

下降傾斜管内の跳水現象に関する基礎的研究

II : 単一跳水現象による水頭損失の算出

井 上 光 弘

(鳥取大学農学部農業水利学研究室)

FUNDAMENTAL STUDIES ON THE HYDRAULIC JUMP IN CIRCULAR CONDUITS WITH DOWNGRADE SLOPES

PART II :

Calculation of Head loss due to a Single, Steady Hydraulic Jump

by

Mitsuhiro INOUE

(Department of Irrigation and Drainage Engineering, Faculty of Agriculture, Tottori University)

A single, steady hydraulic jump may be a simple phenomenon in the various types of jump in sloping circular conduits.

In this paper, the momentum equation (verified in Part I) is transformed by introducing non-dimensional factors and an experimental equation on the length of a single, steady hydraulic jump is obtained as a function of the supercritical Froude number. Then, pressure recovery values which are calculated by the transformed momentum equation closely agree with the experimental results. Therefore, an approximate method is tried on the assumption that head loss due to a single, steady Hydraulic Jump is calculated by the initial depth of the jump, experimental equations on the length of the jump, and discharge of water. The values calculated by this method agree well with the experimental results.

I. ま え が き

新設されたパイプラインに通水するような場合、最初のうちは、小流量で徐々に注水していくので、管内の流動状況は、いわゆる、円形断面開水路と類似した流れとなるが、通水後、時間がたつとともに、しだいにパイプラインの底部から満流し、その境界で、一般に、跳水現

象が観察される。とくに、この現象は、大きな落差をもつ下降傾斜管内で著しく現われ、跳水直前の大きな流速や、その跳水のもつ激しいかく乱に伴って、相当な量の空気連行が生ずる。この連行空気量の大小によって、管路内に、単一跳水現象、スリッピング現象、多連跳水現象などの種々のタイプの跳水現象が観察される。

第1報において単一跳水現象の一次元モデルより展開された運動量方程式¹⁾を、さらに無次元量を導入して変形し、跳水部分の圧力回復値を算定した。また、跳水の長さに関する実験式がフルード数の関数として得られたため、その実験式と、流量、および跳水直前断面の水深からなるデータだけで、単一跳水現象による損失水頭の近似的算定法を試み、その結果、実験値とよく一致した。

II. 一次元運動量方程式の変形

単一跳水現象の跳水直前断面と、跳水後圧力最大断面とで、運動量原理を適用し、エアポケット内の空気圧を考慮に入れて、運動量方程式を誘導してきたが、水の単位体積重量を1.0 g/cm³とし、また空気単位体積重量を無視しても影響がないという結果より、運動量方程式の各項が簡単になり、無次元量を導入して、方程式を変形できる。すなわち、 $F_1 + M_1 = F_2 + M_2 - W \sin \theta$ なる一次元運動方程式¹⁾の各項を水の単位体積重量で除したものを、それぞれ、 F_1' 、 M_1' 、 F_2' 、 M_2' 、 W' 、とすると、

$$F_1' = (P_1 - Y_1 \cos \theta) A_p + S_1 \cos \theta \cdot A_1 \dots\dots (1)$$

$$M_1' = \overline{v_{w1}^2} A_1 / g \dots\dots\dots (2)$$

$$F_2' = (P_2 - R \cos \theta \frac{1}{1+\beta}) A_p \dots\dots\dots (3)$$

$$M_2' = \frac{\overline{v_m^2} A_p}{(1+\beta) g} \dots\dots\dots (4)$$

$$W' \sin \theta = (V_w + \frac{V_m}{1+\beta}) \sin \theta \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで

