

# はすば歯車における両端不完全部の歯元応力に及ぼす影響

小田 哲\*・島 富 泰 司\*・難 波 千 秋\*

(1975年10月20日受理)

## On Effect of Tooth Ends on Root Fillet Stresses in Helical Gears

by

Satoshi ODA\*, Yasuji SHIMATOMI\*, and Chiaki NANBA\*

(Received October 20, 1975)

### Summary

This paper presents a study of the effect of tooth ends on the fillet stress distributions in helical gears based on a cantilever plate approach. From strain-gage investigations, the stress concentration factors and the end coefficients are obtained for the cantilever plates with rectangular profile under transverse loads at any location on their surface and it is found that the end conditions have a considerable effect on the stress distribution at the root.

The calculated stress values which are modified with the stress concentration factors and end coefficients showed a good agreement with the results from strain-gage investigations on the helical gear tooth.

### 1. ま え が き

はすば歯車では、接触線が軸方向に対して傾斜しているばかりでなく、接触線上の荷重分布も等分布でないため歯すじ方向の各断面における歯元応力分布は一樣ではない。またはすば歯車は両歯すじ端に不完全部を有しており、このため歯元応力分布はこの不完全部の影響を受けて一層複雑になっているものと考えられる。従来はすば歯車の歯元応力は、一般に無限幅片持平板に対する応力理論<sup>(1)</sup>にモーメント・イメージ法<sup>(2)</sup>を適用することによって求められてきているが、この方法によって求められる応力値は公称応力を与えるのみで、歯元すみ内部（固定端）における応力集中や両端不完全部の影響は考慮されていない。はすば歯車の歯元応力を正確に知るためには、歯元すみ内部における応力集中や、両端不完全部の影響を明らかにすることとともに、これらの影響

を考慮した歯元実応力計算式の確立が望まれる。しかし、はすば歯車における歯元すみ内部応力集中や両端不完全部の影響の問題は三次元応力問題に属するため、これらの問題を理論的に扱うことは現段階ではきわめて困難である。

本報告では、両端不完全部条件の異なる片持平板試験片を用いて、片持平板固定端におけるすみ内部応力集中および両端不完全部の歯元応力に及ぼす影響について実験的に検討を加えた結果について述べるとともに、これらの結果を著者らが求めたはすば歯車の歯元応力計算結果<sup>(3)~(5)</sup>に導入して、実際のはすば歯車に対する歯元応力測定結果と比較検討を行なっている。

### 2. 応力集中係数と端部影響係数

片持平板の固定端におけるすみ内部単位幅当り公称応力  $\sigma_N$  は平板に垂直に作用する集中荷重を  $P$ 、危険断面

\* 機械工学科 Department of Mechanical Engineering

の厚さを  $s$ , 固定端にそつた曲げモーメントを与える係数を  $\beta$  とすれば次式で与えられる<sup>(7)</sup>。

$$\sigma_N = \frac{6\beta}{s^2} \cdot P \quad \dots\dots(1)$$

ここで,  $\beta$  の値としては, 藤田の計算結果<sup>(6)</sup> (表1) に Wellauer らによって提案されたモーメント・イメージ法<sup>(2)</sup> を適用して求めた値を用いる。集中荷重が幅中央に作用した場合の固定端における応力分布は, 平板

$$\sigma_{tc} = \alpha \sigma_N = \frac{6\alpha\beta}{s^2} \cdot P \quad \dots\dots(2)$$

$$\sigma_{ti} = \frac{6\alpha^*\beta^*}{s^2} \cdot P \quad \dots\dots(3)$$

ここで,  $\alpha$ : 不完全部をもたない片持平板のすみ肉部における応力集中係数,  $\beta$ : 式(1)のものと同じもの,  $\alpha^*$ : 不完全部をもつ片持平板における応力集中係数,  $\beta^*$ : 不完全部をもつ片持平板において固定端にそつた曲げモ

Table 1 Factors for bending moment at clamped edge  $\beta$

$\frac{H}{\eta/H}$	0	0.1H	0.25H	0.5H	H	2H	3H
0	0.511	0.510	0.475	0.389	0.210	0.038	0.016
0.2	0.443	0.438	0.405	0.317	0.159	0.025	0.011
0.4	0.397	0.387	0.341	0.240	0.107	0.012	0.007
0.6	0.360	0.339	0.264	0.149	0.053	0.004	0.002
0.8	0.336	0.268	0.122	0.051	0.012	0.002	0.001

