

岩質粒状体の重力流動に関する基礎研究

木 山 英 郎* 小 西 正 郎*

(1978年5月31日受理)

Mass Flow of Rock-like Granular Materials

by

Hideo KIYAMA and Masao KONISHI

(Received May 31, 1978)

Recently, flow by gravity has been, or is expected to be applied positively and rationally in every type of processing granular materials. Under the circumstances, various questions are raised on fundamental conditions of the mass flow, and any suitable methods of the analysis have not been established yet.

It seems thus necessary that stress-strain rate characteristics of granular materials should be clarified on the basis of soil mechanics, and that the fundamental equations basic to the solution of mass flow should be refined by using the results obtained.

In this study, an attempt of extension of the current method in soil mechanics is discussed in relation to analytical method of mass flow, and some problems in such extension are indicated. By experimental model studies, summaries of gravitational flow of granular sand are observed, and characteristic stress distributions in the sand of the flow state are examined.

1. はじめに

粒状体の流動が工学的に取り扱われだしたのは、農産物貯蔵用サイロや鉱石貯蔵用のオーブンの設計・管理においてであった。ところが近年になって工業の発達に伴ない、粒状体を取り扱うさまざまな分野で重力流動が積極的かつ合理的に利用されるようになった。

たとえば、土木工学に関連する分野においても、鉱工業原料や農産物の大容量バラ積運搬に伴なう貯蔵・積み込み・運搬等のターミナル施設、セメントや砕石製造プラントにおける原料や製品の流動プロセス、地盤改良工法における生石灰粒や種々の地盤改良材の攪拌・圧入機、シールド機をはじめ地下空洞開削に伴なう大型掘削機やずり運搬・搬出機、および公害防止に伴なう工場廃ガス

処理用移動層式浄化装置、等々新技術の開発や装置の大型化と流動過程の連続処理や自動化が進められている。

このように粒状体の重力流動の利用が身近なものとなるにつれ、流動現象に関する種々の基本的な問題点が指摘されるようになった。この方面の研究は、従来粉体工学の一部門としてなされてきたが、粒状体の力学的特性を十分に考慮しているとはいいい難く、未解決の問題も少なくない。そこで土質力学的な観点から粒状体の変形・流動特性を考察し、その結果をもとに理論解析のための基礎式の構成から検討することが必要である。

ところで、従来の土質力学においては破壊するまでの強度（耐力）と変形挙動の説明がほとんどであって、本課題のような破壊後の応力～変形速度関係、つまり流動

* 土木工学科 Department of Civil Engineering

現象そのものを対象とした研究^{1),2),3)}は極めてまれである。したがって、本研究ではまず既存の土質力学的手法を岩質粒状体の重力流動に拡張する方法とその問題点を明らかにし、ついで模型実験によって粒状体の重力流動の概観を得るとともに、流動解析に必要な二、三の基礎的事項について考察を加えることにする。

2. 塑性流動に関する基礎理論

2.1 概 説

従来、土の塑性力学の解析は、土が全般せん断破壊（極限）状態にあるものとして応力場（すべり線場）を構成するところの、いわゆる極限解析の手法を用いるのが普通である。これによれば、応力場（すべり線場）に引続き解析される速度場も塑性降伏条件を表わすところの強度定数 c や ϕ によって定まり、両者の特性曲線網は一致することになる。さらに、この種の速度場の構成においては、流動時の応力状態が塑性降伏開始時のそれと等しいと仮定し、すべり線に沿う速度成分を解析することがよく行なわれる。事実こうした考え方が、サイロの設計やオアービンの設計において久しく用いられてきた。

これに対し、最近 Jenike (1961)¹⁾ は流動状態にある粒状体の塑性ポテンシャルと normality の原理をもとに、一つの流動規準を提案した。すなわち静的破壊に対するモール・クーロン規準（以下、塑性降伏条件と呼び、YL と略記する）を修正した effective yield locus（以下、塑性流動条件と呼び、EYL と略記する）の存在を明らかにし、その傾斜角 ϕ_0 によって規定

される流動規準を用いて流動時の応力場や速度場を解析できることを示した。

この理論に従えば、流動状態にある粒状体の応力特性曲線は、塑性降伏（流動開始）状態での応力特性曲線、つまりすべり線とは一致せず、さらに速度特性曲線は一般にはそのいずれとも一致しない。かくして、流動開始時における応力場や加速度場（従来、速度場と呼ばれてきたものに対応する）と定常流動時の応力場や速度場とは明瞭に区別される。以下、この章では Jenike の理論¹⁾ を中心に、流動開始時および定常流動時における応力場と速度場の基礎方程式をまとめて示すことにする。

2.2 塑性降伏（流動開始）時の応力場と加速度場

1) 塑性降伏条件

流動開始状態を規定する塑性降伏条件に、モール・クーロン規準を仮定した場合、せん断強度 τ は次式で与えられる。

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (1)$$

ここに、 σ はせん断面に作用する直応力、 c は粘着力、 ϕ はせん断抵抗角である。通常の安定解析等において用いられる c や ϕ の値は、初期条件として初期間隙比と含水比を規定した試料についての直接せん断試験の結果から決定される。

Jenike によれば、堆積された粒状体の流動開始条件を検討する場合には、堆積された状態で作用した圧密応力の関数として c 、 ϕ を決定する必要があるとしている。この場合には初期条件として適当な圧密応力レベルを選

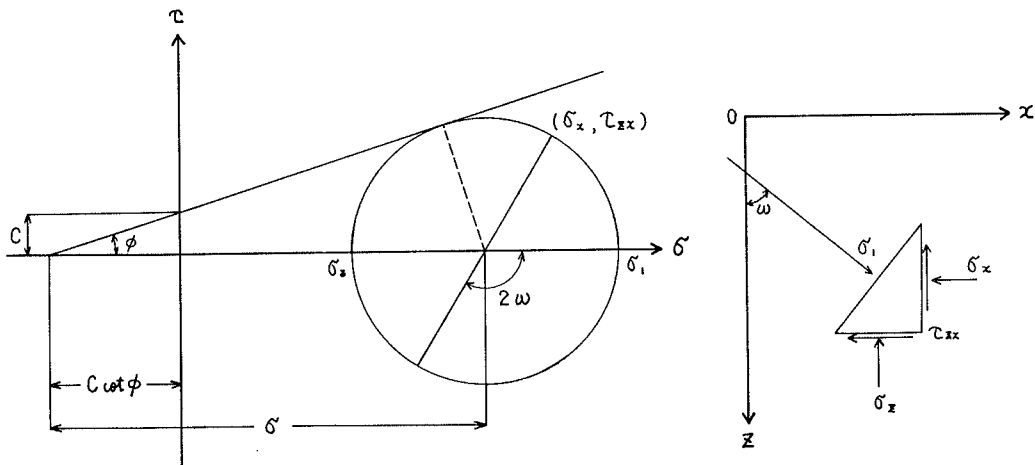


Fig. 1 Stresses in plane-Cartesian cylindrical-polar coordinates

定し、これを先行載荷した後の試料について、その圧密応力以下の垂直荷重下でせん断試験を行うという方法がとられる。その結果、各圧密応力レベル毎にそれぞれ降伏曲線 YL が決定される（詳細は後出 Fig. 2 参照）。

塑性降伏条件として c , ϕ が与えられれば、Fig. 1 に示すように、そのときの主応力 σ_1 , σ_3 , σ_α は平均換算応力 $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 + c \cot \phi$ を用いて次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma (1 + \sin \phi) - c \cot \phi \\ \sigma_3 &= \sigma (1 - \sin \phi) - c \cot \phi \\ \sigma_\alpha &= \sigma (1 + k \sin \phi) - c \cot \phi \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

ただし、3次元軸対称問題において現われる周方向主応力 σ_α は Harr-Karman の仮定によって、圧縮破壊のときに $k = 1$ で最大主応力 σ_1 に等しく、伸張破壊のときに $k = -1$ で最小主応力 σ_3 に等しいものと仮定する。上式を Fig. 1 の円柱/平面直角座標に関する応力成分 σ_x , σ_z , τ_{zx} で表わすと、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 - \sin \phi \cos 2\omega) - c \cot \phi \\ \sigma_z &= \sigma (1 + \sin \phi \cos 2\omega) - c \cot \phi \\ \tau_{zx} &= \sigma \sin \phi \sin 2\omega \end{aligned} \right\} (2a)$$

ここに、 ω は最大主応力 σ_1 と z 軸のなす角である。

2) 応力場 (すべり線場) の基礎式

粒状体の微小要素に作用する応力成分のつり合い条件は、円柱/平面直角座標において次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + m \frac{\sigma_z - \sigma_\alpha}{x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + m \frac{\tau_{zx}}{x} &= \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $m = 0$ の場合は 2次元平面歪状態を、 $m = 1$ の場合は 3次元軸対称応力状態を示す。

