

最大値設定による修正指数曲線の推計

笠原浩三*・仙北谷康*・今井鑑蔵**

平成7年6月23日受付

Estimation of the Modified Exponential Curve under Given Maximum Value

Kozo KASAHARA*, Yasushi SEMBOKUYA* and Raizo IMAI**

The modified exponential curve and the gompertz curve have several useful properties. In the first place, these functions limit the maximum or minimum value. In the second place, these functions are the simple decreasing or increasing function. We use sometimes these functions for the trend variation of the time series analysis. But, the maximum or minimum value is given from estimated functions. Sometimes, we have known the maximum or minimum value before estimation. So, we need to estimate those functions after giving the maximum or minimum value.

In this paper, we attempt to remodify the modified exponential curve and the gompertz curve after giving the maximum or minimum value. Furthermore, we modified the t-distribution curve by using the conditional modified exponential curve. The modified t-distribution table will be adjusted for a test of a statistical hypothesis. The adjusted t-distribution table allows us to estimate directly the significance level with the bias of the unbiased variance.

緒 論

修正指数曲線 (Modified Exponential Curve) は通常の指数曲線に最大値または最小値を有する関数で、適用に当たっては単調増加関数か、または単調減少関数の場合に限られるという制約は伴うもののいくつかの優れた

特徴を持ち傾向線などの推計には極めて有効である。時系列解析における傾向変動の抽出にはよく使用される関数である。

しかしながら問題点も無くはない。すなわち、修正指数曲線の持つ特徴の1つに最大値または最小値を持つことが挙げられるが、その最大値または最小値は結果的に

* 鳥取大学農学部農林総合科学科情報科学講座

* *Department of Agricultural Information Science, Faculty of Agricultural, Tottori University*

** 徳島文理大学家政学部環境情報学科

** *Department of Life, Environment and Information, Faculty of Domestic Science, Tokushima Bunri University*

得られる値である。時にはその理論値が計測する以前に知られている場合がある。計測結果が理論値と一致する場合には問題はないが、通常では一致しないのが普通である。したがって最大値または最小値が予め計測前に理論的に明確になっている場合には、その値を与えられた条件として他のパラメータを計測する方が優れていることは指摘するまでもないであろう。

本稿では、最大値または最小値が理論的に明らかになっている場合の修正指数曲線の推計に際して、その最大値または最小値を予め設定した上で推計する方法を検討するものである。

修正指数曲線とその諸性質

修正指数曲線は最大値または最小値を持つことが特徴であり、その一般形は次のように表される^{1,3)}。

$$Y = K - a \cdot b^x, \quad (0 < b < 1) \quad \dots\dots(1)$$

ただし、 Y 、 x はそれぞれ従属変数、独立変数であり、 k 、 a 、 b は推計すべきパラメータである。とくにパラメータ k は関数が収束する極限の最大値または最小値を示す。

いま、 Y を x で微分すると、

$$dY/dX = -a \cdot b^x \cdot \text{Ln } b$$

となる。ここで $0 < b < 1$ であるから $0 < b^x < 1$ 、 $\text{Ln } b < 0$ となり、 a のとる値によって次のようになる。

$a > 0$ なら $(dY/dX) > 0$ となり、関数 Y は増加、

$a < 0$ なら $(dY/dX) < 0$ となり、関数 Y は減少する。

さらにこれをもう一度 X について微分すると、

$$d^2Y/dX^2 = -a \cdot b^x \cdot (\text{Ln } b)^2$$

となる。ここで $0 < b < 1$ であるから $0 < b^x < 1$ 、 $(\text{Ln } b)^2 > 0$ となり、よって二次導関数 (d^2Y/dX^2) は a のとる値によって次のようになる。

