状体圧は連続流動中において決して一定値を示すものではなく、時間とともに変化するものであることを示し、これまでの一様流動状態としての取扱いに新たな問題点を提起するに至った。

上述のように容器構造物には静止堆積圧よりも大きな動的過圧力が作用することは、ほぼ間違いない事実であるが、動的過圧力に関する理論的解明が十分でないことから、この分野の先進的役割を果しつつある A C I 規準改定案 (1975)<sup>6)</sup> においても動的過圧力に対しては安全係数の意味で「過圧力係数」あるいは「衝撃係数」を導入して設計圧力を求める方法が採用されているにすぎない。

筆者らも、ここ三年間、その基礎となる鉛直管中の岩質粒状体の重力流動の問題を採り挙げ、模型実験と数値解析を種々試みている。本報はその中、静的堆積状態ないし塑性降伏状態における粒状体圧に関する考察結果をとりまとめたものである。

2 粒状体圧に関する A C I 規準案概要

A C I 規準案によれば、容器構造物に要求される強度の算定は、構造物垂直壁部について、高さ方向に5つのゾーンを設け、各ゾーンごとに断面代表寸法に対する高さの比によって区分した動的過圧係数値  $C_d$  の最小値が示され、この  $C_d$  を用いて静止堆積圧の何倍かを動的圧力として考慮すべきかを算定することとなっている。静止堆積圧は Janssen 法あるいは Reimbert 法のいずれかを用いて算定するものとしている。

Janssen 法、Reimbert 法の概略を示す。

1) Janssen 法

粒状体の自由表面から下方深さ  $x$  の点における鉛直方向圧力  $\sigma_x$ 、水平方向圧力  $\sigma_y$ 、壁面に作用するせん断応力  $\tau_{xy}$  は次式で表わされる。

$$\sigma_x = \frac{\gamma R}{K_A \mu} [1 - e^{-K_A \gamma R}] \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\sigma_y = K_A \sigma_x \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\tau_{xy} = (\gamma x - 0.8 \sigma_y) R \dots\dots\dots (2.3)$$

ここに、 $R$ は水圧半径 (hydraulic radius) であり、管径  $D$  のとき、 $R=D/4$  である。 $\mu$  は壁面摩擦係数であり  $\tan \phi_w$  に等しい。 $K_A$  は次式で表わされる 主働土圧係数である。

$$K_A = (1 - \sin \phi) / (1 + \sin \phi) \dots\dots\dots (2.4)$$

2) Riembert 法

粒状体の自由表面から下方深さ  $x$  の点の各圧力は次式で表わされる。

$$\sigma_x = \gamma \left[ x \left( \frac{x}{C} + 1 \right)^{-1} + \frac{h_s}{3} \right] \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\sigma_y = P_{max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{C} + 1 \right)^{-2} \right] \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\tau_{xy} = (\gamma x - \sigma_x) R \dots\dots\dots (2.7)$$

上式において  $h_s$  は貯蔵試料頂部の傾斜した部分の高さであり、また  $P_{max}$  と  $C$  は構造物の形状と粒状体の物性によって決まる値である。例として、円形構造物では、 $P_{max} = \gamma D / 4 \mu$ 、 $C = P / 4 \mu K_A - h_s / 3$  である。

3) 両者の方法に共通

粒状体の自由表面から深さ  $x$  の点における水平面に對して角度  $\alpha$  傾斜している面に作用する垂直圧力は、次式で表わされる。

$$(\sigma_x)_\alpha = \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha \dots\dots\dots (2.8)$$

3 静止時粒状体圧の解析

3.1 概 説

前述 A C I 規準案に採用された静止時粒状体圧に関する Janssen 式は剛塑性論的土圧論に従い、管壁面における応力の極限平衡条件のみから算定されたもので、粒状体中の応力分布に関しては不明である。粒状体中の応力分布等より詳細な情報を得るためには近代塑性論的土圧論と呼ばれるすべり線網解析が必要である。

粒状体の粘着力  $C$ 、せん断抵抗角  $\phi$ 、および単位容積重量  $\gamma$  や壁面摩擦角  $\phi_w$  を考慮した鉛直管内の粒状体圧に関する総合的な解析結果は未だ報告されていない。Janssen 式を始めとした静止時粒状体圧の算定式の適用性を評価するためにも解析が急がれる。

なお、すべり線網解析も全般せん断破壊状態を仮定した極限解析の一手法であることから、それによって得ら

れる粒状体圧は充填堆積された粒状体の静止時粒状体圧を与えるものとするよりは、むしろ流動開始（全般塑性降伏）直前の静止時粒状体圧を与えるものとするべきであろう。

3.2 基礎方程式の誘導

1) 塑性降伏条件

流動開始状態を規定する塑性降伏条件にモール・クーロン規準を仮定した場合、せん断強度  $\tau$  は次式で与えられる。

$$\tau = C + \sigma \cdot \tan \phi$$

ここに  $\sigma$  は、せん断面に作用する直応力、 $C$  は粘着力、 $\phi$  は、せん断抵抗角である。

通常の安定解析等において用いられる  $C$ 、 $\phi$  の値は、初期間隙比と含水比を規定した試料についての直接せん断試験の結果から決定される。

鉛直円管内の粒状体圧の解析は3次元軸対称問題として取扱えるので、任意の点における塑性降伏時の周方向主応力  $\sigma_\alpha$  を中間主応力 ( $\sigma_1 \geq \sigma_\alpha = \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) と仮定すれば Fig. 1 に示すように主応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_\alpha$  は平均換算応力  $\bar{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + C \cot \phi$  を用いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \bar{\sigma}(1 + \sin \phi) - C \cot \phi \\ \sigma_3 &= \bar{\sigma}(1 - \sin \phi) - C \cot \phi \\ \sigma_\alpha &= \bar{\sigma}(1 + k \sin \phi) - C \cot \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

ここに、 $k$  は Harr-Karman の仮定に従い  $k = -1$  ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) とおけば三軸圧縮破壊を表わし、 $k = +1$

( $\sigma_2 = \sigma_1$ ) とおけば三軸伸張破壊を表わす。

上式を Fig. 1 の円柱/平面直角座標に関する応力成分  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  で表わすと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}(1 + \sin \phi \cdot \cos 2\omega) - C \cot \phi \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}(1 - \sin \phi \cdot \cos 2\omega) - C \cot \phi \\ \tau_{xy} &= \bar{\sigma} \sin \phi \cdot \sin 2\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

ここに、 $\omega$  は最大主応力  $\sigma_1$  と鉛直軸  $x$  のなす角である。

2) 応力場（すべり線場）の基礎式

粒状体の微小要素に作用する応力成分のつり合い条件式は、円柱/直角座標において次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + m \frac{\tau_{xy}}{y} &= \gamma \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + m \frac{\sigma_y - \sigma_\alpha}{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

ただし、 $m = 0$  の場合は2次元平面歪状態を  $m = 1$  の場合は3次元軸対称応力状態を示す。

塑性降伏条件式 (3.2) と応力のつり合い条件式 (3.3) より応力場の基礎方程式として、 $\sigma$ 、 $\omega$  を未知数とする2つの双曲型偏微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \phi \cdot \cos 2\omega) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} + \sin \phi \cdot \sin 2\omega \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} \\ - 2\bar{\sigma} \sin \phi \cdot \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

