

# 有限要素法による平歯車の歯元応力解析

(周辺拘束条件と隣接歯の影響)

小田 哲\*・永村和照\*\*・難波千秋\*

(1978年5月31日受理)

Stress Analysis of Spur Gear Teeth by Finite Element Method  
(Effects of Constraining Conditions and Adjacent Teeth on Root Stresses)

by

Satoshi ODA\*, Kazuteru NAGAMURA\*\*, and Chiaki NANBA\*

(Received May 31, 1978)

## Summary

The root stresses of thin rim spur gears with consideration of the deformation of rim is investigated by means of the two-dimensional finite element method (FEM) with typical triangular elements.

The effects of constraining conditions for gear models and adjacent teeth on the root stress distributions are discussed. The gear tooth model with a single tooth is shown to be available for sufficiently precise evaluation of root stresses. The suitable rim thickness of gear model for the stress analysis by FEM is proposed. The true stresses on the root of gear tooth computed by FEM give fairly good agreement with measured ones.

## 1. ま え が き

歯車装置に対して高速化、小形化の要求が強まってくるにつれて、薄肉歯車が多く採用されるようになりそれらの負荷能力が問題となってきた。薄肉歯車の曲げ強度についての研究を進めるためには、まず負荷が作用した場合に生じる歯元応力について明らかにしておかなければならない。薄肉歯車における歯元応力状態は、リム厚さが小さいためリム部（基礎部）の変形量が大きく、一体歯車の場合と大きく異なることが考えられる。このようなリム部の変形を考慮した歯車の応力解析には有限要

素法を用いることが有効であると考えられる。

本報では、歯元応力解析に有限要素法を適用する場合に最初に問題となる歯車応力解析モデルの周辺拘束条件と隣接歯の歯元応力値に及ぼす影響について検討を加え興味ある結果を得たのでこれらの結果について報告する。

## 2. 有限要素法による歯元応力の計算

### 2.1 要素と変位関数

有限要素法による応力解析方法については、多くの文

\* 機械工学科 Department of Mechanical Engineering

\*\* 広島大学大学院 Hiroshima University

献<sup>1)</sup>に紹介されているので、ここでは要素と変位関数についてのみ記すことにする。図1は分割された二次元平面応力場における三角形要素 $m$ を示す。この図において

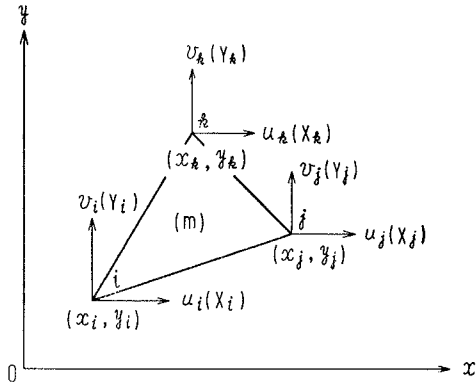


Fig. 1 Nodal displacements and forces for triangular element

三角形要素の各節点を  $i, j, k$  とし、各節点の座標値をそれぞれ  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$  とする。また節点  $i$  の  $x, y$  方向の変位および節点力をそれぞれ  $u_i, v_i$  および  $X_i, Y_i$  とする。三角形要素内の任意の点  $(x, y)$  における  $x, y$  方向の変位  $u, v$  を表す変位関数として、ここでは式(1)を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_1 \sim \alpha_6$  は未定係数である。

### 2.2 計算方法とプログラム

本計算においては歯車を二次元弾性問題と考え、三角形要素を用いて二次元平面応力問題として計算を行った。

有限要素法を用いて計算を行うには、まず入力データとして分割要素の要素番号、節点番号、各節点の  $x, y$

座標値、材料の特性に関するデータなどが必要である。これらの中でも要素番号、節点番号、節点座標値のデータは分割要素の数が多くなればなるほどほぼ比例的に増加するため、手作業によりこれらのデータを作成するにはかなりの時間と労力を要し、また正確さの点でも劣るので、本計算においては電子計算機によって自動的に要素分割を行う自動分割法を用いた。これは、歯車中心を通る直線群と歯車中心を中心とする円弧群によって歯車を分割する方法に基づいている。なお、歯車の歯面、歯元すみ肉部など規則的に分割を行うことが不可能な箇所に対しては、手作業によってデータを作成した。

有限要素法による応力計算プログラムは、計算に必要な諸数値を入力するためのプログラム、上述の自動分割を行うプログラムおよび自動分割によって得られた値を用いて有限要素法の計算を行うプログラムから構成されている。図2はこれらの計

