鳥大農研報（Bull. Fac. Agric., Tottori Univ.）34　129～136（1982）

結合推定量の小標本特性

笠原浩三*

昭和56年8月1日受付

On Small Sample Properties of Combined Estimators

Kozo KASAHARA*

Small sample properties of the combined estimators on simultaneous equation systems are considered in this paper. The combined estimator is a linear combination of the Two-Stage Least Squares, the Ordinary Least Squares and the Limited Information Maximum Likelihood.

The combined estimators were compared with each other. Then, three unequalities were presented. One of them is as follow:

$$\mathrm{Scombi} < \overset{*}{\mathrm{S}}\mathrm{combi}$$

where Scombi is a real variance of the combined estimator, $\overset{*}{\mathrm{S}}$combi is the variance when two estimators, namely, Two-Stage Least Squares and Ordinary Least Squares are independent of each other. This unequality shows the upper limited variance of the combined estimator if covariance of Two-Stage Least Squares and Ordinary Least Squares are greater than zero.

Accordingly, it is possible to test statistical hypotheses about coefficients obtained by the combined estimator under the minimum significance level.

緒　　言

近年，計量経済分析における連立方程式モデルの係数推定法として結合推定量が考え出され，その推定量特性が検討されている[3),4),5)]。それら結合推定量は通常の最小二乗法による推定量，2段階最小二乗法による推定量及び制限情報最尤法による推定量の1次結合からなるもので，偏り，歪度などの修正により，従来からの推定量を改良するものとして提唱されたものである。

しかし，これらの推定量の小標本特性については確率分布の厳密な計算が内生変数2個の特別なケースに限定されていることなどから，理論的精密確率密度の解析には一定の限界があって普遍的な結論が導かれるには至っていない。

また，経験的事実にもとづいて帰納法的に明らかにするモンテ・カルロ実験法は，小標本特性の解明に有力な手段としてこれまでに数多く用いられてきたが，結合推定量の小標本特性に関してはなお不十分であるように思われる。とりわけ，我々が現実問題で直面する標本の数は今では統計機関の安定的充実により，時系列データでほぼ20年間を下まわらない期間で資料の収集整理が可能になってきている。標本数が推定量特性に与える影響については既に体系的な解明が試みられているが，本稿では現実的問題を重視し，標本数を20個として結合推定量の推定量特性をモンテ・カルロ実験にもとづいて検討する。これが第1の課題である。

更に第2には，結合推定量の推定標準誤差をt-検定のための値として推計し，結合推定量に実践的な有用性を与えることである。結合推定量は2種類の推定量の1次結合からなるものであり，通常の方法で係数値の推定標準誤差を求めることは困難である。したがってまた，それを用いた統計的検定も不可能になるのである。計量経

* 鳥取大学農学部農業経営学科農業経済学及び農産物マーケッティング研究室
Department of Farm Economics, Faculty of Agriculture, Tottori University

済分析のメリットの１つは推計された係数値に対して統計的検定が行われ，その有効性が統計学的に確かめられることにあるものであって，結合推定量の統計的有意性の確認が困難となれば，いかに偏りの面で優れた推定量であろうともその実践的な有用性は失われることになるであろう。本稿では結合推定量の推定標準誤差を t-検定のための値として間接的に推計する方法を考え，その実践面における有用性をクライン・モデル[1]によって実証することとする。

結合推定量

いま，連立方程式モデルを構成する内生変数をY，外生変数をXで表し，それぞれ T×G, T×K からなる行列とする。ただしTは標本数である。このとき，連立方程式モデルの全体系はつぎのように表されるものとし，

$$YB+X\Gamma+\sigma U=0 \cdots\cdots(1)$$

更に推計しようとする第１番目の方程式はつぎのように表されるものとする。

$$y=Y_1\beta+X_1\gamma+\sigma u \cdots\cdots(2)$$

ただし，y は T×1, Y_1は $T\times G_1$, X_1は $T\times K_1$からなる行列であり，Y，Xはつぎのように分割されるものとする。

$$Y=(y,\ Y_1,\ Y_2)$$
$$X=(X_1,\ X_2)$$

ここで，Y_2, X_2は推計しようとする方程式には含まれていない内生変数と外生変数を表し，それぞれ $T\times G_2$, $T\times K_2$からなる行列である。したがってまた，$G=G_1+G_2+1$，$K=K_1+K_2$ともなる。

