

はすば歯車の歯元応力に及ぼす重なりかみあい率の影響

小田 哲*・永村和照*・難波千秋*

(1977年5月31日受理)

On Effect of Overlap Ratio on Root Fillet Stresses in Helical Gear Teeth

by

Satoshi ODA*, Kazuteru NAGAMURA*, and Chiaki NANBA*

(Received May 31, 1977)

Summary

In the present paper, the authors investigated the effect of overlap ratio on root stresses in helical gear teeth and the worst meshing condition under which the maximum root fillet stress occurs, based on the cantilever-plate approach and strain-gage investigations using the static gear loading apparatus, which was developed by the authors.

It is found that the maximum root fillet stress occurs under the meshing condition, that the meshing point in the middle plane perpendicular to the gear axis lies in the close vicinity of the outer single meshing point for any overlap ratios.

The calculated stress values based on the principle of superposition and the moment-image method showed a good qualitative agreement with the results of strain-gage investigations on gear teeth.

1. ま え が き

はすば歯車の曲げ疲労強度について研究を進めるためには、まず荷重が作用した場合に生じる歯元応力について明らかにしておかなければならない。本報では、重なりかみあい率の異なるはすば歯車に対して荷重かみあい時に生じる歯元応力について理論的検討を行なうとともに、試作した静的荷重かみあい試験機を用いて、荷重かみあい時に生じる歯元応力を測定して、歯元応力波形、最大歯元応力が発生するかみあい位置および重なりかみあい率の歯元応力に及ぼす影響についてかなり明らかにすることができたので、これらの結果について報告する。

2. 歯元応力の計算

2.1 歯元応力計算式

(1) 単位長さ当たりの荷重による歯元応力 はすば歯車の歯を有限幅の片持平板と考え、歯の接触線にそった分布荷重を同時接触線の単位長さ当たりの集中荷重の集まりとみなすと、歯面に垂直に作用する接触線の単位長さ当たりの荷重 p によって固定端（歯元）に生じる曲げモーメント M は、次式によって与えられる。

$$M = \beta p \cos \alpha' \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで

β : 固定端における曲げモーメントを与える係数

* 機械工学科 Department of Mechanical Engineering

α'_n : 荷重の作用線と歯形中心線とのなす角の余角
 また、単位長さ当たりの荷重 p によって歯元に生じる公称曲げ応力 σ'_{Nb} は、歯直角断面における、Hofer の30°接線法による危険断面の弦歯厚を s_n とすれば、次式によって求められる。

$$\sigma'_{Nb} = \frac{6M}{s_n^2} = \frac{6\beta p \cos \alpha'_n}{s_n^2} \dots\dots(2)$$

(2) 固定端における曲げモーメントを与える係数 β
 式(2)における β は、図1のように座標軸をとると、荷重作用点からの距離 x 、荷重作用点の自由端からの距離 η および荷重作用点の歯すじ中央からの距離 ξ によ

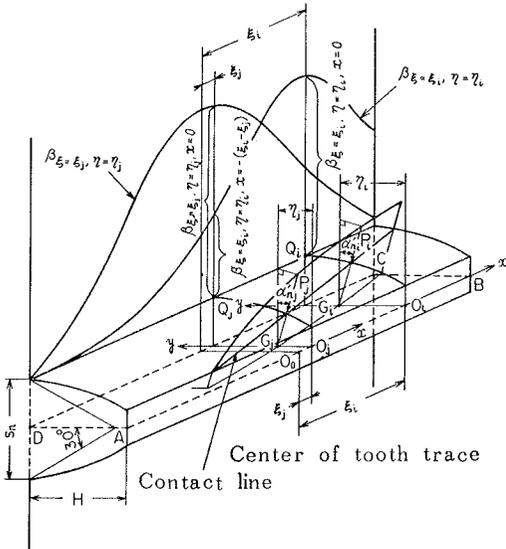


Fig. 1 Systems of coordinates for distributed load on helical gear tooth

って変化する。ここでは、荷重が歯すじ中央に作用する場合の $\beta = \beta_{\xi=0}$ の値としては、無限幅の片持平板に垂

直に集中荷重が作用する場合に対して藤田¹⁾が求めた値をそのまま用い、荷重が歯すじ中央から離れた位置に作用する場合の $\beta = \beta_{\xi = \xi_i}$ の値としては、藤田の計算結果に Wellauer²⁾らによって提案されたモーメント・イメージ法を適用して求めた値を用いる。表1は藤田の計算結果を示す。