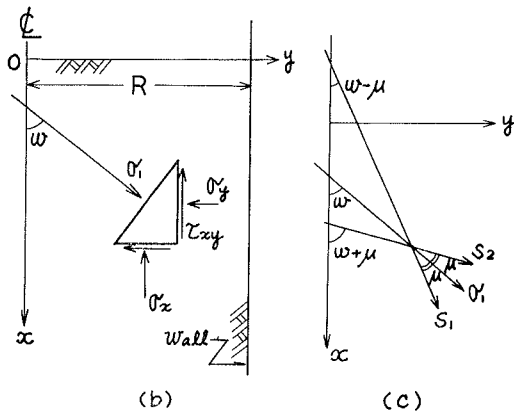
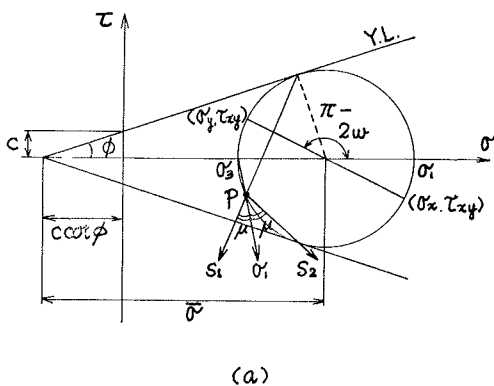


Fig. 1 Yield condition, stress components and slip-lines in axi-symmetrical stress states

$$\begin{aligned}
 &+2\bar{\sigma}\sin\phi\cdot\cos2\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}=g_x \\
 \sin\phi\cdot\sin2\omega\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial x}+(1-\sin\phi\cdot\cos2\omega)\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial y} \\
 &+2\bar{\sigma}\sin\phi\cdot\cos2\omega\frac{\partial\omega}{\partial x}+ \\
 &+2\bar{\sigma}\sin\phi\cdot\sin2\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}=g_y
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここに、 $g_x = \gamma - m\frac{\bar{\sigma}}{y}\sin\phi\cdot\sin2\omega$ 、  
 $g_y = m\frac{\bar{\sigma}}{y}\sin\phi(k + \cos2\omega)$ 。

その特性曲線の方向は、次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = \tan[\omega \pm \mu] \dots\dots\dots (3.5)$$

ただし、 $\mu = \pi/4 - \phi/2$  である。このことは、周知のように応力の特性曲線の方向 (Fig. 1(c)) がすべり線の方向 (Fig. 1(a)) と一致することを示している。

3) Kötter の方程式

塑性降伏条件式 (3.2) と応力のつり合い条件式 (3.3) より得られる応力場の基礎方程式は、 $S_1$ 、 $S_2$  すべり線の方向微係数から、特性曲線 (すべり線) 式に沿って成り立つ Kötter の方程式に改められる。

すなわち、

第一すべり線  $S_1$  :  $dy/dx = \tan(\omega + \mu)$

に沿って、

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dS_1} - 2\bar{\sigma}\tan\phi\frac{d\omega}{dS_1} = A.$$

第二すべり線  $S_2$  :  $dy/dx = \tan(\omega - \mu)$

に沿って

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dS_2} + 2\bar{\sigma}\tan\phi\frac{d\omega}{dS_2} = B.$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 A &= \gamma \frac{\sin(\omega + \mu)}{\cos\phi} - m\frac{\bar{\sigma}}{y}\tan\phi[k\cos(\omega + \mu) \\
 &\quad + \cos(\omega - \mu)], \\
 B &= -\gamma \frac{\sin(\omega - \mu)}{\cos\phi} + m\frac{\bar{\sigma}}{y}\tan\phi[k\cos(\omega - \mu) \\
 &\quad + \cos(\omega + \mu)].
 \end{aligned}$$

この方程式は、すべり線形状の概略があらかじめ知られ

ている場合には数値積分によって比較的容易に解くことができ、所要のすべり線網とその格子点での応力状態を決定できる。

3.3 数値解析

鉛直円管内に充填された粒状体において、下端のノズルが開かれて重力流動を開始するときには、全般塑性降伏状態にあるものと仮定される。このとき、重力の作用する  $x$  軸方向に近い方向に最大主応力  $\sigma_1$  が生じ、それと直交する  $y$  軸方向に最小主応力  $\sigma_3$  が生じる。また、円周方向主応力  $\sigma_\alpha$  は、処女降伏状態であることから、体積膨張を伴う三軸圧縮破壊条件 ( $k = -1$ ) が採用され、 $\sigma_\alpha = \sigma_3$  となる。さらに  $\sigma_1$  の方向 ( $\omega$ ) をはさんで  $\omega \pm \mu$  の方向に発達するすべり線は、重力の作用方向へのすべりを伴う、いわゆる主動状態を呈することとなる。このことと、後述の境界条件を考慮すれば、二重擁壁内の土中のすべり線網 (平面ひずみ状態) に似た、3次元軸対称場のすべり線網の概形が得られる。

1) 基礎方程式の無次元化

粒状体の  $r$ 、 $C$  および  $\phi$ 、および管径 ( $2R$ ) によって変化する解析結果に一般性を持たせるため、Kötter の方程式 (3.6) を無次元化する必要がある。その際、i)  $r \neq 0$ 、 $C = 0$  の場合と、ii)  $r = 0$ 、 $C \neq 0$  の場合に区分して行なうのが良い。

(i)  $r \neq 0$ 、 $C = 0$  の場合

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}' \cdot \gamma R \\
 y &= y' R \\
 S &= S' R
 \end{aligned}$$

ただし、 $\gamma$  : 砂の単位体積重量、

$R$  : 鉛直円管半径とおけば、

式 (3.6) は次のように無次元化できる。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\sigma}'}{dS_1} - 2\tan\phi\bar{\sigma}'\frac{d\omega}{dS_1} &= \frac{A}{\gamma} = A' \\
 \frac{d\bar{\sigma}'}{dS_2} + 2\tan\phi\bar{\sigma}'\frac{d\omega}{dS_2} &= \frac{B}{\gamma} = B' \\
 A' &= \frac{A}{\gamma} = \frac{\sin(\omega + \mu)}{\cos\phi} + \frac{\bar{\sigma}'}{y'}\tan\phi[\cos(\omega + \mu) \\
 &\quad - \cos(\omega - \mu)] \\
 B' &= \frac{B}{\gamma} = -\frac{\sin(\omega - \mu)}{\cos\phi} + \frac{\bar{\sigma}'}{y'}\tan\phi[\cos(\omega + \mu) \\
 &\quad - \cos(\omega - \mu)]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(ii)  $r = 0$ 、 $C \neq 0$  の場合

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}'' \cdot C$$

$$y = y' \cdot R$$

$$S = S' \cdot R$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}''}{dS_1'} - 2\tan\phi \bar{\sigma}'' \frac{d\omega}{dS_1'} &= \frac{A}{C}R = A'' \\ \frac{d\bar{\sigma}''}{dS_2'} + 2\tan\phi \bar{\sigma}'' \frac{d\omega}{dS_2'} &= \frac{B}{C}R = B'' \\ A'' &= \frac{A}{C}R = \frac{\bar{\sigma}''}{y} \tan\phi [\cos(\omega + \mu) - \cos(\omega - \mu)] \\ B'' &= \frac{B}{C}R = \frac{\bar{\sigma}''}{y} \tan\phi [\cos(\omega + \mu) - \cos(\omega - \mu)] \end{aligned} \right\} (3.8)$$

となる。

2) Kötter 式の差分表示と計算法

Kötter 式をすべり線  $S_1, S_2$  に沿って数値積分するために、線素  $\Delta S_1$  および  $\Delta S_2$  を用いて差分表示すれば次式を得る。ただし  $d_1, d_2$  はそれぞれ  $\Delta S_1, \Delta S_2$  に沿う差分を表わす。

$$\left. \begin{aligned} S_1 \text{上} : \Delta_1 \bar{\sigma} - 2\bar{\sigma} \tan\phi \cdot \Delta_1 \omega &= A \Delta S_1 \\ S_2 \text{上} : \Delta_2 \bar{\sigma} + 2\bar{\sigma} \tan\phi \cdot \Delta_2 \omega &= B \Delta S_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.9)$$