さて，このように連立方程式体系を一般的な形で定めることができるが，その係数推計法の１つとして，Sawa は通常の最小二乗法（Ordinary Least Squares Method; OLS）と２段階最小二乗法（２-Stage Least Squares Method ; 2SLS）の１次結合からなる結合推定量（Combined Estimator）をほとんど偏りのない推定量として提示している[5]。これを COMB1 とするとつぎのように表される。

$$\theta_{COMB1}=\frac{T-K+L-1}{T-K}\theta_{2SLS}-\frac{L-1}{T-K}\theta_{OLS}\cdots\cdots(3)$$

ただし，θ_{COMB1}, θ_{2SLS}, θ_{OLS}はそれぞれ COMB1, 2SLS, OLS による推定量であり，$L=K_2-G_1$である。したがって L は過剰識別の程度を示す値でもある。

また, Morimune は 2SLS と制限情報最尤法 (Limited Information Maximum Likelihood Method ; LIML) の１次結合からなる推定量, 及び LIML と OLS の１次結合からなる推定量を導き出しているが[4], これをそれぞれ COMB2, COMB3 とすると推定量はつぎのように表される。

$$\theta_{COMB2}=\frac{L-1}{L}\theta_{LIML}+\frac{1}{L}\theta_{2SLS}\cdots\cdots(4)$$

$$\theta_{COMB3}=\frac{T-K+L-1}{T-K+L}\theta_{LIML}+\frac{1}{T-K+L}\theta_{OLS}\cdots(5)$$

ただし，θ_{COMB2}, θ_{COMB3}, θ_{LIML}はそれぞれ COMB2, COMB3, LIML による推定量である。

本稿で考察の対象とするのはこの(3)～(5)式で定義される結合推定量の小標本特性である。

モンテカルロ実験の集約

本稿におけるモンテカルロ実験の方法及びその結果の集約の仕方は相対評価法[2]を基本的に踏襲したものであって，OLS, 2SLS, LIML の推定値を(3)式，(4)式，(5)式にそう入し，結合推定量として求めたものである。

実験モデルは２本の定義式を含む計４本の構造方程式から構成されているものであり，確率方程式はともに Over identify で認定条件は満足されている。実験は攪乱項の分散の大きさを変えて，定式化が良い場合（実験B）と定式化が悪い場合（実験A）に相当するように条件設定を行い，それぞれについて実験を試みた。標本数は先にも触れたように現実問題を重視し20個とし，反復回数は100回である。また，実験の結果は偏り，標準偏差，RMSE の３種類の評価指標によって集約するが，偏りとは推計された値の理論値からの偏りであり，標準偏差とは反復推計された推定量の標準偏差であり，RMSE とは平均平方誤差の平方根である。RMSE は偏りと標準偏差の比較指標を同じウェイトで総合した評価指標であり，それは推定量を90％程度カバーする確率領域での偏りを比較する指標でもある。

このような３評価指標を用いて結合推定量の各係数別の集約結果を示したものが第１表と第２表である。これによると第１に指摘できることは，定式化が良い場合には各推定量とも近似した値となり，その結果，偏り，標準偏差，RMSE の各評価指標において推定量間で大きな