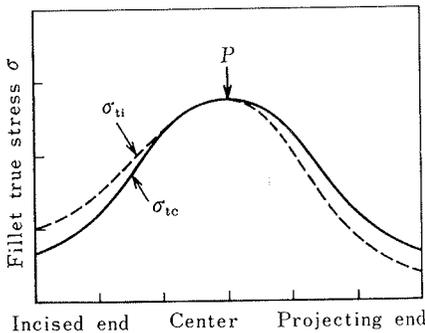


Fig. 1 Effect of end conditions on fillet stress distributions at clamped edge

両端に突出しや切込みなどの不完全部 (図2) をもたない片持平板においては, 図1で実線で示すように左右対称になるが, 両端に不完全部をもつ片持平板においては, 図1で破線で示すように切込側で大きく, 突出側で小さくなるものと考えられる。

いま, 不完全部をもたない片持平板の固定端におけるすみ肉部実応力を  $\sigma_{tc}$ , 不完全部を持つ片持平板におけるすみ肉部実応力を  $\sigma_{ti}$  とすれば,  $\sigma_{tc}$ ,  $\sigma_{ti}$  はそれぞれ式(2), 式(3)の形で表わすことができよう。

ーメントを与える係数

$\alpha^*$ ,  $\beta^*$  をそれぞれ明確にすることは現段階では困難であるので, 本研究では  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  を分離して扱うことをやめ,  $\alpha^*\beta^*$  としてまとめて扱っている。

不完全部をもつ場合ともたない場合の片持平板の固定端におけるすみ肉部実応力の比をとれば, この値は不完全部のすみ肉部実応力に及ぼす影響度を示すものと考えられるので, この比を端部影響係数  $a$  と呼ぶことにする。したがって,  $a$  は式(2), (3)より次のように表わされる。

$$a = \frac{\sigma_{ti}}{\sigma_{tc}} = \frac{\alpha^*\beta^*}{\alpha\beta} \quad \dots\dots(4)$$

本研究では,  $a$  の値は  $\sigma_{ti}$ ,  $\sigma_{tc}$  をそれぞれひずみゲージを用いて測定することによって求めている。また, 不完全部をもたない片持平板のすみ肉部における応力集中係数  $\alpha$  は式(2)より次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{\sigma_{tc}}{\sigma_N} \quad \dots\dots(5)$$

$\alpha$  の値は,  $\sigma_{tc}$  の値としてひずみゲージによる測定値を, また  $\sigma_N$  の値としては式(1)による計算値を用いて求めている。

3. 実験方法および実験装置

(1) 片持平板試験片 図2は本実験に用いた片持平板試験片の形状寸法を示す。片持平板の横断面の形状寸法は、著者らが歯車の研究に用いているはずば歯車の歯の

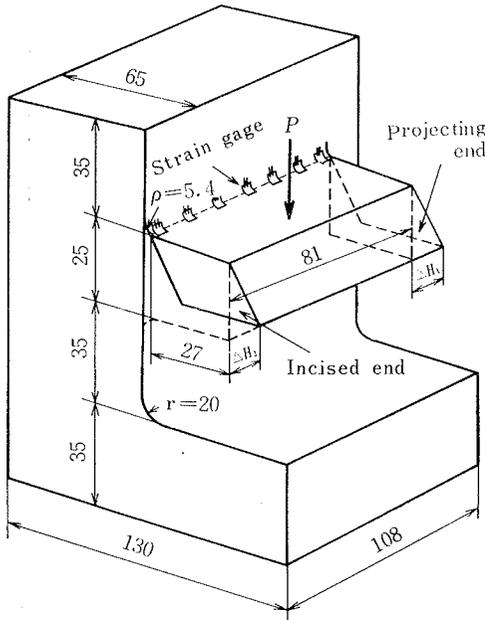


Fig. 2 Specimen of cantilever plate

プロポーシオンに近く選ばれている。試験片は S35C 炭素鋼塊よりフライス・カッタによって削り出したもので、すみ肉部はエメリー紙によって研磨仕上げしている。

また、両端不完全部のすみ肉部応力に及ぼす影響について検討するため、両端不完全部の条件を異にする種々の片持平板試験片に対して実験を行なった。表2は実験に用いた片持平板試験片の端部条件を示す。

すみ肉部応力は、すみ肉部にゲージ長さ1mmのひずみ

ゲージを等間隔に7板接着して測定した。ひずみゲージ接着位置は図3に示すように、すみ肉部の Hofer の30°接線法で決定される危険断面上である。負荷点の位置を示すための座標軸  $\xi$ ,  $\eta$  は図3のようにとっている。図3において・点は負荷点の位置を示す。負荷点の位置は幅方向に  $0.5H$  間隔で7点、自由端より固定端に向って