塑性降伏条件式 (2a) と応力のつり合い条件式 (3) より、応力場の基礎方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \phi \cos 2\omega) \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \sin \phi \sin 2\omega \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ - 2\sigma \sin \phi \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2\sigma \sin \phi \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} &= g_z \\ \sin \phi \sin 2\omega \frac{\partial \sigma}{\partial z} + (1 - \sin \phi \cos 2\omega) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ + 2\sigma \sin \phi \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2\sigma \sin \phi \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} &= g_x \end{aligned} \right\} (4)$$

ただし、 $g_z = \gamma - m \frac{x}{\sigma} \sin \phi \sin 2\omega$,

$$g_x = m \frac{x}{\sigma} \sin \phi (k + \cos \omega)$$

上式は σ と ω を未知数とする双曲型微分方程式であって、特性曲線の方向はつぎのように求まる。

$$\frac{dx}{dz} = \tan \left[\omega \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] \dots\dots\dots(5)$$

このことは周知のように応力の特性曲線の方向がすべり線の方向と一致することを示す。

3) 加速度場の基礎式

等方性の条件とひずみ速度ベクトルの normality の原理とから加速度場の基礎式が導かれる。これが従来塑性力学的解析において一般に速度場とされてきたものであるが、Jenikeが指摘したように、流動開始時において速度は 0 であるので、初期加速度を用いて論じられるべきであろう。

さて、Shield の理論 (1955)³⁾ にしたがって、まずひずみ速度ベクトルの normality の原理から、主ひずみ速度は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \lambda (1 - \sin \phi), \quad \dot{\epsilon}_3 = -(\lambda + \mu) (1 + \sin \phi) \\ m \dot{\epsilon}_\alpha &= \mu (1 - k \sin \phi) \end{aligned} \right\} (6)$$

ここに、 λ , μ はスカラーである。上式から、 λ と μ を消去すると、

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) \sin \phi + m \dot{\epsilon}_\alpha (1 + k \sin \phi) = 0 \quad (7)$$

一方、等方性の条件は、 u , v をそれぞれ x , z 方向の速度成分とすれば次式で与えられる。

$$\tan 2\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) / \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dots(8)$$

ここで速度 u , v は初期加速度 \dot{u} , \dot{v} に比例するとみなせるから、式(7)と(8)より加速度場に関する次の基礎式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \tan 2\omega - \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \tan 2\omega &= 0 \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} (\cos 2\omega + \sin \phi) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} (\cos 2\omega - \sin \phi) \\ + m \frac{\dot{u}}{x} (1 + k \sin \phi) \cos 2\omega &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

上式より特性曲線の方向は、

$$\frac{dx}{dz} = \tan \left[\omega \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right] \quad (10)$$

となり、初期加速度の特性曲線は、応力の特性曲線と同様にすべり線と一致することがわかる。

2.3 定常流動時の応力場と速度場

1) 塑性流動条件

流動状態にある粒状体の塑性力学的特性値として、Jenike¹⁾は effective yield angle (前述の effective yield locus の傾斜角) ϕ_e を提案した。すなわち、流動状態にある各点の主応力間に次式の関係が存在するという事実をもとに ϕ_e が定義された。

$$\sigma_1 / \sigma_3 = (1 + \sin \phi_e) / (1 - \sin \phi_e) \quad (11)$$

一方、流動時における normality の原理を満足するためには、主応力空間において静水圧軸とともに拡大する降伏曲面に加えて、今一つ静水圧軸に交叉する限界曲面の存在を仮定する必要がある。このことは最初 Drucker ら (1955)⁴⁾ によって指摘され、球状キャップが

仮定されたのに始まり、Shield ら (1959)⁴⁾ はこれを静水圧軸に直交する板状キャップに簡略化して用い、Roscoe ら (1963)⁴⁾ によって3次元状態図の形でまとめられ、降伏曲面に限界状態線の存在することと、それに続く状態境界面 (鍾紡型キャップ) の存在が定義された。

Jenike¹⁾ は上記 Shield の板状キャップを2次元降伏条件として具体化し、各圧密応力レベルごとのYLには限界状態に対応する終端点Eが存在することを仮定した。Fig. 2 に示すように、この点Eにおいて、normality の原理が成立することは、ひずみ速度ベクトル $\bar{\epsilon}$ の方向にある範囲の自由度を付与することと同等である。したがって粒状体の流動が点Eの状態では生ずるとすれば、normality の原理を満足させつつ、定常流動中において生ずる体積変化、つまり膨張しつつ流動するか、体積変化なしで流動するか、あるいは収縮しつつ流動するかのいずれか一つを無理なく表わし得ることとなる。なお流動開始時には $\bar{\epsilon}$ は YL 上に存在し、体積膨張すなわちダイレイタンスを示す。

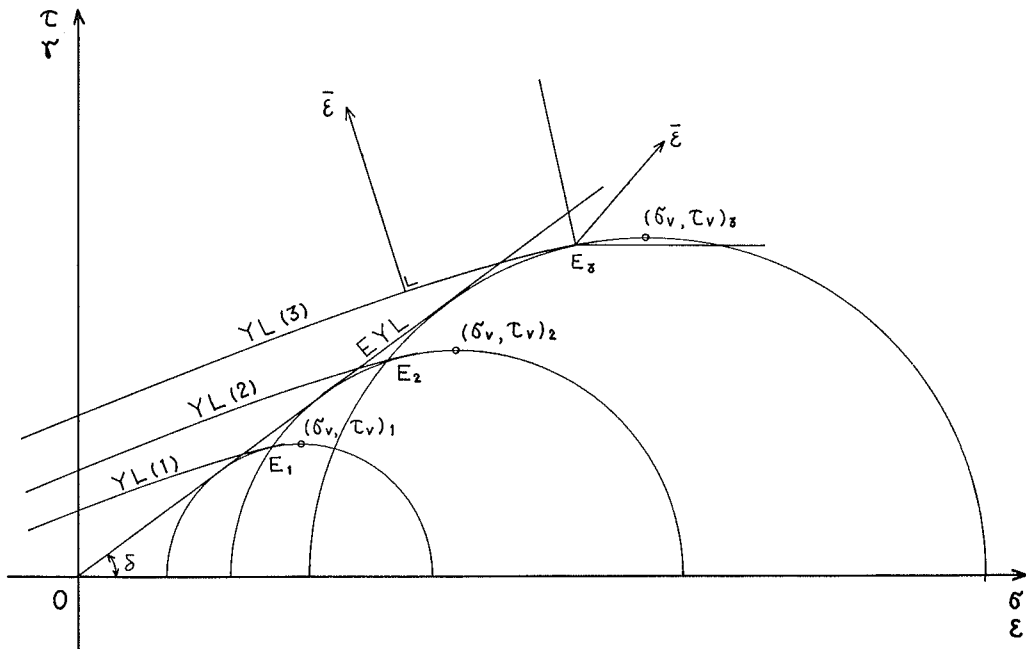


Fig. 2 Yield loci (YL), effective yield locus (EYL) and stress circles in steady state flow

具体的な点 E の位置は、各レベルで先行圧密した試料^{*)} に対する降伏曲線 (YL (1), YL (2), etc.) と、その圧密応力 σ_V を鉛直荷重とするせん断時の応力状態 $((\sigma_V, \tau_V)_1, (\sigma_V, \tau_V)_2, \text{etc.})$ を表わすモール円との接点として規定される。

さらに、点 E で流動する粒状体の主応力間には式(11)の関係が存在することから、このモール円は原点を通る傾斜角 ϕ_e の直線 EYL に接するという条件が導かれる。したがって、 ϕ_e は各 YL の限界状態を表わすモール円に接する共通接線の傾きとして、静的なせん断試験によって c, ϕ と同時に決定されることになる。

2) 流動時応力場の基礎式

流動条件式 (11) を平均主応力 $\bar{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ を用いて表わすと次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \bar{\sigma} (1 + \sin \phi_e) \\ \sigma_3 &= \bar{\sigma} (1 - \sin \phi_e) \\ \sigma_\alpha &= \bar{\sigma} (1 + k \sin \phi_e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $k=1$ は収縮流動状態、 $k=-1$ は膨張流動状態を表わす。上式を応力成分 $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{zx}$ について書き直すと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma} (1 - \sin \phi_e \cos 2\omega) \\ \sigma_z &= \bar{\sigma} (1 + \sin \phi_e \cos 2\omega) \\ \tau_{zx} &= \bar{\sigma} (\sin \phi_e \sin 2\omega) \end{aligned} \right\} (12a)$$

また、粒状体の単位体積重量 γ は先行圧密応力の関数であり、流動中の γ はそのときどきの平均主応力 $\bar{\sigma}$ の関数と仮定して次式で表わされる。