第1表　モンテカルロ実験の集約 — 第1式 —

		定式化が悪い場合			定式化が良い場合		
		COMB1	COMB2	COMB3	COMB1	COMB2	COMB3
偏　り	a_0	14.662	14.869	15.049	0.25050	0.25066	0.25082
	a_1	0.445	0.411	0.382	0.67998	0.67988	0.67980
	a_2	0.0509	0.0147	0.0148	0.03979	0.03988	0.03996
	a_3	0.0822	0.0242	0.0261	0.08348	0.08334	0.8322
	a_4	0.359	0.331	0.307	0.5829	0.5829	0.5830
標準偏差	a_0	18.922	22.011	25.727	0.41943	0.41961	0.41976
	a_1	0.225	0.255	0.290	0.58948	0.59024	0.59092
	a_2	0.276	0.308	0.355	0.42602	0.42611	0.42619
	a_3	0.351	0.363	0.393	0.56839	0.56860	0.56879
	a_4	0.231	0.243	0.261	0.54116	0.54185	0.54245
RMSE	a_0	23.935	26.563	29.806	0.48854	0.48878	0.48898
	a_1	0.499	0.484	0.480	0.89992	0.90035	0.90072
	a_2	0.281	0.309	0.355	0.42787	0.42797	0.42806
	a_3	0.361	0.364	0.393	0.57449	0.57468	0.57485
	a_4	0.427	0.411	0.403	0.79539	0.79589	0.79633

注）定式化が良い場合のa_0以外の値はすべて100倍されている。

第2表　モンテカルロ実験の集約 — 第2式 —

		定式化が悪い場合			定式化が良い場合		
		COMB1	COMB2	COMB3	COMB1	COMB2	COMB3
偏　り	b_0	8.020	8.243	8.363	0.07822	0.07831	0.07835
	b_1	0.336	0.294	0.277	0.15963	0.15816	0.15897
	b_2	0.164	0.146	0.138	0.14915	0.14886	0.14873
	b_3	0.448	0.421	0.410	0.40410	0.40376	0.40362
	b_4	0.880	0.838	0.820	0.68312	0.68268	0.68250
標準偏差	b_0	57.265	56.837	56.719	0.54403	0.54404	0.54404
	b_1	1.294	1.232	1.209	1.15686	1.15633	1.15611
	b_2	0.515	0.495	0.489	0.44541	0.44529	0.44525
	b_3	0.740	0.712	0.702	0.63932	0.63912	0.63903
	b_4	1.085	1.004	0.974	0.87271	0.87209	0.87173
RMSE	b_0	57.824	57.431	57.332	0.54963	0.54965	0.54966
	b_1	1.336	1.267	1.241	1.16782	1.16723	1.16699
	b_2	0.541	0.516	0.508	0.46972	0.46952	0.46944
	b_3	0.865	0.827	0.813	0.75633	0.75597	0.75583
	b_4	1.397	1.308	1.273	1.10828	1.10745	1.10712

注）定式化が良い場合のb_0以外の値はすべて100倍されている。

相異が見られないことである。このことは，定式化が良い場合にはいずれの結合推定量を採用してもモデルの推計結果には大きな違いが現れないことを意味するものである。

これに対して定式化が悪い場合には推定量間の優劣の差が可成り強く認められる。すなわち，偏りの面で評価するなら，係数a_0，b_0はＣＯＭＢ１が最も優れており，それ以外の係数についてはa_3を除いてCOMB3が最も優

第3表 比較指標別相対評価得点

		OLS	2SLS	LIML	COMB1	COMB2	COMB3
実験A	偏り	−5	0	0	−1	+2	+4
	歪度	+5	−1	0	−5	0	+1
	尖度	−3	−2	+4	+2	−1	0
実験B	偏り	−5	−3	+5	−1	+1	+3
	歪度	−4	−3	+2	+2	+1	+2
	尖度	−5	+1	+3	−2	+1	+2