$a > 0$ なら $(d^2Y/dX^2) < 0$ となり、関数 Y は逓減し、

$a < 0$ なら $(d^2Y/dX^2) > 0$ となり、関数 Y は逓増する。

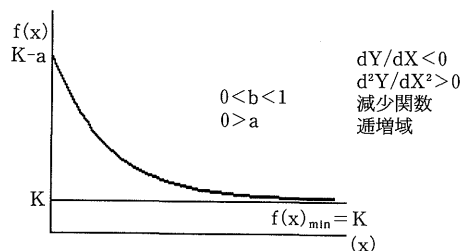
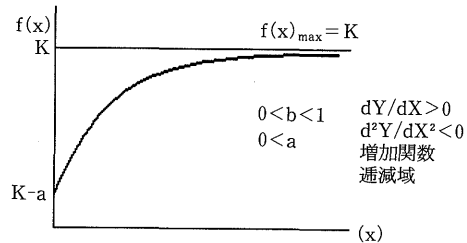
すなわち修正指数曲線は第1図に示すように、

① $a > 0$ の時は $X = 0$ で極小値 $K - a$ をとり、最大値 K を漸近線とする増加関数となる。

② $a < 0$ の時は $X = 0$ で極大値 $K - a$ をとり、最小値 K を漸近線とする減少関数となる。

このように修正指数曲線は最大値または最小値を持つ増加関数または減少関数となる特色のある曲線である。

また、修正指数曲線の性質に似た関数として次のようなゴンベルツ曲線 (Gompertz curve) がある。



第1図 修正指数曲線 $f(x) = k - a \cdot b^x$

$$Y = c \cdot (a \cdot b)^x, \quad (0 < b < 1) \quad \dots\dots(2)$$

いまこの式の両辺を対数変換すると次のように変形できる。

$$\text{Ln } Y = \text{Ln } c - a \cdot b^x, \quad \dots\dots(3)$$

これは第(1)式の変数 Y を対数変換することによって得られるものである。曲線の性質は修正指数曲線とほとんど同様であるが、変数変換を施すことから相対的により大きな値に対しては縮小率がより大きくなるために推計結果に若干の相違を見出すことができる。

以下にこれらの推計式を具体的に計測することによってその諸特徴を確認することにして、第1表はそのためにより作成した乱数によるデータである⁷⁾。

いま第1表のデータに基づいて修正指数曲線およびゴンベルツ曲線を推計すると次のようになる。

$$Y = 102.445 - 94.3562 \cdot (0.89258)^x$$

$$R^2 = 0.72185$$

$$\text{Ln } Y = 4.5878 - 1.8543 \cdot (0.84351)^x$$

$$R^{2'} = 0.73050$$

この推計結果によるとパラメータ a は正であることから共に増加関数であり、さらに最大値 Y_{\max} については修正指数曲線が $Y_{\max} = 102.445$ となり、ゴンベルツ曲線に

第1表 乱数によるモデルデータ

乱数 データ			乱数 データ		
X _i	R	Y	X _i	R	Y
1	6	8	16	61	86
2	91	55	17	27	71
3	20	24	18	48	84
4	82	59	19	73	98
5	1	23	20	42	85
6	41	46	21	79	105
7	53	56	22	48	91
8	25	46	23	0	69
9	32	52	24	22	81
10	38	59	25	92	118
11	94	90	26	70	108
12	37	64	27	59	104
13	93	95	28	47	99
14	26	64	29	58	106
15	86	96	30	7	82

注1) 乱数は $0 \leq R < 100$ の一様乱数。

2) データ Y は次の式より算出し、小数点以下は切り捨て。

$$Y = 100.0 - 95.0 \cdot (0.95)^{X_i} + R / 2$$

ついては $\text{Ln} Y_{\max} = 4.5878$ (真数値: $Y_{\max} = 98.277$) となることを確かめることができる。

これらの推計結果を図示したものが第2図である。これによると両推計結果には大きな違いはなく、決定係数もそれぞれ $R^2 = 0.72185$, $R'^2 = 0.73050$ で大差は認められない。しかし、推計値のレンジについてみると、修正指数曲線ではゴンベルツ曲線よりやや小さめの値から始まり、後半はやや大きめの値で終わる傾向を確認することができる。

