鳥大農研報 (Bull. Fac. Agric., Tottori Univ.) 47 115～123 (1994)

コブ＝ダグラス需要関数における弾力性の趨勢効果について

笠原浩三*・金山紀久*・今井鐳蔵**

On the Trend Effect of Elasticities in the Cobb＝Douglas Demand Function

Kozo Kasahara*, Toshihisa Kanayama* and Raizo Imai**

In this paper, we attempt to modify the Cobb＝Douglas demand functions. The Cobb＝Douglas function has several surpass properties. One of these properties is the possibility of changing from the nonlinear function to the linear function. In the second place, the regression coefficients indicate directly an income elasticity or a price elasticity. Thirdly, the elasticities are constant during the observation term. These properties are very profitable for the estimation of the elasticities. But during the long term, we must recognize the changing of the demand construction. Thus, we need to modify the Cobb＝Douglas demand function from the constant elasticity to changeable elasticity, according to the time trend. The foundational by modified demand function is follows:

$LnQ = b_0 + (\alpha_1 + \beta_1 t^u + \gamma_1 D)\ LnY + (\alpha_2 + \beta_2 t^v + \gamma_2 D)\ LnP$

In this model, paramerters α, β, γ denote the trend effect of elasticites. Also, we can estimate these paramerters by using of a normal regression estimation method.

緒　　言

わが国経済は高度経済成長，安定経済成長，さらには昨今のような経済不況期と様々な経済構造の局面を迎えてきたが，それぞれの局面において消費者の消費行動には異なった対応変化が生じているものと考えられる。一般に価格や所得の変化に対応して消費量を変化させることを消費構造の変化として捉えられるが，これを数量的に表現する概念が価格弾力性，または所得弾力性といわれるものである。すなわち，価格弾力性とは価格の相対変化に対する需要量の相対変化として，また所得弾力性とは所得の相対変化に対する需要量の相対変化として定義されている[4)]。

弾力性の計測には，通常何らかの需要関数を推計の上，偏微分係数を求め弾力性の定義式に挿入する方法がとられるが，より優れた方法としてはコブ＝ダグラス型関数形（Cobb＝Douglas function）を用いるものである。この関数形は幾つかの優れた特性を有するが，とくに回帰係数そのものが弾力性を表すという優れた特性から広く使用されている。

*鳥取大学農学部農林総合科学科情報科学講座
**Department of Agricultural, Information Science, Faculty of Agricultural, Tottori University*
**徳島文理大学家政学部生活環境情報学科
***Department of Life, Environment and Information, Faculty of Domestic Science, Tokushima Bunri University*

しかしながら，コブ＝ダグラス型関数形による適用にも少なからずの限界が認められる。それはコブ＝ダグラス型関数形の特性の１つとされている弾力性一定の性質についてである。すなわち，計測された弾力性は計測期間中どの時点においても一定という特性である。これは優れた特性の１つであるが，逆にもし既述のごとく消費構造に構造変化を内包し，価格変化や所得変化に対応する消費行動が時間経過に伴って変わっていく場合には，長所が変じて短所と評価されることとなる。消費構造は短期的にはそれほど大きな変化が認められないものの，長期的にみるならば消費生活の慣習の変化や消費者の意識構造の変化，さらには消費財そのものの質的な変化により相当程度変容してくる。とくに，わが国の高度経済成長期から，安定成長期，さらには開放経済への移行期などを含む長期間にわたる分析では，そうした消費構造の変化を無視するわけにはいかない。

そこで本稿では，消費構造変化を含む長期データから弾力性を推計する場合の計測方法を検討するものであるが，とくに消費構造の変化を弾力性の趨勢効果[6]として設定し計測するものである。弾力性の計測に際しては従来よりコブ＝ダグラス型関数形が広く適用されている。コブ＝ダグラス型関数形には幾つかの優れた特性があり，本稿ではその優れた特性を残しつつ，消費構造の変化を趨勢効果として取り扱う需要関数の推計を試みるものである。

コブ＝ダグラス型需要関数の特性

コブ＝ダグラス型関数形には他の関数形ではみることのできない幾つかの優れた特性[2]がある。いま一般形でコブ＝ダグラス型関数形を表すと次のように示される。

$$Y = b_0 \cdot X_1^{b1} \cdot X_2^{b2} \cdots\cdots\cdots Xm^{bm} \qquad (1)$$

すなわち，コブ＝ダグラス型関数は説明変数Xiのべき乗関数形で，当然Xiに対して曲線を表すこととなり，曲線は直線の特性を含み，直線式より適用範囲が広く汎用性に富むこととなる。