れている。更にバラツキの面で評価するなら係数 a_0〜a_4についてはCOMB 1が最も優れ，係数 b_0〜b_4についてはCOMB3が最も優れている。その結果RMSEで評価すると，係数 a_0, a_2, a_3でCOMB 1が最も優れ，それ以外の係数ではCOMB3が最も優れていることが確認できることである。

ともあれ個々の係数毎の比較では，全体の特性に関する把握が困難と思われるので相対評価法により体系全体の総合評価を試みると第3表のようになる。ここでは標本分布の特性をとらえる目的で偏り，歪度，尖度の別に各種推定量の相対得点が表されており，得点の大きいもの程優れていることを示すものとなっている。これによると，偏り，歪度，尖度の別に容易に推定量間の優劣比較が可能である。結合推定量に限定すると全般的にCOMB3が優れていることを理解することができる。

このように各推定量の特性を把握することができるのであるが，ここで更に偏り，歪度，尖度を同じウェイトで評価するものとし，これら3指標の総合値で比較すると，その優劣順位はつぎのようになる。(ただし，A＞BとはAがBに優ることを意味する)

実験Aについて，

$$\mathrm{COMB3} > \mathrm{LIML} > \mathrm{COMB2} > \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{OLS}}{\mathrm{2LSL}} > \mathrm{COMB1}$$

実験Bについて，

LIML＞COMB3＞COMB2＞COMB1＞2SLS＞OLS

以上のことから，総括的に結合推定量に関して優劣順位を示すならば，

COMB3＞COMB2＞COMB1

と結論づけることができるものと思われる。

t-検定のための推定標準誤差の推計

計量経済分析の長所の1つは推計された関数形に対して統計学的検定が行われ，推計された各パラメータの有意性が確認されることにある。ところが，結合推定量はOLS, 2LSLあるいはLIML相互の1次結合にもとづく推定量であり，通常の方法によって各パラメータの推定標準誤差を得ることは困難である。

そこでここでは結合推定量の推定標準誤差を，間接的な接近法によってt-検定に必要な値として推計し，更にクライン・モデルでその有用性を確かめてみたい。

いま，2LSL及びOLSによる推定量は一種の確率変数であるものと考え，その変量間の相関係数を $R_{2S,OL}$とし，共分散を cov $(\theta_{2SLS},\theta_{OLS})$ とすると，(3)式で表される結合推定量COMB1の推定標準誤差 S_{COMB1}はつぎのように示されるであろう。

$$S_{COMB1}=\left\{\left(\frac{T-K+L-1}{T-K}\right)^2 S^2_{OLS}+\left(-\frac{L-1}{T-K}\right)^2 S^2_{OLS} +2\left(\frac{T-K+L-1}{T-K}\right)\left(-\frac{L-1}{T-K}\right)\cdot R_{2S,OL}\cdot S_{2SLS}\cdot S_{OLS}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(6)$$

あるいは，

$$S_{COMB1}=\left\{\left(\frac{T-K+L-1}{T-K}\right)^2 S^2_{2SLS}+\left(-\frac{L-1}{T-K}\right)^2 S^2_{OLS} +2\left(\frac{T-K+L-1}{T-K}\right)\left(-\frac{L-1}{T-K}\right)\mathrm{cov}(\theta_{2SLS},\theta_{OLS})\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(6)'$$

である。ただし，S_{2SLS}, S_{OLS}はそれぞれ2SLS, OLS推定量の推定標準誤差である。

ここで変量 θ_{2SLS}と θ_{OLS}とが独立であるとすると cov $(\theta_{2SLS}, \theta_{OLS})=0$ となり，このときの結合推定量の推定標準誤差を S^*_{COMB1}とするとそれはつぎのようになる。

$$S^*_{COMB1}=\left\{\left(\frac{T-K+L+1}{T-K}\right)^2 S_{2LSS}+\left(-\frac{L-1}{T-K}\right)^2 S^2_{OLS}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(7)$$