(3) 接触線上の荷重分布 同時接触線上の荷重分布については、Niemann-Richter³⁾の実験式を適用する。すなわち接触線上単位長さ当たりの荷重 u は、次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_m \{1 + 0.4 \cos 2\beta_g \cos(\pi x')\} \\ u_m &= \frac{U}{b_N}, \quad b_N = \sum l \cos \beta_g \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

ここで

x' : かみあい長さの中央からの距離を示し、中央で $x' = 0$ 、両端で $x' = \pm 1$ 、 U : 円周力、 u_m : 単位長さ当たりの平均荷重、 l : 接触線の長さ⁴⁾、 β_g : 基礎円筒ねじれ角

式(2)における荷重 p は、かみあい圧力角を α_b とすれば、次式で求められる。

$$p = \frac{u}{\cos \alpha_b} \dots\dots(4)$$

(4) はすば歯車の歯元応力 はすば歯車の歯面に作用する荷重は、実際には歯面の接触線にそった分布荷重であるから、歯元応力の計算にはこれらのすべての荷重による影響を考慮しなければならない。はすば歯車の歯に対して座標軸を図1に示すように定める。すなわち座標軸は分布荷重 p_i の作用線が歯の中心線を含む平面 ABCD と交わる点 G_i から自由端 AB に下した垂線の足を原点にとり、自由端を x 軸、これに直角の方向に y 軸をとる。そして自由端の中央 O_0 点からそれぞれの荷重作用点に対応する原点 O_i までの距離を ξ_i 、それぞれの

Table 1 Factors β for bending moment at clamped edge¹⁾

η/H \ x	0	0.1H	0.25H	0.5H	H	2H	3H
0	0.511	0.510	0.475	0.389	0.210	0.038	0.016
0.2	0.443	0.438	0.405	0.317	0.159	0.025	0.011
0.4	0.397	0.387	0.341	0.240	0.107	0.012	0.007
0.6	0.360	0.339	0.264	0.149	0.053	0.004	0.002
0.8	0.336	0.268	0.122	0.051	0.012	0.002	0.001

原点から荷重の作用点 G_i までの距離を η_i とすれば、
 歯すじ中央から ξ_j 離れた点 Q_j に生じる歯元曲げ応力 σ_{ξ_j} は、次の釘宮の式⁵⁾によって求めることができる。

$$\sigma_{\xi_j} = \sum_i \frac{\beta_{\xi = \xi_i, \eta = \eta_i, x = -(\xi_i - \xi_j)}}{\beta_{\xi = \xi_i, \eta = \eta_i, x = 0}} \times \sigma'_{\xi = \xi_i, \eta = \eta_i, x = 0} \quad \dots\dots(5)$$

ここに、 $\sigma'_{\xi = \xi_i, \eta = \eta_i, x = 0}$ および $\beta_{\xi = \xi_i, \eta = \eta_i, x = 0}$ は、それぞれ歯すじ中央から x 軸方向に ξ_i 、歯先端から y 軸方向に η_i だけ離れた位置に作用する P_i によって、これに対応する歯元の点 Q_i に生じる曲げ応力および曲げモーメントの係数を示し、また $\beta_{\xi = \xi_i, \eta = \eta_i, x = -(\xi_i - \xi_j)}$ は、荷重点から x 軸方向に $-(\xi_i - \xi_j)$ 離れた点に対する曲げモーメントの係数を示す。 α'_n, η の計算式については文献(5)参照。なお、本論文の歯元応力の計算には、荷重の半径方向成分による圧縮応力および円周方向成分によるせん断応力は考慮していない。

2.2 計算方法

歯元応力の計算に用いた歯車の諸元を表 2 に示した。
 図 2 は、歯車 G.A に対する歯元応力の計算および測定を行なった各かみあい位置を示す。歯元応力の計算は歯車 G.A、G.B ともに歯幅中央の軸直角断面においてかみあいを始める位置をかみあい位置番号①、かみあいを終る位置をかみあい位置番号⑭として、この間を13等分して、それぞれのかみあい位置における歯元応力を歯車