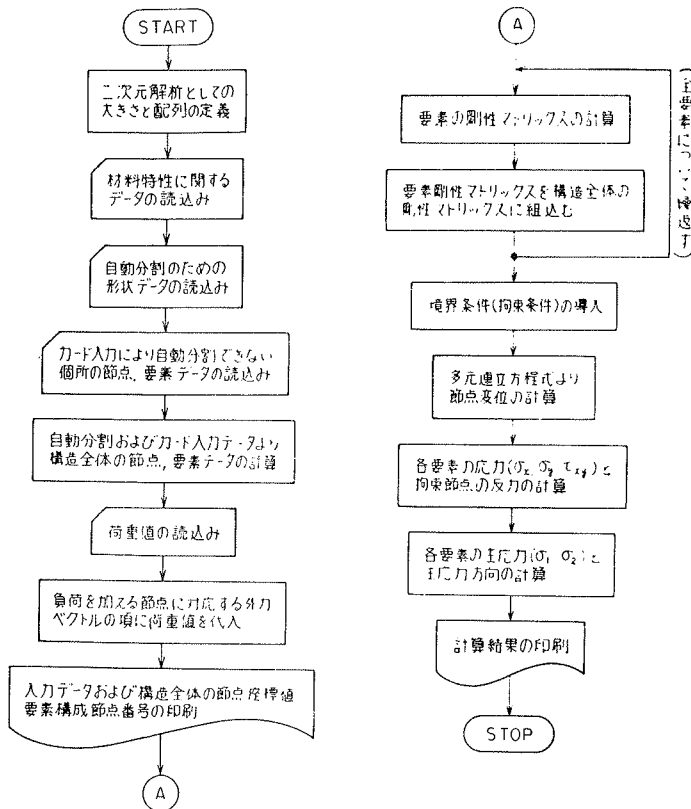


Fig. 2 Flow chart for computer program

算手順のフロー・チャートを示す。

2.3 要素の分割数と計算精度

有限要素法は、連続体を有限個の要素に分割して計算を行うため、分割を細かくしていった極限においては厳密解と一致するはずであるが、有限の分割では近似解となる。このため要素の分割数と計算精度の関係が問題となってくる。この問題についてはすでに二、三の研究<sup>2),3)</sup>によって調査されており、その一例を図3<sup>2)</sup>に示す。図3は長方形の等断面をもった、 $t/l=1/3$ なる片持ちはりの先端に荷重  $P$  を負荷した場合のはり先端のたわみと要素数の関係を示したものである。図中の理論解は次のたわみ式<sup>4)</sup>より計算される値である。

$$w = \frac{Pl^3}{3EI} \left\{ 1 + 0.71 \left(\frac{t}{l}\right)^2 - 0.1 \left(\frac{t}{l}\right)^3 \right\} \quad (2)$$

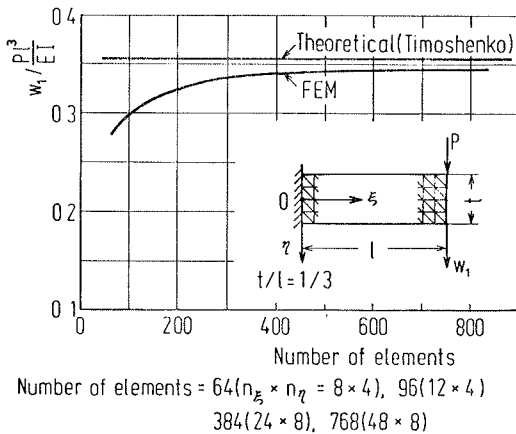


Fig. 3 Effect of number of elements on calculated values of deflection<sup>2)</sup>

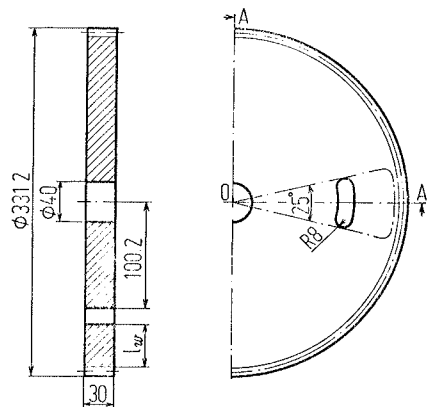
図3より要素数が約400の場合、有限要素法による計算値の誤差は5%以下であることがわかる。形状の複雑な歯車に対してこの結果を直接適用することは困難であり、またたわみに対する計算精度に基づいて応力計算の精度を論ずるのは多少無理があると思われるが、図3は有限要素法における分割数と計算精度の関係の一応の目安を与えるものと考えられよう。本計算においては図3の結果を考慮して歯車の分割要素数を選んでいる。