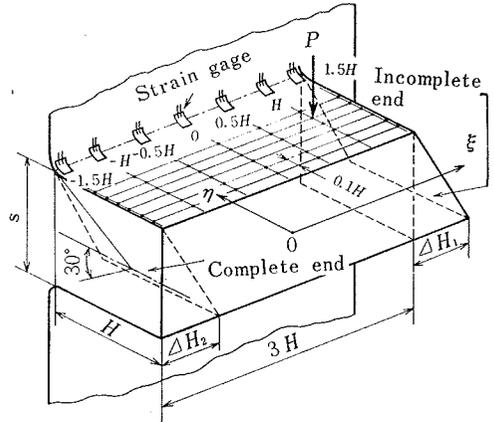


Fig. 3 Positions of load applications and strain gages on cantilever plate

$0.1H$  間隔で6点計42点で、各点に集中荷重を平板に垂直に負荷して、それぞれの負荷点に対するすみ肉部応力を測定した。

(2) 荷重負荷装置 図4は本実験に使用した荷重の負荷装置を示す。荷重は門形架構によって支持された2段レバによりおもりの重量を60倍に拡大して試験片に加えられるようになっている。荷重の大きさはいずれの実験に対しても  $P=500\text{kg}$  である。負荷荷重が一点集中荷重となるようにするために、負荷棒の先端と片持平板の間に径5mmの鋼球をはさんで荷重を負荷した。また試験片を、直線的に移動することのできるダブテイルをもったベッドの上に取り付け、荷重作用位置の設定が容易にできるように配慮した。

Table 2 End conditions

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Delta H_1$	H	0.8H	0.6H	0.4H	0.2H	0	0	0	0	0	0
$\Delta H_2$	0	0	0	0	0	0	0.2H	0.4H	0.6H	0.8H	H

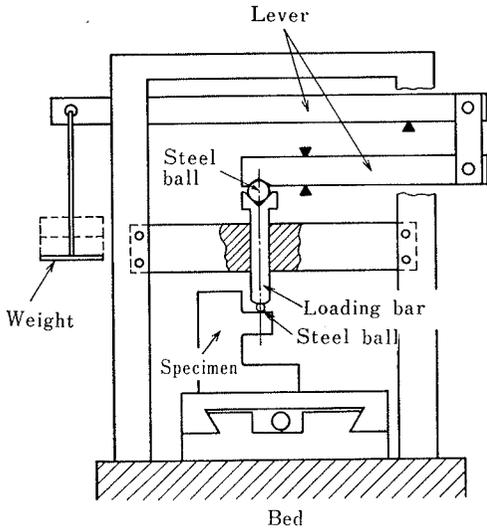
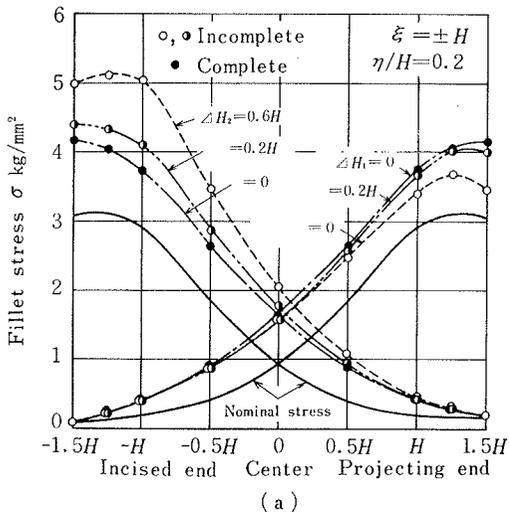


Fig. 4 Loading apparatus

ひずみゲージによるひずみの測定は新興通信社製 PS 7/LT 型静ひずみ測定器および PS 7/ST 型10点切換平衡箱を使用して行なった。測定したひずみ値は縦弾性係数  $E=21000\text{kg/mm}^2$  を乗じて応力値に換算している。

4. 実験結果および考察

図5(a), (b)はすみ内部応力の測定結果および計算結果を示す。突出側では、不完全部のある場合の応力値  $\sigma_{ii}$  は不完全部のない場合の応力値  $\sigma_{ic}$  より小さく、逆に



(a)

