

## 三角型・台形型メンバーシップ関数のファジィ輸送モデル における反復 MODI 法による最適解への接近

笠原浩三・万里

平成13年7月2日受付

\*鳥取大学農学部農業経営情報科学

## An Approach to the Optimal Solution Using the Repetition MODI Method in the Fuzzy Transportation Model with the Triangular, Trapezoid Style Membership Function

Kozo Kasahara \* and Li Wan \*

\* *Department of Farm Management Information, Faculty of Agriculture, Tottori University, Tottori 680-8553, Japan*

An ordinary linear programming method such as fuzzy linear programming method is beneficial similarly and can be applied to many economic analyses, management plans, etc. A fuzzy transportation model is studied based on fuzzy linear programming method known as beneficial model analysis method as a foundation.

The optimal solution of fuzzy transportation model is calculated by a simplex method so far. However, as for transportation model, the scale of the matrix is big and is very difficult to handle. Therefore, we presented a method that obtains an optimal solution using the MODI method in place of simplex method. First of all, we made fuzzy transportation model that has linear membership function for the numerical value example. Furthermore, besides transportation model that has a triangular model, trapezoid style membership function was used as the object of this research. As a result, we found that trapezoid style membership function can be used to approach an optimal solution together with the repetition MODI method.

If we use repetition MODI method transportation model, it is not necessary to be set up a fuzzy planning model. Also, the scale of the matrix becomes smaller and easier to handle. The usefulness of transportation model should be enhanced by employing the repetition MODI method.

(Received 2 July 2001)

*Key words: Fuzzy linear programming, repetition MODI method, Transportation model, Trapezoid membership function, Triangular membership function*

### 課 題

線形計画法は一定の制約条件の中で線型形式の目的関

数を最大化または最小化する規範的分析法である。計算処理に関する技術的進歩に伴って農業経営設計や経営分析、または資源利用配分計画、ゲームの理論などの各種

最適解の導出、さらには最適地域間生産均衡分析などの政策課題にも幅広く適用され、その実践的有用性が認められてきた。しかし、近年はそのように幅広く評価され、優れた線形計画法の制約条件式をファジィ数として取り扱う分析手法をファジィ線形計画法として定式化する研究が進められている。線形計画法は幅広い適用範囲を有するが、ファジィ線形計画法も同様に線形計画法の適用範囲を広くカバーしその有用性が認められつつある。線形計画法では制約条件が絶対的な条件として明確な形でモデルに設定しなければならない。しかしながら農業経営分析などにおいては、労働条件は自然気象条件によって直接影響を受けると同時に、経営主の労働意志・意欲・体力などにより、労働制約は量的にも質的にも異なってくる。すなわち労働条件に関する制約量は一定の固定的な性格を持つものではなく、融通性のある幅として取り扱うべき性質を持つものである。

このように線形計画法における制約条件を固定的な制約量としての取り扱いを改良し、一種の曖昧性を含んだ制約として設定するものがファジィ線形計画法である。したがってファジィ線形計画法は、従来からの有益な線形計画法としての特徴を有すると同時に、基本となる制約条件に一定の幅を持ったファジィ数を導入することによって一層の有用性を付加することに成功したものと見える。

近年では、ファジィ線形計画法は各種の数理モデルの規範分析に適用が可能となり、特に輸送問題、ゲーム理論、回帰分析法などへの研究が実証的に進められ、広い分野で適用が試みられている[2-4]。

さて、一般的にはファジィ線形計画法の最適解は、通常の線形計画法に基づくシンプレックス法によって求められる。そのためにはファジィ線形計画法を通常の線型計画モデルに組み替える必要がある。一方、従来から輸送モデルの解法としてMODI法が開発されてきた。しかし、MODI法は需給量が明確に与えられていなければならない。したがって需給量を曖昧な一定の幅を持ったファジィ輸送計画に適用することが困難であった。本稿ではMODI法のくり返しによって最適解を得る方法について検討するものである。MODI法ではマトリックス規模は小さく、ファジィ輸送モデルの有用性を一層高めるものとなる。特に輸送問題ではマトリックスの規模が、取り扱う需給地の数に比例して、級数的に大きくなり、通常の取り扱いを急速に困難ならしめる。

本稿においてはそのような特性を持つファジィ輸送モデルの最適解の導出を、通常のシンプレックス法によらず、MODI法のくり返しによって接近する方法について検討するものである。メンバシップ関数には様々なタイ

プがあり、本稿では線形タイプのほかに、三角型、台形型関数形についても研究対象とし、MODI法のくり返しによって最適解に接近する方法を検討する。

### 線形計画法によるファジィ輸送モデル

通常の単純輸送問題は以下のように定式化がなされている。それは各供給地の最大可能供給量を  $s_i$  とし、各需要地の最小需要量を  $d_j$  とし、さらに各需給地間の輸送費を  $c_{ij}$  とすると、次のようにモデル化されるものである。

$$\text{minimize } z = cx \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{subject to } Ax \leq b \quad \dots\dots(2)$$

$$x \geq 0 \quad \dots\dots(3)$$

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{im}, \dots, x_{nm})^t$$

$$b = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)^t$$

$$c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}, \dots, c_{ij}, \dots, c_{im}, \dots, c_{nm})$$