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \bar{\sigma})^\beta \cong \gamma_0 \bar{\sigma}^\beta \quad (13)$$

これらの式を応力のつり合い条件式(3)に用いて、つぎの応力場の基礎式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \phi_e \cos 2\omega) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} + \sin \phi_e \sin 2\omega \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \\ - 2\bar{\sigma} \sin \phi_e \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2\bar{\sigma} \sin \phi_e \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = g_z \\ \sin \phi_e \sin 2\omega \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} + (1 - \sin \phi_e \cos 2\omega) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \end{aligned} \right\} (14)$$

$$+ 2\bar{\sigma} \sin \phi_e \cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2\bar{\sigma} \sin \phi_e \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = g_x$$

$$\text{ここに、} g_z = \gamma_0 (1 + \bar{\sigma})^\beta - m \frac{\bar{\sigma}}{x} \sin \phi_e \sin 2\omega$$

$$g_x = m \frac{\bar{\sigma}}{x} \sin \phi_e (k + \cos 2\omega)$$

上式より特性曲線の方向は次式のように求まる。

$$\frac{dx}{dz} = \tan \left[\omega \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_e}{2} \right) \right] \dots\dots\dots(15)$$

3) 速度場の基礎式

速度場の基礎式は、連続の条件と等方性の条件とから構成される。連続の条件は、 x, z 方向の変位速度を u, v とおいて次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\gamma u) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma v) \\ = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} + m \frac{u}{x} + \frac{\beta}{1 + \bar{\sigma}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} v + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} u \right) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

一方、等方性の条件は、前節の式(8)で与えられる。これらの2つの式から、特性曲線の方向はつぎのように決定される。

$$dx/dz = \tan (\omega \pm \pi/4) \quad (17)$$

上式から明らかなように、速度場の特性曲線は応力場の特性曲線式(15)とは異なり、またこれらは先に求めた流動開始時の応力場や加速度場の特性曲線とは一般に異なっている。

3. 円管内の砂の塑性降伏状態の数値解析例

3.1 解析条件

前章に述べた応力場や速度場の基礎方程式は、それぞれ特性曲線に沿って成り立つ微分関係の形に変換され、それらは数値積分による解析が可能である。一例として、この章では、鉛直円管内の砂の塑性降伏状態における応力場の解析結果を示す。

この場合、基礎式(4)は、特性曲線(すべり線)式(5)に

*) 一面せん断試験において、Jenike のせん断箱を用いて行なわれる。これは適当な鉛直荷重 σ_V でせん断して (σ_V, τ_V) を求めた後、このせん断荷重の τ_V の約95%、つまり $(\sigma_V, 0.95 \tau_V)$ で先行載荷(ここではこれを先行圧密と呼ぶ)した試料に引続き、それ以下の鉛直荷重 σ_H ($< \sigma_V$) でせん断試験を実施して YL を求める。なお、このときの最高圧密応力は Fig. 2 の $\sigma_1(1), \sigma_1(2), \dots$ で表わされる。

沿って成り立つ Kötter の方程式(8)に改める。つまり、
第一すべり線、 $dx/dz = \tan(\omega + \mu)$ に沿って、

$$\frac{d\sigma}{ds_1} - 2\sigma \tan \phi \frac{d\omega}{ds_1} = \gamma \frac{\sin(\omega + \mu)}{\cos \phi} - m \frac{\sigma}{x} \tan \phi [k \cos(\omega + \mu) + \cos(\omega - \mu)]$$

第二すべり線、 $dx/dz = \tan(\omega - \mu)$ に沿って、

$$\frac{d\sigma}{ds_2} + 2\sigma \tan \phi \frac{d\omega}{ds_2} = -\gamma \frac{\sin(\omega - \mu)}{\cos \phi} + m \frac{\sigma}{x} \tan \phi [k \cos(\omega - \mu) + \cos(\omega + \mu)] \quad (18)$$

ここに、 $\mu = \pi/4 - \phi/2$ である。上式を差分表示することによって、円管内の砂の自由表面および管壁での境界条件を考慮すれば、所要のすべり線網とその格子点での応力状態を逐次計算によって決定できる。

計算に用いた c , ϕ の値は、後述する実験に用いた砂のそれを参考に、 $c = 0$, $\phi = 31^\circ, 43^\circ, 55^\circ$ の3例と、粘着力を有する場合として、 $c = 7.2 \text{ g/cm}^3$, $\phi = 43^\circ$ の一例を計算した。壁面せん断抵抗角 ϕ_w には実測値 $\phi_w = 10^\circ$ を用いた。

これらの ϕ の値が標準的なせん断試験における値よりも大きい値を用いているのは、流動現象が通常の安定解析等で取扱う応力域より低い応力域で生じ、この域では、YL が上に凸な曲線になることを考慮したものである。同様に、小さな c の値を導入したのも、このような低応力では解析結果に微妙な影響を与えることが予想されるためである。なお、これら低応力域における c , ϕ の実験的検討を急いでいるが、既製のせん断試験機的设计範囲外のため、測定精度に問題があり未だ成功していない。先に Fig. 2 で示した、先行圧密状態に応じた YL の存在の検証とともに今後の課題である。

3.2 解析結果

解析の結果得られたすべり線網を Fig. 3 に示す。同図に見られるように、解析に当っては半径方向座標 x 、鉛直方向座標 z 、および応力 σ をそれぞれ管半径と単位体積重量で無次元化して一般性を持たせた。ただし、以下の応力分布の表示は、実験結果との比較を容易にするために、管半径と単位体積重量に実測値を代入して絶対値で示す。

Fig. 4 は半径方向の応力分布の一例を示す。また、Fig. 5 は管中心軸上および管内壁面上の深さ (z) 方向の応力分布の一例を示す。以上の結果から、鉛直円管内の砂の流動開始時の状態に想定した全般塑性降伏状態の応力場の特徴をまとめるとつぎのようである。

- (i) いずれの深さにおいても、鉛直応力 σ_z は中心軸から壁面に向かってしだいに減少する分布を示す。とくに壁面近傍における減少が急激である。
- (ii) 水平応力 σ_x は壁面に近づくにつれて、やや減少の傾向を示すが、断面上はほぼ均等とみなし得る。

(iii) 一方、せん断応力 τ_{zx} は上記二者と異なり、壁面に向かってしだいに増加する分布を示す。しかし、壁面近傍においてはやはり急激に減少し、壁面せん断抵抗角 ϕ_w によって定まる値、つまり $(\tau_{zx})_i = (\sigma_x)_i \cdot \tan \phi_w$ になる。

(iv) いずれの応力成分も深さとともにほぼ放物線状に増加し、管直径の3~5倍の深さで定常状態に達するものと思われる。

(v) 応力分布に与える砂のせん断抵抗角 ϕ の影響は著しく、 ϕ の増加とともに鉛直応力 σ_z は増加し、水平応力 σ_x および壁面せん断応力 τ_{zx} は逆に減少する。

4. 実験概要

4.1 実験装置

粒状体の重力流動の模型実験を行なうために、Fig. 6 に示す装置を試作した。流動管には内容 13.94 cm、外径 14.98 cm、高さ 200 cm のアクリル円管を使用した。排出口は傾斜角 60 度のノズル形状とし、ノズル径は 1.0, 1.6, 2.2, 2.8 cm の 4 種類を用いた。

流動中の粒状体がアクリル円管内壁面に作用する応力を検出するため、円管外壁面上に電気抵抗線ひずみゲージ (ゲージ長 8 mm, クロス型) を Fig. 6 に示す位置に貼付した。これら 40 点のひずみ測定には、デジタル自動ひずみ測定装置 (共和電業製 ASB-55B, SD-50A) を使用した。これと並行して土圧計 (共和電業製 BE-2KD, BE-2KC) を砂とともに流動させ、粒状体中の鉛直ならびに水平方向の応力をフラットベッドレコーダ (横河電機製 F Type 3052) に連続記録した。アクリル管外壁面上に貼付したひずみゲージの測定値から、内