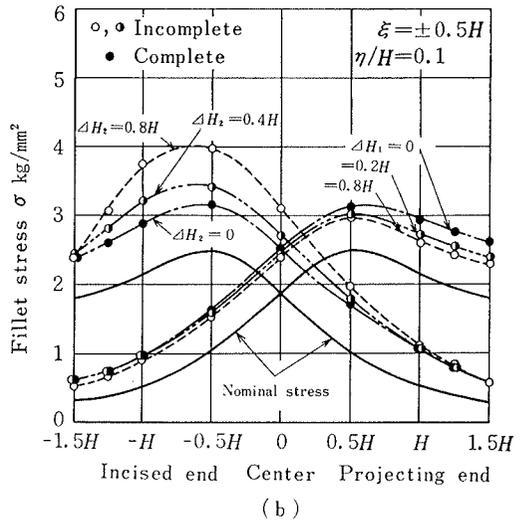


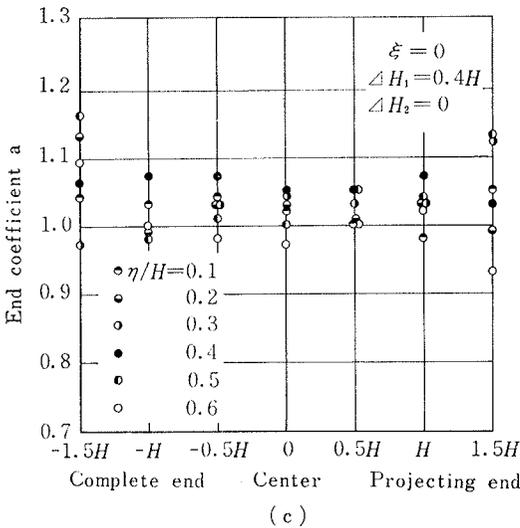
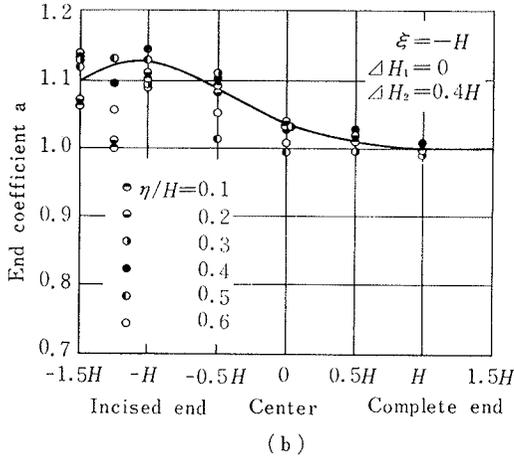
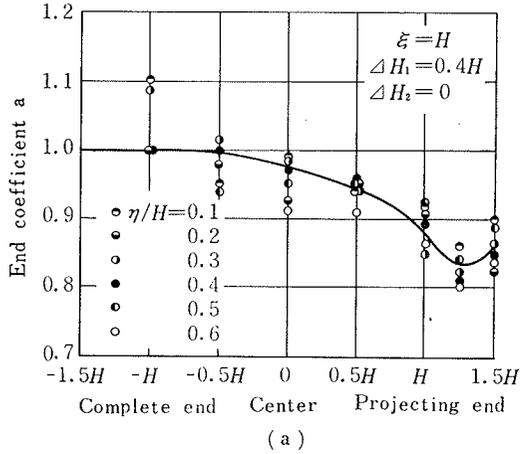
Fig. 5 Fillet stress distributions at clamped edge

切込側では  $\sigma_{ii}$  は  $\sigma_{ic}$  よりも大きくなっている。また  $\sigma_{ii}$  は突出側、切込側ともに不完全部の傾きが増大するにつれて減少する傾向を示すことがわかる。不完全部がすみ内部応力分布に影響を及ぼす範囲は、本研究で検討を加えた端部条件の範囲（一般に使用されるはすば歯車の端部条件はすべてこの範囲に含まれる）内では、不完全部の端から  $2.5H$  程度までであると考えられる。

図5では、端部条件のすみ内部応力分布に及ぼす影響について検討するために行なった実験結果の一部を示したが、他の条件の場合も同様の傾向を示した。

図6(a), (b)は自由端から負荷点までの距離  $\eta/H$  と幅方向の各位置における端部影響係数  $a$  との関係を示す。負荷点の位置が自由端から固定端に移動しても、端部影響係数  $a$  は  $\eta$  軸方向（図3）には大きく変化しないことがわかる。

図6(c)は荷重が歯幅中央 ( $\xi = 0$ ) に作用する場合の  $\eta/H$  と  $a$  の関係を示す。この図より負荷点の位置が不完全部よりある一定の距離以上に離れると不完全部の歯元応力に及ぼす影響は認められなくなることがわかる。図において  $a$  のばらつきの幅が両端に近づくにしたがって大きくなっているのは、両端近傍では  $\sigma_{ii}$ ,  $\sigma_{ic}$  の測定値がきわめて小さくなるため、わずかの測定値のばらつきが大きく増幅されたことによるものと思われる。これらの実験結果から、負荷点の  $\eta$  軸方向の移動の端部影響係数  $a$  に及ぼす影響は小さいものと考えられるので、各