Table 2 Dimension of test gears

Gear sign	G.A	G.B
Gear profile	standard	standard
Normal module m_n	6	6
Normal pressure angle α_n	20°	20°
Number of teeth z	36	36
Helix angle β_o	20° (R. L.)	20° (R. L.)
Diameter of standard pitch circle d_o	229.86mm	229.86mm
Face width b	40mm	55.11mm
Transverse contact ratio ϵ_s	1.55	1.55
Overlap ratio ϵ_{sp}	0.73	1.00

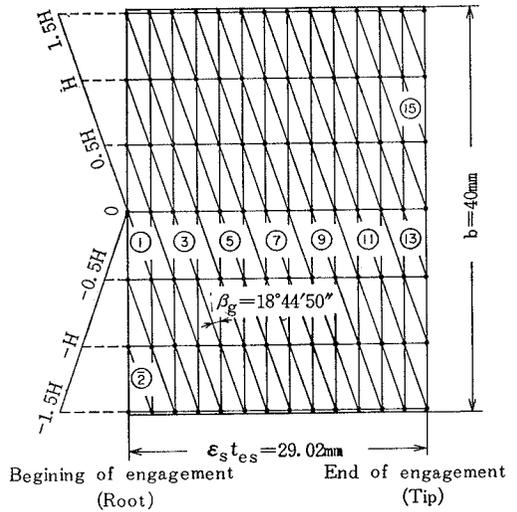


Fig. 2 Meshing positions for calculation and measurement of root stresses (G.A)

G.A に対して、円周力 $P = 1000\text{kg}$ 、G.B に対しては、
 $P = 1380\text{kg}$ の場合について計算を行なっている。なお、危険断面の位置は歯直角断面において Hofer の 30° 接線法により決定し、危険断面から歯先端までの歯たけ $H = 13.95\text{mm}$ 、危険断面の弦歯厚 $s_n = 12.93\text{mm}$ を実測により求め計算に用いた。

3. 歯元応力の測定

3.1 試験歯車

歯元応力の測定に使用した歯車の諸元は計算に用いたものと同一で表 2 に示すとおりである。歯車材料は SNC 21、浸炭焼入後研削したもので、歯車精度は JIS 1 級である。図 3 は、歯車 G.A の歯形および歯すじ方向誤差曲線の代表例を示したもので、歯形誤差は左、右歯面でそれぞれ $7\mu, 5\mu$ 、歯すじ方向誤差は、それぞれ $5\mu, 4\mu$ 程度であることがわかる。

歯元応力の測定は、図 4 に示すように、かみあい歯面の歯元すみ肉部の、歯直角断面上で Hofer の 30° 接線法により決定される危険断面の位置に、ゲージ長さ 1mm のひずみゲージを歯す

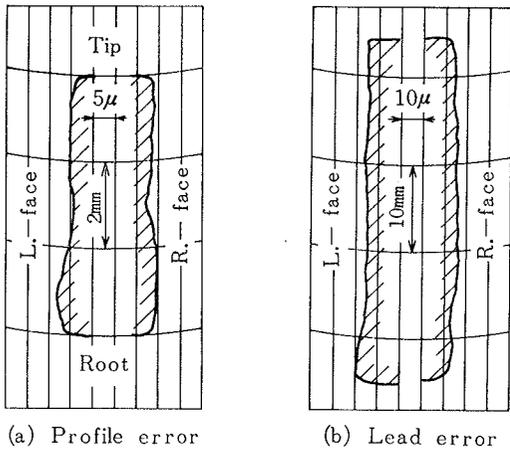


Fig. 3 Profile and lead error diagrams of test gears (G.A)

じにそって等間隔に7枚(歯車 G・B の場合は9枚) 接着し、歯車G・Aに対しては、円周力 $P=1000\text{kg}$ 、G・B に対しては、 $P=1380\text{kg}$ を負荷して行なった。また、歯車G・Aに対しては、かみあい歯面の背面にもひずみゲージを接着して、引張側、圧縮側に生じる歯元応力を同時に測定している。

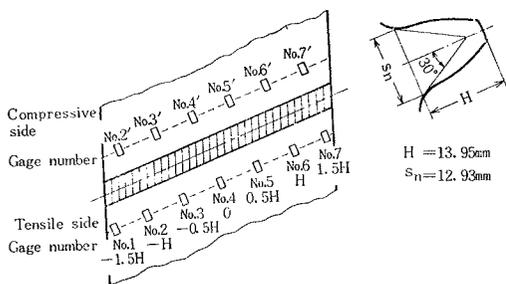


Fig. 4 Location of strain gages (G.A)