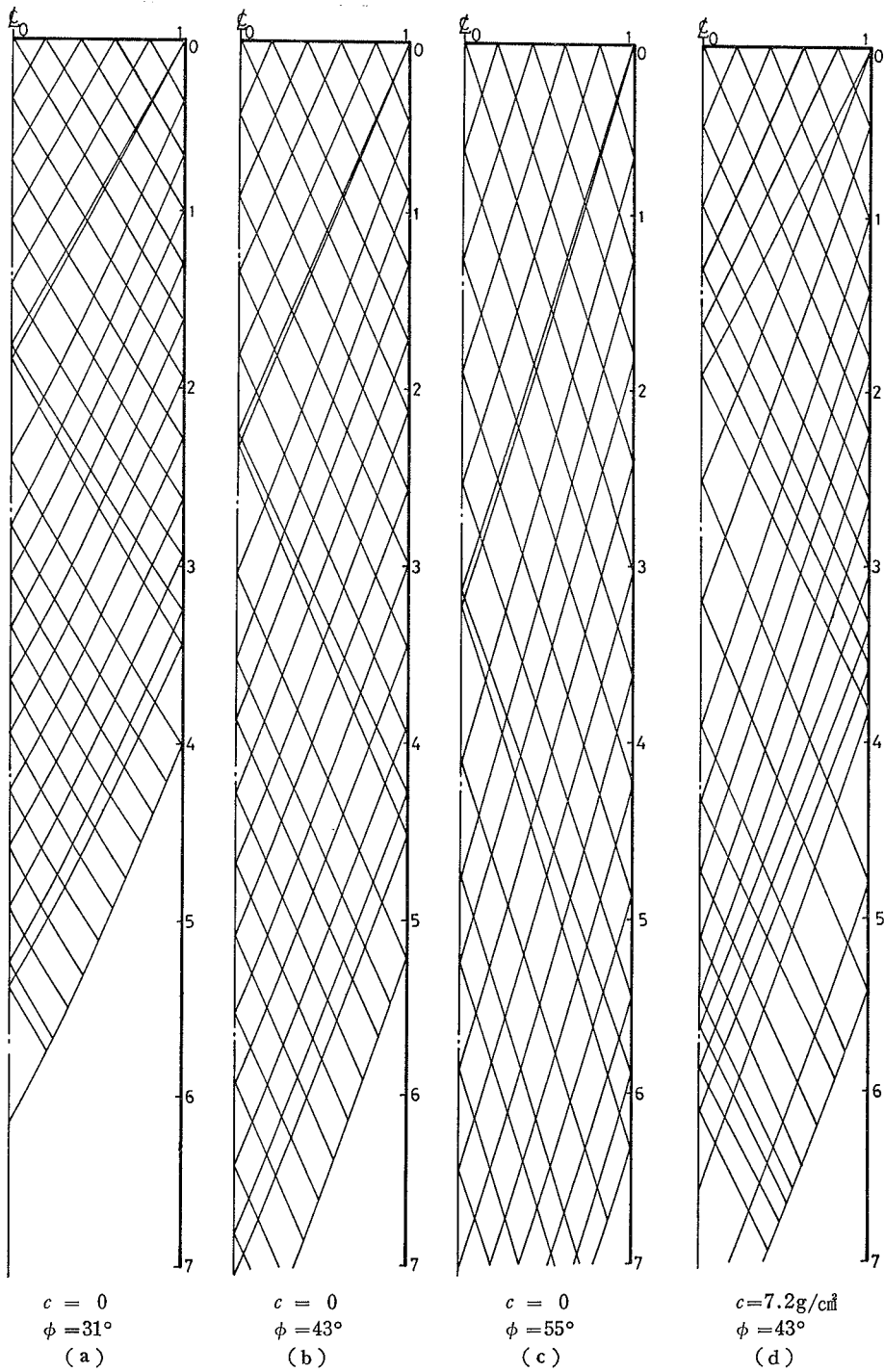


Fig. 3 Sliplines

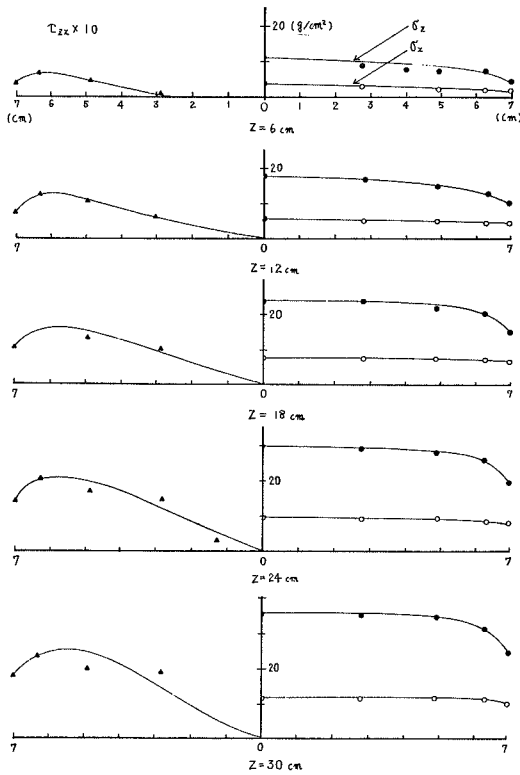


Fig. 4 Stresses in plastic yield state ($c=0$, $\phi=31^\circ$)

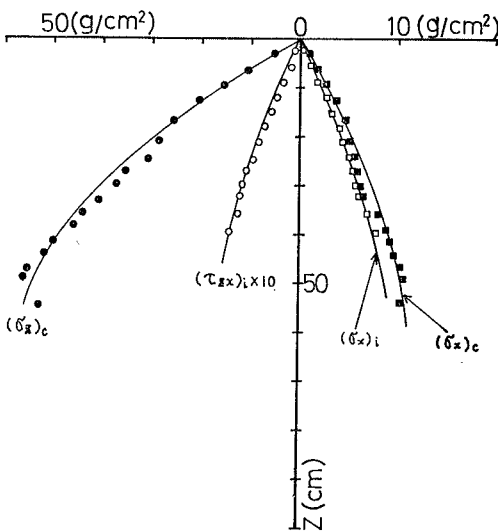


Fig. 5 Stress distributions along the z -axis and the wall ($c=0$, $\phi=31^\circ$)

壁面に作用する砂の応力 $(\sigma_x)_i$, $(\tau_{zx})_i$ への換算は、内圧を受ける厚肉円管と仮定して行なった。すなわち、アクリル外壁面上の鉛直および円周方向ひずみ ϵ_V , ϵ_H 、同点の応力を $(\sigma_z)_0$, $(\sigma_\theta)_0$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\theta)_0 &= \frac{2r_i^2}{r_0^2 - r_i^2} (\sigma_x)_i = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_H + \nu \epsilon_V) \\ (\sigma_z)_0 &\equiv \int_0^z (\tau_{zx})_i \frac{r_i}{r_0^2 - r_i^2} dz \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_V + \nu \epsilon_H) \end{aligned} \right\} (19)$$

ここに、 r_0 , r_i はアクリル管の外半径および内半径、 E , ν はアクリル管のヤング率およびポアソン比であって実測値 $E=2.79 \times 10^4$ kg/cm², $\nu=0.436$ を用いた。なお、式(19)の第二式で深さ方向の積分が表われるのは、アクリル管の鉛直荷重に対し上端自由、下端支持としたためである。

4.2 試料

岩質粒状体の試料として、本実験ではまず鳥取市賀露海岸産の海砂を使用した。試料は水洗いしたのち、2 mm フルイでふるい分けし、通過したものを気乾状態で用いた。その物性を Table I に示す。

Table I Sample properties

sample		sand
water content	w (%)	0.28
specific gravity	G_s	2.60
unit weight in a dense state	γ (g/cm ³)	1.616
unit weight in a loose state	γ (g/cm ³)	1.670
angle of internal friction	ϕ (°)	38
cohesion	c (g/cm ²)	0
angle of wall friction	ϕ_w (°)	10

