鳥大農研報（Bull. Fac. Agric., Tottori Univ.）40 131～137（1987）

回帰係数の安定性に関する統計的仮説検定について

笠原浩三*・今井鐳蔵*

昭和62年5月30日受付

A Test of Statistical Hypothesis about the Stability of Regression Coefficients

Kozo KASAHARA* and Raizo IMAI*

The regression analysis method is one of the most useful methods when we analyze a mutual relation between variables, and a causal relation between many independent variables and a dependent variable, since we can make sure of the practical utility of the estimated coefficients, i.e. regression coefficients, coefficient of correlation, coefficient of determination, and so on, by using the test of statistical hypothesis.

We wish to prove the effectiveness of the t-test of statistical hypothesis about a regression coefficient equal to the f-test of statistical hypothesis about the coefficient of correlation in case the regression function in applied to the simple regression function. In the second place we wish to introduce one interesting figure which may show the relationship between the coefficient of determination and the degree of freedom under a certain number of the independent variables.

The following became clear by the proof ; it is good enough only to test statistical hypothesis of either the regression coefficient or the coefficient of correlation.

緒　　論

多変量間の因果関係，または相互関係を明らかにする場合，回帰分析法は最も効果的な手法の１つとされている。それは，自然科学における実験データの解析は勿論のこと，社会科学における各種の調査・統計データの解明に欠くことのできない手法として，実践的有用性が広く認められているからである。

その分析法の有用性は，定性分析に基づく先見的理論模型に各種データによる具体的な数値を与えて定量的に分析することにある。すなわち，各種データを定性的関数関係に組み立てた数学模型に当てはめ，独立変数が従属変数に与えるところの総合的な影響力を明らかにするとともに，個々の独立変数の従属変数への影響力を数量的に明らかにするところに特徴がある。例えば，計量経済学では，「諸々の経済問題に対する理論的数量的接近と経験的数量的接近との総合をめざす諸研究………」として,[15] その分析手法に重回帰分析，連立方程式による同時

＊鳥取大学農学部農林総合科学科情報科学講座

＊*Department of Agricultural Information Science, Faculty of Agriculture, Tottori University*

決定モデルなどが用いられており，その実証的研究の評価を確固たるものとしているが，これも重回帰分析法の応用が極めて有効であることを物語るものといえよう。

さらに，この手法による分析結果の実践的有用性の他の１つは，従属変数と独立変数間の相互関連の強さを表す重相関係数や個々の偏回帰係数等に対し，一定の危険率の下で統計的仮説検定を施すことによって信頼度が付与され，分析結果に現実的な解釈が与えられて，結論を積極的に提言できることである。つまりこうした関数関係的数量分析の結果を，統計理論的妥当性の面から判定できることが大きな特徴である。

このように一般的な回帰分析では，推計値の安定性に関して統計理論的な吟味が加えられ，結論を積極的に引き出そうとするところに有用性を求めることができるわけであるが，本稿では，この実践的有用性の基礎となる基礎統計量に焦点を当て，回帰分析の推計結果に関する統計理論的な一考察を行うものである。

すなわち，回帰分析の際に必要になる諸前提と推計模型の定式化を整理し，次いで単純回帰分析における，相関係数の統計的有意性検定と回帰係数値の統計的有意性検定の相互関連性を明らかにし，さらに重相関係数の有意性検定基準に基づいて，関数形全体の説明力を表す決定係数の統計的有意性基準について考察を進める。本来決定係数は，定式化された関数式によって従属変数の変動の何割が説明され得るものかを示す統計量であって，その説明力の大きさは，分析課題との関連で評価されるべきものであるが，ここでは重相関係数の統計的有意性検定結果と関連づけて，一定の信頼度を付与する有意性検定の基準値を求めてみたい。

回帰分析の前提条件と推計の定式化

いま，独立変数（independent variable）を x_i（$i=1, 2, \cdots, m$）で表し，従属変数(dependent variable)を y として，さらに観測期間または観測個数が n 組与えられているとすると，t 番目観測値に対する線形回帰式はつぎのように表される。

$$y_t=\beta_0+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\cdot\cdot\cdot+\beta_mx_{mt}+u_t \quad \cdots (1)$$