3.2 静的負荷かみあい試験機

実験に用いた静的負荷かみあい試験機は、図5に示すように試験歯車(左ねじれ)とかみあう支持歯車(右ねじれ)を回転止め円板固定台により任意の位置で固定し、負荷棒を介して、油圧ジャッキにより所定の荷重を

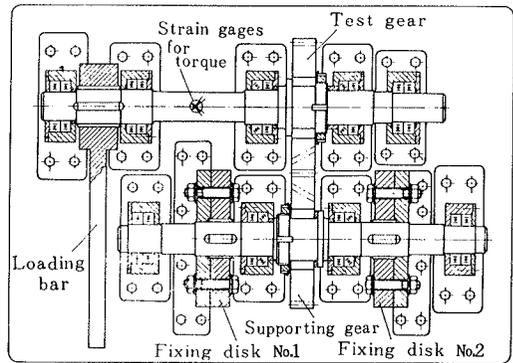


Fig. 5 Static loading apparatus for spur and helical gears

負荷できるようにしたものである。荷重値は軸に接着したトルク検出用のひずみゲージにより知ることができる。かみあい位置は試験機に取りつけた読取顕微鏡により、一对の歯車の特定の2枚の歯間の距離を測定することによって決定した。なお、バックラッシュは軸間距離を変えることにより与えることができ、本実験では、円周方向バックラッシュ量 $c_0=110\mu$ を選んだ。これは JIS に規定される最小バックラッシュ量の $1/2$ に相当する。

4. 計算・測定結果および考察

図6は、歯車 G・A に対する歯すじ方向の歯元応力分布の計算結果を、また図7は測定結果を示す。これらの図中の番号はかみあい位置番号を示し、図2のかみあい位置番号に対応している。

歯元応力分布が計算結果と測定結果とでいくぶん異なっているのは、仮定した接触線上の荷重分布が実際の荷重分布よりずれているためか、あるいは計算には荷重の半径方向成分による圧縮応力、円周方向成分によるせん断応力、歯元すみ内部における応力集中および両端不完全の影響が考慮されていないことによるものと考えられる。さらに歯すじ方向誤差などの歯車誤差の影響が計算値には考慮されていないことも理由の一つとして考えられよう。これらの問題については現在検討を進めている。図6、図7より歯車 G・A では計算結果、測定結果のいずれにおいても、それぞれかみあい位置番号⑥付近で最大歯元応力値を示していることがわかる。このかみあい位置は歯幅中央の軸直角断面における外の1組かみあい点にほぼ一致している。また最大歯元応力は、歯端

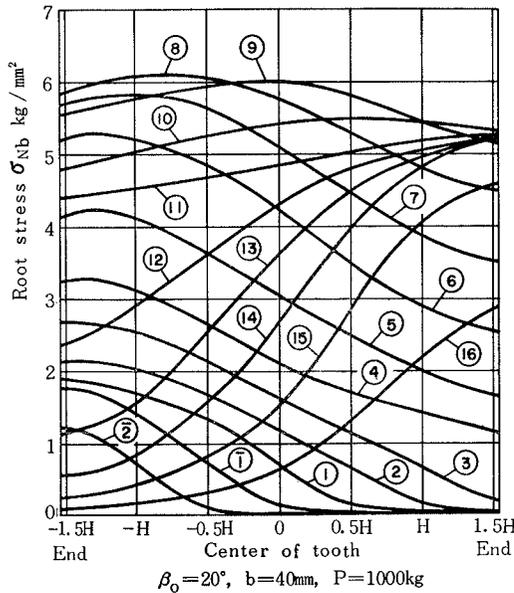


Fig. 6 Longitudinal stress distribution of helical gear tooth (Calculated, G.A)