最大値(最小値)設定による修正指数曲線の推計

前述のように通常の手順により修正指数曲線、ゴンベルツ曲線を推計することができる。しかし推計手順としては、先にパラメータ b を推計した後に最大値または最小値 K を推計することとなる。通常はその手順で問題はないのであるが、時には推計する前に最大値または最小値 K の値が理論的に明確になっている場合がある。そのような場合には K が既知数であるから次の式により b を推計することとなる。

$$b = \{(K \cdot L - S_2) / (K \cdot L - S_1)\}^{1/L} \quad \dots\dots(4)$$

ただし、 $L = [n/3]$ であり、 $S_i = \sum_{(i-1) \cdot L + j} Y_j$ ($i=1, 2, j=1, 2, \dots, L$) である。さらにパラメータ a は次の式による。

$$a = (S_1 - S_2) \cdot (1 - b) / (B - 1)^2 \quad \dots\dots(5)$$

ただし、 $B = b^L$ である。また同様にして、ゴンベルツ曲線についても次のように推計することができる。

$$b'_i = \{(K' \cdot L - S'_2) / (K' \cdot L - S'_1)\}^{1/L} \quad \dots\dots(4')$$

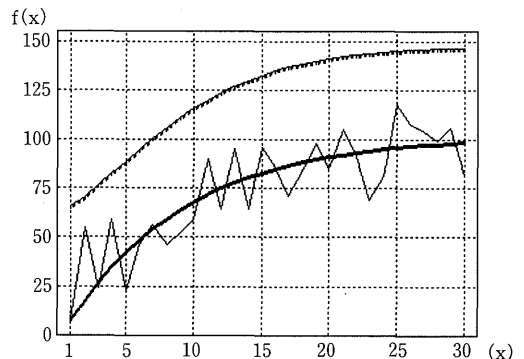
ただし、 K' は対数表示による最大値または最小値であり、 $S'_i = \sum_{(i-1) \cdot L + j} \text{Ln} Y_j$ である。

さらにパラメータ a' は次の式によって得られる。

$$a' = (S'_1 - S'_2) \cdot (1 - b') / (B' - 1)^2 \quad \dots\dots(5')$$

このような方法によって推計する修正指数曲線またはゴンベルツ曲線をここではそれぞれ条件付修正指数曲線、条件付ゴンベルツ曲線と称することとする。先の推計例に最大値 $K = 100$, $K' = 4.60517$ を与えて、条件付修正指数曲線 Y^* , 条件付ゴンベルツ曲線 $\text{Ln} Y^*$ を求めると次のようになる。

$$Y^* = 100.00 \cdot 93.5807 \cdot (0.88416)^x$$



— Source Data
 — Y : Modified Exponential Curve
 Ln Y : Gompertz Curve

$$Y = 102.445 - 94.356 \cdot (.89258)^x, R^2 = .72185$$

$$\text{Ln} Y = 4.5878 - 1.8543 \cdot (.84351)^x, R^2 = .73050$$

第2図 修正指数曲線とゴンベルツ曲線
 注) ゴンベルツ曲線(Ln Y)は縦軸方向に+50平行移動している。

第2表 各種推計式による推計結果

n	X_t	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
1	0	8.0	8.089	6.419	15.386	15.844	22.901	23.621
2	1	55.0	18.225	17.259	20.567	20.889	28.376	28.798
3	2	24.0	27.271	26.844	26.270	26.423	33.643	33.820
4	3	59.0	35.346	35.318	32.295	32.263	38.702	38.684
5	4	23.0	42.554	42.811	38.438	38.232	43.553	43.385
10	9	59.0	68.513	69.099	65.821	65.280	64.686	64.310
15	14	96.0	83.221	83.303	82.816	82.764	80.619	80.575
20	19	85.0	91.554	90.978	91.351	91.951	91.351	91.688
25	24	118.0	96.275	95.125	95.258	96.346	96.881	97.158
26	25	108.0	96.937	95.690	95.724	96.886	97.363	97.531
27	26	104.0	97.529	96.189	96.120	97.347	97.637	97.655
28	27	99.0	98.057	96.631	96.454	97.741	97.703	97.526
29	28	106.0	98.529	97.021	96.737	98.076	97.561	97.139
30	29	82.0	98.949	97.366	96.977	98.363	97.211	96.492