ただし，$t=1, 2, \cdot\cdot\cdot, n$，である。これを行列表示によってつぎのようにおくと，

$$\boldsymbol{Y}=(y_1, \cdot\cdot\cdot\ y_n)'$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1, & x_{11}, & \cdot\cdot\cdot, & x_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1, & x_{1n}, & \cdot\cdot\cdot, & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\beta_0, \beta_1, \cdot\cdot\cdot, \beta_m)'$$

$$\boldsymbol{u}=(u_1, \cdot\cdot\cdot, u_n)'$$

（1）式はつぎのように簡潔に表される。

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

ここでは $\boldsymbol{u}$ は n 個の要素からなる残差項ベクトルであり，以下の仮定がおかれる。[1,8,9] ただし，$\boldsymbol{I}_n$ は n 行 n 列の単位行列を示す。

〔仮定１〕　$E(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$

〔仮定２〕
$$E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}')=\begin{pmatrix} u_1u_1 & \cdot\cdot\cdot & u_1u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nu_1 & \cdot\cdot\cdot & u_nu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdot\cdot\cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdot\cdot\cdot & \sigma^2 \end{pmatrix}=\sigma^2\boldsymbol{I}_n$$

すなわち，平均値が０で，その上，各 t についての分散が一定値 σ^2 で，異なる t 間の共分散は０になることである。

さらに，独立変数 x_i（$i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, m$）と残差項 u とは独立であること，すなわち，

〔仮定３〕
$$E(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u})=E\begin{pmatrix} u_1+, \cdot\cdot\cdot, + u_n \\ x_{11}u_1+, \cdot\cdot\cdot, +x_{1n}u_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_{m1}u_1+, \cdot\cdot\cdot, +x_{mn}u_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

であり，また独立変数間には相互に相関関係がないことが必要となる。すなわち，

〔仮定４〕　行列 $\boldsymbol{X}$ の階数 $=m<n$

で，行列 $\boldsymbol{X}$ の階数は m に等しいことが条件となる。

つまり通常の回帰分析では，〔仮定１〕から〔仮定４〕までの条件が満たされていることが必要になるが，実際問題の適用にあたっては，１つ１つ確認することなく使用されている。それは通常のデータの場合にはこれらの条件が暗黙のうちに満たされていると仮定しているのであって，無視しているわけではない。ダービン・ワトソン比[3,4,11] (Durbin-Watson ratio) などによって，残差項に相関が認められたり，独立変数間に強い相関関係があって多重共線性[10,13] (multicollinearity) などの問題が生じた場合には，上記の条件をじっくり吟味することが必要になってくる。

かくして正規方程式(normal equation)を得るため（２）式の両辺に左から $\boldsymbol{X}'$ を乗じて積率行列を作るとつぎのようになる。

$$X'Y = X'X\beta + X'u \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

この場合$(X'X)$はいわゆる原点のまわりの積率を表すが，観測値をあらかじめ平均値からの偏差の形にしておくと中心積率行列となる。すなわち中心積率行列をMとすると，$(i，j)$要素は$M_{ij}=\Sigma x_i x_j - \Sigma x_i \Sigma x_j / n$となり，$M$はつぎのように定義される。

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}-x_{1\cdot}, & \cdots, & x_{1n}-x_{1\cdot} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1}-x_{m\cdot}, & \cdots, & x_{mn}-x_{m\cdot} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11}-x_{1\cdot} & \cdots & x_{m1}-x_{m\cdot} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}-x_{1\cdot} & \cdots & x_{mn}-x_{m\cdot} \end{pmatrix}$$