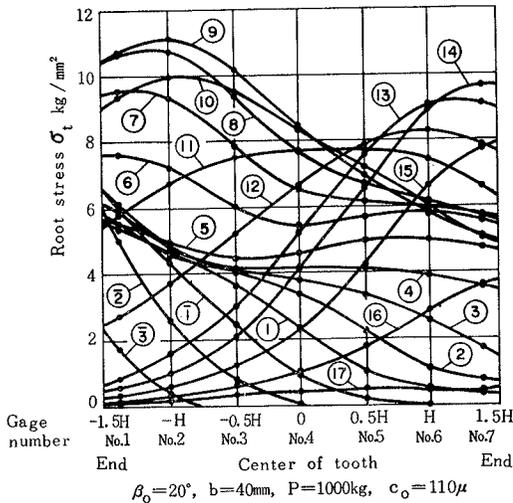


Fig. 7 Longitudinal stress distribution of helical gear tooth (Measured, G.A)

よりいくぶん歯すじ中央に寄った位置で現われ、両端で歯元応力は小さくなる傾向が認められる。図8は、歯車G.Aに対する、圧縮側における歯すじ方向の歯元応力

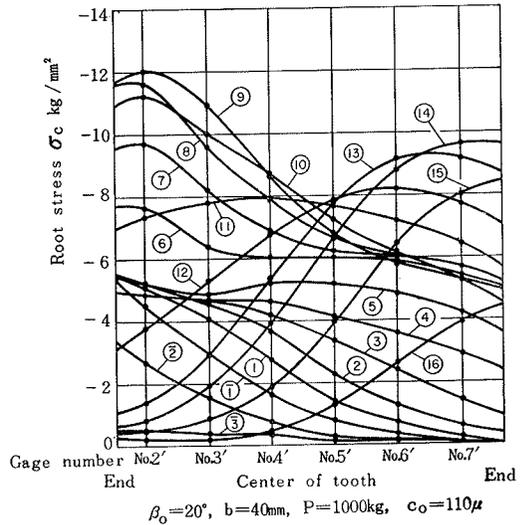


Fig. 8 Longitudinal stress distribution of helical gear tooth (Measured, G.A)

分布の測定結果を示す。図7、図8より引張側と圧縮側の最大歯元応力の絶対値の比は、約1.15と圧縮側で大きくなっているが、これは主として負荷荷重の半径方向成分の影響によるものと考えられる。

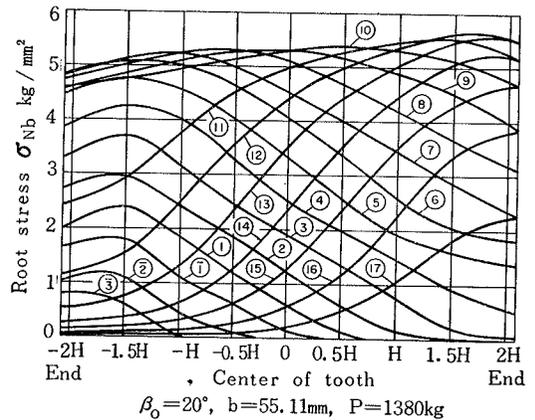


Fig. 9 Longitudinal stress distribution of helical gear tooth (Calculated, G.B)

図9は、歯車G.Bに対する歯すじ方向の歯元応力分布の計算結果を、また図10は測定結果を示す。計算結果では、最大歯元応力の発生するかみあい位置は厳密には

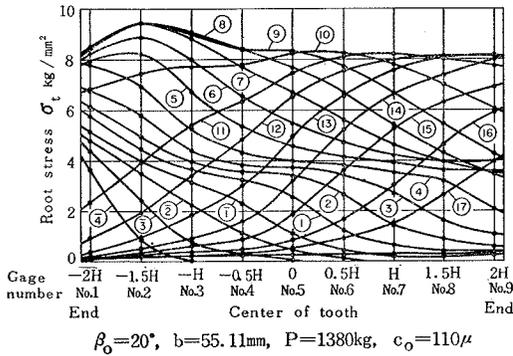
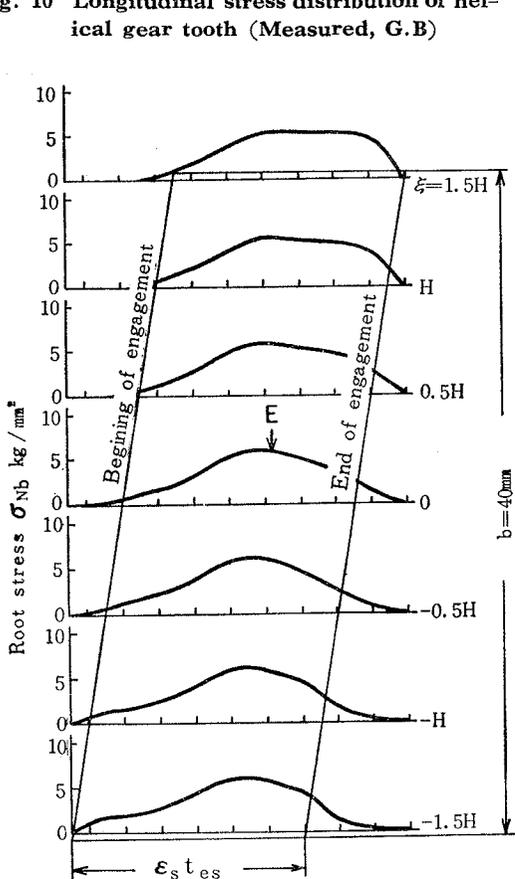