- F_1 : 跳水直前断面における全圧力 (g),
 - M_1 : 跳水直前断面における全運動量 (g),
 - F_2 : 跳水後圧力最大断面における全圧力 (g),
 - M_2 : 跳水後圧力最大断面における全運動量 (g),
 - θ : 管軸の水平に対する傾斜角(°),
 - p : 圧力 (g/cm²), Y : 水深 (cm), A : 流積 (cm²)
 - A_p : 管断面積 (cm²), P : p/γ_w なる圧力水頭 (cm)
 - S : 水面から、その断面の図心までの距離 (cm),
 - β : 跳水後の気体体積率, g : 重力の加速度 (cm/sec²),
 - R : 管の半径 (cm), V : 跳水部分の体積 (cm³),
 - γ : 単位体積重量 (g/cm³), \overline{v} : 平均流速 (cm/sec),
- 添字については、1は跳水直前断面での値を意味し、2は跳水後圧力最大断面での値を意味する。そして、a

は空気、wは水、mは空気と水の混合流体を意味する。

次に、 $\overline{v_{w1}^2} / g Y_1 = Fr^2$, $A_1 / A_p = \lambda$ なる無次元量を導入し(1)式から(5)式を A_p で除して、整理すると、

$$F_1' / A_p = P_1 + (S_1 \lambda - Y_1) \cos \theta \dots\dots\dots (6)$$

$$\overline{v_{w1}^2} = g Y_1 Fr^2 \text{ より}$$

$$M_1' / A_p = Y_1 \lambda Fr^2 \dots\dots\dots (7)$$

$$F_2' / A_p = P_2 - \frac{R}{1+\beta} \cos \theta \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_m} &= \frac{Q_a + Q_w}{A_p} = \frac{(1+\beta) Q_w}{A_p} = \frac{(1+\beta) \overline{v_{w1}} A_1}{A_p} \\ &= (1+\beta) \overline{v_{w1}} \lambda \text{ なる関係, および, } \overline{v_{w1}^2} = g Y_1 Fr^2 \text{ より} \end{aligned}$$

$$M_2' / A_p = (1+\beta) Y_1 \lambda^2 Fr^2 \dots\dots\dots (9)$$

となる。したがって、一次元運動量方程式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} P_1 + Y_1 \lambda Fr^2 + (S_1 \lambda - Y_1) \cos \theta \\ = P_2 - \frac{R}{1+\beta} \cos \theta + (1+\beta) Y_1 \lambda^2 Fr^2 \\ - 2 W_0 R \sin \theta \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 W_0 は $W_0 = (V_w + \frac{V_m}{1+\beta}) / 2 A_p R$ なる無次元量である。

III. 圧力回復算定値

跳水部における圧力回復 R_p とは、Fig 1に示すように跳水直前断面におけるピエゾ水頭 ($Z_1 + P_1$)と、跳水後圧力最大断面におけるピエゾ水頭 ($Z_2 + P_2$)との差であると定義し、跳水後の平均流速が跳水直前に比べて小さくなったために、速度水頭が減少し、その結果、圧力水頭が増大して生じたものである。

つまり、圧力水頭をそれぞれ、 P_1 、 P_2 、とし、跳水下部の長さ L_j より、位置水頭の差 ($Z_1 - Z_2$)を求めて、圧力回復 R_p を算出すると、

$$R_p = P_2 - P_1 - L_j \sin \theta \dots\dots\dots (11)$$

として求める。そこで(10)式において $P_2 - P_1 - L_j \sin \theta$ を左辺に整理すると、

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 - L_j \sin \theta &= Y_1 \lambda \{ 1 - \lambda (1+\beta) \} Fr^2 \\ &+ \{ S_1 \lambda + \frac{R}{1+\beta} - Y_1 \} \cos \theta \\ &+ \{ 2 W_0 R - L_j \} \sin \theta \equiv R_{pc} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