ただし，$x_{i\cdot}$は外生変数x_iの平均値であり，$x_{i\cdot}=\Sigma x_{it}/n$である。

さて，正規方程式（３）式の右辺第２項目の期待値は〔仮定３〕によって０となる。また〔仮定４〕によりXの階数はmであるから$(X'X)$は正則行列になり，$(X'X)^{-1}$が存在する。結局回帰係数の推定量をbとするとbはつぎのように導かれる。

$$b = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

さてここで，（４）式に（２）式を代入するとつぎのように展開できる。

$$\begin{aligned} b &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'u \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

これは，推定量bがuに伴う確率変数であることを示しているから，その期待値をとると，

$$E(b) = \beta + (X'X)^{-1}X'E(u) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

となり，さらに〔仮定１〕により$E(u)=0$であるから，bの期待値はつぎのように表される。

$$E(b) = \beta$$

すなわち，bは不偏推定量（unbiased estimator）になっていることを確認できる。[2,5,7] また回帰係数bの偏差は$(b-\beta)$と表され，これは（５）式より$(X'X)^{-1}X'u$である。したがってbの分散共分散行列をVとすると，$V(b)$はつぎのように示される。

$$\begin{aligned} V(b) &= E[(b-\beta)(b-\beta)'] \\ &= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

つまり各偏回帰係数の推定標準誤差はこの（７）式から得られる行列の対角要素の平方根をとればよい。

次に，回帰方程式全体の当てはまりの良さを表す決定係数（coefficient of determination）R^2は，従属変数yの変動のどれだけがxへの回帰によって説明されるかということであるから，先の中心積率行列の要素を用いてつぎのように示される。

R^2＝（回帰によって説明される変動）／（yの全変動）

$$= \Sigma b_i M_{0i} / M_{00} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

よって，重相関係数（multiple correlation）はこの（８）式の平方根値で与えられる。また，残差の二乗和ssはyの変動から回帰によって説明される変動分を差し引いたものであるから，$ss = M_{00} - \Sigma b_i M_{0i}$となり，したがって残差の不偏分散を$S^2$で表すと，$S^2$は$ss$を自由度で除してつぎのようになる。

$$\begin{aligned} S^2 &= ss/(n-m-1) \\ &= (M_{00} - \Sigma b_i M_{0i})/(n-m-1) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots (9)$$

よって，中心積率行列Mの逆行列のi番目対角要素をM^iで表すと，回帰係数b_iの推定標準誤差sb_iはつぎのようになる。

$$sb_i = (S^2 M^i)^{1/2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

とくに定数項b_0に関してはつぎのようになる。[12]

$$sb_0 = \{S^2(1/n + X^{*\prime}M^{-1}X^*)\}^{1/2} \qquad \cdots\cdots\cdots (11)$$

ただし，X^*はm個の独立変数の標本平均値ベクトルを表し，$X^* = (X_{1\cdot}, X_{2\cdot}, \cdots, X_{m\cdot})'$である。

さてここで係数b_iに関して，所与のある値β_i^*との有意差の有無について統計的仮説検定をすることが可能となる。すなわち，帰無仮説を$H: b_i = \beta_i^*$とすると，この仮説の下では統計量$t = (b_i - \beta_i^*)/sb_i$は$t$一分布に従うことが知られているから，有意水準を$\alpha$とし，所与の自由度に対する$t$一値を$t_0$とすると，帰無仮説の棄却域$W$は両側検定によりつぎのようになる。

$$b_i < \beta_i^* - t_0 sb_i，かつ，b_i > \beta_i^* + t_0 sb_i \qquad \cdots\cdots (12)$$

すなわち，標本値から得られたt一値がこの棄却域内に落ちると，仮説Hを棄てることができて，b_iとβ_i^*の有

意差が認められることになる。通常はβ_i^*を0として，消極的な検定が行なわれているのが現状である。[14] またαは危険率とも呼ばれ，5％または1％水準などがとられることが多い。

回帰係数の安定性と相関係数の安定性の相互関連

回帰分析に必要な基本係数と，推定量の安定性を吟味する際に必要となる諸統計量の推計式が示されたので，ここではそれらを用いて，回帰係数の安定性を吟味する係数bのt一検定値と，相関係数rの安定性を吟味するF一検定値との関係を明らかにしてみたい。