したがって S_{COMB1} と S^*_{COMB1} の大小関係は共分散 cov (θ_{2SLS}, θ_{OLS})の正, 負の値に対応してつぎのようになる。

$$S_{COBM1} < S^*_{COMB1}, \quad \text{if cov } (\theta_{2SLS}, \theta_{OLS}) > 0 \tag{8}$$

$$S_{COMB1} > S^*_{COMB1}, \quad \text{if cov } (\theta_{2SLS}, \theta_{OLS}) < 0 \tag{9}$$

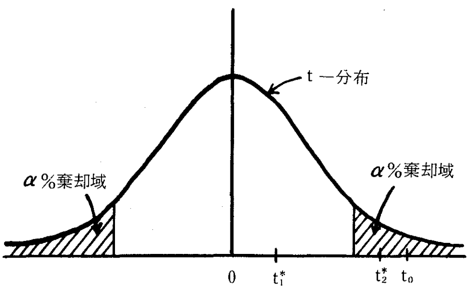
ところで, 共分散の値は確率変数の分布に依存するものであり, 一概にその正負を判定することは困難であるが, しかし, 我々は係数推計に際して出来る限り定式化を良くし, 推計式のフィットを高めるよう努めるものである。一般に定式化が良い場合には各種推定法による係数値は近似した値となり, したがって共分散は正でかつ大きく, 相関係数は1に近く, 正の値をとる傾向が強い。

このようなことから, 推計式のフィットを高め定式化を良くしようとする通常の係数推計に際しては, われわれはつぎの不等式の成立することを期待して良いものと思われる。

$$S_{COMB1} < S^*_{COMB1} \cdots\cdots(10)$$

すなわち, 結合推定量に関する推定標準誤差の真の値は少なくとも(7)式で求められる S^*_{COMB1} よりは小さなものであることが期待できることである。

このことは t-検定の棄却域を示した第1図で見るならばつぎのようになろう。すなわち, S^*_{COMB1} を用いた t-検定値(t_2^* 又は t_1^*)は真の推定標準誤差を用いた t_0 より必ず0側に位置することになり, t_1^* ないし t_2^* が棄却域内に落ちれば t_0 も必ず棄却域内に落ちることを示すものである。このことは, t^* が t_1^* のように t_0 より大きく乖離している場合は余り意味をもたないが, もし, t_2^* のように t_0 に比較的に接近している場合には, t^* は t_0 の棄却域内存在をチェックする有力な情報を与えることになろう。



第1図　t-分布と棄却域

つぎに 2SLS と LIML の1次結合からなる結合推定量 COMB2の推定標準誤差の推計について検討しよう。

いま, θ_{2SLS} と θ_{LIML} のそれぞれの推定標準誤差を S_{2SLS}, S_{LIML} とし, 更にその2変量間の相関係数を $R_{LI,2S}$ とすると, 結合推定量 COMB2の推定標準誤差 S_{COMB2} はつぎのように示される。

$$S_{COMB2} = \left\{\left(\frac{L-1}{L}\right)^2 S^2_{LIML} + \left(\frac{1}{L}\right)^2 S^2_{2SLS} + 2\left(\frac{L-1}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right) R_{LI,2S} S_{2SLS} \cdot S_{LIML}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdots(11)$$

ここでもし, $R_{LI,2S}$ が最大値＝1をとるならばその時の結合推定量 COMB 2の推定標準誤差 S^*_{COMB2} はつぎのように表される。

$$S^*_{COMB2} = \left\{\left(\frac{L-1}{L}\right)^2 S^2_{LIML} + \left(\frac{1}{L}\right)^2 S_{2SLS} + 2\left(\frac{L-1}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right) S_{2SLS} \cdot S_{LIML}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots(12)$$