Aは通常の単体表に表現した場合の実働方式の係数行列となり、係数がゼロ、または1となる極めて特徴的なマトリックスとなる。

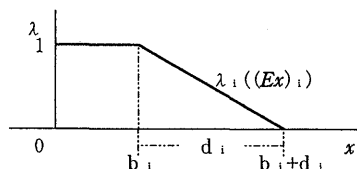
ここで、H. J. Zimmermannは(1)~(2)式にファジィ目標とファジィ制約を導入しファジィ線形計画法を、次のように表した[10]。

$$\begin{cases} Ex \lesssim b' \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \dots\dots(4)$$

$$E = \begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix} \quad b' = \begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix}$$

さらにここで、ファジィ不等式  $Ex \lesssim b'$  の  $i$  番目の  $(Ex)_i \lesssim b'_i$  に対して、第1図または次のようにメンバシップ関数 (linear membership function) を想定して具体的に意志決定者の曖昧性を表した。

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & ; (Ex)_i \leq b'_i \\ 1 - \frac{((Ex)_i - b'_i)}{d_i} & ; b'_i \leq (Ex)_i \leq b'_i + d_i \\ 0 & ; (Ex)_i \geq b'_i + d_i \end{cases} \quad \dots\dots(5)$$



第1図 線形メンバシップ関数

このとき Bellmann と Zadeh のファジィ決定に対する最大化決定によれば、与えられたファジィ線形問題は、(6)式を満たす  $x^*$  を求める問題となる。

$$\lambda_a(x^*) = \max_x \min_i \{ \lambda_i (Ex)_i \} \quad \dots\dots(6)$$

すなわち最小のメンバシップ関数値を最大にするような  $x^* \geq 0$  を求める問題となる [1, 5, 7-9].

ここで、 $b_i^* = b_i / d_i$ 、 $(Ex)_i = (Ex)_i / d_i$  とおけば (6) 式は次のようになる。

$$\lambda_a(x^*) = \max_x \min_i \{ 1 + b_i^* - (Ex)_i \} \quad \dots\dots(7)$$

この問題は結局次のような通常の線形計画問題に変換することができる。

$$\text{maximize } \lambda \quad \dots\dots(8)$$

$$\text{subject to } \lambda \leq 1 + b_i^* - (Ex)_i \quad \dots\dots(9)$$

$$x \geq 0 \quad \dots\dots(10)$$

ファジィ線形計画法はこのように通常の線形計画の問題に置き換えて最適解を求めることとなる。

### ファジィ輸送モデルのMODI法による解法

#### 1) ファジィ輸送モデルと数値例解

ここでは具体的に数値例解を得るために、第1表のような基本数値モデル例として使用することとする [4, 6].

第1表 輸送モデル数値例解のための設定条件

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地 A	2	3	4	5	150
供給地 B	3	4	2	1	120
供給地 C	5	4	3	2	120
総需要量	100	120	80	90	390

注) 総供給量、総需要量はそれぞれ供給地の最大可能供給量、最小必要需要量を表すものであり、枠内の数値は各需給地間の単位当たり輸送費を表す。

次にファジィ輸送モデルの解と相互に比較する目的で、まずシンプレックス法とMODI法 (modified distribution method) による基本数値例解を求めておこう。

シンプレックス法による輸送モデルは、(2)、(3)式を制約式とし、目的関数を(1)式として求められる。その基本マトリックスは、実働方式行列 A の大きさが、 $(n+m) \times (n+m)$  すなわち、 $7 \times 12 = 84$ 、さらに調整方式  $7 \times 10 = 70$ 、計154個の行列要素となる。これはMODI法による

マトリックスの規模に比較して非常に大きなものとなる。シンプレックス法による演算ステップは3段階で収束し、最適解は第2表のように得られる。

第2表 シンプレックス法とMODI法による最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地 A	100	50	0	0	150
供給地 B	0	0	80	40	120
供給地 C	0	70	0	50	120
総需要量	100	120	80	90	390

注) 総輸送費は930単位となるが、この数値例では総輸送費が最小となる解が2種類得られる。

因みにもう一方の解は  $X_{A1}=100, X_{A2}=50, X_{B3}=80, X_{B4}=40, X_{C2}=70, X_{C3}=50$  となり共に総輸送費は930である。

次にMODI法による最適解を求める。すなわちMODI法のマトリックスの大きさは、 $n \times m (=3 \times 4 = 12)$ 個の行列要素の大きさに整理される。これはシンプレックス法に比較していかに小規模であるかが理解できる。次いで、西北隅のルール (north west corner) にしたがって初期解を求めると次の第3表のようになる。

第3表 西北隅のルールによるMODI法の初期解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地 A	100	50	0	0	150
供給地 B	0	70	50	0	120
供給地 C	0	0	30	90	120
総需要量	100	120	80	90	390

注) 総輸送費は1000で、この段階ではまだ最適解に収束していない。

しかしこの段階では、総輸送費が1000であり、まだ最適解に収束はしていない。そこで引き続いて、飛び石法 (stepping storn method) により配分輸送量を改善していくと、2回の改良によって最適解に収束する。その最終収束値はシンプレックス法で得た第2表と同じものとなる。