まず，標本数をnとする単純回帰式を想定して単相関係数をrで表すと，次の式で示される統計量Fは自由度対〔1，$n-2$〕のF一分布をすることが知られている。[6]

$$F=(n-2)\,r^2/(1-r^2) \qquad \cdots\cdots (13)$$

また，重回帰式の場合はつぎのようになる。

$$F=(n-m-1)\,R^2/\{m\,(1-R^2)\} \qquad \cdots\cdots (14)$$

一方，回帰係数については，(12)式で$\beta^*=0$として単回帰係数bが，ゼロと有意差が認められるかどうか検定することができる。その統計量は単回帰係数bの推定標準誤差をsbとするとつぎのようになり，

$$t=b/sb \qquad \cdots\cdots (15)$$

さらに，この二乗値は自由度対〔1，$n-2$〕のF一分布をすることになる。

したがって，(1)式を単純回帰式に置きかえると，回帰係数bは(4)式から，中心積率行列の要素を用いて，

$$b=M_{01}/M_{11} \qquad \cdots\cdots (16)$$

となり，残差の不偏分散S^2は(9)式に代ってつぎのようになる。

$$S^2=(M_{00}-bM_{01})/(n-2) \qquad \cdots\cdots (17)$$

よって，bの推定量分散は(10)式より，

$$(sb)^2=S^2/M_{11} \qquad \cdots\cdots (18)$$

のように表されるから，(15)式で与えられるtの二乗値はつぎのように展開される。

$$\begin{aligned} t^2 &= (b/sb)^2 \\ &= (M_{01}/M_{11})^2 M_{11}/S^2 \\ &= M_{01}^2\,(n-2)/\{M_{11}\,(M_{00}-bM_{01})\} \\ &= (n-2)\,bM_{01}/(M_{00}-bM_{01}) \qquad \cdots\cdots (19) \end{aligned}$$

また，単純回帰式の決定係数は(8)式より，

$$R^2=bM_{01}/M_{00} \qquad \cdots\cdots (20)$$

で与えられるから，(19)式はつぎのようにまとめあげられる。

$$\begin{aligned} t^2 &= \{(n-2)\,bM_{01}/M_{00}\}/(1-bM_{01}/M_{00}) \\ &= (n-2)\,R^2/(1-R^2) \qquad \cdots\cdots (21) \end{aligned}$$

これは(13)式に示された相関係数のF一値に一致している。

すなわち，単相関係数に対するF一検定値の結果は，回帰係数bに対するt一検定値の結果と一致するわけである。したがって，単純回帰分析においては，相関係数と回帰係数の両方についてその有意性を確認する必要はなく，いずれか一方のみを検定すればよいこととなる。

もちろんこの関係は単純回帰分析についてであって，重回帰分析の場合には当てはまらない。なぜなら，重回帰式では，各偏回帰係数の総合効果が重相関係数に集約されているのであって，重相関係数が特定の偏回帰係数と関連しているわけではないからである。つまり，特定の偏回帰係数についての推定標準誤差が小さく，係数が安定していて検定にパスできたとしても，ほかの偏回帰係数がそれ以上に不安定であれば，重相関係数の検定結果は必ずしもパスするとは限らない。個々の回帰係数の安定性と重相関係数の安定性とは無関係なのである。

したがって，単純回帰分析の場合には，相関係数か，または回帰係数のどちらか一方のみを検定するだけでよいが，重回帰分析の場合には，個々の回帰係数全てについて検定吟味した上に，さらに重相関係数についても改めて検定する必要があるといえよう。

重相関係数の安定性と決定係数の説明力の関連

個々の偏回帰係数と相関係数の相互関係が明らかになったので，次に重相関係数の有意性検定と，その結果に基づく決定係数の説明力の関連性について考察することにしよう。

そもそも決定係数は，推計された回帰式によって従属変数の変動の何割が説明されるかを示すものであって，その説明力が何割以上でなければいけないという客観的な基準があるわけではない。通常は，分析目的との関連で8割以上とか，あるいは9割以上が望ましいなどとして使われているが，絶対的な根拠が存在しているわけではない。計量経済モデルでは，シミュレーションの精度を高めるため，時には99％以上を目指して計測すること