ところで, 実際の係数推計に際しては先に述べた理由により, $R_{LI,2S}$ は正の値をとる傾向が強く, またその値も1に近いものである。したがって(11)式, (12)式から得られる S_{COMB2} と S^*_{COMB2} とは接近した値をとることが期待でき, 更に(L－1)が過剰識別である限り負にはならないからその大小関係についてはつぎの不等式を満足すべきものであることが強く期待できる。

$$S_{COMB2} < S^*_{COMB2} \cdots\cdots(13)$$

したがってわれわれは, この S^*_{COMB2} を用いて第1図に示した考え方に従い, t_0 が棄却域内に存在するかどうかをチェックする有力な t-検定値を得ることができる。

また同様にして, (5)式に示された結合推定量 COMB3の推定標準誤差 S_{COMB3} はつぎのように表される。

$$S_{COMB3} = \left\{\left(\frac{T-K+L-1}{T-K+L}\right)^2 S^2_{LIML} + \left(\frac{1}{T-K+L}\right)^2 S^2_{OLS} + 2\left(\frac{T-K+L-1}{T-K+L}\right)\left(\frac{1}{T-K+L}\right) R_{LI,OL} \cdot S_{LIML} \cdot S_{OLS}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots(14)$$

ただし, $R_{LI,OL}$ は θ_{LIML} と θ_{OLS} 間の相関係数であり, S_{LIML}, S_{OLS} はそれぞれ LIML, OLS 推定量の推定標準誤差である。

ここで相関係数 $R_{LI,OL}$ が最大値＝1をとるものとし, そ

の時の推定標準誤差を S^*_{COMB3} とするとつぎのように示される。

$$S^*_{COMB3}=\left\{\left(\frac{T-K+L-1}{T-K+L}\right)^2 S^2_{LIML}+\left(\frac{1}{T-K+L}\right)^2 S^2_{OLS}+2\frac{T-K+L-1}{(T-K+L)^2}S_{LIML}\cdot S_{OLS}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots (15)$$

更に，$T-K+L-1=T-K-K_2-G_1-1=T-(K_1+G_1+1)=$ 自由度 >0 であるから，S_{COMB3} と S^*_{COMB3} の大小関係は先の理由によりつぎの不等号を満足することが期待される

$$S_{COMB3}<S^*_{COMB3} \cdots\cdots (16)$$

かくしてわれわれは(10)式，(13)式，(16)式を用いて，各結合推定量の推定標準誤差に関する一種の上限値を求めることが可能になるのである。それは第1図に示されるように控え目な検定値を与えるものであるが，t^* が t_0 に接近している場合には有力な検定値になり得るものである。

以上，結合推定量の推定標準誤差を t-検定に必要な値として推計する方法を示したが，それはまた，OLS, 2SLS, LIML の各推定標準誤差が推計できていれば容易に算出できるものである。最後に，このような方法によって求められる一種の上限値がどの程度有効なものであるか考察しておこう。

以下はクラインモデルに対して COMB1, COMB2, COMB3 で推定したものである。ただし，(　)内はそれぞれ(10)式，(13)式，(16)式を用いて算出されたものであり，推定標準誤差の一種の上限値である。〈 〉内がその上限値を用いたときの t-値である。

結合推定量 COMB1 による推計結果

$$\begin{cases}
C_{2-0}=\underset{}{16.604}-\underset{\substack{(0.152)\\ \langle 0.064\rangle}}{0.00972}\pi+\underset{\substack{(0.0520)\\ \langle 15.627\rangle}}{0.812}(W_1+W_2)+\underset{\substack{(0.138)\\ \langle 1.704\rangle}}{0.236}\pi_{-1}\\[2ex]
I_{2-0}=22.621-\underset{\substack{(0.238)\\ \langle 0.312\rangle}}{0.0742}\pi+\underset{\substack{(0.224)\\ \langle 3.043\rangle}}{0.681}\pi_{-1}-\underset{\substack{(0.0498)\\ \langle 3.381\rangle}}{0.168}K_{-1}\\[2ex]
W_{2-0}=0.0661+\underset{\substack{(0.0427)\\ \langle 10.271\rangle}}{0.439}(Y+T-W_2)+\underset{\substack{(0.0466)\\ \langle 3.150\rangle}}{0.147}(Y+T-W_2)_{-1}+\underset{\substack{(0.0349)\\ \langle 3.730\rangle}}{0.130}t
\end{cases}$$