Fig. 10 Longitudinal stress distribution of helical gear tooth (Measured, G.B)

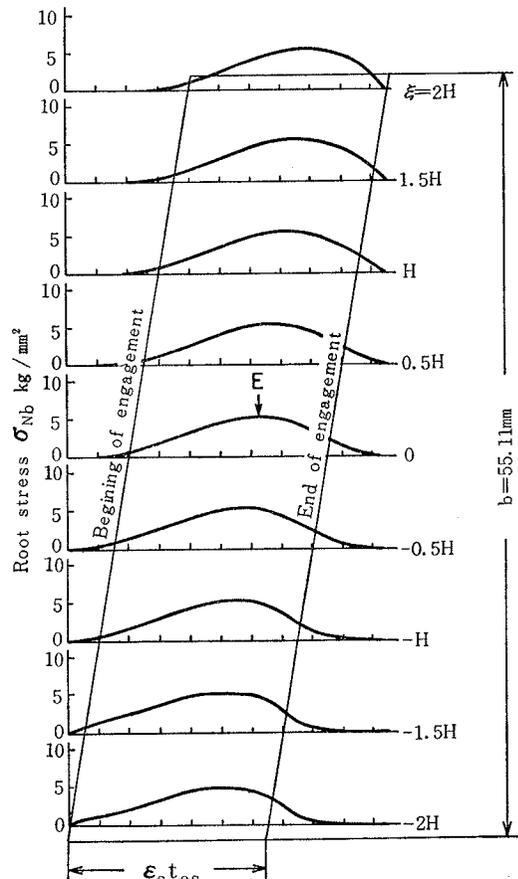
⑫付近となっているが、かみあい位置番号⑥～⑮の範囲では最大歯元応力値の間にはほとんど差が認められない。また、歯すじ方向の各断面に生じる最大歯元応力値は歯すじにそってほぼ一様となっている。測定結果では、最大歯元応力の発生するかみあい位置は⑨付近になっており、このかみあい位置は歯幅中央の軸直角断面における外の1組かみあい点にはほぼ相当している。これらの結果より、ねじれ角 $\beta_0 = 20^\circ$ の歯車については、最大歯元応力の発生するかみあい位置は、重なりかみあい率に関係なく、歯幅中央の軸直角断面における外の1組かみあい点近傍であると考えることができよう。また、歯元応力分布が計算結果と測定結果とでいくぶん異なっ



Root (2) (1) (3) (5) (7) (9) (11) (13) (15) (17) Tip

Positions of engagement
 $\beta_0 = 20^\circ$, $b = 40\text{mm}$, $P = 1000\text{kg}$

(a) G.A.



Root (2) (1) (3) (5) (7) (9) (11) (13) (15) (17) Tip

Positions of engagement
 $\beta_0 = 20^\circ$, $b = 55.11\text{mm}$, $P = 1380\text{kg}$

(b) G.B.