$\eta/H$  に対する  $a$  の値の平均値を求めて、この値を実際のはずば歯車の歯元応力の計算に用いてよいものと考えられる。

図 7(a)~(d)は、一端に突出しをもち、他端に不完全部をもたない片持平板に対して、突出側の傾きを種々変えて、幅方向の各負荷点の位置に対する端部条件の端部影響係数  $a$  に及ぼす影響について調べた結果を示す。これらの図においてプロットされた各点は負荷点の位置を  $\eta$  軸方向に種々変えて測定した値の平均値を示してい

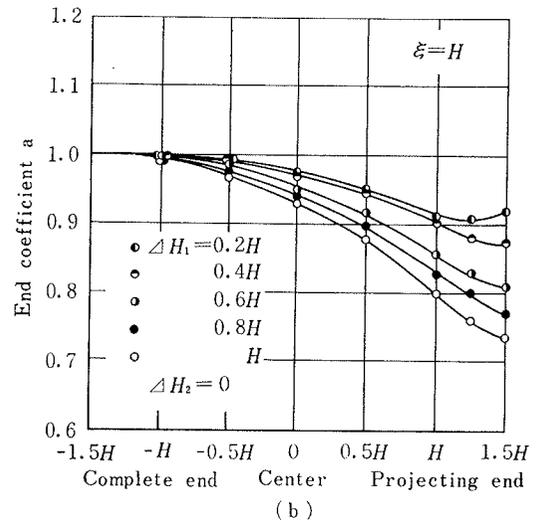
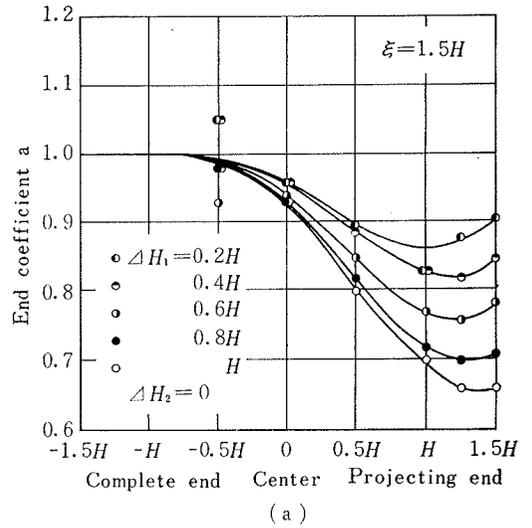