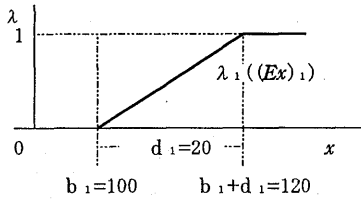
#### 2) ファジィモデルのメンバシップ関数の設定

##### ① 需給量、総輸送費に関するメンバシップ関数

ここではファジィ輸送モデルによる数値例解を求めるために需要量、供給量、及び総輸送費について以下のようなメンバシップ関数を設定することとする。

まず需要量については、需要地1及び需要地3の最小限必要量を、それぞれできれば100単位、80単位とするが、各々20単位の幅を許容範囲として認めることとする。

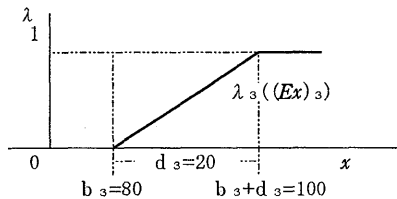
すなわち、第2図は需要地1の最小限の必要需要量を



第2図 需要地1の需要量に関するメンバシップ関数

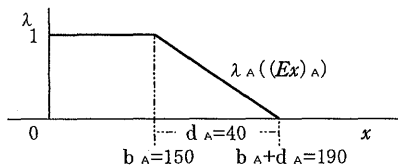
表したものであり、120単位以上供給を受ければ100%の満足度を感じるが、120単位以下であれば満足度0で許されない解の範囲となる。最適輸送需要量は100単位以上の領域を許容範囲とするものである。

同様に第3図は需要地3における需要量の許容範囲を表すものである。すなわち、第3図は需要地3における最小限の必要需要量を表したものであり、100単位以上の供給を受ければ100%の満足度を感じるが、80単位以下であれば満足度0で許されない範囲となる。最適輸送需要量は80単位以上の領域を許容範囲とするものである。



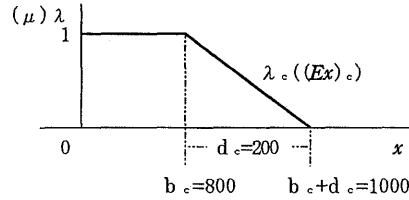
第3図 需要地3の需要量に関するメンバシップ関数

一方、第4図は供給地Aにおける供給可能量を示したものである。すなわち、供給量が150単位以下ならば満足度は100%で、供給量が190単位まで増加すると満足度は0%となり、それを超える供給量は供給不可能となり許されない。最適解は満足度が1と0の範囲内で決定されるものとする。



第4図 供給地Aの供給量に関するメンバシップ関数

最後に、総輸送費は第5図に示すように、できれば800単位以下とするが、200単位の許容幅を設けて最大1000単位までなら許されるものとする。総輸送費が増加すれば満足度は低下するが、需要地の需要量を若干増加させる



第5図 総輸送費に関するメンバシップ関数

ことによって需要地にゆとりが生じ、満足度が増加するのであれば輸送費のある程度の増加は許されることとなる。

②線形ファジィ輸送モデルの基本解

上記の第2図～第5図までのように需要地1, 3の需要量、及び供給地Aの供給量、さらに総輸送費に一定の許容範囲を示す線型メンバシップ関数を設定して、(8)式～(10)式で表される通常の線形計画法に変換されたファジィ線形計画法に基づいて最適解を求めると第4表のように整理される。このようにファジィ輸送モデルでは、供給制限量及び必要需要量に関して満足度に関する一定の許容範囲を導入して、輸送費の増加と需給条件の満足度との兼ね合いで最適解が確定することとなる。

すなわち、需要地1, 3の需要量はそれぞれ、105, 85単位で供給地Aは160単位を供給することとなる。総輸送量は全体で400単位で、その輸送費は950単位である。またこのときのメンバシップ関数は0.25で、満足度はほぼ25%程度ということになる。

第4表 ファジィ輸送モデルのシンプレックス法による最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	105.0	55.0	0.0	0.0	160.0
供給地B	0.0	0.0	85.0	35.0	120.0
供給地C	0.0	65.0	0.0	55.0	120.0
総需要量	105.0	120.0	85.0	90.0	400.0

注) 総輸送費は950.0, λ=0.25

3) MODI法の反復によるファジィ最適解への接近

通常のファジィ輸送モデルでは需給量に関する制約条件式のメンバシップ関数と総輸送費に関する目的関数のメンバシップ関数は相互に独立ではなく、(8)式のλと(9)式のλは同時決定的に確定する。

しかしMODI法では、これを分離して、(8)式のメンバシップ関数をμとし、さらに(9)式のλの値を外生的にあらかじめ外部から与える方法をとる。λの値が予め外部から与えられると、第2, 3, 4図のメンバシップ関数

から、需要地1と需要地3、及び供給地Aの最小限必要需要量、及び最大限供給可能量がそれぞれ確定する。かくしてこれに対して通常のMODI法の適用が可能となる。その結果、この段階における各需給地間の輸送量、及び総輸送量、総輸送費が確定する。

次いで、確定した総輸送費を用いて第5図の総輸送費に関するメンバシップ関数から $\mu$ の値が求められる。その結果、与えられた $\lambda$ の値と、MODI法による最適解の結果から推計される $\mu$ の値が一致すれば、ファジィ輸送モデルのMODI法による最適解となるが、一般には一致しない。そこで(i+1)ステップにおいて、外生的に与える $\lambda$ の値を次式によって修正して与えることとする。

$$\lambda^{(i+1)} = (\lambda^{(i)} + \mu^{(i)}) / 2 \quad \dots\dots (11)$$

この方法によれば、演算に必要なマトリックスの規模は、通常のMODI法で必要とする規模で十分である。線形計画法で解くマトリックスの規模が $(n+m) \times (n+m)$ であるのに対して、MODI法では精々 $(n \times m)$ で済ませることができる。