があったり，半面，実験データでは資料などの制約から5〜6割程度の説明力でとどまってしまったりすることもある。

では，何か一定のよりどころとなる水準は存在しないものであろうか。ここでは，そのよりどころとなる水準を「重相関係数が有意になる水準」として接近してみたい。

重相関係数の有意性検定には分散比に対するF—検定が用いられる。すなわち，重相関係数Rが検定にパスするためには，(14)式で与えられるFの値が，自由度対〔m，$n-m-1$〕のF—分布をすることを用いて両側検定を行う。

いま，危険率をαとして，自由度対$[m,\ n-m-1]$に対するF—分布の$\alpha/2$点である$F^{m}_{n-m-1}(\alpha/2)$と，$(1-\alpha/2)$点である$F^{m}_{n-m-1}(1-\alpha/2)$を$F$—分布表から求めると，帰無仮説の棄却域$W$は，

$$F>F^{m}_{n-m-1}(\alpha/2),$$
$$\text{かつ},\ F<F^{m}_{n-m-1}(1-\alpha/2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

によって与えられる。Fの実現値F_0がこの棄却域内に落ちると，仮説を棄てることができて，重相関係数Rは0との有意差が認められることになる。F_0は(14)式で与えられるから，もし$F_0>1$となるなら(22)式の第1の不等式について調べればよく，もし$F_0<1$となるなら第2式の不等式について調べればよいことになる。

すなわち，$F_0>1$の場合には$(n-m-1)R^2/\{m(1-R^2)\}>1$より，両辺に$m(1-R^2)$を乗じて，つぎのように展開できる。

$$nR^2-mR^2-R^2>m-mR^2$$
$$\therefore R^2>m/(n-1), \quad if \quad F_0>1 \quad \cdots\cdots (23)$$

よってこの場合には，(22)式の第1の不等式について棄却域内に落ちるかどうか調べればよいことになる。したがって，(14)式のFの代りに$F^{m}_{n-m-1}(\alpha/2)$を用いると，

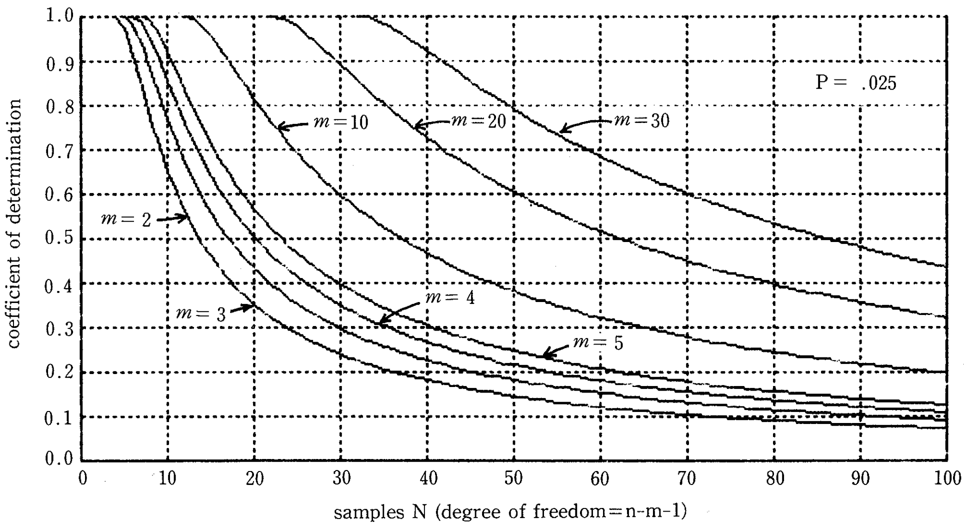
$$(n-m-1)R^2>m(1-R^2)F^{m}_{n-m-1}(\alpha/2)\cdots\cdots(24)$$