結合推定量 COMB2 による推計結果

$$\begin{cases}
C_{L-2}=16.950-\underset{\substack{(0.164)\\ \langle 0.870\rangle}}{0.143}\pi+\underset{\substack{(0.0559)\\ \langle 14.653\rangle}}{0.818}(W_1+W_2)+\underset{\substack{(0.164)\\ \langle 2.044\rangle}}{0.336}\pi_{-1}\\[2ex]
I_{L-2}=22.013+\underset{\substack{(0.135)\\ \langle 0.694\rangle}}{0.0939}\pi+\underset{\substack{(0.200)\\ \langle 3.314\rangle}}{0.664}\pi_{-1}-\underset{\substack{(0.0438)\\ \langle 3.778\rangle}}{0.166}K_{-1}\\[2ex]
W_{L-2}=0.0723+\underset{\substack{(0.0396)\\ \langle 11.011\rangle}}{0.436}(Y+T-W_2)+\underset{\substack{(0.0432)\\ \langle 3.449\rangle}}{0.149}(Y+T-W_2)_{-1}+\underset{\substack{(0.0324)\\ \langle 4.043\rangle}}{0.131}t
\end{cases}$$

結合推定量 COMB3 による推計結果

$$\begin{cases}
C_{L-0}=17.091-\underset{\substack{(0.209)\\ \langle 0.939\rangle}}{0.197}\pi+\underset{\substack{(0.0601)\\ \langle 13.665\rangle}}{0.821}(W_1+W_2)+\underset{\substack{(0.181)\\ \langle 2.082\rangle}}{0.377}\pi_{-1}\\[2ex]
I_{L-0}=21.858+\underset{\substack{(0.215)\\ \langle 0.790\rangle}}{0.170}\pi+\underset{\substack{(2.201)\\ \langle 3.288\rangle}}{0.660}\pi_{-1}-\underset{\substack{(0.0440)\\ \langle 3.748\rangle}}{0.165}K_{-1}\\[2ex]
W_{L-0}=0.0778+\underset{\substack{(0.0392)\\ \langle 11.083\rangle}}{0.434}(Y+T-W_2)+\underset{\substack{(0.0428)\\ \langle 3.525\rangle}}{0.151}(Y+T-W_2)_{-1}+\underset{\substack{(0.0324)\\ \langle 4.061\rangle}}{0.132}t
\end{cases}$$

更に第4表はこのようにして得られた結合推定量の t-値と，OLS, 2SLS, LIML による t-値を比較整理したものである。これによるとまず賃金関数については，すべてが5％有意水準で有意であることが示されており，結合推定量の控え目な t-検定値が十分有効であることを確認することができる。

また投資関数については，係数 K_{-1}，π_{-1} はどの推定量とも5％有意水準で有意であり，賃金関数同様に t-検定値として十分有効であることが認められる。一方係数 π については5％有意水準で有意であるものは OLS のみであるが，しかし特に結合推定量のみが劣るということでもない。例えば COMB3 は0.790であり，2SLS の0.780よりは大きくなっている。

更に消費関数についてみると，OLS, COMB1 が他と若干異なる結果が見られるものの，そのほかの t-検定はいずれも同じ結果になっており，特に結合推定量のみが劣るということは認め難い。

以上のことから，一種の上限値として間接的に推計した推定標準誤差は，t-検定値としては控え目に帰無仮説を棄却するものであるが，実際問題においては十分有効な検定能力をもつものであるということができよう。