注) 各推計値はそれぞれ次の式による。ただし、 Y_0 は原データである。

$$Y_1 = 102.445 - 94.356 \cdot 0.89258^x, R^2 = 0.72185$$

$$Y_2 = 100.0 - 93.580 \cdot 0.88416^x, R^2 = 0.71587$$

$$\text{Ln}Y_3 = 4.5878 - 1.8543 \cdot 0.84351^x, R^2 = 0.73050$$

$$\text{Ln}Y_4 = 4.6052 - 1.84238 \cdot 0.84995^x, R^2 = 0.73289$$

$$Y_5 = 17.210 + 57.870X - 10.4019X^2, R^2 = 0.73667$$

$$Y_6 = 18.290 + 54.023X + 7.35052X^2 - 0.65621X^3, R^2 = 0.73682$$

$$R^2 = 0.71587$$

$$\text{Ln} Y^* = 4.60517^* - 1.8423 \cdot (0.84995)^x$$

$$R^{2*} = 0.73288$$

および3次曲線との推計結果を比較整理すると第2表のようになる。

最大値設定による推計結果への影響

ただし、*印は条件付推計式を表し、右辺の*印を付した数値は設定した条件値を示すものである（以下同様である）。これらの推計結果によると、条件付修正指数曲線では先の通常の方法による修正指数曲線の説明力よりやや低下し、 $R^2 = 0.71587$ となっている。逆に条件付ゴンペルツ曲線では説明力をやや上昇させていることが確認できる。この結果からも分かるように、最大値または最小値を設定の上で推計した修正指数曲線、ゴンペルツ曲線は通常の方法による推計結果の説明力をいつでも低下させるものではないことである。

それは、通常の修正指数曲線、ゴンペルツ曲線では残差の2乗和を最小にすることを条件にパラメータを求めるものではないからである。したがって、予め最大値または最小値を設定の上で推計した条件付修正指数曲線、ゴンペルツ曲線の方が説明力が高いことになれば、理論的にも推計技術的にも優れたものになるといえる。

またこれらの諸推計結果と最小2乗法による2次曲線

1) 最大値（最小値）設定による適合性への影響

修正指数曲線において最大値または最小値Kの値は許容される範囲で自由に与えることができるが、その設定値の如何によって他のパラメータおよび決定係数の値は異なってくる。第3表は先の乱数を利用して作成したデータを用いて最大値Kの値の設定如何によって影響を受ける決定係数の値を整理したものである。

推計式は次の式によるものである。

$$Y^* = K^* - 103.92 \cdot (0.92557)^x$$

これによると、最大値Kを90~130まで変化させるとそれに伴って決定係数 R^2 は0.66164から次第に大きくなり、 $K = 118$ のとき $R^2 = 0.73321$ で最大となる。以下次第に減少していることを確認することができる。

また、 $K = 100$ では決定係数 R^2 は0.715878となり、最大値よりやや低下することになる。もし説明力を高めることが最優先されるなら $K = 118$ を指定することとなる。

第3表 最大値と決定係数の関係

最大値	決定係数	最大値	決定係数
K	R ²	K	R ²
91	0.66164	111	0.73161
92	0.67199	112	0.73207
93	0.68077	113	0.73243
94	0.68827	114	0.73272
95	0.69470	115	0.73293
96	0.70024	116	0.73308
97	0.70503	117	0.73317
98	0.70917	118	0.73321
99	0.71276	119	0.73320
100	0.71587	120	0.73315
101	0.71857	121	0.73307
102	0.72091	122	0.73295
103	0.72293	123	0.73280
104	0.72469	124	0.73263
105	0.72620	125	0.73243
106	0.72750	126	0.73222
107	0.72862	127	0.73198
108	0.72957	128	0.73173
109	0.73037	129	0.73146
110	0.73105	130	0.73118

注) 推計式は次の条件付修正指数曲線。
 $Y^* = K^* - 103.92 \cdot (.92557)^x$

いま $K = 118$ で条件付修正指数曲線および条件付ゴンベルツ曲線の他のパラメータを求め曲線を確定すると次のようになる。

$$Y^* = 118.0^* - 103.92 \cdot (.92557)^x$$

$$R^2 = 0.7332142$$

$$\text{Ln } Y^* = 4.7706^* - 1.8402 \cdot (.89010)^x$$

$$R^{2'} = 0.7313169$$

2) パラメータ変更による決定係数への影響

最大値または最小値を外生的に設定することによって推計結果に少なからずの影響を与えることをみたが、関数形は設定された最大値 K の他にパラメータ a , b の値によって確定する。 a , b の値は第(4)式, (5)式によって与えられるが、いまパラメータ b の値を決定係数が最大になるように外生的に与えることも可能である。