さて，このように表されるコブ＝ダグラス型関数形の特性として通常指摘されるものは次の諸点である。

(a)　両辺に対数変換を施すことによって曲線関数の取扱いから線形関数の取扱いに簡素化できる

上記(1)式のコブ＝ダグラス型関数形の両辺を対数変換することによって，次のように表すことができる。

$$LnY = Lnb_0 + b_1LnX_1 + b_2LnX_2 + \cdots\cdots + bmLnXm \qquad (2)$$

したがって，観測データY，Xiに対数変換を施し，LnY，LnXiとして扱うことによって通常の線形重回帰式の計測に帰着させることができるのである。関数推計およびその取扱いも簡素になることはいうまでもない。

(b)　回帰係数biは即弾力性を表す

対数変換によって線形式の取り扱いに変換された重回帰係数biは推計値そのままの形で即Xi要素の弾力性を表示する優れた特性を有する。

いま(1)式をX_iによって偏微分して展開すると，

$$\begin{aligned}\partial Y/\partial X_i &= b_i\{b_0 \cdot X_1^{b1} \cdot X_2^{b2} \cdots\cdots X_i^{(bi-1)} \cdots\cdots X_m^{bm}\} \\ &= b_i\{b_0 \cdot X_1^{b1} \cdot X_2^{b2} \cdots\cdots X_i^{bi}/X_i \;\cdots\cdots X_m^{bm}\} \\ &= b_i/X_i \cdot Y\end{aligned}$$

$$\therefore\ b_i = (\partial Y/\partial X_i) \cdot (X_i/Y) \qquad (3)$$

となり，b_iは要素X_iの弾力性を表すこととなる。

さらに，この自己価格弾力性(Own–price elasticity) E_{own}と交差価格弾力性(Cross–price elasticity) E_{crs}を合計したものに所得弾力性(Income elasticity) E_{icm}を加えると０になる性質を持つ[7]。すなわち，

$$E_{own} + \Sigma E_{crs} + E_{icm} = 0 \qquad (4)$$

となり，弾力性の相互関係を検討する場合には有益な条件になる。

(c)　回帰係数b_iの合計値は規模に関する経済性を示す

コブ＝ダグラス型関数形が生産関数として設定された場合は，回帰係数の合計値Σb_iは次のように規模に関する経済性を表す。

$\Sigma b_i > 1$　の場合：規模に関して収穫逓増。

$\Sigma b_i = 1$　の場合：規模に関して収穫一定。

$\Sigma b_i < 1$　の場合：規模に関して収穫逓減。

この特性は，生産関数として設定された場合に有効であるが，コブ＝ダグラス型関数形の優れた特徴の１つとして指摘できる。

(d)　弾力性はどの時点でも一定である

通常，弾力性は需要関数のある特定の時点における要素変数X_iに対応するものとして考えられるもので，要素変数の値が年次によって変動する場合には，弾力性の値もそれに伴って変化することとなる。例えば，上記特性(b)の弾力性の定義式において，微分係数が同一であっても，Y変数，X_i変数に変化があると，弾力性の値が異なってくる。つまり弾力性の値も要素変数のどの時点の値を採用するかによって恣意的な影響を受けることとなる。

しかしながら，コブ＝ダグラス型関数形においては特定の時点に関係なく回帰係数は一定であり，したがって弾力性の値も一定となるのである。この特性は回帰係数推計後に，定義式を用いて弾力性を求める事後処理の必要性がないという点と，要素変数の時点による恣意性を回避できる点で優れている。

このように，コブ＝ダグラス型関数形には優れた特性が認められ，生産関数をはじめ需要関数，投資関数などの推計に幅広く適用されている。しかしながら，長期間にわたり消費構造に変化が認められるような場合には，むしろ特性(d)の性質が制約となってくる場合がある。

以下では，コブ＝ダグラス型関数形の優れた特性を残しつつ，消費構造の変化に対応した弾力性を趨勢効果として推計する問題を検討することとする。

多項式需要関数における弾力性の計測

ここでは，コブ＝ダグラス型関数形による推計に先立ち，一般の多項式需要関数による弾力性を比較検討のため推計しておく。推計モデルとして次のように設定することとする。

$$Q=a_0+b_1Y+b_2Y^2+b_3Y^3+cP_1^{1/2}+dP_2^{1/2}+e_1P_3+e_2P_3^2+e_3P_3^3 \quad (5)$$