Fig. 6 Effect of  $\eta/H$  on end coefficient  $a$

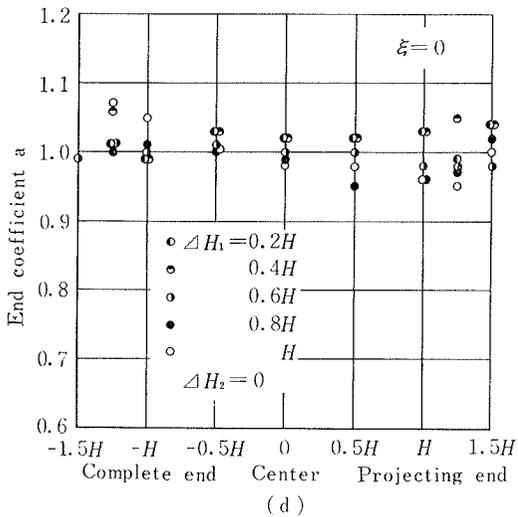
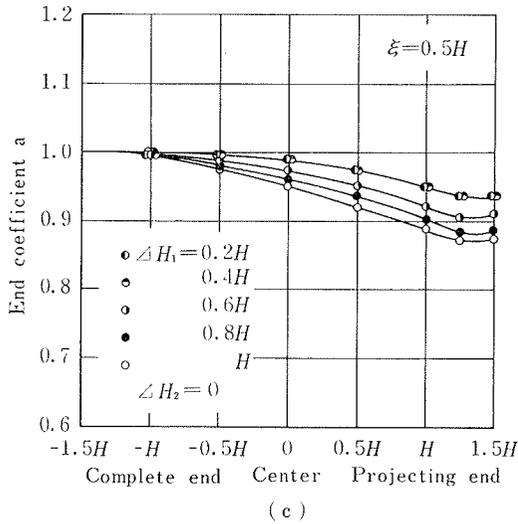
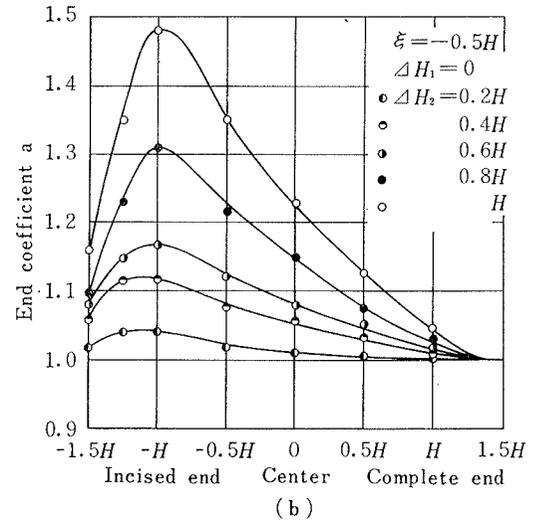
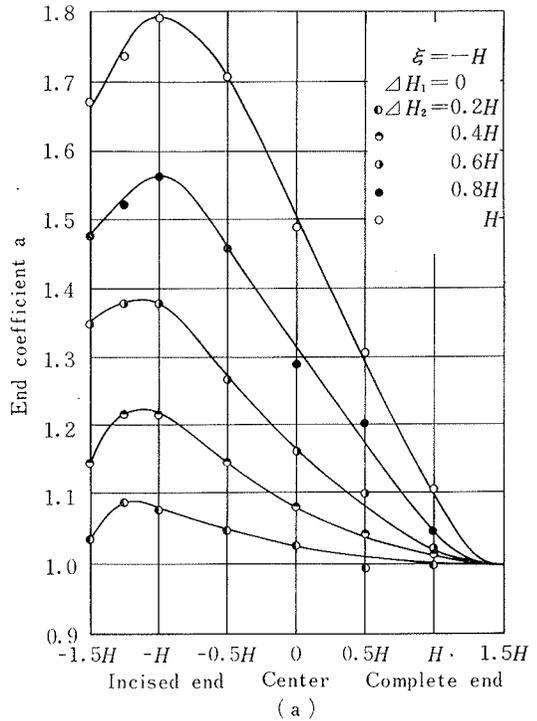


Fig. 7 Effect of end conditions on end coefficient a

る。これらの図より不完全部の傾きの増大につれて、 $a$ の絶対値は減少し、また負荷点の位置が不完全部から離れるにつれて、不完全部の $a$ に及ぼす影響は小さくなる傾向を示すことがわかる。

図8(a)~(d)は、一端に切込みをもち、他端に不完全部をもたない片持平板に対して図7の場合と同様の実験を行なった結果を示す。図7、図8の結果より、不完全部のすみ肉部応力に及ぼす影響の程度は、不完全部が同じ傾きをもつ場合切込側では突出側に比べてかなり大き



く、また不完全部のすみ肉部応力に影響を及ぼす範囲も、突出側では不完全部より内側へ $2H$ までであるのに対し、切込側では $2.5H$ までとなって、切込側の方が突出側に比べてかなり広くなることがわかる。

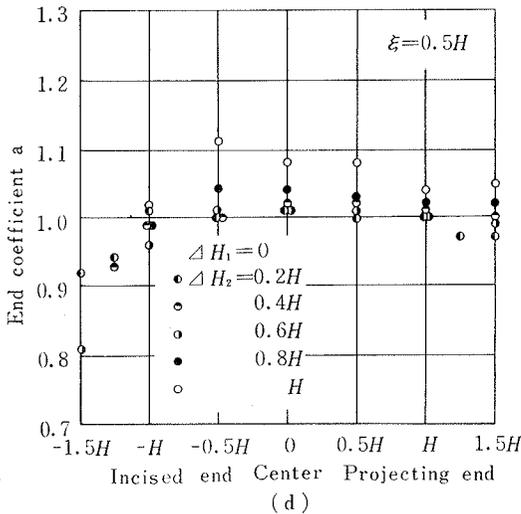
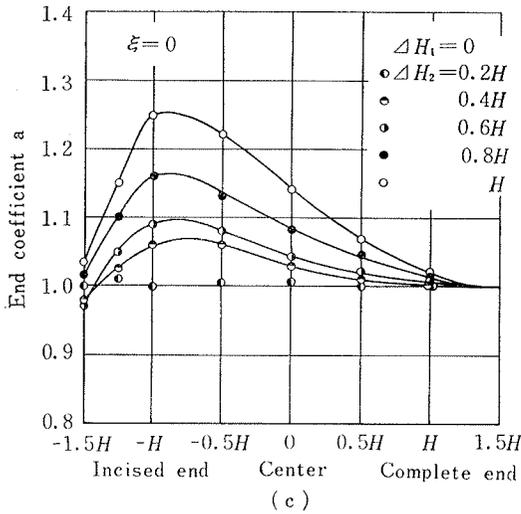