第4表はこのようにして、最大値 K の値を一定値に固定した上でパラメータ b を $0.90 \sim 0.95$ の範囲において変

第4表 パラメータ変更による決定係数への影響
($k = 100$ に固定した場合)

n	a	b*	R ²
1	80.786	0.90	0.726179
2	72.707	0.91	0.730473
3	64.628	0.92	0.732817
4-1	61.391	0.924	0.7331703
4-2	60.589	0.925	0.7332045
4-3-1	59.862	0.9259	0.7332165
4-3-2	59.781	0.9260	0.73321684
4-3-3-1	59.741	0.92605	0.733216845
4-3-3-2	59.733	0.92606	0.733216846
4-3-3-3	59.725	0.92607	0.733216844
4-3-4	59.700	0.9261	0.73321684
4-3-5	59.620	0.9262	0.7332166
4-4	58.973	0.927	0.7332070
4-5	58.166	0.928	0.7331750
5	56.550	0.93	0.733044
6	48.471	0.94	0.731021
7	40.393	0.95	0.726665

注) 計測式は次の条件付修正指数曲線による。

$$Y^{**} = 100.0^* - a \cdot (b^*)^x$$

第5表 パラメータ変更による決定係数への影響
($k = 118$ に固定した場合)

n	a	b	R ² = 0.733
1	104.02	0.9255	$\times (1/1000)$
2	103.88	0.9256	+0.21342
3	103.74	0.9257	+0.21453
5	103.60	0.9258	+0.21543
6	103.60	0.9258	+0.21611
6	103.46	0.9259	+0.216572
7	103.32	0.9260	+0.216810
8	103.18	0.9261	+0.2168265
9	103.04	0.9262	+0.2166223
10	102.90	0.9263	+0.216197
11	102.76	0.9264	+0.215551
12	102.62	0.9265	+0.21468
13	102.48	0.9266	+0.21359
14	102.34	0.9267	+0.21228
15	102.20	0.9268	+0.21075

注) 計測式は次の条件付修正指数曲線による。

$$Y^{**} = 118.0^* - a \cdot (b^*)^x$$

化させたものである。その結果、決定係数は $R^2=0.733216846$ で最大を示し、推計関数式 Y^{**} は次のようになる。

$$Y^{**}=100.00* - 104.185 \cdot (0.92606*)^x$$

$$R^2=0.733216846$$

ただし、*印が2個付してあるのは設定された条件が2個あることを示すものであり、右辺の2個の数値に*印が付してあるのがその設定された条件値を示すものである。関数式全体の説明力を表す決定係数でみる限り先の推計結果をやや改善することが認められる。

同様に、第3表で決定係数が最大値を示す $K=118$ の値に固定した上で b の値を変化させてみると第5表のようになる。ここではパラメータ b を $0.9255 \sim 0.9268$ の範囲において変化させ、決定係数が最大になる関数形を模索したものである。その結果関数形は同様に次のように確定できた。関数式全体の説明力も改善されるものとなっている。

$$Y^{**}=118.00* - 104.20 \cdot (0.9261*)^x$$

$$R^2=0.7332168265$$

その結果を図示したものが第3図である。同図には通常の修正指数曲線による推計式も比較のため図示してい

る。両推計結果を比較すると、条件付修正指数曲線はやや緩やかなカーブを描き、およそ $x < 5$ あるいは $16 < x$ の範囲において、通常の修正指数曲線による推計値を下回り、逆に $5 < x < 16$ の範囲では上回るものとなっている。

小標本における不偏分散値の偏りの推計

1) 小標本における不偏分散値の偏り

ここでは統計的仮説検定を行う場合のt-分布について考察することにする⁹⁾。ある無限母集団から抽出された n 個の標本集団において、その標本集団の分散値は母集団の分散値と通常は一致せず、母分散の不偏推定量として平均値からの偏差の2乗和を n で割らずに $(n-1)$ で割る次式を用いている。