ただし，データ期間は1956年から1992年までの37年間であり，各変数の内容は次の通りである。

Q：牛肉の１人当たり年間消費量（100g/１人)。

Y：１人当たり月間所得（万円/１人)。

P_1：牛肉の価格（円/kg)。

P_2：豚肉の価格（円/kg)。

P_3：鶏肉の価格（円/kg)。

所得，価格などの価値額変量は1990年基準消費者物価（総合）指数によるデフレート。

かくして，各パラメータの推計結果は第１表の通りである。

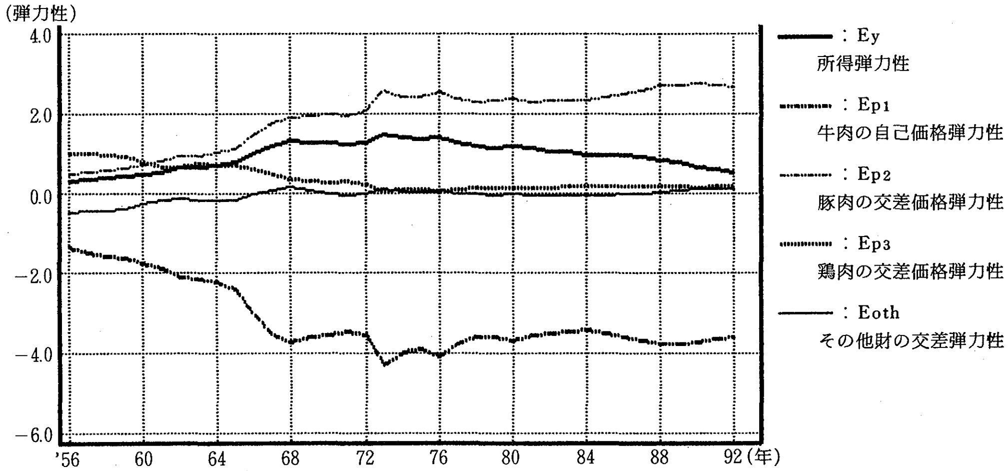
第１表　多項式曲線の推計結果

変　数	回帰係数	t－検定値
a_0(定数)	−15.4620	
b_1(Y)	0.1681	0.0713
b_2(Y_2)	0.3519	1.4500
b_3(Y_3)	−0.0147	1.6900
c ($P_1^{1/2}$)	−16.5516	5.8691
d ($P_2^{1/2}$)	3.3035	1.0122
e_1(P_3)	47.7188	3.3833
e_2(P_3^2)	−12.5264	3.3485
e_3(P_3^3)	1.0650	3.6760

自由度修正決定係数 r^2＝0.97131、
自由度 n＝28

推計モデル：$Q=a_0+b_1Y+b_2Y^2+b_3Y^3+cP_1^{1/2}+dP_2^{1/2}+e_1P_3+e_2P_3^2+e_3P_3^3$

これによると，所得変数の定数項と豚肉の価格変数のt－検定値がやや劣るものの，決定係数の値が高く比較



第１図　多項式需要関数に基づく弾力性

注）その他財の交差弾力性Eothは次の恒等式より推計。
$E_y+E_{p1}+E_{p2}+E_{p3}+E_{oth}=0$

的良好な結果が得られている。この推計結果に基づいて各変数によって偏微分を行い弾力性を求めると次のようになる。

$\partial Q/\partial Y=0.1681+2\cdot(0.3519)Y-3\cdot(0.0147)Y^2$

$\partial Q/\partial P_1=0.5\cdot(-16.5516)P_1^{-1/2}$

$\partial Q/\partial P_2=0.5\cdot(3.3035)P_2^{-1/2}$

$\partial Q/\partial P_3=47.7188+2\cdot(-12.5264)P_3+3\cdot(1.0650)P_3^2$

これらを用いて第(3)式の定義式より各弾力性を求め図示したものが第1図である。

これによると，所得弾力性はほぼ＋１～＋２の範囲で推移しており，高級財として認識されるものとなっている。また，牛肉の価格弾力性は－１の水準から－３程度に変化しており，近年時価格変化に対して需要量の変化が敏感になってきていることを示し，依然として弾力財であることが理解される。さらに，第(4)式より，豚肉，鶏肉以外の交差価格弾力性をE_{oth}とすると，

$E_y+E_{p1}+E_{p2}+E_{p3}+E_{oth}=0$

となり，その他財の弾力性は同第１図より０の周辺を前後し推移している。よって主要な代替財はほぼこの関数形に含まれているものと判断される。

また，豚肉価格，鶏肉価格の牛肉消費量に対する交差弾力性については，豚肉の交差価格弾力性が＋１から＋３程度に上昇し，鶏肉は＋1.5水準から＋0.5水準へと低下している傾向が理解される。豚肉，鶏肉の交差価格弾力性がプラスであることから共に牛肉消費量と競合していることが理解される。

しかしながら，このような多項式需要関数に基づく弾力性の推計では，余りにも年次変動が大きすぎて安定性に欠ける点が課題となる。弾力性は長期間にわたる場合には徐々に変化が認められるにしても，短期的にはそれほど変動する性質のものではない。消費構造は短期的には安定しているものである。

これとは逆にコブ＝ダグラス型関数形では弾力性は観測期間中一定という性質をもっている。勿論長期間にわたって弾力性が一定不変に固定していることも既述のごとく現実的ではない。かくして以下に，コブ＝ダグラス型関数形における弾力性一定の特性を利用して，回帰係数に弾力性の趨勢効果を導入して計測する修正方法を検討することとしたい。