4.3 実験方法

1) 静止状態の砂中の応力測定

静止状態における砂中の応力分布を知ることは、貯蔵庫に作用する堆積圧の問題として、従来から数多くの実験結果が報告されており、その理論的取扱い方法の確立

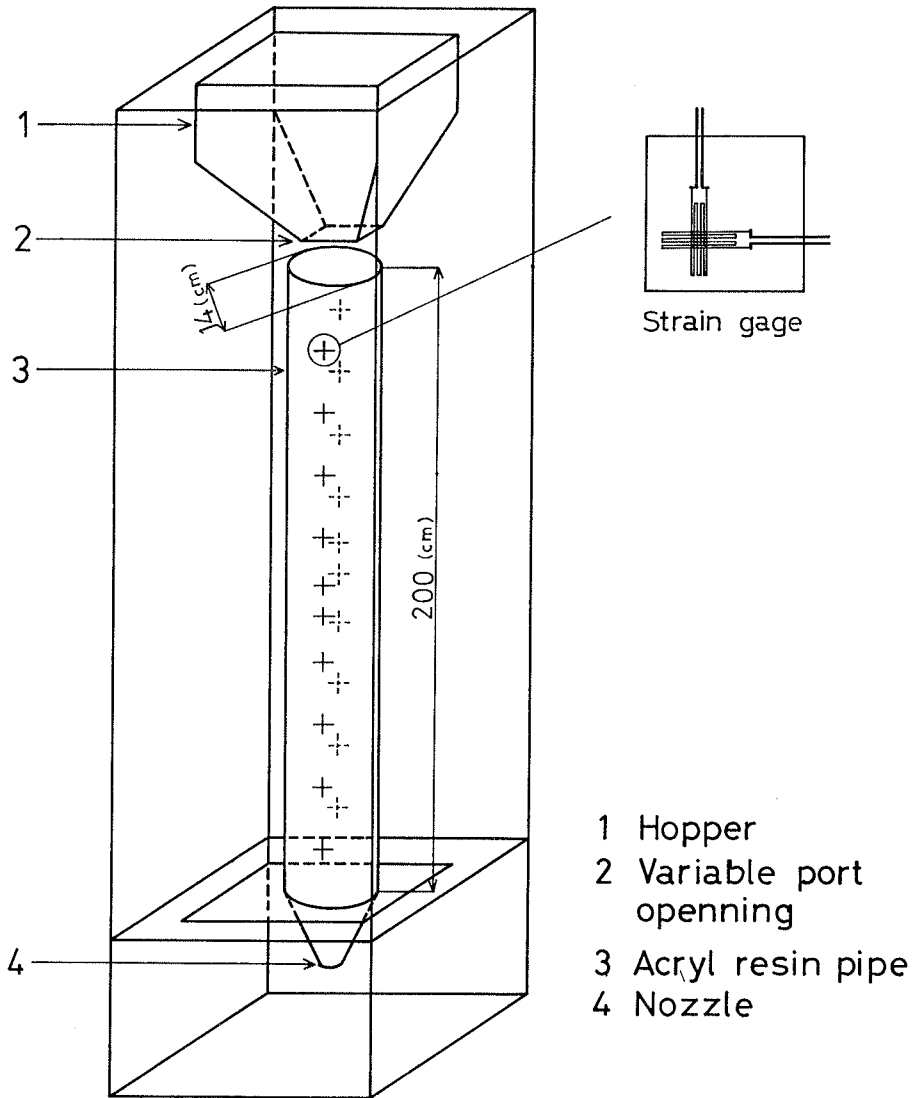


Fig. 6 Apparatus for mass flow test of rock-like granular materials

とともにこの分野における基本的課題となっている。一方、先の理論解析で示した全般塑性降伏状態、つまり流動開始時の応力分布の測定も、貯蔵庫における試料排出時の閉塞現象等を解明する上で重要である。

本研究では以下に述べる方法で、静止状態における砂中の中心軸上鉛直応力 $(\sigma_z)_c$ と水平応力 $(\sigma_x)_c$ 、および内壁面上の水平応力 $(\sigma_x)_i$ とせん断応力 $(\tau_{zx})_i$ の

分布を測定した。すなわち、静止状態としては、砂をホッパーから自由落下によって自然堆積させた状態、およびノズルを開いて排出流動させて後の静止状態の二種類とした。中心軸上の応力成分は砂中に埋設した土圧計により、管内壁面上の応力成分はアクリル管外壁面上のひずみゲージにより計測した。

2) 流動状態の砂中の応力測定

流動実験は流動管に試料を一定高さ（ヘッド） H まで充填した後、下部ノズルを開き重力流動を開始し、同時にヘッドを一定に保つように上部ホッパーの開閉弁を調節して試料を連続的に供給した。

ひずみゲージの測定は流動開始後1分間隔で、流動停止まで5～30分間継続した。砂中応力測定用の土圧計の投入は、流動開始後2～3分経過したとき、試料上面中心付近に投入し、下端排出口に達するまで測定を継続した。

上記の応力測定と同時に、壁面流速、流量および単位体積重量を測定した。壁面流速 v_i は流動中、アクリル管に貼付したスケールで、一粒子に注目して一定長さ当りを流過する時間を計測して求めた。流量 Q は、一定時間にノズルより流出する重量を測定して求めた。流動時の単位体積重量 γ は、流動停止後アクリル管内に詰まっている試料の重量を計り、管容積で除して求めた。

5. 実験結果と考察

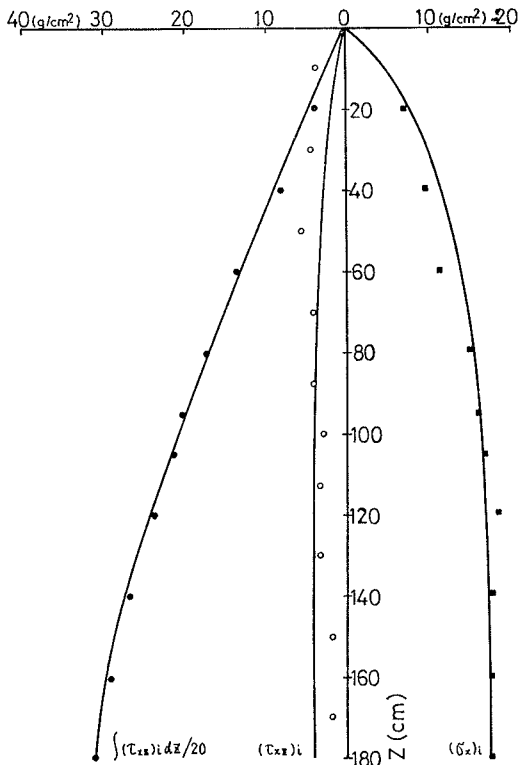


Fig. 7 Stress distributions along the wall at rest measured by strain gages

5.1 静止時堆積圧

静止時の砂中の応力分布の実験結果の一例として、Fig. 7 はひずみゲージから求めた管内壁面に作用する水平応力 $(\sigma_x)_i$ およびせん断応力(壁面摩擦力) $(\tau_{zx})_i$ の分布を示す。Fig. 8 は土圧計によって計測された、中応軸上の鉛直応力 $(\sigma_z)_c$ 、水平応力 $(\sigma_x)_c$ 、および管壁近傍の水平応力 $(\sigma_x)_i$ を示す。ただし、土圧計の場合 (Fig. 8) はホッパーから砂を供給した自然堆積状態での測定値を示し、ひずみゲージの場合 (Fig. 7) はこれに排出による流動を行なわせた後の静止状態での測定値を示している。

これらの結果からつぎのことがいえる。

(i) 土圧計による中心軸上の $(\sigma_z)_c$ 、 $(\sigma_x)_c$ は、深さとともに放物線状に増加し、 $z=40\sim60$ cmより深い位置での増加は極めて微小となる。一方、壁面近傍の水平応力 $(\sigma_x)_i$ は $(\sigma_x)_c$ とよく似た分布形状を示すが、 $z=40\sim50$ cm深さ以上では、ほぼ完全に一定値 $16\sim18\text{g/cm}^2$ を維持する。

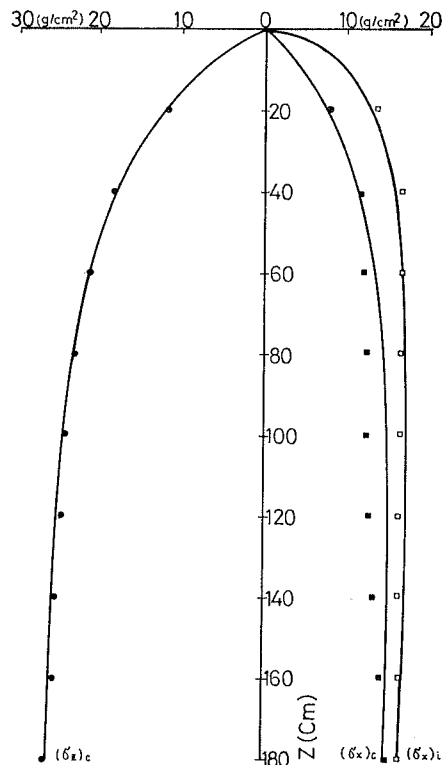


Fig. 8 Stress distributions along the z-axis at rest measured by earth pressure gages

(ii) ひずみゲージから求めた管内壁面に作用する水平応力 $(\sigma_x)_i$ の分布は上記土圧計によるのとよく一致している。一方、 $(\tau_{zx})_i$ は $z=40\sim 50\text{cm}$ の深さで一定値に達し、その大きさは $3\sim 4\text{g/cm}^2$ である。

(iii) 以上のことから、壁面での応力状態は管直径の約 3 倍の深さではほぼ一定値に達し、両者の比 $(\tau_{zx})_i / (\sigma_x)_i$ は壁面摩擦角の実測値から得た $\tan\phi_w = 0.176$ に近い値を示す。