以下実際にMODI法のくり返しによって順次 $\mu$ の値を求めていくこととしよう。ステップ1でメンバシップ関数を $\lambda^{(1)} = 0.5$ とする。かくして第2, 3, 4図のメンバシップ関数から需要地1の最小限必要量=105, 需要地3の最小限必要量=90, 供給地Aの最大供給可能量=165となる。よってこれを条件とするステップ1の解が通常のMODI法によって第5表のように得られる。

第5表 MODI法によるファジィ輸送モデルのステップ1の解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	110.0	60.0	0.0	0.0	170.0
供給地B	0.0	0.0	90.0	30.0	120.0
供給地C	0.0	60.0	0.0	60.0	120.0
総需要量	110.0	120.0	90.0	90.0	410.0

注) 総輸送費は970.0,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0.15$

この結果、総輸送費は970.0単位となり、さらにこれに基づいて第5図から目的関数のメンバシップ関数値は $\mu = 0.15$ を得る。かくして第(11)式より、ステップ2の制約式のメンバシップ関数値 $\lambda^{(2)} = 0.325$ を得ることができる。

$$\lambda^{(2)} = (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) / 2 = 0.325$$

以下同様にして、メンバシップ関数値 $\lambda^{(3)}$ ,  $\mu^{(3)}$ ,  $\lambda^{(4)}$ ,  $\mu^{(4)}$ ..., を求め収束条件を満たして終了する。

収束過程を整理すると第6表のようである。

反復回数は8回で収束し、その最終収束値は第7表のようになる。「反復MODI法」による最終収束解の内容は、先に求めている第4表のシンプレックス法で求めた最適解と全く同一であることを確認することができる。

第6表 反復MODI法による輸送モデルのメンバシップ関数の $\lambda$ ,  $\mu$ の収束過程

反復回数	$\lambda$	最小限必要量		供給地Aの最大供給	総輸送費	総輸送量	目的関数の $\mu$
		需要地1	需要地3				
1	0.50000	110.00	90.00	170.00	970.00	410.00	0.15000
2	0.32500	106.50	86.50	163.00	956.00	403.00	0.22000
3	0.27250	104.45	85.45	160.90	956.40	400.90	0.24100
4	0.25675	105.13	85.13	160.27	950.54	400.27	0.24730
5	0.25203	105.04	85.04	160.08	950.16	400.08	0.24919
6	0.25061	105.00	85.00	160.01	950.01	400.01	0.24992
7	0.25006	105.00	85.00	160.00	950.00	400.00	0.24998
8	0.25000	105.00	85.00	160.00	950.00	400.00	0.25001

注) 反復回数は8回で、収束条件 $\omega = 10^{-5}$ を満たす。

第7表 反復MODI法による最終収束解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	105.0	55.0	0.0	0.0	160.0
供給地B	0.0	0.0	85.0	35.0	120.0
供給地C	0.0	65.0	0.0	55.0	120.0
総需要量	105.0	120.0	85.0	90.0	400.0

注) 総輸送費は950.0,  $\lambda = \mu = 0.2500$

### 三角型メンバシップ関数をもつファジィ輸送モデルのMODI法による最適解

#### 1) 三角型メンバシップ関数

これまでではメンバシップ関数を線形タイプとして考察してきたが、ここでは、制約条件式を可能性分布からなるファジィ集合として表し、これによってファジィメンバシップとして定式化していく。これは、曖昧な状況であるときは、どれぐらい曖昧に決定することができるのかの可能性分布を求めることを意味し、「だいたい〜ぐらいにしたい」という係数のとりうる範囲が三角型や台形型の可能性分布として示すものである。三角型ファジィ線形計画法では、ある数値を中心として「だいたい〜ぐらい」というように一定の幅を持たせて、その上限と下限を設定する際に効果的である。

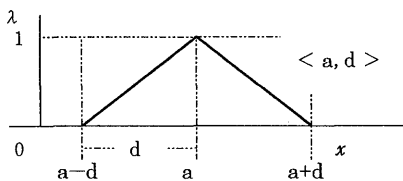
まず、可能性計画法では、曖昧さを反映し、係数のとりうる範囲を「だいたい〜ぐらいにしたい」という可能

性分布をファジィ数として取り扱う。三角型の曖昧さを示す三角型ファジィ数は次のように表す。

$$A = \langle a, d \rangle \quad \dots\dots (12)$$

すなわち、 $a$  は曖昧な制約条件の中心値を示し、 $d$  はその中心から曖昧な制約領域の一定の幅を示すものである。その可能性分布は具体的に次のようなメンバシップ関数で定義される。

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-a}{d} & : a \leq x \leq a+d \\ 1 - \frac{a-x}{d} & : a-d \leq x \leq a \\ 0 & : x \leq a-d, \text{または } a+d \leq x \end{cases} \quad \dots\dots (13)$$



第6図 三角型メンバシップ関数のファジィ数

以上のような三角型ファジィ数の可能性分布をもつファジィモデルを通常の線形計画問題に表すと次のようになる。

$$\text{maximize } h \quad \dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & \sum ax + h \sum dx \leq g + (1-h)e \\ & \sum ax - (1-h) \sum dx \leq g + (1-h)e \quad \dots\dots (15) \\ & x \geq 0, 0 < h \leq 1 \end{aligned}$$