一方、式 (3.5) を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} S_1 \text{上} : \quad dx &= dS_1 \cos(\omega - \mu) \\ \quad dy &= dS_1 \sin(\omega - \mu) \\ S_2 \text{上} : \quad dx &= dS_2 \cos(\omega + \mu) \\ \quad dy &= dS_2 \sin(\omega + \mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)$$

となり、これを差分表示すれば

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 x &= \Delta S_1 \cos(\omega - \mu) \\ \Delta_1 y &= \Delta S_1 \sin(\omega - \mu) \\ \Delta_2 x &= \Delta S_2 \cos(\omega + \mu) \\ \Delta_2 y &= \Delta S_2 \sin(\omega + \mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.11)$$

となる。

式 (3.9) と (3.10) とによって、すべり線の網目が逐次組立てられるのであるが、実際の解析手順は与えられた境界値によって以下に述べる4つの型に分類される。なお、以下の手法は山口によって誘導された高精度差分を数値計算に適するように一部改良したものである。

(1) Riemann の境界値問題 (R型)

交角が、 $2\mu = \pi/2 \pm \phi$  なる  $S_1, S_2$  すべり線の位置と応力とが与えられたとき、内部のすべり線形状と応力を求める問題である (点 a, b, d 既知: 点 c 未知)。

Fig. 2 の各辺をベクトルの的に考えて、 $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ad} + \vec{dc}$  の関係を用いると、既知量  $\Delta S_1, \Delta S_2$  を用いて  $\Delta S_1', \Delta S_2'$  は、次のように表わされる。

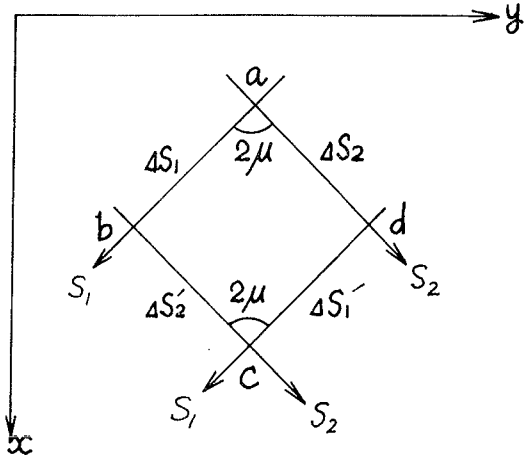


Fig. 2 R-type mesh of slip-lines

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_1' &= \frac{\Delta S_1 \sin(Q_2' - Q_1) - \Delta S_2 \sin(Q_2' - Q_2)}{\sin(Q_2' - Q_1')} \\ \Delta S_2' &= \frac{\Delta S_1 \sin(Q_1' - Q_1) - \Delta S_2 \sin(Q_1' - Q_2)}{\sin(Q_2' - Q_1')} \end{aligned} \right\} (3.12)$$

ここに、 $Q_1, Q_2, Q_1', Q_2'$  は、 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_1', \Delta S_2'$  が鉛直軸となす角であり、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{\omega_a + \omega_b}{2} - \mu, \quad Q_2 = \frac{\omega_a + \omega_d}{2} + \mu \\ Q_1' &= \frac{\omega_c + \omega_a}{2} - \mu, \quad Q_2' = \frac{\omega_b + \omega_c}{2} + \mu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.13)$$

ただし、 $\omega_c, \sigma_c$  の初期値は  $\omega_c = (\omega_b + \omega_d)/2, \sigma_c = (\sigma_b + \sigma_d)/2$  と近似する。

次に、式 (3.9) を cd, bc 間で適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_c - \sigma_d) - (\sigma_c + \sigma_d)(\omega_{c1} - \omega_d) \tan\phi &= A \Delta S_1' \\ (\sigma_c - \sigma_b) + (\sigma_c + \sigma_b)(\omega_{c2} - \omega_b) \tan\phi &= B \Delta S_2' \end{aligned} \right\} (3.14)$$

となり、整理して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{c1}[1 - (\omega_{c1} - \omega_a) \tan \phi] \\ = \sigma_a[1 + (\omega_{c1} - \omega_a) \tan \phi] + A\Delta S'_1 \\ \sigma_{c2}[1 + (\omega_{c2} - \omega_b) \tan \phi] \\ = \sigma_b[1 - (\omega_{c2} - \omega_b) \tan \phi] + B\Delta S'_2 \end{aligned} \right\} (3.15)$$

となる。上式より、まず  $\omega_c$  に関して解くと、

$$\omega_c = (\omega_{c1} + \omega_{c2}) / 2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし、} \omega_{c1} &= \omega_a - \frac{A\Delta S_1 + \bar{\sigma}_a - \bar{\sigma}_c}{(\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_a) \tan \phi} \\ \omega_{c2} &= \omega_b + \frac{B\Delta S_2 + \bar{\sigma}_b - \bar{\sigma}_c}{(\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_b) \tan \phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.16)$$

となり、 $\omega_c$  が定まると式 (3.15) から  $\sigma_c$  は以下のよう  
に定まる。

$$\sigma_c = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_a[1 + (\omega_c - \omega_a) \tan \phi] + A\Delta S'_1}{1 - (\omega_{c1} - \omega_a) \tan \phi} + \frac{\sigma_b[1 - (\omega_c - \omega_b) \tan \phi] + B\Delta S'_2}{1 + (\omega_{c2} - \omega_b) \tan \phi} \right] \dots\dots(3.17)$$

以下、 $\omega_c$  と  $\sigma_c$  がそれぞれ一定値に収束するまで (3.12) ~ (3.17) の計算を反復する。

(2) 特異点のある R 型問題 (R<sub>s</sub> 型)

Fig. 3(a)のように、2つのすべり線の交角が、 $\mu = \pi / 2 \pm \phi$  でない時、交点Oには1つの族のすべり線が多数集中して、そこは特異点となる。たとえば、その中の一つ同図(b)について考えると、点 a, d (共に点Oの仮想点) における  $\omega$  と  $\bar{\sigma}$  が与えられれば上記 Riemann の境界値問題において、 $\Delta S_2 = \overline{ad} = 0$  として解析でき

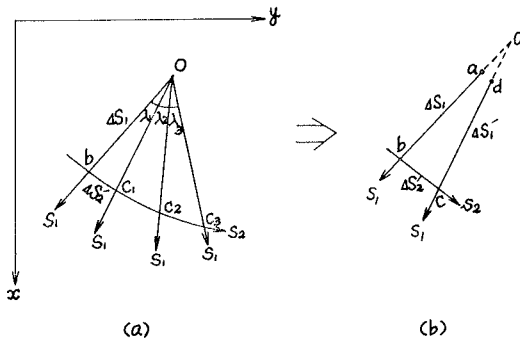


Fig. 3 R<sub>s</sub>-type mesh of slip-lines

る。

頂角  $\lambda_i$  が与えられて、点 a, d の  $\omega$  と  $\bar{\sigma}$  を算定する方法については、3) 境界条件の(3)で述べる。

(3) Cauchy の境界値問題 (C型)

Fig. 4 に示すように、すべり線でない曲線  $\Gamma$  とその上の応力が与えられた時、 $\Gamma$  を基線として、すべり線場を構成する問題である。

Riemann の境界値問題と同様に各辺をベクトルと考  
えて、 $\vec{bc} = \vec{bd} + \vec{dc}$  なる関係から、

$$\left. \begin{aligned} \Delta S'_1 &= \frac{\Delta l \cos Q'_2}{\sin(Q'_2 - Q'_1)} \\ \Delta S'_2 &= \frac{\Delta l \cos Q'_1}{\sin(Q'_2 - Q'_1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.18)$$

となり、以下 R 型と同様に  $\omega_c$ 、 $\sigma_c$  が決定される。

(4) 混合境界値問題 (M型)