となり，これをR^2について解くとつぎのようになる。

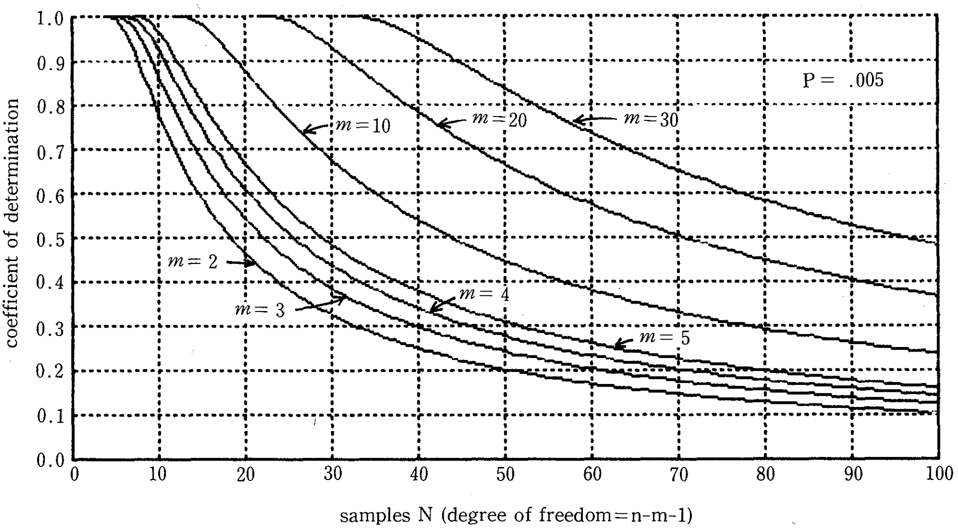
$$R^2>mF^{m}_{n-m-1}(\alpha/2)/\{(n-m-1)+mF^{m}_{n-m-1}(\alpha/2)\}\cdots\cdots (25)$$

すなわち，(23)式の条件下で，重相関係数の有意差が認められる時の決定係数の範囲が(25)式で確定できることとなる。

同様にして，$F_0<1$の場合には，



第1図　検定にパスする決定係数と自由度の関係
(危険率$\alpha/2=0.025$)



第２図　検定にパスする決定係数と自由度の関係
（危険率$\alpha/2=0.005$）

$$R^2<m/(n-1),\quad if\quad F_0<1 \quad \cdots\cdots\cdots (26)$$

この条件下で，決定係数の範囲はつぎのように確定される。

$$R^2<mF^m_{n-m-1}(1-\alpha/2)/\{(n-m-1)+mF^m_{n-m-1}(1-\alpha/2)\} \quad \cdots\cdots\cdots (27)$$

かくして，重相関係に関するF一分布の両側検定結果に基づき，重相関係数が有意になるところの決定係数の範囲を確定することができることとなった。

図は具体的にこの範囲を求めたものである。すなわち，第１図はF一分布の上側検定であって，危険率2.5％水準におけるmの値を（下方から）２，３，４，５，10，20，30の７通り変化させて描いたものである。ただし，実際の計測に当っては，$F_0<1$の場合には（14）式の分子と分母を入れ換え，F一値を$F^{n-m-1}_m(\alpha/2)$として求めた。

標本数または自由度がおよそ20以下の場合には，決定係数はかなり高い値が示されているが，自由度が増すに伴って次第に低下していく。さらに，各曲線とも標本数または自由度n_2（この場合独立変数の数mがF一分布における自由度n_1に相当し，$n-m-1$が自由度n_2となる）がグラフの左端から描かれず，途中から描かれているのは（23）式の$F_0>1$の条件から導かれる制約に振り落されることによるものである。

同様に第２図は，危険率を0.5％の水準で描いたものである。当然ながら危険率を小さくしていくと，重相関係数が検定にパスするレベルもアップしなければならず，その結果それに対応する決定係数のレベルも上方にシフトしていくことが認められる。