2.4 歯車モデルの分割方法と周辺拘束条件

有限要素法の計算に用いた歯車モデルは扇形穴付き歯車(図4)で、歯車の諸元はモジュール  $m=4.5$ 、圧力

角  $\alpha_0=20^\circ$ 、歯数  $z=72$  である。この歯車の歯先に単位歯幅当り  $P_n/b = 1 \text{ kg/mm}$  の荷重が作用した場合に対して応力計算を行っている。

まず、荷重を受ける歯の歯元応力に及ぼす隣接歯の影響を調査するために、リム上に荷重を受ける歯1枚のみをもつ歯車モデル(1枚歯モデル)と両側に隣接歯を1枚づつもつ歯車モデル(3枚歯モデル)に対して計算を行った。

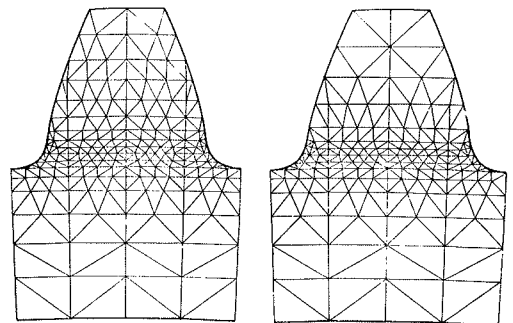


Section A-A

$m=4.5, \alpha_0=20^\circ, z=72, b=30 \text{ mm}$

Fig. 4 Gear model with fan-shaped hole

図5(a), (b)はそれぞれ図3の結果を考慮して求めた、リム厚さ  $t_w = 2 \text{ m}$  の場合の荷重を受ける歯(a)とその隣接歯(b)の分割パターンを示す。各歯の要素数は、図5(a)の場合が350、図5(b)では301となっている。図6は



(a) Loaded tooth

(b) Adjacent tooth

Fig. 5 Mesh pattern for gear teeth

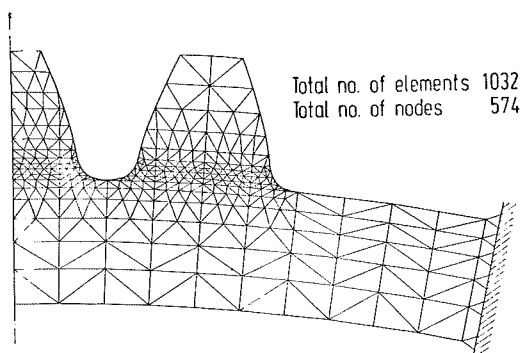


Fig. 6 Finite element model of gear with fan-shaped hole

$l_w = 2\text{m}$ の場合に対する分割パターンを、中心線に対して右半分のみ示したもので、要素総数 1032、節点総数 574 である。図中の右端の三角形群はリム端に位置する節点が拘束されていることを示す。拘束されているリムの左右両端の歯車中心に対して張る角度は歯 5 枚分に相当する  $25^\circ$  である (図 4)。歯元応力の計算において周辺拘束条件は各拘束節点の変位を 0 とすることによって与えている。

つぎに、有限要素法を歯車の歯元応力計算に適用する場合に問題となるのは、リム部厚さ (基礎部厚さ) および周辺拘束条件をどのように選ばよいかということである。この問題について明らかにするために、上述の扇形穴付き歯車と同一諸元を有する 1 枚歯モデルに対し、周辺拘束条件が図 7 (a), (b) の場合に対して、リム厚さを表 1 に示すように  $l_w = 2\text{m}$  から  $10\text{m}$  まで変えて、歯元