Fig. 5 に示すように、1つのすべり線の位置と応力が既知であり、これと交差するすべり線でない曲線  $\Gamma$  の位置とその上の  $\alpha$  が指定される場合、はさまれた領域内の塑性場をつくる問題である。たとえば、管壁が  $\Gamma$  を構成する。この場合、 $\omega_c$  は後述 3) 境界条件の(2)で与えられるから未知数は  $\sigma_c$  だけであり、次式で計算される。

$$\sigma_c = \frac{\sigma_b [1 + (\omega_c - \omega_b) \tan \phi - B\Delta S'_2]}{1 - (\omega_c - \omega_b) \tan \phi} \dots\dots(3.19)$$

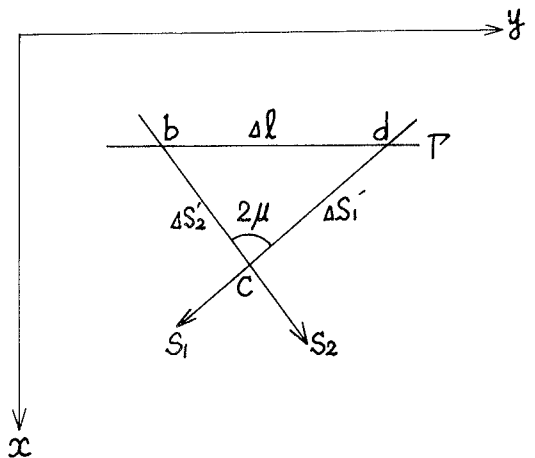


Fig. 4 C-type mesh of slip-lines

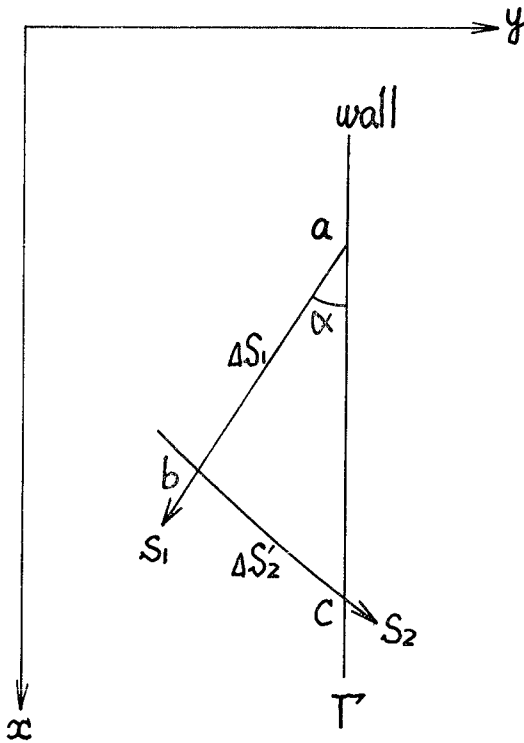


Fig. 5 M-type mesh of slip-lines

ここで、 $\Delta S_2, \Delta x$  は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_2' &= -\frac{\Delta S_1 \sin Q_1}{\sin Q_2'} \\ \Delta x &= \frac{\Delta S_1 \sin(Q_2' - Q_1)}{\sin Q_2'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.20)$$

で与えられる。

3) 境界条件

数値積分に当って、 $\bar{\sigma}$  および  $\omega$  の初期値を与える(1)

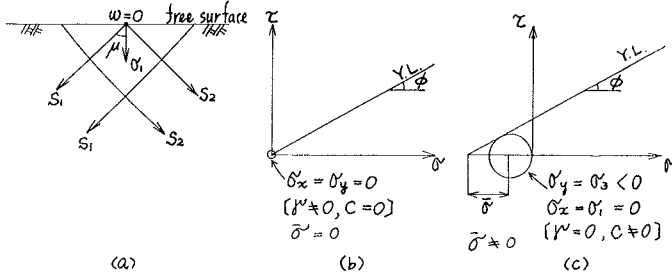


Fig. 6 Boundary conditions on the upper free surface

上端自由表面 ( $x = 0$ ), (2)円管内壁面 ( $y' = 1$ ), (3)特異点 ( $x' = 0, y' = 1$ ) における  $\bar{\sigma}$  および  $\omega$  の算定法は以下のとおりである。

(1)上端自由表面上の点

Fig. 6 (a)に示すように表面が水平と仮定すれば、鉛直ならびに水平方向の応力  $\sigma_x, \sigma_y$  がそれぞれ主応力となり、主働領域であることから  $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_3, \omega = 0$  となる。

さらに、i)  $r \neq 0, C = 0$  のときは Fig. 6(b)に示すように  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  となり、平均換算応力は  $\bar{\sigma} = 0$  となる。ii)  $r = 0, C \neq 0$  のときは Fig. 6(c)に示すように  $\sigma_x = \sigma_1 = 0, \sigma_y = \sigma_3 < 0$  となり平均換算応力は次式で与えられる。

$$\bar{\sigma} = (1 + \sin \phi \cos 2\omega) / C \cot \phi \dots\dots (3.21)$$

(2)円管内壁上の点

壁面上においては、Fig. 7 (a)に示すように第一主応力  $\sigma_1$  の方向  $\omega$  が知れれば、 $\alpha = \mu - \omega$  として、すべり

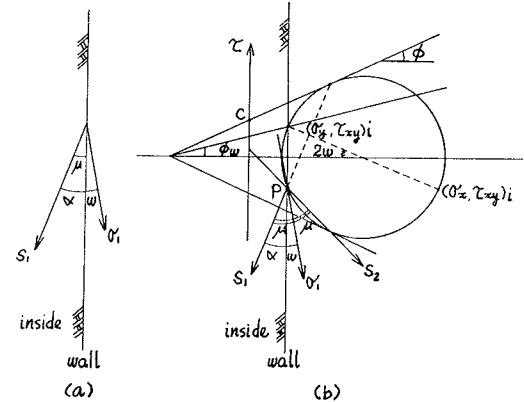


Fig. 7 Boundary conditions on the bin wall

線  $S_1$  の方向  $\alpha$  が決定される。

ところで、壁面において塑性降伏状態にある(壁面に沿うすべりが生じる)ためには、壁面に作用する直応力  $(\sigma_x)_i$  とせん断応力  $(\tau_{xy})_i$  の間に壁面摩擦条件、

$$(\tau_{xy})_i / (\sigma_x)_i = \tan \phi_w \quad (3.22)$$

が満足されていなければならない。以上のことを図示すると Fig. 7(b)のよ

うである。図から壁面摩擦角  $\phi_w$  が与えられるとき、 $\omega$  と  $\alpha$  は次式で算定される。

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ \sin^{-1} \left( \frac{\sin \phi_w}{\sin \phi} \right) - \phi_w \right] \dots\dots\dots (3.23)$$

$$\alpha = \mu - \omega = \mu + \frac{\phi_w}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{\sin \phi_w}{\sin \phi} \right) \dots\dots\dots (3.24)$$

(3) 特異点

Fig. 8 (a)に示すように自由表面と管壁面との交点 O においては、前者に規制される第一主応力  $\sigma_1$  (すべり線  $S_1$ ) と後者に規制される第一主応力  $\sigma'_1$  (すべり線  $S'_1$ ) が共存する特異点を構成する。したがって  $S_1$  線に沿う差分においては点 O (点 a) の  $\bar{\sigma}$ ,  $\omega$  に上記(1)の値を採用し、 $S'_1$  線に沿う場合の点 O (点 b)