かくして，第１図または第２図，あるいは同様の方法で各種の危険率レベルで描かれた対応図を利用することによって，決定係数に一層の情報を与えることができるものと考える。もちろん、決定係数それ自体にも推計式の説明力を示す情報を含んでいるわけであるが，統計的有意性を付与することによって，重回帰分析の推計結果にも一層の現実的解釈を与えることができることになるものと思われる。

要　　約

多変量間の相互関係あるいは因果関係を明らかにする場合，回帰分析法に幾つかの勝れた特徴を認めることができる。その１つは，関数関係にまとめあげられた回帰式によって変数間の相互関係，あるいは従属変数に与える独立変数の影響力を具体的数量的に明らかにすることができるからである。因果関係が定性的に解明されるとともに，その関係が定量的に明らかにされることは，分

析上極めて大きな利点といえるであろう。第2には，統計的仮説検定を通じて，推計された回帰係数，重相関係数などに一定の信頼度を付与し，推計結果の実践的有用性を一層高めることができることにある。

本稿では，この第2の特徴に焦点を当て，推計された回帰係数の安定度を客観的に示すところの統計的仮説検定について考察し，偏回帰係数を対象とした t 一検定と，相関係数を対象とした F 一検定の相互関連を明らかにした。その結果，まず単純回帰分析においてはつぎのことが明らかになった。

回帰係数の t 一検定の結果は相関係数の F 一検定の結果に一致すること。したがって，回帰式の推計結果の安定性を吟味する場合には，回帰係数または相関係数のいずれか一方のみを検定すれば十分である。

勿論これは単純回帰分析の場合であって，重回帰分析には当てはまらない。なぜなら，重相関係数は偏回帰係数の関連性を総合的に集約したものであって，特定の偏回帰係数との関連性を表したものではないからである。

そこで，重相関係数の検定結果に基づき，重相関係数が F 一検定にパスする時の決定係数と自由度の関係を明示する図の作成を試みた。もとより，決定係数にはそれ自体に，回帰式によって説明される従属変数の変動割合を示す有力な情報が含まれているわけあるが，しかしその説明力は，高ければ高いほど良いことはわかっていても，客観的に妥当な水準がどうであるかについてはなお不明であった。本図はそうした重回帰分析における決定係数の安定度を求める要請に対して，1つのよりどころを与えるものと考えられる。

文　献

1) *A. S.* ゴールドバーガー：計量経済学の理論．福地宗生．森口親司共訳，東洋経済，東京 (1972)　pp. 181—182

2) *A. S.* ゴールドバーガー：前掲書，pp. 142—145

3) *A. S.* ゴールドバーガー：前掲書，pp. 273—274

4) Durbin, J. & G. S. Watson : Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression II. *Biometrica*, **38**, 89-92 (1951)

5) 岩田暁一：経済分析のための統計的方法．東洋経済，東京（1979）　pp. 162—164

6) 北川敏男・稲葉三男：統計学通論．共立出版株式会社，東京（1985）　pp. 174—178

7) M. G. ケンドール：多変量解析．奥野忠一・大橋晴雄共訳，培風館，東京（1981）　pp. 96—97

8) 日本電気株式会社：計量経済モデル分析概説書．日本電気株式会社，東京（1971）　pp. 31—32

9) 大川勉：計量経済分析．新評論，東京（1975）　pp. 24—25

10) 大川勉：前掲書，pp. 135—139

11) 大川勉：前掲書，pp. 195—201

12) 奥野忠一・久米均・芳賀敏郎・吉沢正：多変量解析法．日科技連，東京（1977）　pp. 67—68

13) 坂下昇：計量経済学．東洋経済新報社，東京（1973）pp. 257—261

14) 佐和隆光：計量経済学の基礎．東洋経済，東京（1978）pp. 15—17

15) 杉本栄一：近代経済学の解明．理論社，東京（1973）p. 77