第4表 推 定 量 別 t-値

消費関数	π	W_1+W_2	π_{-1}
OLS	2.115 *	19.933 **	0.992
2SLS	0.132	18.111 **	1.814 *
LIML	1.024	13.393 **	2.117 *
COMB1	0.064	15.627 **	1.704
COMB2	0.869	14.653 **	2.044 *
COMB3	0.939	13.665 **	2.082 *
投資関数	π	π_{-1}	K_{-1}
OLS	4.939 **	3.302 **	4.183 **
2SLS	0.780	3.404 **	3.930 **
LIML	0.339	3.287 **	4.732 **
COMB1	0.312	3.043 **	3.381 **
COMB2	0.694	3.314 **	3.778 **
COMB3	0.790	3.288 **	3.748 **
賃金関数	$(Y+T-W_2)$	$(Y+T-W_2)_{-1}$	t
OLS	13.561 **	3.904 **	4.082 **
2SLS	11.082 **	3.398 **	4.026 **
LIML	10.940 **	3.501 **	4.059 **
COMB1	10.271 **	3.150 **	3.279 **
COMB2	11.011 **	3.449 **	4.043 **
COMB3	11.083 **	3.525 **	4.061 **

注）*, ** はそれぞれ10%, 5％有意水準で有意であることを示す。

要　約

本稿は，計量経済学における連立方程式体系の係数推計法として考え出された結合推定量についてその小標本特性をモンテカルロ実験によって明らかにするとともに，それらの推定標準誤差をt-検定のための値として間接的に推計する方法を提示し，その実践面における有用性を確認しようとしたものである。

結合推定量とは，これまでに考え出されてきた係数推計法のうちの二種類の推定量の1次結合として定められるもので，ここではCOMB1とは2段階最小二乗法と通常の最小二乗法の1次結合からなるものであり，COMB2とは2段階最小二乗法と制限情報最尤法の1次結合からなるものであり，更にCOMB3とは制限情報最尤法と通常の最小二乗法の1次結合からなるものとしている。

これらの結合推定量の小標本特性は，まず現実的側面を重視し標本数を20個とするモンテカルロ実験によって相互に比較検討を試みた。その結果，モデルの定式化が優れている場合には，偏り，分散とも小さく，かつ推定量間で大きな違いが見られないことである。すなわち，決定係数が大きく関数形のフィットが良い場合にはいずれの推定量を用いても推計結果には大差がないことである。

更に，定式化の良し悪しにかかわらず偏り，歪度，尖度の面から総合的に評価すると，COMB3が最も優れ，次いでCOMB2，COMB1の順位になることが判明した。

つぎに，これら結合推定量の推定標準誤差をt-検定のための値として間接的に推計する方法を検討した。

計量経済分析のメリットの1つは係数値の統計学的検定を経て分析結果に実践的な意味を与えることにあるものであり，結合推定量の推定標準誤差の推計は統計的検定を可能ならしめるものとして重要である。t-検定のための値として間接的に推計する方法は，推定標準誤差の一種の上限値であり，t-検定としては控え目な棄却域を示すものであるが，クライン・モデルを適用した結果，t-検定を行うための推定標準誤差としては十分有用であることが認められるものである。

文　　　献

1）Klein,L.R. : Economic Fluctuation in the United States.1921-1941 John Wiley and Sons, New York (1950) pp. 58～80

2）笠原浩三：同時方程式体系の小標本特性に関するモンテカルロ実験．鳥取大学農学部研究報告，**33**，96～106 (1980)

3）大川勉編：同時方程式体系の推定法．大阪市立大学経済学会，(1978) pp.93～156

4）Morimune, K. : Inadmissibility of the Limited Information Maximum Likelihood Estimator When the Disturbance are small. *Kyoto Institute of Econmic Research Discussion Paper Series, 110 (1977)*

5）*Sawa, T. : The Mean Square Error of a Combined Estimators and Numerical Comparison with the TSLS Estimators. Journal of Econometrics,* **1** 115～132 (1973)