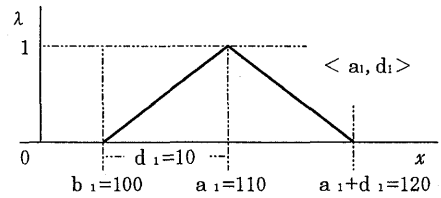
三角型のメンバシップ関数をもつファジィ線形計画法はこのように通常の線形計画の問題に置き換えた上で最適解を求めることとなる。

2) 三角型メンバーシップの設定と数値例解

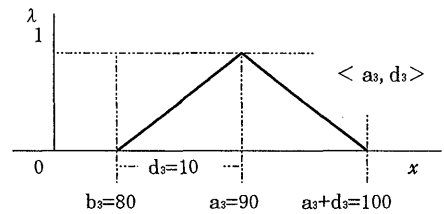
ここでは具体的に数値例解を得るために、先の数値例に三角型のメンバシップを設定し最適解を導出の上、相互に比較検討を試みることとする。

①需給量、総輸送費に関する三角型メンバシップ関数  
需要量については、基本形と同様に需要地1及び需要地3の必要量の中心値を、第7図、第8図のようにそれぞれ110、90単位とし、その曖昧な幅を共に10単位として設定する。

すなわち、第7図は需要地1の曖昧な制約条件を示すもので110単位の供給を受ければ100%の満足度を感じるが、110単位を中心に幅10単位以外の範囲であれば満足度はゼロで、許されない解の範囲となる。許容される範囲は110単位を中心とする幅10単位の100単位～120単位の範



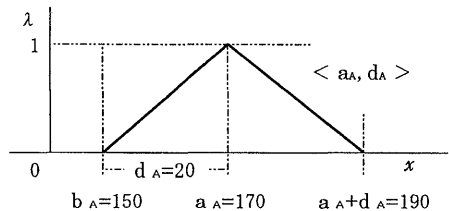
第7図 需要地1の需要量に関するメンバシップ関数



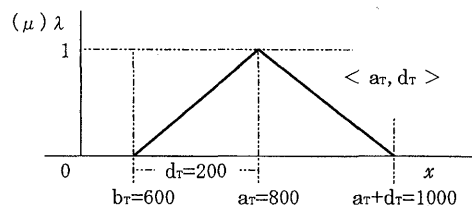
第8図 需要地3の需要量に関するメンバシップ関数

囲となる。同様に、需要地3においても、許容される範囲は90単位を中心とする幅10単位の80単位～100単位の範囲となる。

同じく供給量については、第9図のように設定する。すなわち、供給量が170単位であれば満足度は100%と感ずるが、150単位以下か、または180単位以上であるならば供給不可能となり、許されない範囲とする。150単位から190単位の範囲においては三角型のメンバシップ関数に従って満足度が与えられるものとなる。供給量は150単位から190単位の範囲において満足度が1と0の範囲内で決定されることとなる。



第9図 供給地Aの最大可能供給量のメンバシップ関数



第10図 総輸送費に関するメンバシップ関数

最後に、総輸送費は第10図のようにできれば800単位前後としたいが、200単位の許容幅を設けて下限は600単位から上限は1000単位までの範囲で設定することとする。総輸送費は800単位以下あるいは1000単位以上の範囲は満足度は0で許容範囲外とする。

### ② 三角型ファジィ輸送モデルの基本解

さて、以上のように第7図～第10図まで需要地1, 3の需要量、及び供給地Aの供給量、さらに総輸送費に三角型のメンバシップ関数をそれぞれ設定の上、通常の線形計画法に変換されたファジィ線形計画法に基づいて最適解を求めると第8表の結果が得られる。

すなわち、需要地1, 3の需要量はそれぞれ、102.92, 82.92単位で供給地Aは155.84単位を供給することとなる。総輸送量は全体で395.84単位で、その輸送費は941.68単位である。さらにこの時の三角型メンバシップ関数として設定された計画実現度は0.292である。満足度はほぼ30%程度ということになる。

第8表 三角型メンバシップ関数をもつファジィ線形計画法のシンプレックス法による最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	102.92	58.75	0.0	0.0	155.84
供給地B	0.0	0.0	82.92	31.25	120.0
供給地C	0.0	61.25	0.0	58.75	120.0
総需要量	102.92	120.0	82.92	90.0	395.84

注) 総輸送費は941.68,  $\lambda=0.292$

### 3) MODI法の反復による三角型メンバシップ関数を持つ輸送モデルの最適解

ここでは、具体的に「反復MODI法」によってファジィ輸送モデルの解を先の基本モデルに対して求めることとする。

まずステップ1でメンバシップ関数を $\lambda^{(1)}=0.5$ とする。かくして第7図からメンバシップ関数 $\lambda=0.5$ に対応する需要地1の需要量は105単位と115単位の2通りが得られる。この内同じ満足度であるなら総輸送費がより低いことを願って需要量はより小さい方が望ましくなる。すなわち、115単位よりも105単位の選択が望ましいこととなる。同様に、第8図からメンバシップ関数 $\lambda=0.5$ に対応する需要地3の需要量は85単位と95単位の2通りが得られるが、同様の理由により、85単位の方が選定されることとなる。

さらに供給地Aの供給量についても同様の考え方から、

より輸送費の極小化を図るために、160単位が選定されることとなる。よって、需要地1の最小限需要量は105, 需要地3の最小限需要量は85, さらに供給地Aの最大供給可能量は160となる。

かくしてこれを条件とするステップ1の解が通常のMODI法によって第9表のように得られる。

第9表 ステップ1のファジィ輸送モデルの解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	105.0	50.0	5.0	0.0	160.0
供給地B	0.0	0.0	80.0	40.0	120.0
供給地C	0.0	70.0	0.0	50.0	120.0
総需要量	105.0	120.0	85.0	90.0	400.0