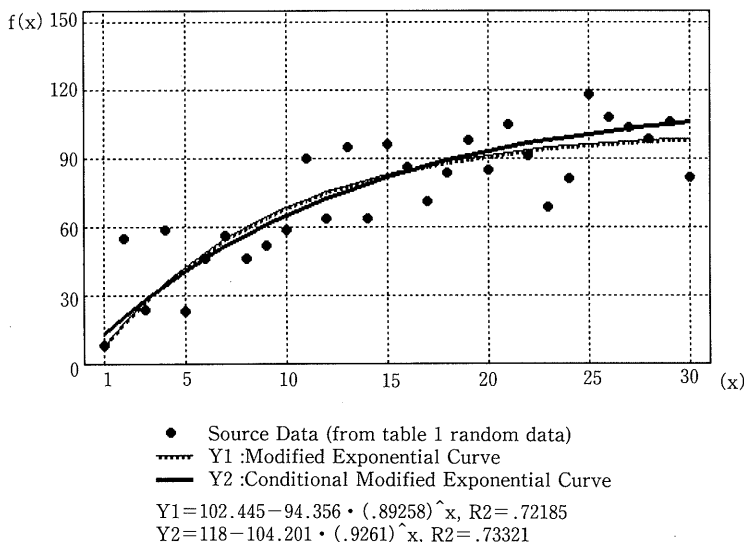
$$u^2 = \Sigma(x_i - m)^2 / (n - 1) \quad \dots\dots(6)$$

これは偏差の2乗和を n で割ることによるやや小さめの値を修正するためであるが、その根底には無限回の反復試行によって不偏分散値が母分散 σ^2 に一致することが理論的に証明されるからに他ならない。しかし現実には得られるデータはそれほど回数多く抽出可能なものでもなければ、抽出標本数もそれほど多くなく、小標本に限られることである。したがって抽出標本数が少なく、しかも抽出回数が有限回、場合によっては1度限りということもあり得ることであり、このような場合には不偏分散値が母分散値に一致するということはなんら保証されることにはならないのである^{2,4,5)}。

実際に小標本において母分散と標本分散の関係をモンテカルロ実験によって検証した結果によると²⁾、小標本であればあるほど不偏分散と母分散との乖離の傾向が強くなる。そのような場合には抽出標本数に応じて偏り補正が必要になるであろう。

2) 不偏分散の偏り関数

我々は先の研究において、小標本における不偏分散の偏り補正式を提示している²⁾。それは100個の有限母集団から抽出された n 個の小標本に対して推計された不偏分散推定量2000回分の平均値をデー



第3図 条件付修正指数曲線

第6表 不偏分散補正式における係数bの変更に伴う決定係数への影響
(k=100に固定した場合)

n	a	b	R ² =0.063 ×(1/1000)
1	-22.115	0.9725	+0.9027
2	-21.713	0.9729	+0.9150
3	-21.472	0.9733	+0.9192
4	-21.391	0.9734	+0.9200
5	-21.311	0.9735	+0.9206
6	-21.231	0.9736	+0.9209
6-1	-21.198	0.97364	+0.92095
6-2	-21.190	0.97365	+0.920962
6-3	-21.182	0.97366	+0.920963
6-4	-21.174	0.97367	+0.920961
6-5	-21.166	0.97368	+0.92095
7	-21.150	0.9737	+0.9209
8	-21.070	0.9738	+0.9206
9	-20.989	0.9739	+0.9201
10	-20.909	0.9740	+0.9193
11	-20.748	0.9742	+0.9169
12	-20.507	0.9745	+0.9113

タとするもので、偏り補正式は次のようである。ただし ()内はt-検定値である。

$$f(n) = 114.6073 - 0.3066n + 0.0017n^2$$

(0.5975) (0.3492)