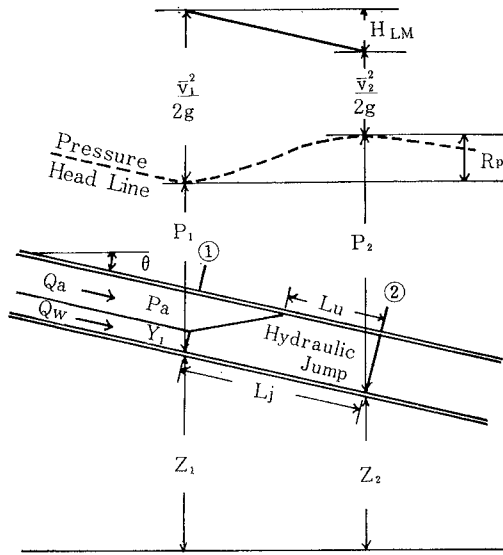


Fig. 1 Explanation chart of Pressure Recovery

となる。これは (11) 式より明らかなように、圧力回復値であるから、このようにして求めた圧力回復値 R_p を圧力回復算定値 R_{pc} とする。

したがって、圧力回復 R_{pc} は、 λ 、 β 、 F_1 、 W_0 なる無次元量と、 Y_1 、 S_1 、 R 、 θ 、 L_j の関数であり、ここで、パラメーターについて考察すると、 λ は A_1/A_p で Y_1 と R の関数、 β は $\beta = 0.0066 (Fr - 1)^{1.4}$ なる Kalinske らの式で与えられ、 Fr は $\overline{v_{w1}}/\sqrt{gA_1/B_1}$ で定義されたもので、 Q_w と Y_1 と R の関数、また、 Fr は $\overline{v_{w1}}/\sqrt{gY_1}$ で定義されたもので、 Q_w と Y_1 と R の関数、 W_0 は β 、 L_j 、 Lu 、 R 、 Y_1 の関数となる。言換えると、 R と θ が与えられるとき、 R_{pc} は、 Q_w 、 Y_1 、 Lu 、 L_j だけの関数となり、それらの4つのデーターを測定すれば、 R_{pc} は求まることになる。そこで、 P_1 、 P_2 、 θ 、 L_j を実験で測定して、(11) 式より求められた圧力回復値を、圧力回復測定値 R_{pm} として、両者を比較すると、Fig 2 のようになる。

測定値と算定値とに、かなりのバラツキがあるが、片寄らずに、ほぼ中央に位置していることより、

- (1) 圧力分布を静水圧分布と仮定した。
- (2) 気水混相流を均質流と見なし、液相と混相との境界を平面と仮定して跳水の重さを算定した。
- (3) 跳水直前の水面は、わずかながら壁面に沿って弯曲しているが、これを完全に水平と仮定して流積を算定し、平均流速を求めた。