趨勢効果を含む需要関数

まず，従来の方法に基づき通常のコブ＝ダグラス型関数形による需要関数を推計し弾力性を求めてみよう。先の牛肉消費量に対する推計結果は次の通りである。ただし，説明変数を所得変数Ｙ，牛肉価格変数P_1とし，交差価格弾力性の効果を除いている。

$$\underset{}{LnQ}=1.37109+\underset{(16.6611)}{0.71162LnY}-\underset{(11.5181)}{1.10694LnP_1}$$

自由度修正決定係数$R^2=0.88507$，自由度$n=34$

ただし，(　)内はt－検定値である。

これによると，所得弾力性は0.71162で，価格弾力性は－1.10694となる。価格弾力性はともかくとしても所得弾力性E_pは$0<E_p<+1$の範囲にあり，通常一般的に認識されている所得弾力性が＋1より大きい“高級財”または“成長財”とは異なり，財特性としては“普通財”または“一般財”として位置づけされることになる。しかしこの結果は，最近年次はともかく，1950年代のわが国経済の発展段階における消費構造を想定すると些か理解に苦しむ。一般的に当時は，肉類全般について所得弾力性は大きく，高級消費財としての認識が強かったものと考えられる。とくに牛肉は一般国民にはなかなか口に入るものではなかった。それは，少なくても価格弾力性の絶対値はわが国経済・社会の成長期には高く，社会の構造が成熟した昨今においては，より低い値へと変化してきているものと考えられ，弾力性の計測に際してもそうした構造変化を反映させる必要が生じてくる。

すなわち，1950年代の消費構造と最近年次の消費構造は異質なものになっており，所得，または価格の変化による消費への影響力が同じものとはいい難くなってきているのである。そこで弾力性そのものに趨勢効果を反映させる以下のようなモデルへと改良を試みることとする。

コブ＝ダグラス型関数の一般形は既述のように第(1)式または第(2)式のように示されるもので，この基本形においては，回帰係数b_iは観測期間中一定となる。もし，弾力性に趨勢効果を含むものであるならば，次のように回帰係数b_iそのものを年次変数tに関する何らかの関数として設定する方法が考えられる。

$b_i=f(t)$

いまこの関係を最も単純なtに関する１次式として次のように特定化すると，

$$b_i=\alpha_i+\beta_i t \tag{6}$$

第(2)式は次のように表される。

$$LnY=Lnb_0+b_1LnX_1+b_2LnX_2+\cdots\cdots+(\alpha_i+\beta_i t)LnX_i+\cdots\cdots+b_mLnX_m \tag{7}$$

ここで，LnX_iは勿論のこと，$t \cdot LnX_i$はデータ変換により既知数として事前に得ることができる。したがって，第(7)式のb_iをはじめパラメータα_i，β_iの推計は通常の回帰式推計の若干の応用により可能となる。

ここで，実際に牛肉の需要関数を例にこのような趨勢効果を含む需要関数を推計してみよう。

いま，所得変数と牛肉価格変数の趨勢効果を次のように設定する。

所得変数について：$b_1 = \alpha_1 + \beta_1 t$

価格変数について：$b_2 = \alpha_2 + \beta_2 t$

すると，需要関数は次のようになる。

$$LnQ = Lnb_0 + \alpha_1 LnY + \beta_1 tLnY + \alpha_2 LnP_1 + \beta_2 tLnP_1 \quad (8)$$

かくして第(8)式に通常の最小２乗法を適用して回帰係数を推計したものが第２表である。

第２表　コブ＝ダグラス型関数形による
基本需要関数の計測結果

変　数	回帰係数	t－検定値
b_0(定数)	1.9104	
$\alpha_1(LnY)$	1.0513	2.6457
$\beta_1(tLnY)$	−0.0165	3.1162
$\alpha_2(LnP_1)$	−1.8786	6.2336
$\beta_2(tLnP_1)$	0.0332	2.9337

自由度修正決定係数r^2＝0.90705、
自由度n＝32

推計モデル：$LnQ = Lnb_0 + \alpha_1 LnY + \beta_1 tLnY + \alpha_2 LnP_1 + \beta_2 tLnP_2$

推計結果は，各回帰係数のt－検定値および決定係数共に良好である。よってこれより，所得弾力性Ｅｙ，価格弾力性E_pを求めると，

$$E_y = \underset{(2.645)}{1.0513} - \underset{(3.116)}{0.0165t}$$

$$E_p = \underset{(6.234)}{-1.8786} + \underset{(2.934)}{0.0332t}$$

となり，共に年次変数ｔの関数となり，年次変数ｔの推移に伴って趨勢効果も変化するものとなる。ただし，(　)内はｔ－検定値であ。

さらに，消費者行動に明確な構造変化が生じている場合にはその構造変化を表すダミー変数Ｄを導入することも有力である。その場合には趨勢効果を次のように設定する。ただし，趨勢効果については平方根関数として設定している。