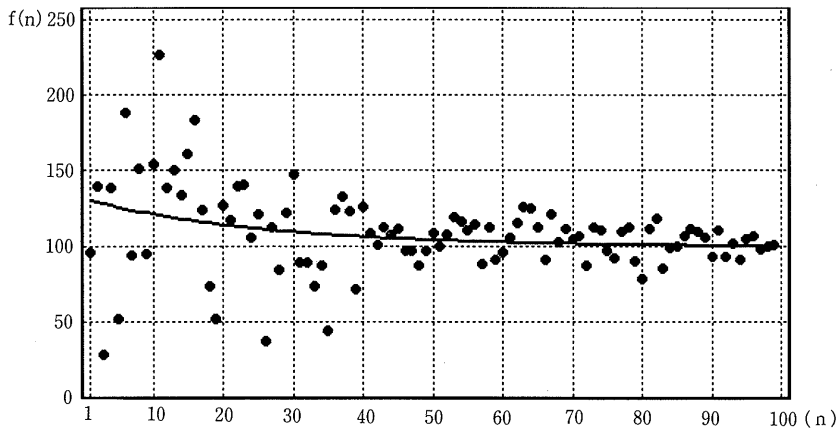
すなわちここでは2次関数式の適用を試みたわけであるが、この場合不偏分散推定量には1つの理論的特徴が存在している。100個の有限母集団から抽出されるn個の標本の分散値はn=100の場合には母分散に一致するのである。すなわち偏りはn=100の時ゼロになるのである。したがって偏り補正式もn=100において補正値がゼロになっていることが望ましいこととなる。このような場合は、まさに本稿において検討してきたように、最大値または最小値を取束値を持つ修正指数曲線の適用が好ましいものとなる。しかも最大値または最小値が既知の場合には条件付修正指数曲線が最も好ましいものとなるであろう。

かくして通常の修正指数曲線Yおよび条件付修正指数曲線Y*を適用して偏り補正式の推計を試みると結果は次の通りである。

注) 計測式は次の条件付修正指数曲線による。
Y**=100.0^{*}- a · (b^{*})^x

$$Y = 101.53 + 31.439 \cdot (0.95311)^x$$

R²=0.05880



● Source Data (from Monte Carlo Experiment)
— Y* :Conditional Modified Exponential Curve
(Y :Modified Exponential Curve)

$$Y = 101.536 + 31.439 \cdot (.95311)^n, R^2 = .05880$$

$$Y^* = 100 + 30.933 \cdot (.96153)^n, R^2 = .06203$$

第4図 小標本における不偏分散推定量の補正関数

$$Y^* = 100.00 * + 30.933 \cdot (0.96153)^x$$

$$R^2 = 0.06203$$

この場合結果的ではあるが、条件付修正指数曲線の方が決定係数がやや大きく、関数全体の適合性を改善するようである。さらに条件付修正指数曲線による推計結果を図示したものが第4図である。

かくして抽出数 $n = 100$ において理論的偏りがゼロとなる（推計式では $f(n) = 100$ となる）当不偏分散値の偏り補正式の場合には、2次式よりも修正指数曲線の方が理論的に優れており、さらに条件付修正指数曲線がそれらに勝ることとなる。

また、 $k = 100$ という条件下で関数全体の適合性を最も高くするために係数 b を変化させると第6表のようになる。これによると $b = 0.9736$ において決定係数 R^2 が最大となる。その時の推計式は次の通りである。

$$Y^{**} = 100.00 * + 21.182 \cdot (0.97366)^x$$

$$R^2 = 0.063920963$$

推計結果は決定係数を一層高めるものとなっている。

3) 不偏分散の偏りによる修正 t 分布表

いま不偏分散推定量の偏り率を λ とし、偏りを含む不偏分散推定量を u^{2*} とすると、 $u^{2*} = \lambda \cdot u^2$ となり、一般の t-統計量は次のように表される。

$$t^* = \{(x_i - m) / (u^2 / n)^{1/2}\} \cdot (1 / \lambda^{1/2})$$

すなわち、通常の t-統計量を $(1 / \lambda^{1/2})$ 倍する必要がある。

また、自由度を n とすると、t-分布の密度関数 $f(n)$ は次の式で与えられる⁴⁾。

$$f(n) = \frac{[\Gamma(n+1)/2] / \{(n\pi)^{1/2} \Gamma(n/2)\}}{(1+t^2/n)^{-(n+1)/2}} \dots\dots(7)$$