注) 総輸送費は950.0,  $\lambda=0.5$ ,  $\mu=0.25$

この結果、総輸送費が950単位であることから、これを第10表の送輸送費の三角型のメンバシップ関数に対応させて、 $\mu=0.25$ を得る。すなわち、2ステップ目のメンバシップ関数値は第(11)式より、次のように $\lambda^{(2)}=0.375$ となる。

$$\lambda^{(2)} = (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) / 2 = 0.375$$

以下同様にして、メンバシップ関数値 $\lambda^{(3)}$ ,  $\mu^{(3)}$ ,  $\lambda^{(4)}$ ,  $\mu^{(4)}$ ..., を求め収束条件を満たして終了する。

収束過程は第10表の通りである。反復回数は8回で、収束条件 $\omega=10^{-5}$ で収束することを確認することができる。その最終収束解をまとめると第11表のようになる。

「反復MODI法」による最終収束解の内容は、先に求めている第8表のシンプレックス法に基づいて算出した最適解と全く同一である。

すなわち、従来のシンプレックス法に依ることなく、三角型メンバシップ関数をもつファジィ輸送モデルにおいても、MODI法の反復によって最適解を得ることができる。

第10表 反復MODI法による輸送モデルの三角型メンバシップ関数の $\lambda$ ,  $\mu$ の収束過程

反復回数	$\lambda$	最小限需要量		供給地Aの最大供給	総輸送費	総輸送量	目的関数の $\mu$
		需要1	需要3				
1	0.50000	105.00	85.00	160.00	950.00	400.00	0.25000
2	0.37500	103.75	83.75	157.50	945.00	397.50	0.27500
3	0.32500	103.25	83.25	156.50	943.00	396.50	0.28500
4	0.30500	103.05	83.05	156.14	942.20	396.14	0.28920
5	0.29700	102.97	82.97	155.94	941.88	395.94	0.29060
6	0.29380	102.94	82.94	155.88	941.72	395.88	0.29124
7	0.29252	102.93	82.93	155.85	941.70	395.85	0.29149
8	0.29201	102.92	82.92	155.84	941.68	395.84	0.29201

注) 反復回数は8回で、収束条件 $\omega=10^{-5}$ を満たす。

第11表 反復MODI法による三角型メンバシップ関数の最終収束解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供給地A	102.92	58.75	0.0	0.0	155.84
供給地B	0.0	0.0	82.92	37.08	120.0
供給地C	0.0	61.25	0.0	52.92	120.0
総需要量	102.92	120.0	82.92	90.0	395.84

注) 総輸送費は941.68,  $\lambda = \mu = 0.29201$

台形型メンバシップ関数をもつファジィ輸送モデルのMODI法による最適解

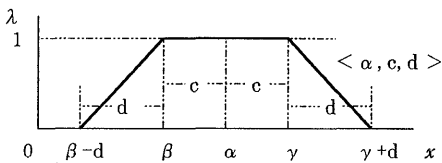
1) 台形型メンバシップ関数

台形型ファジィ数は、三角型ファジィ数と同様に「だいたい $\sim(\beta)$ から $\sim(\gamma)$ ぐらいにしたい」というパラメータ表示の可能性分布をファジィ集合のファジィ数として取り扱い、その曖昧さを台形型で表したものである。その台形型ファジィ数のパラメータ表示を次のように表す。

$$A = \langle \alpha, c, d \rangle \quad \dots\dots (16)$$

ここで、台形型ファジィ数Aは、第11図のように台形の中心を表す $\alpha$ とその幅 $c$ 、そしてその曖昧さの広がり $d$ によって表現される。したがって、 $\beta = \alpha - c$ 、 $\gamma = \alpha + c$ 、と表すことができる。この台形型ファジィ数の可能性分布は次のようにメンバシップ関数によって定義する。

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & : | \alpha - x | \leq c \\ 1 - \frac{| \alpha - x | - c}{d} & : c \leq | \alpha - x | \leq d + c \\ 0 & : x \leq \beta - d, \gamma + d \leq x \end{cases} \quad (17)$$



第11図 台形型メンバシップ関数ファジィ数

このような台形型ファジィ数の可能性分布をもつファジィ線形計画モデルは次のような非線形計画問題に変換することができる。

$$\text{maximize } h \quad \dots\dots (18)$$

$$\text{subject to } (\alpha - c - hd)x \geq 0 \quad \dots\dots (19)$$

$$x \geq 0, 0 < h \leq 1$$

すなわち、台形型のメンバシップ関数をもつファジィ線形計画法はこのように非線形の問題に置き換えた上で最適解を求めることとなる。

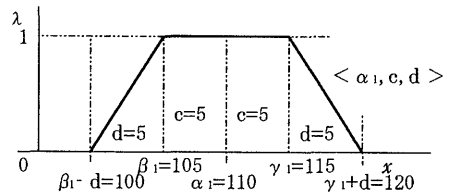
2) 台形型メンバシップ関数の設定

次に先と同じ数値例に対する具体的な解を得るために、台形型のメンバシップを設定上、最適解を比較検討する。

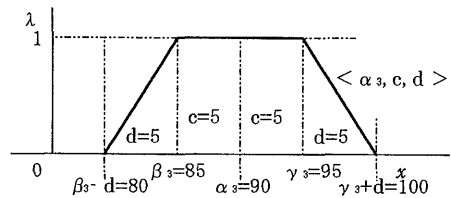
①需給量、総輸送費に関する台形型メンバシップ関数需要量については、これまでの数値例と同様に需要地1及び需要地3の必要量について設定する。需要地1のメンバシップ関数の中心値を110単位、さらに需要地3の中心値を90単位とし、幅及び曖昧さの広がりと共に5単位とする。