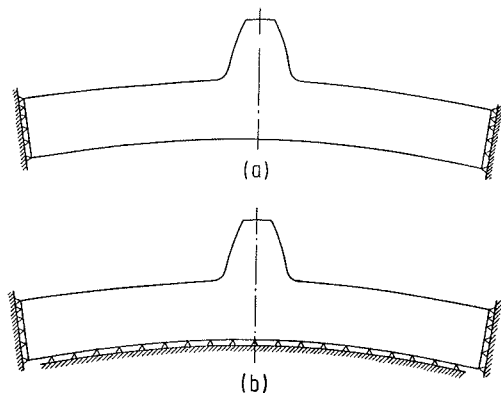


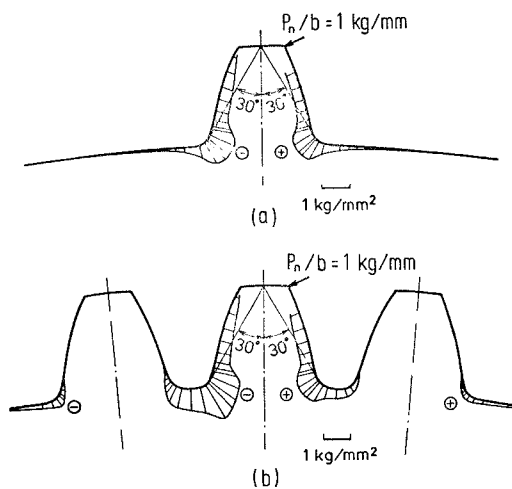
Fig. 7 Constraining conditions for gear tooth model

応力の計算を行った。この場合の歯の分割パターンは図 5 (a) と同様で、リム厚さと要素および節点総数の関係を表 1 に示す。

### 3. 計算結果および考察

#### 3.1 歯元応力に及ぼす隣接歯の影響

図 8 (a), (b) はそれぞれリム厚さ  $l_w = 2\text{m}$  の場合の 1 枚歯モデルと 3 枚歯モデルに対する有限要素法による歯元応力計算結果を示す。この応力分布は計算より求められた歯車の歯形面に沿って生ずる主応力値を歯面に垂直



$$m = 4.5, \alpha_0 = 20^\circ, z = 72$$

Constraining condition : Fig. 7 (a)

Fig. 8 Stress distributions on gear tooth surface ( $l_w = 2\text{m}$ )

Table 1 Rim thickness and number of elements and nodes

Rim thickness $l_w$	Total no. of elements	Total no. of nodes
2m	644	372
3m	724	414
4m	804	456
6m	964	540
8m	1124	624
10m	1284	708

方向に表したもので、応力分布図中の主応力の大きさを示す直線は歯形面に接する各要素の図心を通り、歯面に垂直である。図中の⊕、⊖の符号はそれぞれ引張応力、圧縮応力を表す。いずれの場合も最大歯元応力が発生する位置は Hofer の30° 接線法によって定まる危険断面の位置の近傍であることがわかる。

図8(a), (b)より負荷を受ける歯の, Hofer による危険断面位置の歯元応力を求めると1枚歯モデルにおいては引張側で  $\sigma_t = 0.647 \text{ kg/mm}^2$ , 圧縮側では  $\sigma_c = -1.045 \text{ kg/mm}^2$ , 3枚歯モデルにおいてはそれぞれ  $\sigma_t = 0.642 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\sigma_c = -1.047 \text{ kg/mm}^2$  であることがわかる。1枚歯モデルと3枚歯モデルの応力値の差は3枚歯モデルの場合に対して引張側で0.7%, 圧縮側で0.2%程度である。なお、図4に示した試験歯車の歯元すみ肉部 (Hofer による危険断面の位置) にゲージ長さ1mmのひずみゲージを接着して、負荷時に生じる歯元応力を実際に測定した結果、引張側、圧縮側の歯元応力値はそれぞれ  $\sigma_{t \text{ meas.}} = 0.667 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\sigma_{c \text{ meas.}} = -1.058 \text{ kg/mm}^2$  であった。有限要素法による計算結果は測定結果とよく一致することがわかる。図9(a), (b)はリム厚さ  $l_w = m$  の場合の応力分布を示す。この場合の1枚歯モデルと3枚歯モデルの応力値の差は引張側で3.8%, 圧縮側

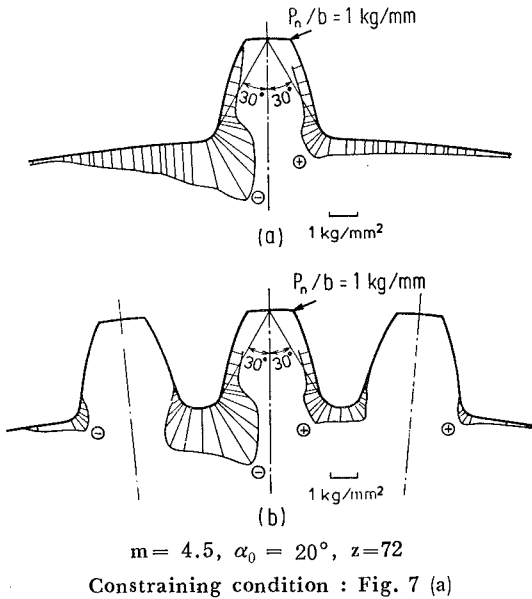


Fig. 9 Stress distributions on gear tooth surface ( $l_w = m$ )