(iv) 一方、管中心軸上の応力状態は壁面上よりも少し遅れて定常状態に達するが、この地点での鉛直応力 $(\sigma_z)_c$ と土被り圧 γz との比率は 0.67 (ただし、 $z = 40\text{cm}$) であり、もちろんこの比率は深さとともに減少する。また中心軸上の $(\sigma_x)_c$ と $(\sigma_z)_c$ の比で与えられる静止土圧係数は 0.29 である。この値は、試料の $\phi = 38^\circ$ とした場合のランキンの主働土圧係数 $K_A = (1 - \sin\phi)/(1 + \sin\phi) = 0.24$ に近い。

(v) なお、これらの実験結果は厳密な意味での流動開始時の応力状態を求めたものではないが、先全般塑性降伏状態に対する理論解析の結果と比較することによって、中心軸上の応力 $(\sigma_z)_c$ 、 $(\sigma_x)_c$ の分布、および壁面近傍の応力 $(\sigma_x)_i$ 、 $(\tau_{zx})_i$ の分布の性状が両者でよく一致していることが認められる。

5-2 円管内重力流動の概観

1) 流速分布

流動時の応力分布の測定に先立ち、円管内の流速分布の概略を知るための実験を実施した。この場合、流動管には外径 13.82cm 、内径 12.54cm 、高さ 187cm の塩化ビニール円管を縦に 2 分割したものをを用いた。

実験は試料充填後、試料頂部に着色砂を層状に入れ、ヘッドを一定に保って流動を開始する。所定の時間試料を流動させた後流れを止め、振動を与えないように円管を水平に設置し、片側の半円管とその部分の砂を取り除いて、円管の中心軸を通る縦断面に現われる着色砂層の写真撮影を行なった。

流動時間を種々変化させて実験を繰返し、得られた着色砂層の代表的位置における形状を示したのが Fig. 9 である。一般に粘性流体の管内流動においては、入口近くの助走域と呼ばれる流体分布がしだいに成長している領域と、ある程度の深さにおいて流速分布が一定に達した定常域と呼ばれる領域とに分けられる。本実験においても、試料頂部から $z \approx 55\text{cm}$ の点までの領域と、その地点から排出口の影響でクレーターを形成し始める $z \approx$

140cm までの領域がそれらに相当する。

この定常域においては、Fig. 9 の着色砂層の形状に見られるように、中心部に速度一定のコアを形成して

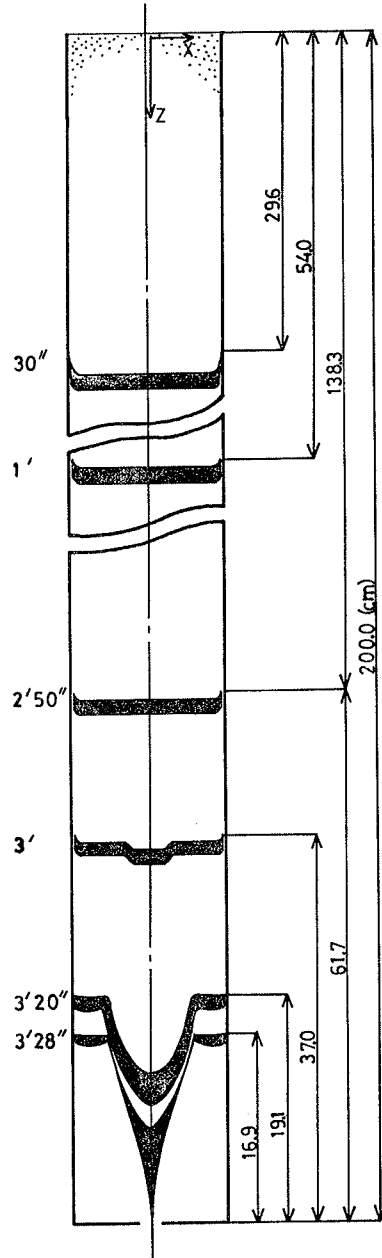


Fig. 9 Flow pattern observed by using a coloured sand layer as tracer

おり、一方壁面近傍の着色砂層は壁面に近づくにつれて先細りとなり壁面に接する部分では完全に消失している。このことから壁面に接する粒子の速度が壁面との摩擦抵抗のため相当小さく、内側粒子との間に著しい速度勾配を生じていることが推測される。これらの事実は、

壁面における流速は実用上0と見なし、そこから中心軸に向って適当な粘性係数 η' のもとに速度勾配に応じたせん断応力の分布を呈し、やがて塑性降伏値 τ_f に達して流速一定のコアを生じていると解釈することができる。すわち、Bingham 流体の円管内栓流として解析する

ことの可能性を認められる。なお、定常域に関して Bingham 流体の取扱いが可能であるとすれば、助走域についても Oldroyd(1947)⁵⁾ によって行なわれた塑性境界層理論を展開することによって理論解析が可能となる。

2) 流速および単位体積重量

流動実験において、応力測定と同時に壁面流速、流量、単位体積重量の測定を実施した。実験条件はノズル径 $D_N=1.0, 1.6, 2.2, 2.8\text{cm}$ の4種類を用い、それぞれに対しヘッド $H=200, 180, 160\text{cm}$ の3水準を採用した。

これらの実験結果をまとめて Fig. 10 (a)~(c) に示す。ここに、平均流速は流量を管断面積で除したものである。この結果からつぎのことがいえる。

(i) 壁面流速ならびに平均流速ともにノズル径 D_N の約2乗、つまりノズル断面積にほぼ比例して増加する。一方、この実験範囲ではヘッド H の差による流速の違いは明瞭でない。

(ii) いずれの条件においても、壁面流速と平均流速とはほぼ等しい。このことは、円管横断面上の流速分布はコア部分が大部分を占め、速度勾配を生じている領域が極めて小さいことを示すものと思われる。

(iii) 単位体積重量は、流速が速くなれば間隙が増加し密度減を生ずるものと予想されたが、逆に大部分がわずかながら増加の傾向を示した。さらに流速にほとんど影響を与えなかったヘッドの相違が、単位体積重量に比較的大きな変動を与えているが、規則性は認められなかった。いずれにしろ、本実験