Fig. 11 Root stress wave forms in pinion tooth (Calculated)

たものと同じ理由によるものと考えている。
 ているのは、図 6、図 7 についての考察のところで述べ
 図 11 (a), (b) は、それぞれ歯車 G・A, G・B に対する
 かみあい位置の移動にともなう歯元応力波形の計算結果
 を、図 12(a), (b) は、歯元応力波形の測定結果を示す。こ
 こで、図中の矢印 E は歯幅中央の軸直角断面における外
 の 1 組かみあい点に相当する位置を表わす。歯車 G・B
 に対する歯元応力波形は、計算値、測定値ともに G・A
 に比べてより滑らかになっている。これは、歯車 G・A
 の重なりかみあい率が $\epsilon_{sp} = 0.73$ であるのに対して、
 G・B では、 $\epsilon_{sp} = 1$ と整数になっているために同時接触
 線長さが、各かみあい位置に対して常に一定になること

によるものと考えられる。また、はすば歯車の歯のかみ
 あいは歯すじ上的一端から始まり、漸次移動して歯すじ
 の他端で終るので、歯すじ上の各点に生じる歯元応力
 は、一般にその点に対応する歯元あるいは歯先がかみあ
 いにはいる前から現われ、同様にかみあいを終った後にも
 現われる。そしてこの期間は、対応した歯元あるいは
 歯先がかみあいはいる前では、歯すじ上のかみあい始
 めの位置に近いほど短く、かみあい終りの位置に近づく
 ほど長くなり、かみあいを終った後では、その逆になる
 傾向が認められる。

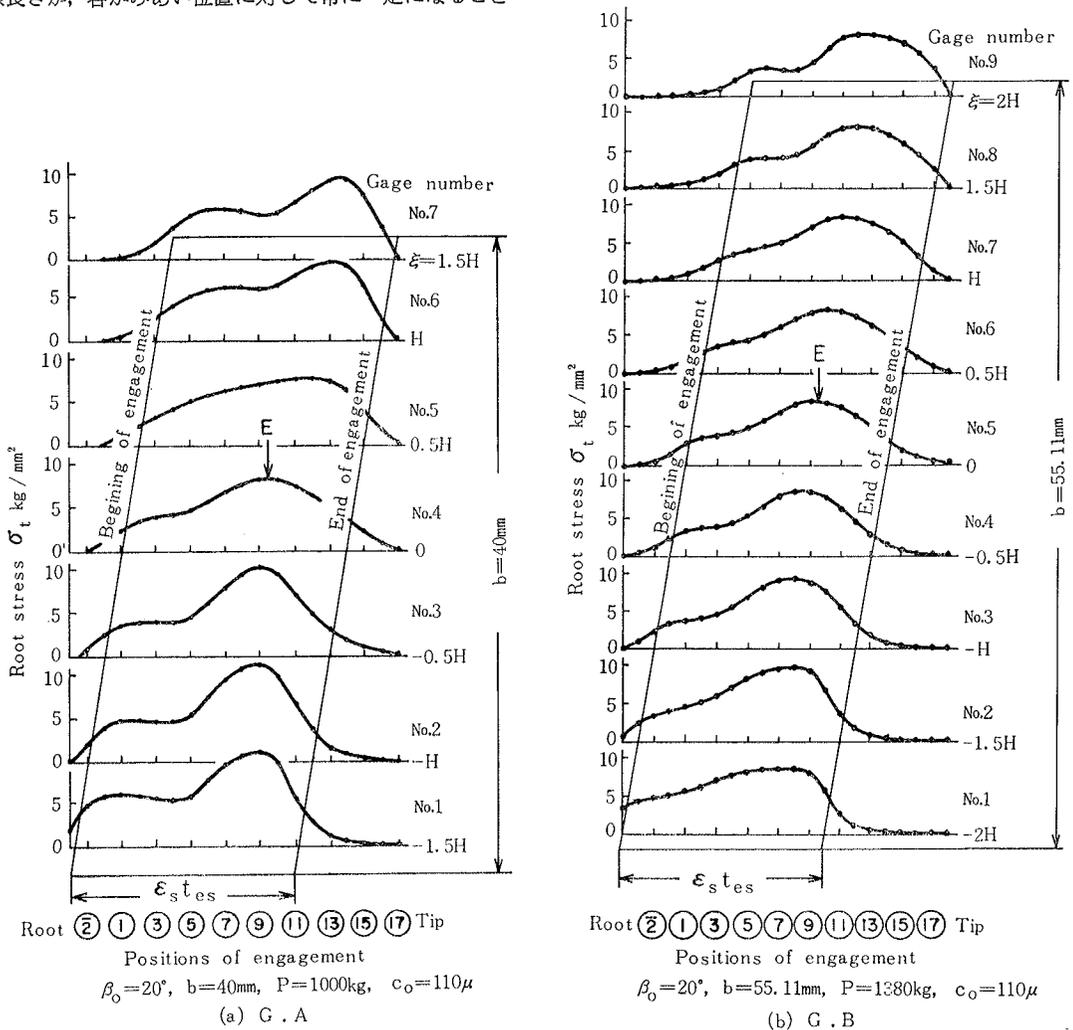


Fig. 12 Root stress wave forms in pinion tooth (Measured)