Fig. 8 Effect of end conditions on end coefficient a

図9(a), (b)は、不完全部をもたない片持平板試験片に集中荷重が作用した場合の各荷重点の位置と固定端のすみ肉部における応力集中係数  $\alpha$  の関係を示したものである。これらの図より、 $\alpha$  は荷重点の位置に対応する固定端においてもっとも小さく、その点から離れるにしたがって大きくなる傾向を示し、この傾向は荷重点の位置が自由端から固定端の方に移動するにつれてますます強くなることわかる。しかし、すみ肉部における公称応力  $\sigma_N$  の分布は荷重点に対応する固定端の近傍でも

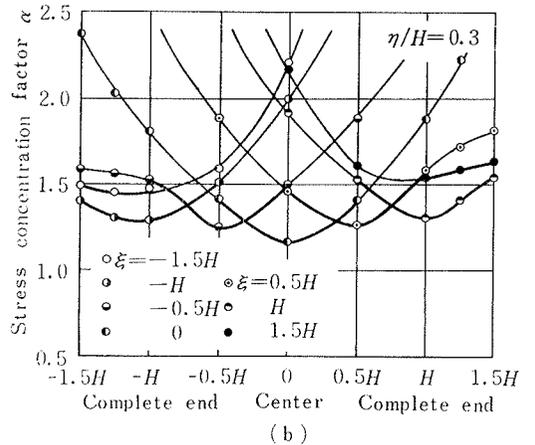
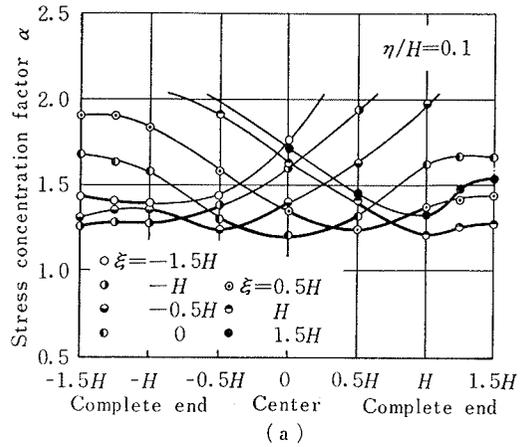


Fig. 9 Stress concentration factors at clamped edge

とも大きく、この点から離れるにしたがって急激に減少すること、荷重点から  $\xi$  方向に離れるにつれて、すみ肉部応力の測定値もいちじく小さくなるため、荷重点から  $\xi$  方向に離れた位置に対する  $\alpha$  の精度は低下することなどを考慮すれば、 $\alpha$  の値としては、荷重点から  $\pm 0.5H$  の範囲 (図9の太い実線で示した範囲) の値をとれば十分であろう。

不完全部をもつ片持平板のすみ肉部応力に及ぼす荷重点の位置、不完全部の傾き、危険断面厚さとすみ肉部曲率半径の比  $s/\rho$ 、危険断面厚さと危険断面から自由端までの距離の比  $s/H$  などの因子の影響について明らかにし、端部影響係数  $\alpha$  を一般化した形で得ることを試みたが現段階では資料が不十分で、この問題は今後の課題として残されている。

つきに、はすば歯車において、両端不完全部が歯元応力分布にどのような影響を及ぼすかについて検討してみよう。歯元応力の計算、測定に使用したはすば歯車<sup>(3)~(5)</sup>は、歯直角モジュール  $m_n = 6$ 、 $\alpha_n = 20^\circ$ 、歯数  $z_1 = z_2 = 36$ 、ねじれ角  $\beta_0 = 20^\circ$ 、歯幅  $b = 40\text{mm}$ で、歯車の材料は相手歯車とともに SNC21 材で浸炭焼入れ後研削を施したもので JIS 1 級である。