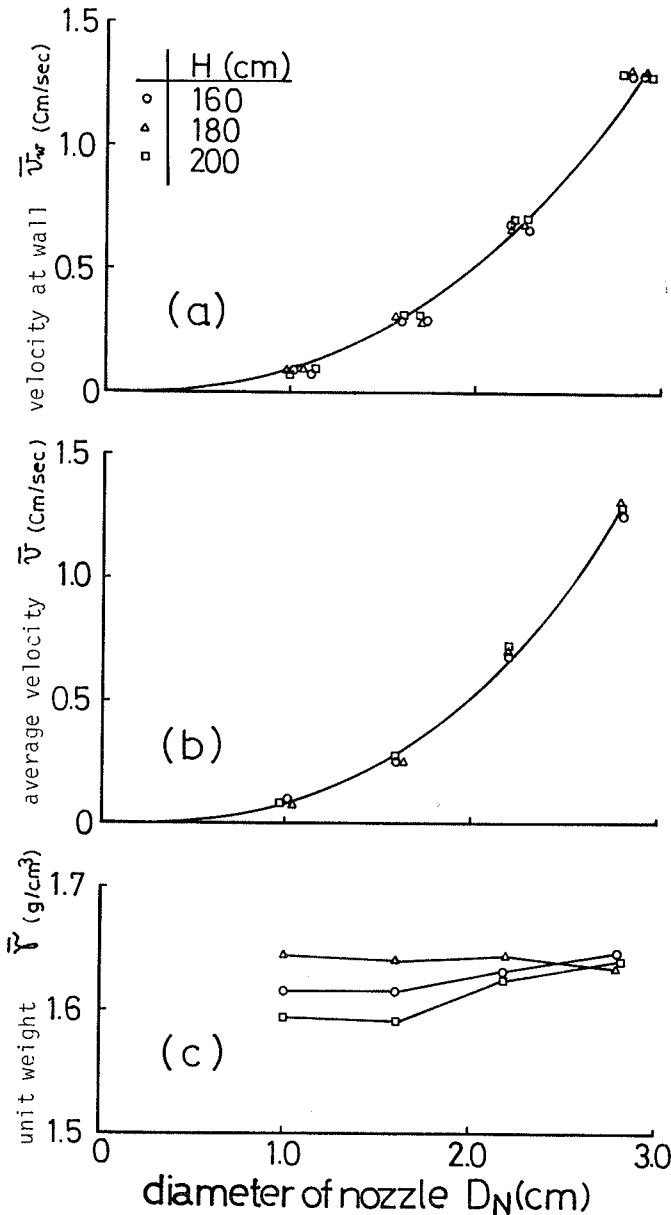


Fig. 10 Velocity and unit weight in steady state flow

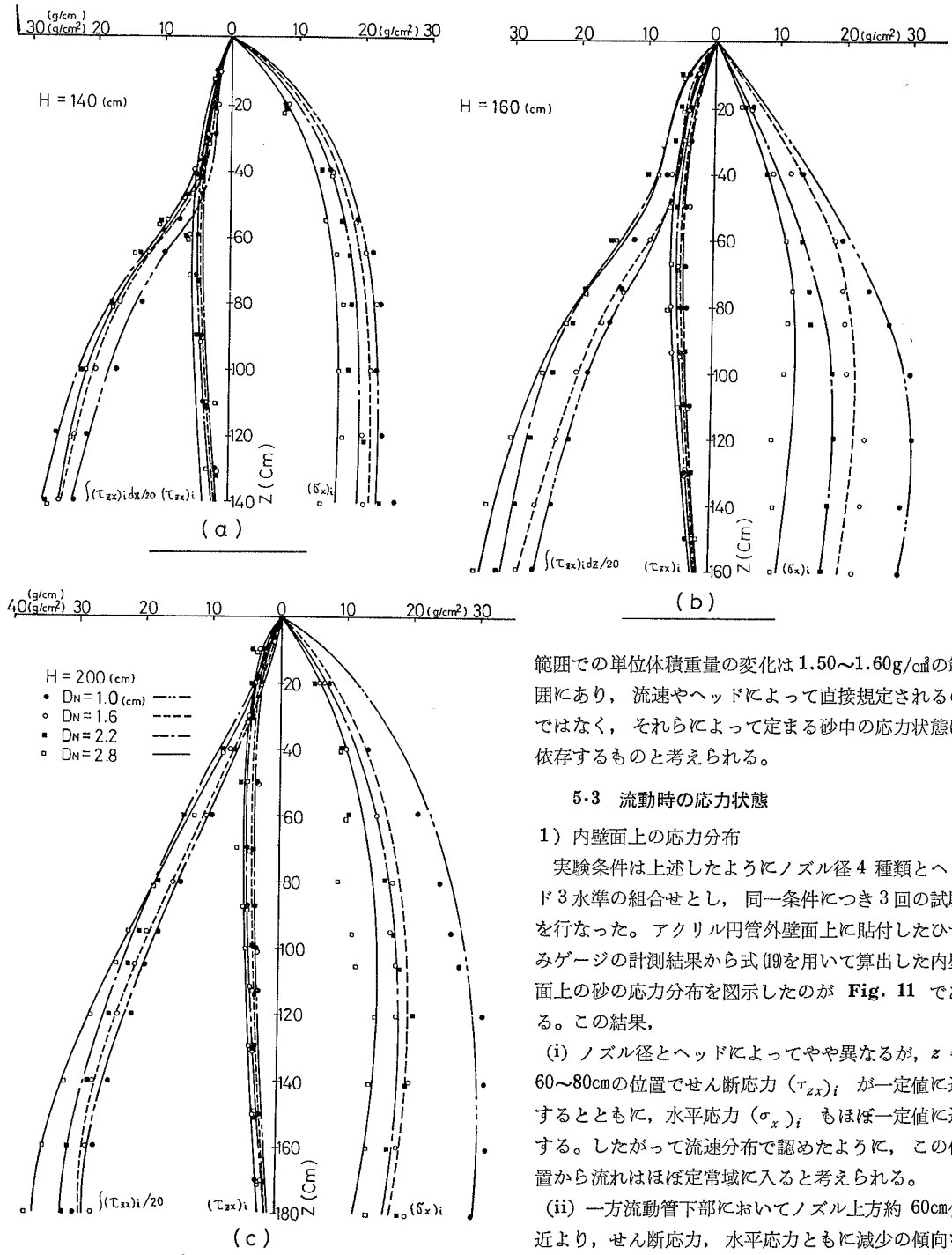


Fig. 11 Stress distributions along the wall in steady state flow

範囲での単位体積重量の変化は $1.50 \sim 1.60 \text{ g/cm}^3$ の範囲にあり、流速やヘッドによって直接規定されるのではなく、それらによって定まる砂中の応力状態に依存するものと考えられる。

5.3 流動時の応力状態

1) 内壁面上の応力分布

実験条件は上述したようにノズル径 4 種類とヘッド 3 水準の組合せとし、同一条件につき 3 回の試験を行なった。アクリル円管外壁面上に貼付したひずみゲージの計測結果から式 (19) を用いて算出した内壁面上の砂の応力分布を図示したのが Fig. 11 である。この結果、

(i) ノズル径とヘッドによってやや異なるが、 $z = 60 \sim 80 \text{ cm}$ の位置でせん断応力 $(\tau_{zx})_i$ が一定値に達するとともに、水平応力 $(\sigma_x)_i$ もほぼ一定値に達する。したがって流速分布で認めたように、この位置から流れはほぼ定常域に入ると考えられる。

(ii) 一方流動管下部においてノズル上方約 60 cm 付近より、せん断応力、水平応力ともに減少の傾向を示すのは、先に指摘したクレターの形成位置に対応しており、排出口ノズルの存在による流動状態の

変化範囲を示すものと考えられる。

つぎに、 $(\tau_{zx})_i$ 、 $(\sigma_x)_i$ の定常域における代表値 $z=75, 85, 100\text{cm}$ の3位置における平均値をとり、これらの値をノズル径 D_N に対して図示したのが Fig. 12 である。図から、

(iii) 定常域における壁面水平応力 $(\sigma_x)_i$ がノズル径、したがって流速の増加にあまり影響されない（幾分減少の傾向が認められる）のに対し、壁面せん断応力 $(\tau_{zx})_i$ は流速に伴ない増加する。したがって、両者の比率 $(\tau_{zx})_i / (\sigma_x)_i$ は一定ではなく、流速とともに $(0.13 \sim 0.20)$ から $(0.35 \sim 0.45)$ まで増加し、静的な壁面摩擦条件 $\tau = \sigma \tan \phi_w$ （試料の場合 $\tan \phi_w = 0.176$ ）では律しきれないことを示している。

2) 中心軸上の応力分布

中心軸上の鉛直応力 $(\sigma_z)_c$ および水平応力 $(\sigma_x)_c$ を土圧計を用いて測定した結果の一例を Fig. 13 に示す。

$(\sigma_z)_c$ 、 $(\sigma_x)_c$ は試料表面から深さ z が増すとともに増加し、ある深さで最大値を示し、その後一転して減少し始める。この応力の減少は、流速一定となる定常域に達するまでの助走域において速度が漸増するため、上部から流した土圧計のコードが引張られることによるものと思われる。そのため試料の流動方向の圧力 $(\sigma_z)_c$ を検出する土圧計は直にこの影響を受け、一方