所得変数について：$b_1 = \alpha_1 + \beta_1 t^{1/2} + \gamma_1 D$

価格変数について：$b_2 = \alpha_2 + \beta_2 t^{1/2} + \gamma_2 D$

このように弾力性の趨勢効果を設定すると，需要関数は次のようになる。

$$LnQ = Lnb_0 + (\alpha_1 + \beta_1 t^{1/2} + \gamma_1 D) LnY + (\alpha_2 + \beta_2 t^{1/2} + \gamma_2 D) LnP_1 \quad (9)$$

いま，具体的に牛肉の自由化が開始された平成元年度以降にダミー変数を導入してパラメータを推計すると第３表のようになる。これより弾力性の趨勢効果は次のように年次変数tの関数として表される。

第３表　コブ＝ダグラス型関数形による
趨勢効果の推計結果

変　数	回帰係数	t－検定値
b_0(定数)	3.5344	
$\alpha_1(LnY)$	1.1086	3.285
$\beta_2(t^{1/2} LnY)$	−0.1189	1.523
$\gamma_3(DLnY)$	−0.00767	0.197
$\alpha_2(LnP_1)$	−2.3017	3.287
$\beta_2(t^{1/2} P_1)$	0.2473	1.485
$\gamma_2(DLnP_1)$	0.1544	0.192

自由度修正決定係数r^2＝0.895281、
自由度n＝30

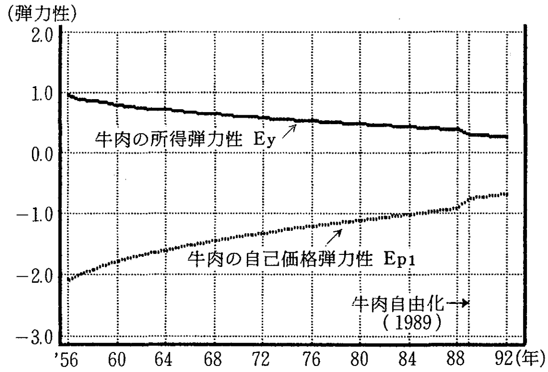
推計モデル：$LnQ = b_0 + \alpha_1 LnY + \beta_1 t^{1/2} LnY + \gamma_1 DLnY + \alpha_2 LnP_1 + \beta_2 t^{1/2} LnP_1 + \gamma_2 DLnP_1$

$$E_y = \underset{(3.285)}{1.1086} - \underset{(1.523)}{0.1189t^{1/2}} - \underset{(0.197)}{0.00767D}$$

$$E_p = \underset{(3.287)}{-2.3017} + \underset{(1.485)}{0.2473t^{1/2}} + \underset{(0.192)}{0.1544D}$$

この推計結果に基づいて弾力性の趨勢効果を図示したものが第２図である。所得弾力性は＋1.5水準から漸次低下して現在では0.7程度の水準にまで低下している。一方，価格弾力性は－1.5の水準から次第に絶対値が小さくなり，非弾力財への傾向を強めてきている。

このように従来のコブ＝ダグラス型関数形の偏回帰係数に趨勢効果を取り込み，需要構造の変容を明確に計測することが可能となる。



第２図　コブ＝ダグラス需要関数による弾力性

注１）牛肉自由化後にダミー変数Ｄを導入

２）弾力性の趨勢効果推計式は次式による。

$E_y=1.1086-0.1189\sqrt{t}-0.00767D$

$E_{p1}=-2.3017+0.2473\sqrt{t}-0.1544D$

$L_nQ=3.4534+E_yL_nY+E_{p1}L_nP_1$

残差加重回帰による弾力性の傾向値

さて，弾力性の趨勢効果は一種の傾向線であって，それは観測データに関する情報の重要度を全て同等とみなし，観測期間中の残差には等しく平均＝０，分散一定の仮定が設けられている。しかし，こと予測となると，遠い過去のデータよりも比較的直近年次のデータを重視して将来の見通しを立てるのが普通である。そのような場合には，最近年次の残差により大きなウエイトをかけてパラメータを推計する方がより望ましいものとなる。このような考え方は残差加重回帰として設定されている[1,5]。ここでは弾力性の趨勢効果の計測にこの残差加重回帰式を適用してみる。

残差加重回帰は需要関数が第(2)式のように与えられていた場合，推計値と観測値との残差uに年次変数の経過に伴ってW_tを加重し，その加重残差の２乗和を最小にするように回帰係数を推計するものである。この場合残差については，通常の回帰式推計の前提となる$E(u_t)=0$，$V(u_t)=\sigma^2$に代えて，$E(W_tu_t)=0$，$V(W_tu_t)=\sigma^2$となるように想定されている。

いま，加重された残差の合計値を$F(u)$とおくと，$F(u)$は次のようになる。

$$\begin{aligned}F(u)&=\Sigma W_tu_t^2\\&=\Sigma W\{LnY-(Lnb_0+b_1LnX_1+b_2LnX_2+\\&\qquad\cdots\cdots+b_mLnX_m)\}^2\end{aligned}\qquad(10)$$