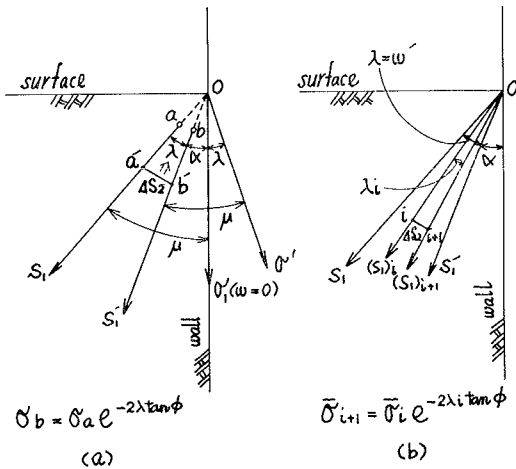


Fig. 8 Boundary conditions at the singular-point

の  $\sigma$ ,  $\omega$  には上記(2)の条件を満足する値を採用する必要がある。すなわち、 $\bar{\sigma}_a, \omega_a = 0$  は既知であり、 $\omega_b$  は  $\omega_b = \omega_a + \lambda = \lambda = \omega'$  として式 (3.23) で与えられる。 $\bar{\sigma}_b$  は式 (3.6) の第二式において  $dS_2 \rightarrow 0$  とおいた極値として (図において  $a'b' = \Delta S_2$  を  $ab = 0$  に限りなく近づける) 次式で計算される。

$$\bar{\sigma}_b = \bar{\sigma}_a e^{-2\lambda \tan \phi} \dots\dots\dots (3.25)$$

さらに、このすべり線  $S_1$  と  $S'_1$  に囲まれた遷移領域を Fig. 8 (b)に示すように分割して解析する場合には、上記と同様にして、 $\bar{\sigma}_i$  および  $\omega_i$  が既知として、

$\omega_{i+1}, \bar{\sigma}_{i+1}$  はそれぞれ次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + \lambda_i \\ \bar{\sigma}_{i+1} &= \bar{\sigma}_i e^{-2\lambda_i \tan \phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.26)$$

たとえば、 $\lambda$  を  $n$  等分する場合には  $\lambda_i = \lambda/n = \omega'/n$  で与えられる。

4 解析結果

前節の解析手順に従って、鳥取大学電子計算機センター計算機 M-150 を使用して、数値解析を実施し、すべり線網と各格子点上の  $\bar{\sigma}$ ,  $\omega$  (したがってまた  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) を決定した。

計算の開始点である上端自由表面の分割数は、半径方向に  $y/R = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  の5分割とし、あわせて遷移領域が拡大する場合 ( $\gamma = 0, C \neq 0$  の場合) には、これを3分割 ( $\lambda_i = \omega'/3$ ) した。また管軸に沿う深さ方向には  $x/R \leq 30$  まで計算することにした (Fig. 9 参照)

解析条件としては、前述したように (i)  $\gamma \neq 0, C = 0$  の場合と (ii)  $\gamma = 0, C \neq 0$  の場合とに分けて、それぞれにおいて Table I に示す試料のせん断抵抗角  $\phi$  と壁面の摩擦角  $\phi_w$  の組合せについて解析した。

Table I Values of  $\phi$  and  $\phi_w$  subjected to the analysis

| $\phi$ (deg) | $\phi_w$ (deg) | Case 1          | Case 2       |
|--------------|----------------|-----------------|--------------|
| 15           | 10 15          |                 |              |
| 20           | 10 15 20       |                 |              |
| 25           | 10 15 20 25    | $\gamma \neq 0$ | $\gamma = 0$ |
| 30           | 10 15 20 30    | $C = 0$         | $C \neq 0$   |
| 40           | 10 15 20 30 40 |                 |              |
| 50           | 10 15 20 30 50 |                 |              |

得られた解析結果の中、すべり線網の一例を Fig. 10 に示す。管中心軸上の鉛直応力  $(\sigma_x)_c = \sigma_1$ , 水平応力  $(\sigma_y)_c = \sigma_3$  および管壁面に作用する水平応力  $(\sigma_y)_i$ , せん断応力  $(\tau_{xy})_i$  について、代表的深さ  $x/R = 10, 20, 30$  における値を示すと Figs. 11, 12 のようである。

任意の管径  $2R$ , 試料の  $r, C, \phi$  および壁面摩擦角  $\phi_w$  が与えられた場合の代表位置における各応力成分は同図を用いて容易に求めうる。すなわち、まず Fig. 11



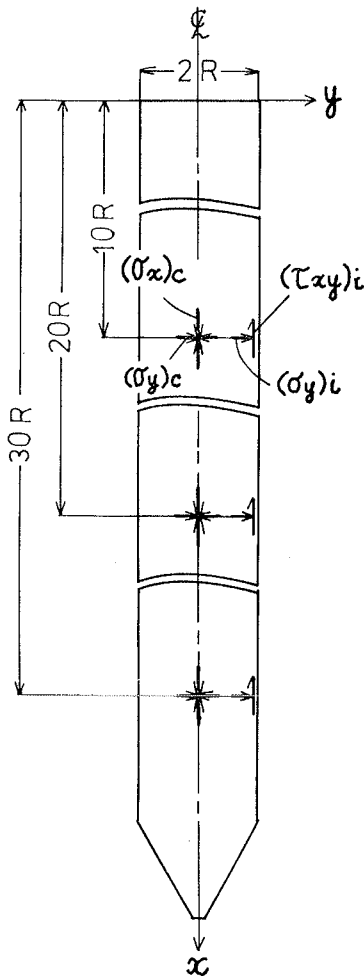


Fig. 9 Cylindrical coordinate axes and stress components

を用いて  $\gamma$  のみによる応力成分の相対値を与えられた  $\phi$ ,  $\phi_w$  の組合せによって決定し、ついで  $C$  のみの応力成分の相対値を同様に Fig. 12 から  $\phi$ ,  $\phi_w$  の組合せから読み取り、それぞれに  $R$ ,  $\gamma$  および  $R$ ,  $C$  の絶対値を代入すれば応力成分の絶対値がそれぞれ計算される。最後に両者の和をとれば所要の応力成分が決定できる。

なお、地盤の支持力の解析において同様な区分計算がなされ、 $\gamma$  のみによる支持力係数  $N_\gamma$ 、 $C$  のみによる支持力係数  $N_c$  を表示する方法が一般に採用されている。その際これら  $N_\gamma$ 、 $N_c$  から合成して求めた支持力と  $\gamma$ ,  $C$  を始めから解析に持ちこんだ場合の支持力とに

は幾分の差が生じることが報告されている。同様な事実が本解析結果にも認められるが（そのため、本解析用プログラムは、(i)  $\gamma \neq 0$ ,  $C = 0$ , (ii)  $\gamma = 0$ ,  $C \neq 0$ , および (iii)  $\gamma \neq 0$ ,  $C \neq 0$  ( $R$ ,  $\gamma$ ,  $C$  絶対値代入) が簡単なインデックスで区別して実行できるように組まれている), 実用上両者の差は無視して差支えないと判断された。

## 5 実験概要

### 5.1 実験装置

容器構造物内の粒状体の静止時ならびに流動時の挙動を検討するため前報<sup>7)</sup> Fig. 6 に示すような実験装置を試作した。今回の実験では、鉛直管に長さ 200cm の薄肉アクリル円管（内径 14.61cm, 外径 15.06cm）を用いた。鉛直管につづくホッパーは、前回同様、傾斜角 60° の円錐ノズル形状（ノズル径は 1.0, 1.6, 2.2, 2.8cm に可変）を採用した。

粒状体がアクリル円管内壁面に作用する圧力を検出するため、アクリル外壁面に電気抵抗線ひずみゲージ（ゲージ長 8mm, クロス型）を 20cm 間隔で前報<sup>7)</sup> Fig. 6 に示すように貼付した。ただし、今回は円管中心軸に対し対称位置にあるひずみゲージを直列配線とし、18個の計測点のひずみ計測には、デジタル自動ひずみ計測装置（共和電業製 ASB-55B, SD-50A）を使用した。また、土圧計（共和電業製 BE-2 KC, BE-2 KD）による計測には動ひずみ計（横河電機製 Type3126）、フラットベッドレコーダー（同 Type3052）を使用した。