歯元応力の測定は、試作した静的負荷かみあい試験機を用いて、歯車を最悪かみあい位置<sup>(3)~(5)</sup>でかみ合せて負荷(円周力  $P = 1000\text{kg}$ )を加え、すみ内部に接着した7枚のひずみゲージにより測定した。最悪かみあい位置に対する歯元応力の計算は、固定端にそった曲げモーメントを与える係数として、藤田<sup>(6)</sup>のももめた  $\beta$  の値にモーメント・イメージ法を適用して得た値を用いている。接触線上の荷重分布としては Niemann-Richter<sup>(6)</sup>による荷重分布を採用している。さらに、歯元応力の測定に用いた歯車とほぼ等しいプロポーシヨンの片持平板試験片(両端に不完全部をもつものともたないもの)のすみ肉部応力の測定結果より求めた応力集中係数を用いて補正した値も合わせて示した。

図10は、実際のはすば歯車に対する歯元応力分布の計算結果および測定結果を示す。図中実線は歯元応力の測定値を、2点鎖線で示した曲線は公称応力  $\sigma_N$  を、1点鎖線はこの値を不完全部をもたない片持平板試験片に対

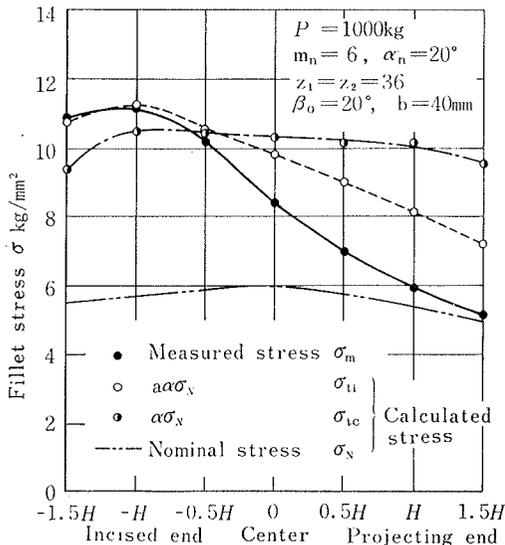


Fig. 10 Fillet stress distributions in helical gear tooth

する実験結果から求めた応力集中係数を用いて補正した  $\alpha\sigma_N$  を、破線はこの値にさらに不完全部の影響を考慮した  $a\alpha\sigma_N$  を示す。これらの結果から  $a\alpha\sigma_N$  値が測定値にもっとも近いこと、またははすば歯車において両端不完全部の歯元応力に及ぼす影響がかなり大きいことがわかる。不完全部の影響を考慮した場合でも計算値と実測値がなおわずかにずれているのは、仮定した接触線上の荷重分布が実際の荷重分布よりずれているのか、あるいは片持平板の断面形状と歯の形状の相違を考慮していないことによるものと思われる。いずれにしてもはすば歯車の歯元応力を正確に知るためには、両端不完全部の歯元応力に及ぼす影響を無視することはできないであろう。

## 5. む す び

片持平板およびはすば歯車における両端不完全部のすみ肉部応力に及ぼす影響について検討を加えた結果、明らかになった諸点を要約すればつぎのとおりである。

(1) 両端不完全部のすみ肉部応力に及ぼす影響はかなり大きく、とくに切込側は突出側に比べてはるかに大きい影響を及ぼす。

(2) 不完全部がすみ肉部応力に影響を及ぼす範囲は、自由端より危険断面までの距離を  $H$  とした場合不完全部端より  $2.5H$  程度までの範囲である。

(3) 負荷点の自由端—固定端方向 ( $\eta$  軸方向) への移動は、端部影響係数  $a$  にほとんど影響を及ぼさない。

(4) 片持平板に対する実験結果より得られた応力集中係数  $\alpha$  および端部影響係数  $a$  を用いて補正して求めた歯元応力計算値はひずみゲージによる歯元応力測定結果とかなりよく一致する。

本研究は昭和50年度科学研究費(奨励研究(A))の助成を受けて行なった研究成果の一部であることを付記して関係各位に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- (1) T. J. Jaramillo, *J. Appl. Mech.*, 17, 1 (1950-3), 67.
- (2) E. J. Wellauer and A. Seireg, *Trans. ASME, Ser. B*, 82-3 (1960-8), 213.
- (3) 小田, 島富, 機械学会講演論文集, No. 730-4, (昭48-4), 77.
- (4) 小田, 島富, 機械学会講演論文集, No. 730-10, (昭48-7), 243.
- (5) 小田, 島富, 機械学会講演論文集, No. 730-18, (昭48-10), 107.
- (6) 藤田, 機械学会論文集, 26-163 (昭35-3), 430.
- (7) 釘宮, 機械学会論文集, 32-235 (昭41-3), 511.
- (8) G. Niemann, *Maschinenelemente* Bd. II (1965), S-90, Springer-Verlag.