ここで$F(u)$をb_iについて偏微分し，０とおくことによって次の連立方程式が得られる。

$$\left.\begin{cases}\Sigma W\{LnY-(Lnb_0+b_1LnX_1+b_2LnX_2+\cdots\cdots+b_mLnX_m)\}=0\\ \Sigma WLnX_1\{LnY-(Lnb_0+b_1LnX_1+b_2LnX_2+\cdots\cdots+b_mLnX_m)\}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \Sigma WLnX_m\{LnY-(Lnb_0+b_1LnX_1+b_2LnX_2+\cdots\cdots+b_mLnX_m)\}=0\end{cases}\right\}\qquad(11)$$

さらにこれを整理すると，

$$\left.\begin{cases}b_0\Sigma W+b_1\Sigma WLnX_1+\cdots\cdots+b_m\Sigma WLnX_m=\Sigma WY\\ b_0\Sigma WLnX_1+b_1\Sigma WLnX_1^2+\cdots\cdots+b_m\Sigma WLnX_1LnX_m=\Sigma WLnX_1Y\\ \cdots\cdots\cdots\\ b_0\Sigma WLnX_m+b_1\Sigma WLnX_1LnX_m+\cdots\cdots+b_m\Sigma WLnX_m^2=\Sigma WLnX_mY\end{cases}\right\}\qquad(12)$$

が得られるが，これは通常の最小２乗法における正規方程式 (Normal Equation) に相当するものである。ここでb_0を第１番目の式から求めて第２番目以降の式に代入し整理すると次の式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&b_1M_{11}+b_2M_{12}+\cdots\cdots+b_mM_{1m}=M_{1y}\\&b_1M_{21}+b_2M_{22}+\cdots\cdots+b_mM_{2m}=M_{2y}\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\\&b_1M_{m1}+b_2M_{m2}+\cdots\cdots+b_mM_{mm}=M_{my}\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

ただし，

$M_{ij}=\{\Sigma WLnX_iX_j-(\Sigma WLnX_i\cdot\Sigma WLnX_j)/\Sigma W\}$

$M_{iy}=\{\Sigma WLnX_iY-(\Sigma WLnX_i\cdot\Sigma WLnY)/\Sigma W\}$

である。したがって残差加重回帰による回帰係数は次式により与えられる。

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}&\cdots\cdots&M_{1m}\\M_{21}&M_{22}&\cdots\cdots&M_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\M_{m1}&M_{m2}&\cdots\cdots&M_{mm}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}M_{1y}\\M_{2y}\\\vdots\\M_{my}\end{pmatrix}\qquad(14)$$

また，決定係数R_w^2は次のようになる。

$R_w^2=\Sigma b_iM_{iy}/\{\Sigma WY^2-(\Sigma WY)^2/\Sigma W\}$

さらに残差の分散 S_w^2 は次のようになる。

$$S_w^2 = \Sigma W u^2/(n-m-1)$$
$$= (M_{yy} - \Sigma b_i M_{iy})/(n-m-1)$$

よって，回帰係数 b_i の推定標準誤差 $S_w b_i$ は次のようになる。

$$S_w b_i = (S_w^2/M^{ii})^{1/2}$$

ただし，M^{ii} は第⒁式の右辺第１項行列の (i,i) 要素である。

さて以下に，具体的にこの残差加重回帰式による弾力性の趨勢効果を計測してみよう。加重値は相対ウェイトにより年次変量tそのものの関数として，$w_t = t/\Sigma t$ と設定する。したがって，全期間のウェイトを合計すると，$\Sigma w_t = \Sigma(t/\Sigma t) = \Sigma t/\Sigma t = 1$ となる。このような相対ウェイトを第⒁式に適用して推計したものが第４表である。

この推計結果は先の加重しない場合の第３表の結果ををかなり改善するようである。回帰係数のt－検定値はさらに改善され，自由度修正済決定係数も一層望ましいものとなっている。

さらにこれに基づく加重された所得弾力性 E_{wy}，加重された価格弾力性 E_{wp} の趨勢効果は次の通りである。

第４表　残差加重回帰による趨勢効果の推計結果

変　数	回帰係数	t－検定値
b_0(定数)	−0.0045	
α_1(LnY)	2.0615	5.8133
$\beta_2(t^{1/2}LnY)$	−0.2394	3.6884
γ_3(DLnY)	0.0232	0.1936
$\alpha_2(LnP_1)$	−3.4817	5.1992
$\beta_2(t^{1/2}P_1)$	0.4641	3.7029
$\gamma_2(DLnP_1)$	−0.0456	0.1831