### 5.2 試料

粒状体試料として、単位容積重量  $\gamma$  と粒子形状の異なる砂、磁製ボール、シリカゲル、軽量骨材の 4 種類を採用し、いずれも気乾状態で使用した。砂は鳥取市賀露海岸で採取した海砂を水洗いしたのち、2mmフルイでふるい、通過分を使用した。磁製ボールは日本化学陶業製 SSA シリンダーボール（6mmφ）を使用し、シリカゲルは片山化学工業製製品を気乾状態で吸湿させた後使用した。これら 2 つの試料は球形度の良い均等粒状体とみなすことができるものである。軽量骨材は、コンクリート用人工軽量骨材（造粒型細骨材）の 5.0mmフルイ通過 1.2mmフルイ残留分を使用した。これら各試料の物性を、Table II に示す。

### 5.3 実験方法

粒状体内の静止状態における管中心軸上の鉛直応力

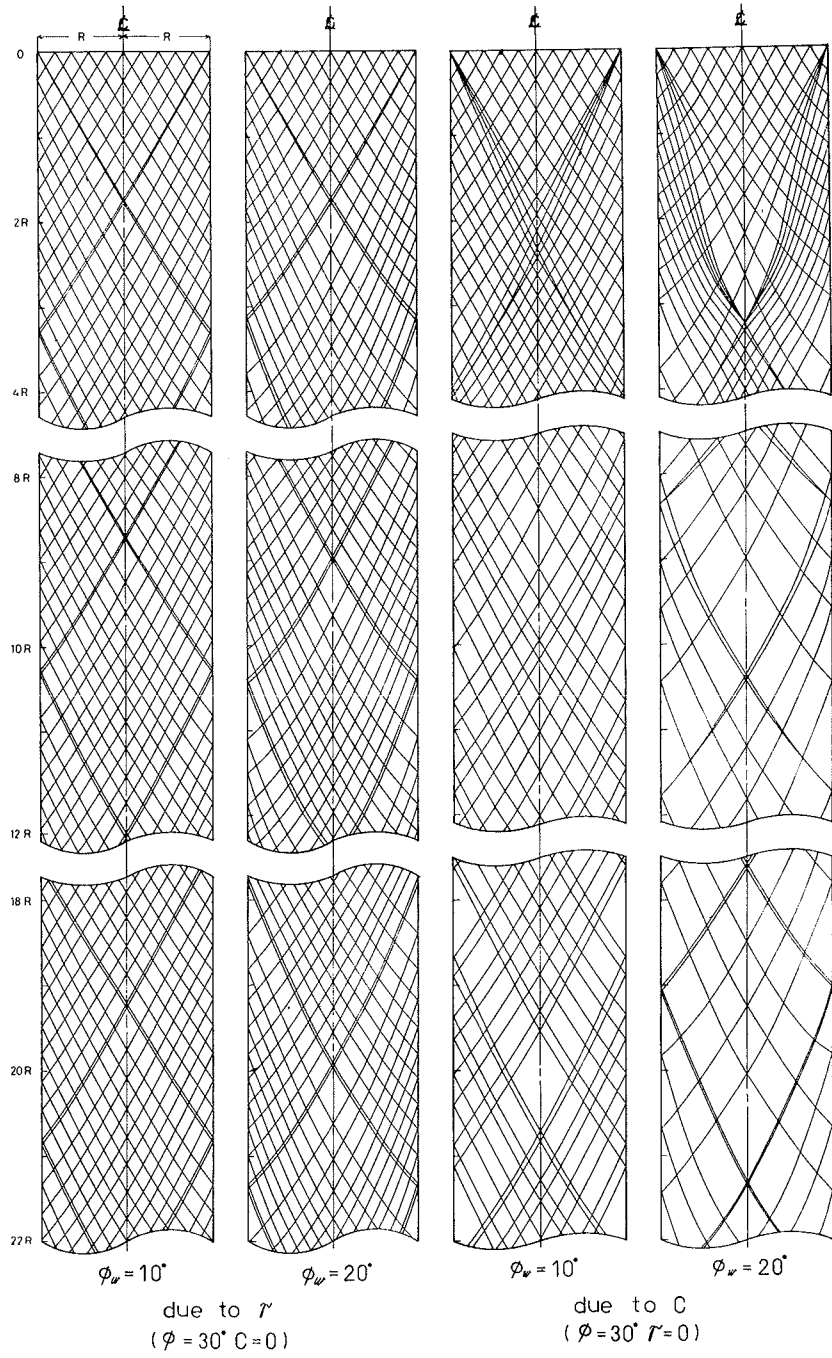


Fig. 10 Slip-line fields

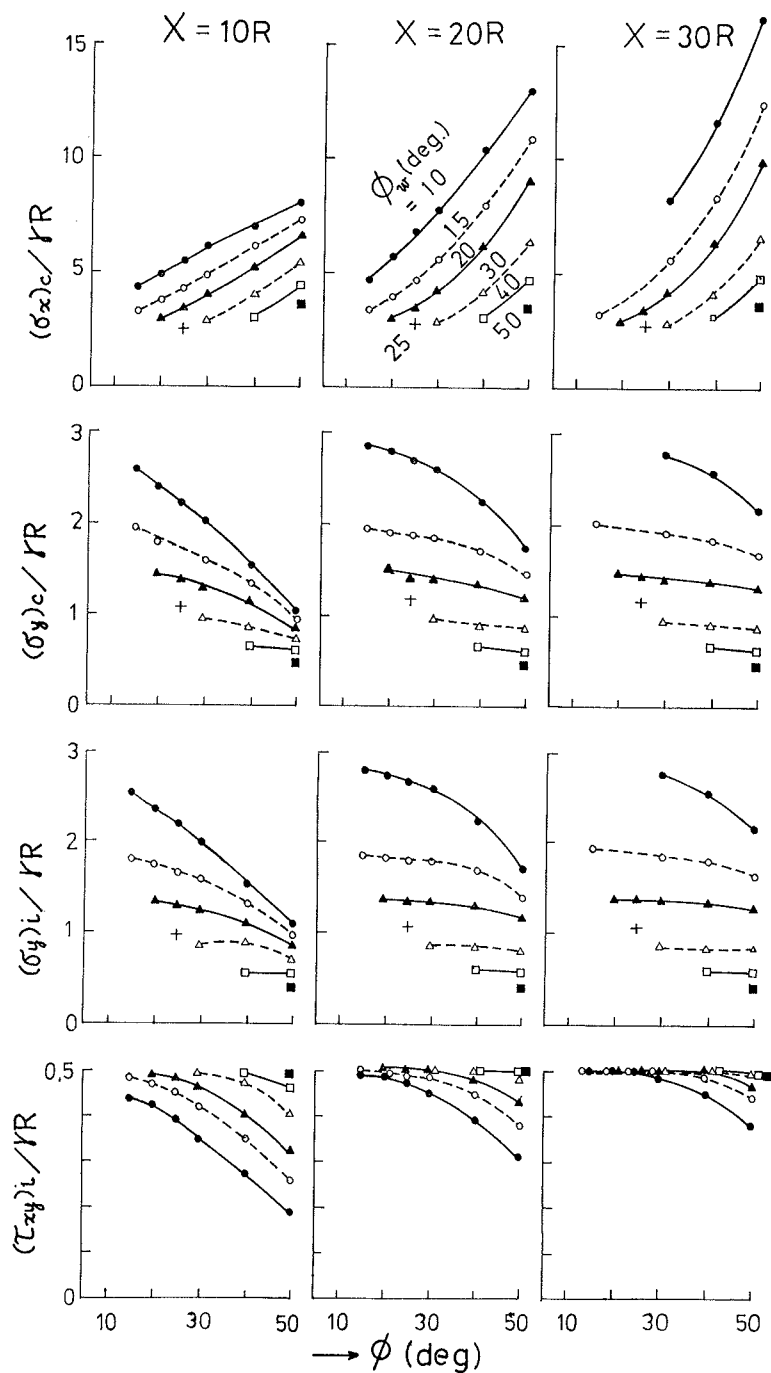


Fig. 11 Static stresses due to  $\tau$  of bulk solid stored in a cylindrical bin, calculated with different angles of  $\phi$  and  $\phi_w$  ( $C = 0$ )