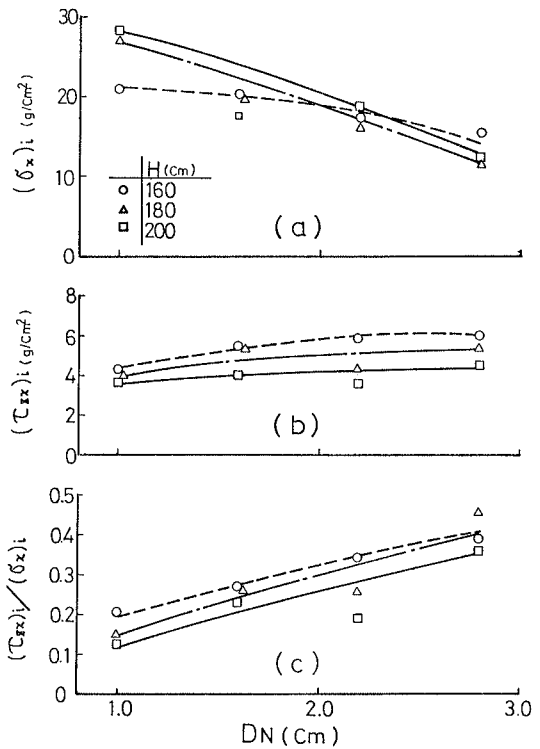


Fig. 12 Stress characteristics along the wall in steady state flow

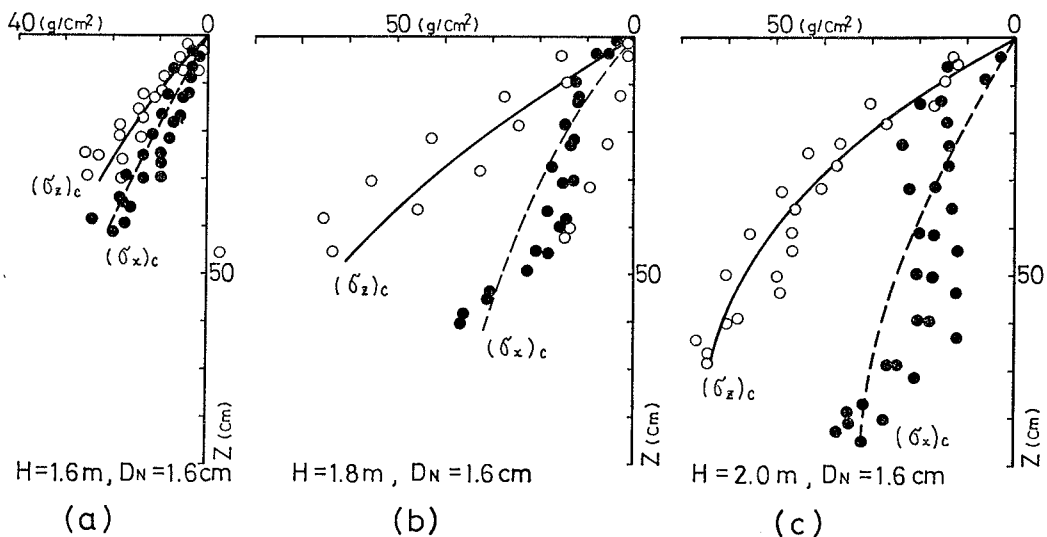


Fig. 13 Stress distributions along the z -axis in steady state flow

流動方向に対し直角な水平圧力 $(\sigma_x)_c$ を検出する土圧計に対するこの影響は少ない。たとえば測定結果において、 $(\sigma_z)_c$ より $(\sigma_x)_c$ のばらつきが少く、かつ $(\sigma_z)_c$ の最大値 $(\sigma_z)_{c,max}$ より $(\sigma_x)_c$ の最大値 $(\sigma_x)_{c,max}$ の方が深い位置に現われる事実がそのことを示している。

したがって、本実験では $(\sigma_z)_c$ 、 $(\sigma_x)_c$ ともに最大値を示す地点までの値を採用したが、 $(\sigma_z)_c$ には多少の誤差をまぬがれないものと思われる。この点に配慮して、以下に実験結果を考察する。

(i) まず、中心軸上の応力分布から定常域に達する深さをみると、水平応力 $(\sigma_x)_c$ が最大値に達した位置として、本実験範囲では $z=40\sim 80\text{cm}$ となる。これは壁面応力状態から得られたものとほぼ一致し、管径の約 3~5 倍の深さとなる。

つきに、この定常域における $(\sigma_z)_c$ 、 $(\sigma_x)_c$ の値をノズル径に対し図示したのが Fig. 14 である。図から、

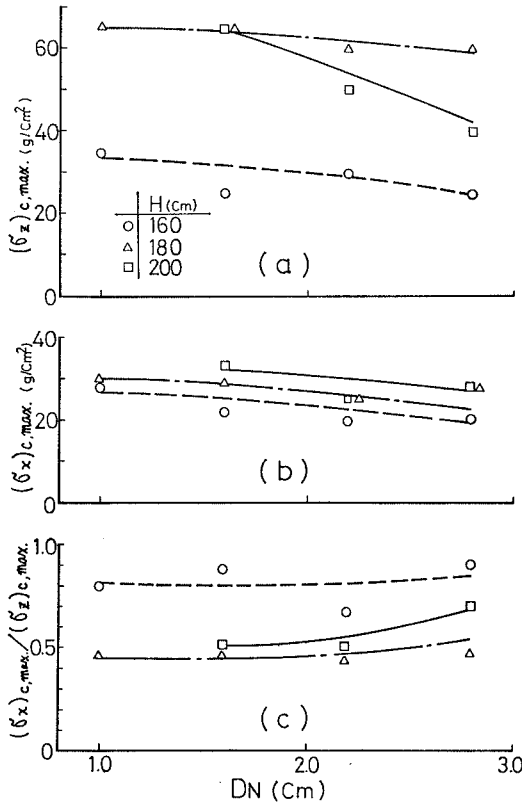


Fig. 14 Stress characteristics along the z-axis in steady state flow

(ii) 両応力ともノズル径の増加、すなわち流速の増加とともにわずかながら減少の傾向を示す。ただし、鉛直応力にヘッド差による影響が強く表われている点は今後の検討が必要である。

(iii) 同図 (c) から静止時の土圧係数に対応する流動時の (水平応力)/(鉛直応力) の値は 0.4~0.9 の間にある。前記したように、本試料に対するランキンの主動土圧係数の算定値は 0.24 であり、実測された静止土圧係数は 0.29 であった。一般に自然に堆積した砂の静止土圧係数は約 0.4~0.5 の間にあり、層ごとによく締め固めた砂では約 0.8 まで増加し得るといわれるが、流動時の砂がこのような密な構造をとるとは考えられない。したがって上記の結果は、流動時の砂が主動状態や自然堆積状態におけるよりも、鉛直応力成分に比し水平応力成分の卓越した流体的な応力状態にあることを示す。

一方、定常域における鉛直応力 $(\sigma_z)_{c,max}$ と土被り圧 γz との比率を示したのが Fig. 15 である。ここでは z は $(\sigma_z)_{c,max}$ を示した点の地表からの深さをとった。定常域において、鉛直応力の値を一定とみなせば、この比率は深さ z の増加とともに減少するから、上記比率はその最大値とみることができる。図から、

(v) $(\sigma_z)_{c,max} / \gamma z$ の値は実験条件によって相当はらついており、明瞭な傾向は認められないが、およそ 0.50~0.70 の間にある。残りは壁面摩擦力によって支持されていることになる。この値は静的堆積時の 0.67 と比べると、流動によって壁面摩擦力が増加する分だけ

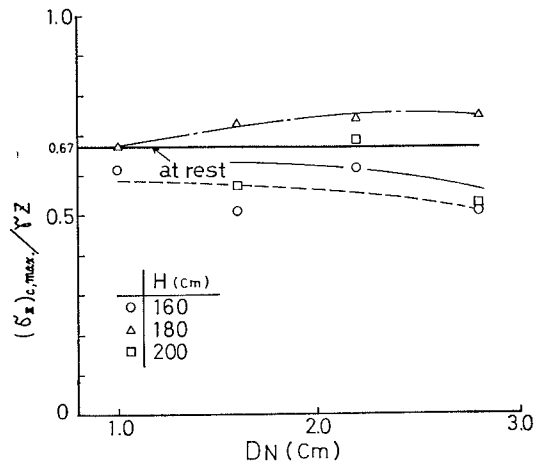


Fig. 15 Equivalent coefficient of earth pressure in steady state flow

小さくなると考えられるが明らかでない。流動時の中心軸上の鉛直応力の測定精度の向上が望まれる。

6. 結 論

砂の円管内重力流動について、土質力学的な観点から基礎理論を検討するとともに、模型実験によって静止時および流動時の応力分布の特徴を考察した。その結果、つぎのような事実が明らかになった。

(i) 全般せん断破壊状態を仮定して数値解析した結果と実験で求めた静止時堆積圧の分布とはよい一致を示し、静止状態から流動開始時にかけて応力状態は土質力学的塑性解析が適用できる。

(ii) 砂の円管内重力流動において、試料表面からある深さに達すると速度分布は定常に達するが、この定常域においても、半径方向に速度分布は一様でなく、壁面近傍で大きな速度勾配を有しており、中央部に速度一定のコアを有している。この形状は Bingham 流体の栓流に酷似している。

(iii) 流動時に壁面に作用する水平応力やせん断応力も、流速分布におけると同様に、ある深さに達すると一定値に達する、この定常域に達する深さは管直径の3～5倍の位置である。

(iv) 上記の壁面に直角に作用する水平応力は流速によってあまり影響されないのに対し、壁面せん断応力の値は流速の増加とともに増加する。したがって、静的な壁面摩擦条件とはその性質を異にする。

(v) 流動開始時の管中心軸上の水平応力から算定された静止土圧係数は 0.29 であるのに対し、流動時のそれは 0.4～0.9 と極めて大きな値を示す。すなわち、流動時の砂は鉛直応力の割に水平応力成分の卓越した流体的な応力状態にある。

以上のように静止時の応力状態と流動時の応力状態とは明らかに異なり、土質力学的な塑性解析を適応するためには、塑性降伏条件に代る塑性流動条件を確立する必要がある。あるいは速度分布の特徴から、Bingham 流体に模した流体力学的解析が適当かもしれない。ただしその場合にもやはり砂の塑性流動条件を知る必要がある点は同様である。

参 考 文 献

- 1) Jenike, A. W. ; Bulletin of the Univ. of Utah, No. 108 , 1961
- 2) Molerus, O. ; Powder Technology, 12, pp. 259 ~275 , 1975
- 3) 高橋洋志, 柳井弘 ; 化学工業, 第35巻, 第3号, pp. 357~364, および第12号, pp. 1372~1379, 1971
- 4) たとえば, 前出文献1) および最上武雄編 ; 土質力学 (土質工学会刊) , 1959
- 5) たとえば, 富田幸雄 ; レオロジー (コロナ社刊), 1975