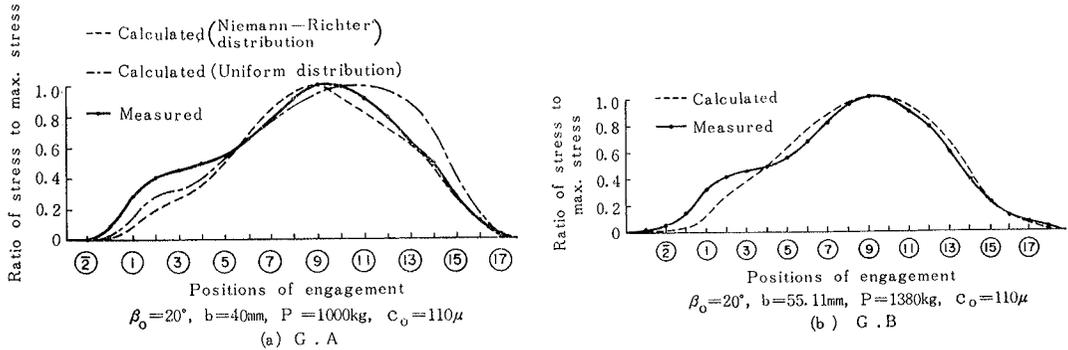


Fig. 13 Stress wave forms in middle section of face width

図13(a), (b)は、各歯車に対する歯幅中央における歯元応力波形の計算結果と測定結果を比較して示したもので、計算値と測定値のいずれについても、最大歯元応力を1とし、他のかみあい位置で生じた歯元応力を最大歯元応力の比で表わしている。これらの図より、最大歯元応力が発生するかみあい位置についてみれば、各歯車において Niemann らによる分布荷重にもとづいて求めた計算結果は測定結果とかなりよく一致しているが、等分布荷重にもとづいて求めた計算結果(図13(a))は少しずれていることがわかる。これらの結果から、Niemann らによる荷重分布はほぼ妥当なものと考えてよからう。

5. むすび

負荷かみあい時に生じるはすば歯車の歯元応力に及ぼす重なりかみあい率の影響について検討を加えた結果明らかになった諸点は、次のとおりである。

- (1) はすば歯車において、最大歯元応力が発生するかみあい位置(最悪かみあい位置)は、重なりかみあい率に関係なく、歯幅中央の軸直角断面において、かみあい点が外の1組かみあい点と一致する位置の近傍である。
- (2) 一対のはすば歯車をかみあわせてパルセータ試験

(曲げ疲労試験)を行なう場合のかみあい条件としては、結論(1)で述べた最悪かみあい位置を選ぶのが適当であろう。

(3) 重なりかみあい率 $\epsilon_{s\beta} = 1$ のはすば歯車では、各断面に生じる最大歯元応力値は歯すじにそってほぼ一様となる。

(4) 引張側および圧縮側に生じる最大歯元応力の絶対値の比は、約 1.15 と圧縮側の方が大きい。

(5) 最大歯元応力は歯端より歯すじ中央に寄った位置に生じ、両端ではいくぶん小さくなる傾向がある。

おわりに、本研究を行なうにあたって、熱心にご協力いただいた元鳥取大学助手島富泰司氏に対して深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- (1) 藤田, 機械学会論文集, 26-163 (昭 35-3), 430.
- (2) Wellauer, E.J. & Seireg, A., Trans. ASME, Ser. B82-3 (1960-8), 213.
- (3) Niemann, G., Maschinenelemente, Bd. II, (19 65), S.76, Springer-Verlag.
- (4) 仙波, 歯車第 3 卷, (昭31), 774, 日刊工業新聞社.
- (5) 釘宮, 機械学会論文集, 32-235 (昭41-3), 511.