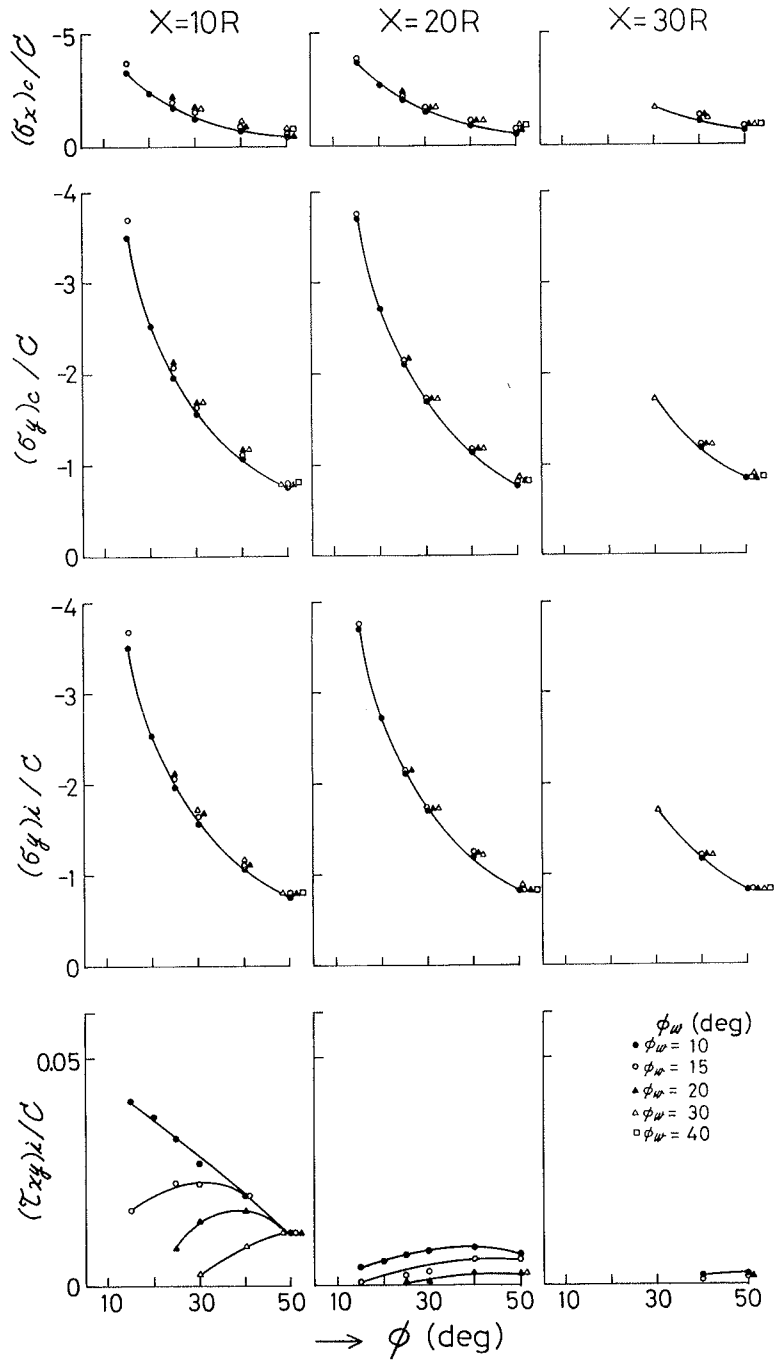


Fig. 12 Static stresses due to  $C$  of bulk solid stored in a cylindrical bin, calculated with different angles of  $\phi$  and  $\phi_w$  (when  $\gamma = 0$ )

Table II Physical properties of the granular materials

|  | sand<br>(under 2mm) | ceramic ball<br>(6 mm $\phi$ ) | silica gel<br>pellet<br>(4 mm $\phi$ ) | light-weight<br>aggregate<br>(5mm~1.2mm) |
|--|---------------------|--------------------------------|--|--|
| bulk density $\gamma$ (g/cm <sup>3</sup> ) |                     |                                |  |  |
| loose                                      | 1.616               | 1.421                          | 0.981                                  | 0.805                                    |
| dense                                      | 1.670               | 1.454                          | 1.004                                  | 0.877                                    |
| internal friction angle<br>$\phi$ (deg)    | 25                  | 48                             | 47                                     | 43                                       |
| wall friction angle<br>$\phi_w$ (deg)      | 10                  | 10                             | 16                                     | 21                                       |

( $\sigma_x$ )<sub>c</sub> と円管内壁近傍の水平応力 ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub> は、管内底部に土圧計を設置し試料を自由落下により段階的に充填することにより測定した。

一方、管外壁面ひずみから応力 ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub>、( $\tau_{xy}$ )<sub>i</sub> への換算は、内圧を受ける円管と仮定し、次式により算出した。すなわち、アクリル外壁面上の鉛直および円周方向ひずみを  $\epsilon_V$ 、 $\epsilon_H$ 、同点の応力を ( $\sigma_x$ )<sub>o</sub>、( $\sigma_\theta$ )<sub>o</sub> とすれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\theta)_o &= \frac{2r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} (\sigma_y)_i = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_H + \nu \epsilon_V) \\ (\sigma_x)_o &= \int_0^x (\tau_{xy})_i \frac{r_i}{r_o^2 - r_i^2} dx \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_V + \nu \epsilon_H) \end{aligned} \right\} \dots(5.1)$$

ここに、 $r_o$ 、 $r_i$  はアクリル管の外半径および内半径、 $E$ 、 $\nu$  はアクリル管のヤング率およびポアソン比であって実測値  $E=3.92 \times 10^4$  kg/cm<sup>2</sup>、 $\nu=0.39$  を用いた。

## 6 実験結果と考察

試料として、砂、磁製ボール、軽量骨材、シリカゲルを用いた静止時粒状体圧の実験結果を Fig. 13 に示す。中心軸上の鉛直応力 ( $\sigma_x$ )<sub>c</sub> と壁面近傍の水平応力 ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub> は土圧計により、壁面に作用する応力 ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub> とせん断応力 ( $\tau_{xy}$ )<sub>i</sub> とをひずみゲージにより求めた。測定値は3~5回実験を繰り返して得られた結果を平均した値を示している。図中実線は、極限解析結果 (Fig. 11) に試料の  $\gamma$ 、 $\phi$ 、 $\phi'$  に近い値を用いて算出したものである。

これらの実験結果から、静止時粒状体圧の特徴を挙げるとつぎのようである。

(i) 土圧計によって求めた管中心軸上の応力 ( $\sigma_x$ )<sub>c</sub> は、深さとともに放物線状に増加しており、解析値より幾分小さな値を示すが、両者の傾向はほぼ一致している。

(ii) 管壁面の水平応力 ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub> はひずみゲージと土圧計を併用して測定した。ひずみゲージで測定した値にはかなりのばらつきがみられるが、土圧計により求めた砂、軽量骨材、シリカゲルの粒状体圧は解析曲線と比較的良好一致を示し、深さとともに放物線状に増加している。磁製ボールの土圧計による応力がかなり大きな値を示しているが、実験に使用した小型土圧計が磁製ボールのような大きな粒状体の測定に適していないことによるものと思われる。

(iii) 以上二つの応力 ( $\sigma_y$ )<sub>c</sub>、( $\sigma_y$ )<sub>i</sub> は  $\phi$ 、 $\phi_w$  の影響を強く受けている。このことは、解析結果 Fig. 10 から予測されたとおりである。