すなわち、第12図は需要地1の曖昧な制約条件を示すもので105単位～115単位の範囲の供給を受ければ100%の満足度を感じるが、100単位以下、または120単位以上になると満足度はゼロで、許されない解の範囲となる。許容される範囲は110単位を中心とする幅10単位の100単位～120単位の範囲となる。

さらに、需要地3についても、第13図に示されているように中心値が90単位で、許容される範囲は80単位～100単位の範囲となる。



第12図 需要地1の需要量に関するメンバシップ関数

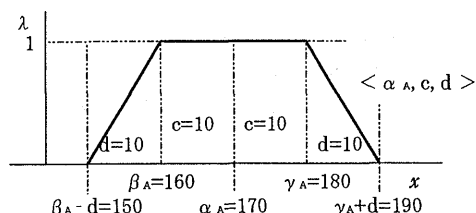


第13図 需要地3の需要量に関するメンバシップ関数

同じく供給量については、第14図のように中心値が170単位で、さらに幅及び曖昧さの広がりと共に10単位とする。すなわち、160単位～180単位の範囲の供給であれば100%の満足度を感じるが、150単位以下、または190単位以上になると満足度はゼロで、許されない解の範囲となる。許容される範囲は170単位を中心とする幅20単位の

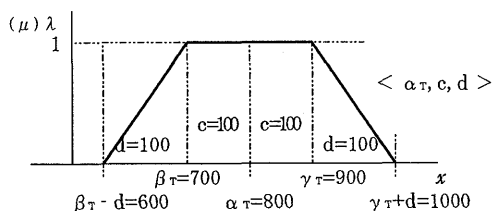


150単位～190単位の範囲となり、これ以外の領域では供給不可能となり許されない。最適解は満足度が1と0の範囲内で決定されるものとなる。



第14図 供給地Aの供給量に関するメンバシップ関数

最後に、総輸送費は第15図のように、できれば800単位前後としたいが、200単位の許容幅を設けて下限は600単位から上限は1000単位までの範囲で設定することとする。この範囲の設定は三角型のメンバシップ関数に似ているが、台形型では700単位～900単位の範囲においては満足度が100%に感じ、その範囲が幅として与えられるものがあり、三角型のメンバシップ関数とは異なる点である。



第15図 総輸送費に関するメンバシップ関数

## ②台形型ファジィ輸送モデルの基本解

さて、第12図～第15図までのように需要地1, 3の需要量、及び供給地Aの供給量、さらに総輸送費に台形型のメンバシップ関数を設定の上、通常の線形計画法に変換されたファジィ線形計画法に基づいて最適解を求めると第12表の結果が得られる。

すなわち、需要地1, 3の需要量はそれぞれ、102.92, 82.92単位で、供給地Aは155.83単位を供給することとなる。総輸送量は全体で395.83単位で、その輸送費は941.66単位である。ここまでは三角型のメンバシップ関数の場合と同様な結果であるが、台形型で設定されたメンバシップ関数の値が異なる。三角型メンバシップ関数の場合は計画実現度は0.25であったが、台形型では $\lambda = 0.5833$ となり、満足度はほぼ58%程度に高まることになる。

第12表 台形型メンバシップ関数のシンプレックス最適解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供地地A	102.92	52.92	0.0	0.0	155.83
供地地B	0.0	0.0	82.92	37.08	120.00
供地地C	0.0	67.08	0.0	52.92	120.00
総需要量	102.92	120.00	82.92	90.00	395.83

注) 総輸送費は941.66,  $\lambda = 0.5833$

## 3) MODI法の反復による台形型メンバシップ関数の輸送モデルの解法

ここでは、「反復MODI法」によって台形型ファジィ輸送モデルの解を求めてみることにする。

これまで同様にステップ1で台形型メンバシップ関数を $\lambda^{(1)} = 0.5$ としてスタートすることとする。かくして第12図～第14図のメンバシップ関数から需要地1の需要量は102.5, 需要地3の需要量は82.5, 供給地Aの最大供給可能量は155単位となる。よってこれを条件とする通常のMODI法による適用が可能となり、ステップ1の解は第13表のように得られる。

すなわち、需要地1, 3の需要量はそれぞれ、102.5, 82.5単位で供給地Aは155.0単位を供給することとなる。総輸送量は全体で395.0単位で、その輸送費は940.0単位である。さらにこの時の第12図～第14図の台形型メンバシップ関数の値は設定通り $\lambda = 0.5$ であるが、第15図のメンバシップ関数値は $\mu = 0.6$ となる。

第13表 ステップ1のファジィ輸送モデルの解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給
供地地A	102.5	52.5	0.0	0.0	155.0
供地地B	0.0	0.0	82.5	37.5	120.0
供地地C	0.0	67.5	0.0	52.5	120.0
総需要量	102.5	120.0	82.5	90.0	395.0

注) 総輸送費は940.0,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0.6$

このように、総輸送費は940.0単位となり、さらにこれに基づいて第15図からの目的関数のメンバシップ関数値は $\mu = 0.6$ を得ることができる。かくして、(11)式よりステップ2の制約式のメンバシップ関数値を $\lambda^{(2)}$ として0.55を得ることができる。

$$\lambda^{(2)} = (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) / 2 = 0.55$$