ここで Γ はガンマ関数を表す。小標本において不偏分散値に偏りがなければ、各自由度 n に応じた第(7)式の密度関数が利用されることになるが、小標本の不偏分散に先述のような偏り、すなわち次式に示される偏りを想定するならば λ の分だけ補正する必要がある。

$$100 \cdot \lambda = 100.00 + 30.933 \cdot (0.96153)^n$$

その結果通常の t-分布表に代わって小標本における不偏分散値の偏りを含んだ修正 t-分布表、第7表が得られる。

これは、母分散の代わりに通常の不偏分散値 u^2 をそのまま使用して t-検定を行うためのものである。すなわち、不偏分散値の偏りの分を予め t-分布表の方に $\lambda^{1/2}$ 倍修正を施

第7表 統計的仮説検定のための修正 t 分布表

n	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	2.76247	7.22463	14.5389	29.1236	72.8401	145.687
2	1.82658	3.32602	4.90098	7.06813	11.3048	16.0480
3	1.61325	2.66879	3.60900	4.73621	6.62366	8.45215
4	1.51803	2.40713	3.13498	3.94684	5.19873	6.32055
5	1.46281	2.26578	2.89053	3.55711	4.53393	5.36738
6	1.42600	2.17624	2.74035	3.32473	4.15202	4.83450
7	1.39924	2.11352	2.63783	3.16950	3.90387	4.49489
8	1.37838	2.06652	2.56272	3.05782	3.72895	4.25917
9	1.36159	2.02970	2.50483	2.97297	3.59835	4.08543
10	1.34748	1.99977	2.45831	2.90592	3.49675	3.95143
11	1.33537	1.97464	2.42005	2.85118	3.41490	3.84460
12	1.32479	1.95316	2.38767	2.80541	3.34731	3.75706
13	1.31528	1.93441	2.35987	2.76644	3.29043	3.68389
14	1.30682	1.91792	2.33552	2.73276	3.24151	3.62143
15	1.29918	1.90312	2.31404	2.70313	3.19905	3.56740

注1) 数値は $\Pr \{ |t| \geq t_0 \} \rightarrow t_0$ を与える。

2) 標本数 n に応じて次の条件付修正指数曲線で不偏分散値を修正。

$$Y^* = 100.0 * + 30.933 \cdot (0.96153)^n$$

したものである。本表を利用することによって、小標本における不偏分散の偏りを意識することなく、従来の手順と全く同じ要領でt-検定を行うことができることになる。

要 約

修正指数曲線は最大値または最小値を持つ特徴のある関数形であり、その有用性も高い。しかし従来の方法では、その最大値または最小値は関数形の推計後に結果として得られるものである。時には推計前に理論的な最大値または最小値が明確に知られている場合がある。そのような場合には予め最大値または最小値に関する理論値を設定の上で、他のパラメータを推計することが望ましいこととなる。

本稿では、修正指数曲線またはゴンベルツ曲線の推計において、予め最大値または最小値を設定した後に関数式を推計する方法を検討したものである。

①通常の推計方法による修正指数曲線またはゴンベルツ曲線の推計結果に基づいて、改めて最大値または最小値を設定の上、条件付修正指数曲線または条件付ゴンベルツ曲線の推計方法を提示した。

②条件付修正指数曲線または条件付ゴンベルツ曲線は通常の推計方法による関数全体の適合性を低下させることもあるが、他のパラメータの変更によって決定係数を高めることが可能であることを確認した。

③次いで、我々が提示した条件付修正指数曲線の推計方法によって、小標本における不偏分散統計量の偏りを表す関数式を計測した。

④最後に、条件付修正指数曲線によって計測された不偏分散値の偏り関数を用いて修正t-分布表を作成した。これによって、不偏分散の小標本偏りを意識せずに、従来と全く同じ手順でt-検定が可能になる。

参考文献

- 1) 石南国：統計学教科書。創世社、東京(1977) pp.137-141
- 2) 笠原浩三・今井鑄蔵：不偏分散の小標本特性に関する研究。鳥大農研報, 45 135-143, (1992)
- 3) 岸根卓郎：理論・応用統計学。養賢堂、東京(1978) pp.178-181
- 4) 北川敏男・稲葉三男共著：統計学通論。共立出版、東京(1985) pp.113-122
- 5) 北川敏男：統計情報論 I。共立出版、東京(1987) pp. 204-236
- 6) 奥野忠一・久米均・芳賀敏郎・吉澤正：多変量解析法。日科技連、東京(1977) pp.70-78
- 7) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学。共立出版、東京(1983) pp.24-26, pp.217-222