で1.6%程度となり、リム厚さが薄くなると隣接歯の歯元応力に及ぼす影響は多少大きくなるが、この程度ではほとんど影響はないものとみなすことができよう。したがって、有限要素法による歯元応力解析には1枚歯モデルで十分であると考えられる。図8, 9よりいずれの場合も負荷を受ける歯の右隣接歯には引張応力が、左隣接歯には圧縮応力が生じていることがわかる。これは、リム厚さが  $m$ ,  $2m$  と薄いため一体歯車に比してリム部の変形が大きいことによるものと考えられる。このような薄肉歯車を被動歯車として用いる場合、かみあいに入る前に引張応力が、かみあい終了後には圧縮応力が生じ、いわゆる部分両振り応力状態となるため、リム厚さの小さい歯車の曲げ強度設計においてはこの応力条件の影響を考慮する必要があるものと考えられる。

3.2 歯元応力に及ぼすリム厚さの影響

図10は周辺拘束条件が (1) リム両端のみ拘束 (Fig. 7(a)), (2) リム両端とリム内側拘束 (Fig. 7(b)) の場合について、Hoferによる危険断面の位置における種々のリム厚さに対する歯元応力の計算結果を、横軸にリム厚さ ( $l_w/m$ ) をとって示している。拘束条件(1)の場合についてみると、リム厚さの減少につれて引張側歯元応力  $\sigma_t$  は減少するのに対し、圧縮側歯元応力  $\sigma_c$  (絶対値) は逆に増大する傾向を示している。これは主としてリム厚さが小さくなるとリムがたわみやすくなり歯面荷重の半径方向分力によって生じる圧縮応力値が増大すること

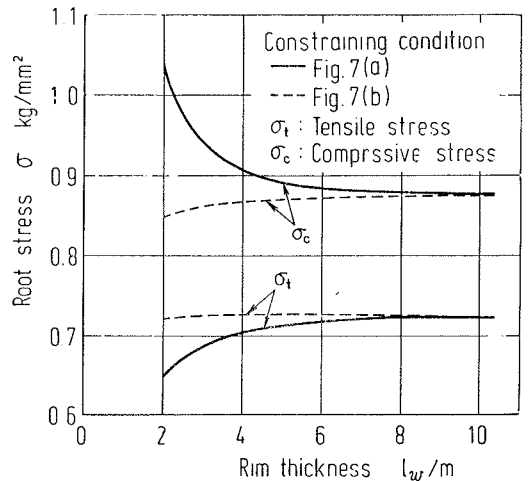


Fig. 10 Relation between rim thickness and root fillet stresses

によるものと考えている。この問題の詳細については別の機会に発表する予定である。拘束条件(2)の場合は引張側、圧縮側歯元応力ともにリム厚さの減少につれて減少する傾向が認められるがその程度はわずかであることがわかる。またリム厚さが 10m 以上 ( $l_w \geq 10m$ ) になると歯元応力はほとんど変化せず拘束条件(1)と(2)の場合で同一の値を示すことがわかる。これらのことより有限要素法により歯元応力解析を行う場合の一体歯車に対する歯車モデルとしては、リム長さを歯 5 枚分、リム厚さ 10m 程度にとればいずれの拘束条件に対しても十分であると考えられる。

#### 4. む す び

本報において明らかになった諸点を要約すると次のとおりである。

- (1) 歯元応力解析に有限要素法を適用する場合、歯元応力に及ぼす隣接歯の影響は無視できるほど小さいため、1枚歯モデルに対して解析を行えば十分である。
- (2) 有限要素法を一体歯車の歯元応力解析に適用する場合、歯車モデルのリム厚さは10mとれば十分である。
- (3) 薄肉歯車(被動歯車)では、歯元応力に及ぼすリ

ム部の弾性変形の影響が認められ、負荷側の歯元すみ肉部には、かみあいに入る前に引張応力が、またかみあい終り後には圧縮応力が発生する。このため、かみあい(運転)時に生じる負荷側の歯元すみ肉部の応力条件は部分両振り応力となる。

おわりに、本研究を行うにあたって熱心にご協力いただいた本学大学院工学研究科学生青木浩二氏に感謝いたします。また数値計算は、京都大学大型計算機センターの FACOM M-190 によって行ったことを付記し、謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- (1) Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, (1971), McGraw Hill.
- (2) 戸部ほか2名, 機械学会論文集, 39-327 (昭48-11), 3473.
- (3) 日高ほか3名, 機械学会論文集, 43-368 (昭52-4), 1512.
- (4) Timoshenko, S., Strength of Materials, Pt. 1 (1956), 175.