以下線形型、三角型メンバシップ関数の場合と同様にして、メンバシップ関数値 $\lambda^{(3)}$ ,  $\mu^{(3)}$ ,  $\lambda^{(4)}$ ,  $\mu^{(4)}$ ..., を

第14表 反復 MODI 法による輸送モデルの台形型メンバシップ関数  $\lambda$ ,  $\mu$  の収束過程

反復数	$\lambda$	最小限需要量		供給地 A の最大供給	総輸送費	総輸送量	目的関数の $\mu$
		需要1	需要3				
1	0.50000	102.50	82.50	155.00	940.00	395.00	0.60000
2	0.55000	102.75	82.75	155.50	941.00	395.50	0.59000
3	0.57000	102.85	82.85	155.70	941.40	395.70	0.58600
4	0.57800	102.89	82.89	155.78	941.56	395.78	0.58440
5	0.58120	102.91	82.91	155.81	941.62	395.81	0.58376
6	0.58248	102.91	82.91	155.82	941.65	395.82	0.58350
7	0.58299	102.91	82.91	155.83	941.65	395.83	0.58340
8	0.58319	102.92	82.92	155.83	941.66	395.83	0.58336
9	0.58327	102.92	82.92	155.83	941.66	395.83	0.58334
10	0.58331	102.92	82.92	155.83	941.67	395.83	0.58333

注) 反復回数は10回で、収束条件  $\omega=10^{-5}$  を満たす。

求め収束条件を満たして終了する。収束過程を整理すると第14表のようである。

反復回数は10回で収束し、その最終収束値は第15表のようになる。「反復 MODI 法」による最終収束解の内容は、先に求めている第12表のシンプレックス法で求めた最適解と全く同一であることを確認することができる。

第15表 反復 MODI 法による台形メンバシップ関数の最終収束解

	需要地1	需要地2	需要地3	需要地4	総供給量
供地地 A	102.92	52.92	0.0	0.0	155.83
供地地 B	0.0	0.0	82.92	37.08	120.0
供地地 C	0.0	67.08	0.0	52.92	120.0
総需要量	102.92	120.0	82.92	90.0	395.83

注) 総輸送費は941.667,  $\lambda=\mu=0.58333$

## ま と め

ファジィ線形計画法は通常の線形計画法と同様に有益であり、多くの経済分析、経営計画などに用いられている。ファジィ輸送モデルはファジィ線形計画法を基礎として、有益な規範分析法として研究されている。

ファジィ輸送モデルの最適解は、これまでシンプレックス法によって算出されてきた。しかし輸送モデルはマトリックスの規模が大きく、取り扱いが大変困難である。そこでわれわれは、従来からのシンプレックス法に代わって MODI 法の反復によって最適解を得る方法を提示した。MODI 法の10回程度の反復によって得られた最適解は、従来からのシンプレックス法によって得られた

最適解と全く一致することを確認することができた。

われわれは、ファジィ輸送モデルに、基本的なメンバシップ関数として線形メンバシップ関数を用いたが、そのほかに三角型、台形型のメンバシップ関数を持つ輸送モデルについても検討した。

反復 MODI 法は、輸送モデルをファジィ計画モデルに組み上げる必要がないこと、さらにマトリックスの規模が小さくなり、取り扱いが容易であるなどのメリットがある。

この方法によれば、取り扱う行列の規模を最小限に止めることができるというメリットの外に、さらにメンバシップ関数を相互に独立させていることから、目的関数と制約条件式のメンバシップ関数が、輸送計画に関わる意志決定主体によって異なる場合に、相互にメンバシップ関数の調整が容易になるなどのメリットが認められるものとなる。

反復 MODI 法によって輸送モデルの有用性が一層高まるものと思われる。

## 文 献

- 1) Bellmann, R. E. and Zadeh, L. A. : Decision Making in a Fuzzy Environment. Management Sci., 17: 141-164 (1970)
- 2) 笠原浩三, 小林一, 仙北谷康: ファジィ輸送モデルにおけるメンバシップ関数の設定効果. 「農業経済研究」別冊, 1997年日本農業経済学会論文集: 7-12 (1997)
- 3) 笠原浩三, 古塚秀夫, 万里: ファジィ輸送モデルの特性とメンバシップ関数の相互関係. 農林業問題研究, 23 (1): 1-6 (2001)
- 4) 笠原浩三, 仙北谷康, 小林一, 古塚秀夫: ファジィ輸送モデルの仮想地設定による鶏卵輸送について. 農林業問題研究別冊, 6: 1-6 (1997)
- 5) 笠原浩三: 農業と関連産業の立地, 明文書房, 東京, (1982), pp.12-18
- 6) 乾口雄弘: 講座ファジ6 - ファジィ OR - 日本ファジィ学会編. 日刊工業新聞社, 東京, (1993), pp.42-90
- 7) 工藤, 西村, 高山, 久保共著: 近代農業経済学, 明文堂, 東京, (1963), pp.332-348
- 8) 坂和正敏: ファジィ理論の基礎と応用, 森北出版, 東京, (1990), pp. 110 -114
- 9) Zadeh, L.A. : Fuzzy Set as a Basis for a Theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1: 3-28 (1978)
- 10) Zimmermann, H. J. : Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Function. Fuzzy Sets and Systems, 1: 44-55 (1978).