(iv) ひずみゲージから求めた管壁面のせん断応力 ( $\tau_{xy}$ )<sub>i</sub> も放物線状に分布する。測定値にばらつきが見られるものの、 $x=50\text{cm} \sim 80\text{cm}$  の深さで、ほぼ一定値に達するものとみなしうる。その大きさは、砂で5~10g/cm<sup>2</sup>、磁製ボールで5~7g/cm<sup>2</sup>、軽量骨材で4~6g/cm<sup>2</sup>、シリカゲルで3~4g/cm<sup>2</sup>であり、壁面において ( $\tau_{xy}$ )<sub>i</sub> = ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub>  $\cdot \tan \phi_w$  をほぼ満足していることがわかる。このことから前述の磁製ボールについて土圧計により求めた値 ( $\sigma_y$ )<sub>i</sub> は異常に大きな値であり、むしろ、ひずみゲージにより求めた値の方が正当であると判断される。

(v) 以上の実験結果は充填堆積状態での粒状体圧を測定したものであって流動開始時の応力状態を求めたものではない。一方、解析結果は全盤塑性状態の仮定にもとづくものであり、静止時粒状体圧の極限值として、流

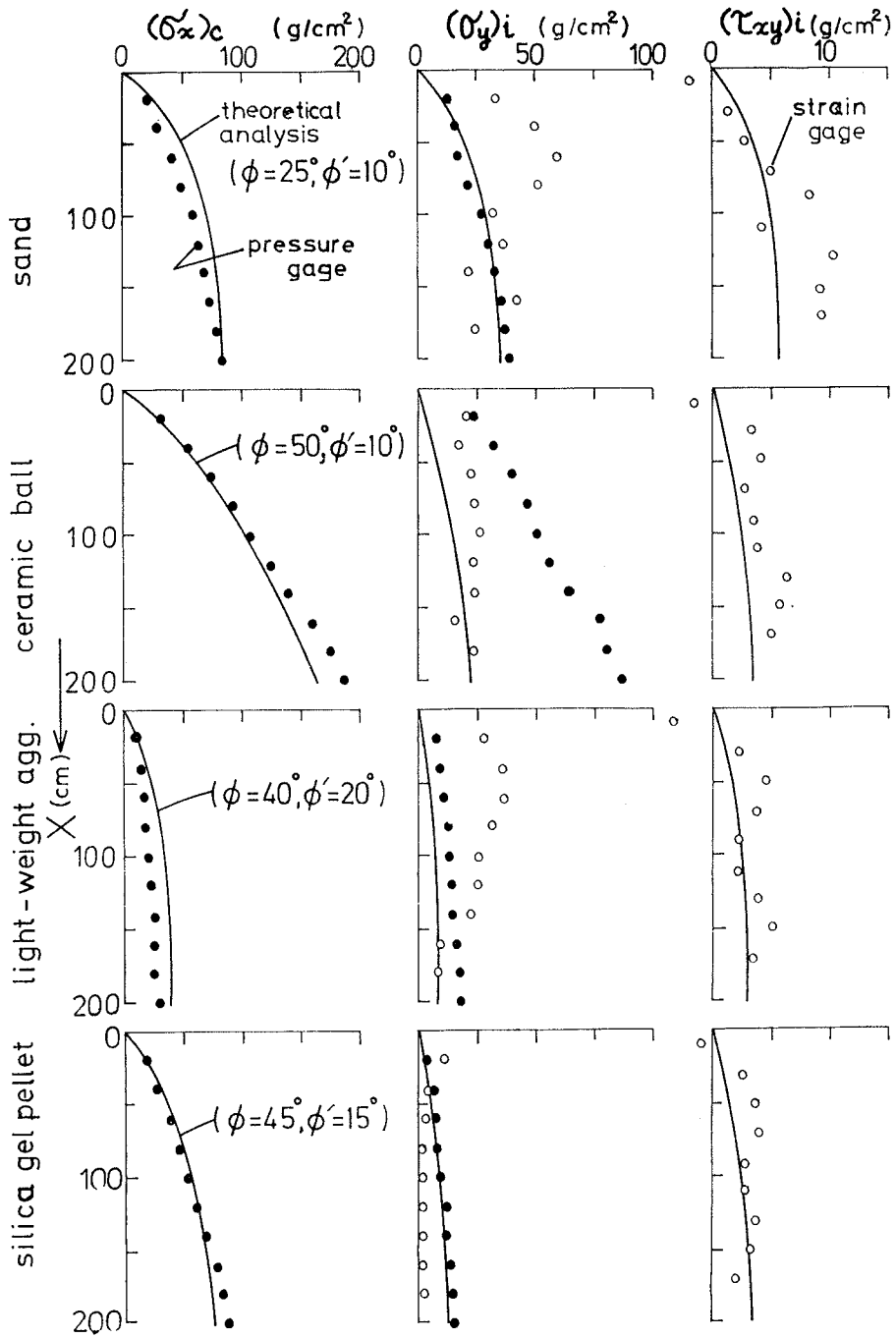


Fig. 13 Static pressures of several kinds of bulk solids obtained by the laboratory model tests as well as the theoretical analysis

動開始時応力に近い値を与えるものと考えられる。しかるに上述の如く、両者が比較的良好な対応性を示すことから、充填堆積状態での粒状体圧は、その状態に相当する土圧係数  $K$  を与える  $\phi$ ,  $C$  を決定し、これと実測された  $r$ ,  $\phi_w$  を用いて解析結果 Fig. 11, 12 から実用上十分な精度で推定できると結論される。

## 7 結 語

容器構造物の粒状体圧に関する基礎研究として、鉛直円管内に充填堆積された粒状体中の応力分布を塑性理論によって詳細に解析するとともに、模型実験装置に土圧計ならびに壁面ひずみ計を用いて粒状体圧を実測することによって考察を加えた。

その結果、静止状態から流動開始状態にいたる間の広い意味での静止時粒状体圧は、上記解析値を用いて十分に推定できることが結論された。

さらに、壁面ひずみ計による粒状体圧の測定結果が、まずまずの精度を示したことは、この測定法が粒状体の流動を乱すことなく測定可能であるという長所を有しているだけに、流動時の粒状体圧の測定に威力を発揮するものと期待される。

## 参 考 文 献

- 1) Janssen, H. A. ; Versuche über Getreidedruck in Silozellen, Zeitschrift Verein Deutscher Ingenieure, Vol. 39, Aug. 31, 1895, pp. 1045~1041
- 2) Walker, D. M. ; An Approximate Theory for Pressures and Arching in Hoppers, Chem. Eng. Sci., Vol. 21, 1966, pp. 975~997
- 3) Jenike, A. W. and Johanson, J. R. ; On the Theory of Bin Loads, Journal of Engineering for Industry, May 1969, pp. 339~344
- 4) Nanninga, N. ; Gibt die übliche Berechnungsart der Drücke auf Wände und den Boden von Silobauten sichere Ergebnisse ?, De Ingenieur, Vol. 68 Nov. 1956
- 5) Blair-Fish, P. M. and Bransby, P.L. ; Flow patterns and Wall Stresses in a Mass-Flow Bunker, Journal of Engineering for Industry, February 1973, pp. 17~26
- 6) Proposed ACI Standard ; Recommended Practice for Design and Construction of Concrete Bins, Silos, and Bunkers for Storing Granular Materials, Reported by ACI Committee 313, Journal of ACI, Proceeding Vol. 72, No. 10, Oct. 1975, pp. 529 ~548
- 7) 木山・小西：岩質粒状体の重力流動に関する基礎研究，鳥取大学工学部研究報告，第9巻，第1号，September 1978, pp. 213~228

1) Janssen, H. A. ; Versuche über Getreidedruck in Silozellen, Zeitschrift Verein Deutscher In-