自由度修正決定係数 $r_w^2 = 0.99785$、自由度 n＝30

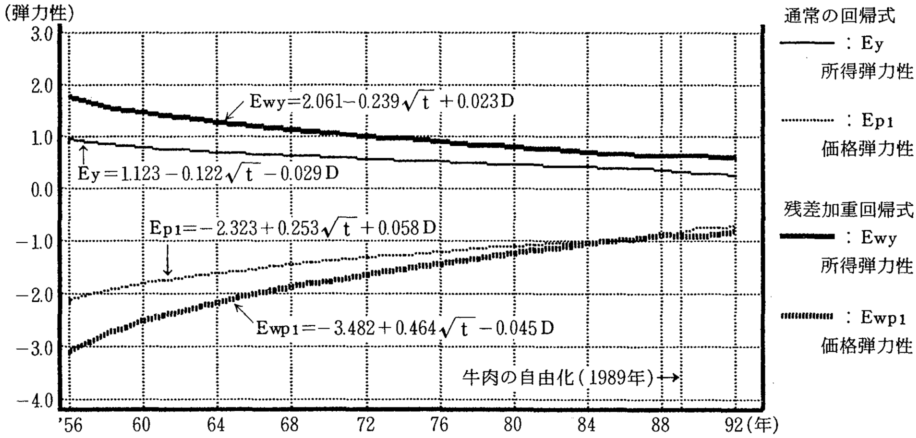
推計モデル：

$$LnQ_w = b_0 + \alpha_1 LnY + \beta_1 t^{1/2} LnY + \gamma_1 DLnY + \alpha_2 LnP_1 + \beta_2 t^{1/2} LnP_1 + \gamma_2 DLnP_1$$

$$E_{wy} = \underset{(5.813)}{2.0615} - \underset{(3.688)}{0.2394t^{1/2}} + \underset{(0.1936)}{0.0232D}$$

$$E_{wp} = \underset{(5.199)}{-3.4817} + \underset{(3.703)}{0.4641t^{1/2}} - \underset{(0.183)}{0.0456D}$$

さらにこれを図示したものが第３図である。



第３図　残差加重回帰による弾力性の趨勢効果

注１）通常の回帰式：$L_nQ = 3.4534 + E_y L_n Y + E_{p1} L_n P_1$
　　　残差加重回帰式：$L_nQ_w = -0.0045 + E_{wy} L_n Y + E_{wp1} L_n P_1$
　２）ダミー変数Dは，'89＝１，'90～'92＝２，それ以外を０としている。

これによると，残差加重回帰に基づく弾力性の趨勢効果は先の計測結果より一層広い範囲から逓減に向かっているようである。また，消費構造の変化を表すダミー変数の効果を比較すると逆の傾向が表れていることを確認することができる。

趨勢効果変量の多重共線性

最小2乗法の推計に際してはいくつかの前提条件がある。とくに残差項に対しては，各年次において平均値＝0，分散一定という強い仮定が必要である[3)]。そのことから残差項に自己相関があってはならないこととなる。これはダービン・ワトソン比 (Durbin - Watson ratio) などによって検定される。しかしさらに大切な前提条件は，特定化された関数形において説明変数間に強い相関があってはならないことである。もし特定な2変量間に高い相関関係が認められる場合には，当該2変量は1つの変量として扱う方が望ましく，2変量に分ける必要がないということになる。計測結果においては回帰係数は不安定になり，自ずと回帰係数の安定性を示すｔ－検定値は劣ることとなる。このような問題は多重共線性 (multicolinearlity) と呼ばれる問題である。

以下にわれわれが修正を試みたコブ＝ダグラス型関数における趨勢効果を表す項について，多重共線性の有無を吟味しておこう。趨勢効果を表す項には何らかの時間変数が傾向線を示すものとして導入されている。それをｕの関数として設定すると次のようになる。

$b_i = \alpha_i + \beta_i t^u$

これを所得弾力性の項に代入すると，所得弾力性に関係する変量は LnY と t^uLnY の2つの項に分離される。したがって多重共線性はこの2つの変量の相関関係の如何に依存することとなる。すなわちこの場合，相関係数ｒは次のように表され，

$$r = \{n\Sigma LnYt^u LnY - \Sigma LnY \Sigma t^u LnY\} / [\{n\Sigma LnY^2 - (\Sigma LnY)^2\} \cdot \{n\Sigma t^u LnY^2 - (\Sigma t^u LnY)^2\}]^{1/2}$$

ｒはｔのべき乗であるｕの関数となる。いまｕの値を0から1までの間で順次変化させそれに対応するｒの値を整理すると第5表のようになる。同表には価格弾力性に関する趨勢効果の変量についても示しているが，ｕの値が0の時が共にｒ＝1で，ｕの値が次第に大きくなるにしたがってｒの値も低下していく。ｒの低下の度合いはそれぞれの変量の内容に依存する。

ｕの値が大きくなるにしたがって相関係数ｒが低下するのは，べき乗値ｕの値が大きくなるとそれに伴って年次変数ｔの影響力が強まり，相対的に元の変量の影響力が弱まってくるからに外ならない。したがって，コブ＝ダグラス型関数形で弾力性の趨勢効果を計測する場合には年次変数ｔのべき乗値ｕが大きければ大きいほど多重共線性の問題が回避され望ましいこととなる。

第5表　べき乗値の変化による相関係数への影響

べき乗 u	相関係数 LnYとt^uLnY	LnPとt^uLnP	t^uLnYとt^uLnP
0.00	1.0	1.0	0.7429
0.01	0.9990	0.9928	0.8244
0.02	0.9973	0.9791	0.8734
0.03	0.9956	0.9645	0.9046
0.04	0.9941	0.9507	0.9255
0.05	0.9929	0.9382	0.9402
0.06	0.9919	0.9270	0.9508
0.07	0.9912	0.9170	0.9588
0.08	0.9906	0.9080	0.9649
0.09	0.9902	0.8998	0.9697
0.10	0.9900	0.8924	0.9735
0.2	0.9907	0.8408	0.9898
0.3	0.9929	0.8057	0.9943
0.4	0.9941	0.7755	0.9962
0.5	0.9938	0.7471	0.9972
0.6	0.9920	0.7195	0.9978
0.7	0.9889	0.6924	0.9982
0.8	0.9846	0.6658	0.9985
0.9	0.9794	0.6398	0.9987
1.0	0.9734	0.6143	0.9989

注1）Ｙは所得，Ｐは牛肉価格。
2）データ期間は1956年から1992年までの37年間である。
3）ｔは年次変数であり，1956年＝1としている。

しかしながら，2変量以上，例えば所得と価格に関する趨勢効果を同時に計測するような場合には，同第5表に示すようにｕの値が大きくなるにしたがって変数 t^uLnY と変数 t^uLnP との間の相関関係が逆に高くなってくる。これは先のLnYと t^uLnY または LnP と t^uLnP の傾向とは逆の動きになっていることが確かめられる。つまり，この場合年次変数 t^u の影響が強く出るために，元の変量LnYとtLnPとの相関関係が相対的に弱くなるからである。

このように年次変数tのべき乗値が大きくなるにしたがって一方の相関係数（LnYとtLnYまたはLnPとtLnP間）は高くなり，他方の相関係数（LnYとtLnP間）はこれとは逆に低くなるという現象がでてくる。かくして

多重共線性の問題は両者の兼ね合いで左右されることとなる。

総　括

需要構造の変化は，所得または価格変化に対応する消費量の変化として捉えられる。それは消費財そのものの品質や商品内容によって影響されるものであるが，社会・経済の発展段階や消費経済の水準及びその内容によって大きく影響を受ける。また，消費構造は長い間の消費生活の慣習の変化によっても徐々に変質してくる。要するに消費構造は社会経済を背景に，長期間にわたっては生活習慣などの変化により一定不変にとどまってはいないことである。したがって，所得，価格などの相対変化に対する消費量の相対変化として定義されている弾力性概念についても，長い間一定値に固定化されているものではなく，年次変数の経過と共に徐々に変化する形で捉えるべきものとなる。

一般に，諸弾力性の計測に当たっては，コブ＝ダグラス型関数形を利用することが多い。それは，コブ＝ダグラス型関数形にはいくつかの優れた特性があるからに外ならない。本稿ではその優れた特性を生かして，コブ＝ダグラス型関数形に改良を加え，弾力性に関して趨勢効果を取り扱う方法を検討した。

それは，コブ＝ダグラス型関数形の回帰係数に対して，それぞれに年次変数を趨勢効果とする関数形を挿入するものであるが，それによって，従来からの最小２乗法に若干の修正を施すことによって計測が可能であることを明らかにした。

さらに，趨勢効果を予測する場合，通常は遠い過去よりも最近年次の観測データをより重要視して見通しを立てる傾向があることから，弾力性の趨勢効果を残差加重回帰によって推計する方法を検討した。残差加重回帰は推計値と観測値の残差部分に年次変数に関する加重を施すもので，見通しを目的にする場合には有効である。コブ＝ダグラス型関数形による弾力性の趨勢効果の見通しにおいても残差加重回帰は有効であることを示した。

参　考　文　献

1）笠原浩三：農業と関連産業の立地，明文書房，東京（1983），pp. 29－34
2）岸根卓郎：理論・応用統計学，養賢堂，東京（1978），pp. 153－154
3）奥野忠一，久米　均，芳賀敏郎，吉澤　正：多変量解析法，日科技連，東京（1977），pp. 92－112
4）竹内　清：需要予測入門，丸善，東京（1971），pp. 78－99
5）ティントナー，G：計量経済学。徳重善之訳，文雅堂書店，東京（1961）pp. 204－246
6）唯是康彦：食糧需要の趨勢効果，農業総合研究，20 57－114，（1968）
7）William，G. Tomek，Kenneth L. Robinson：Agricultural Product Prices, Cornell University Press Ltd, London (1981), pp. 44－59