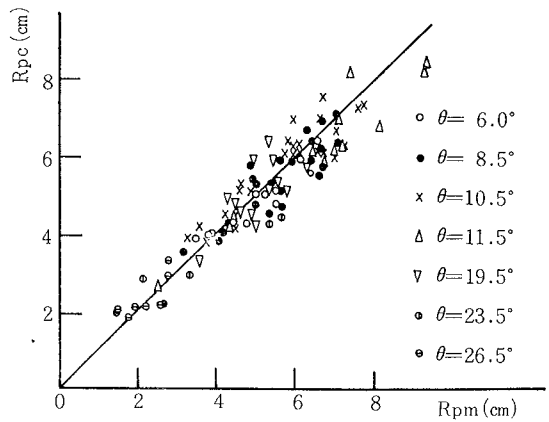


Fig. 2 Pressure Recovery by calculation and Measurement

(4) 空気の単位体積重量を無視し、水の単位体積重量を水温によらずに $1.0 g/cm^3$ とした。

などの仮定によって、大きな誤差を生じないことが認められる。

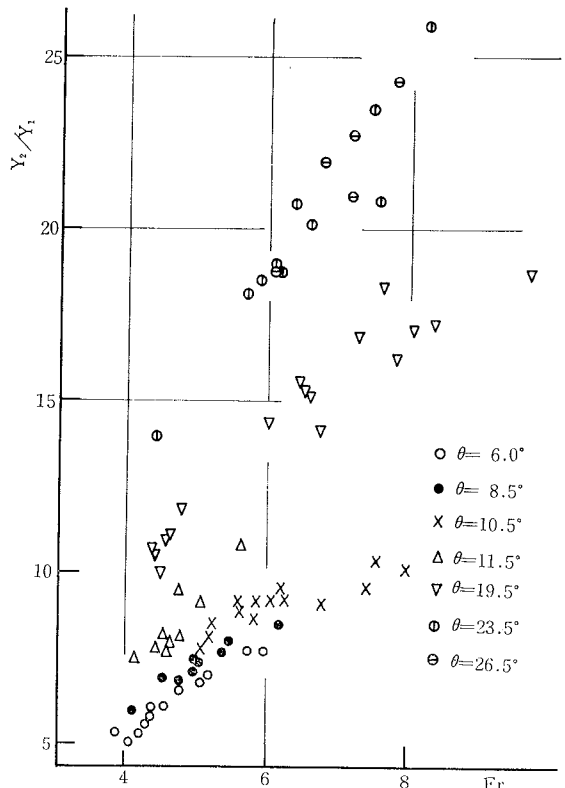


Fig. 3 Relationship of Conjugate depth and Froude number

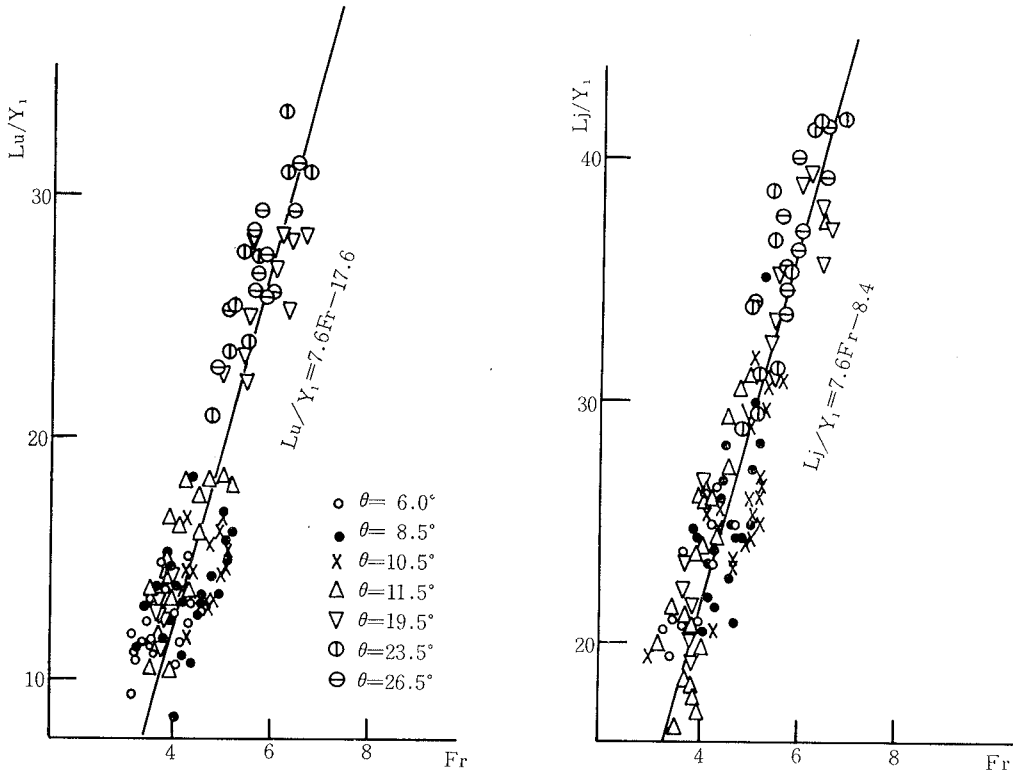


Fig. 4 Experimental Relations between Froude number Fr and Relative length of jump L_u/Y_1 , L_j/Y_1

IV. 跳水の長さに関する実験式

跳水上部の長さ L_u 、および、跳水下部の長さ L_j が、流量 Q_w や水深 Y_1 によって関連づけられるなら、圧力回復算定値 R_{pc} が、 L_u や L_j のデータなしに算定されることが予想される。そのような観点から、跳水の長さに関するデータを種々のパラメーターで整理した。

一般の傾斜矩形開水路の場合、共役水深の比 Y_2/Y_1 とフルード数 Fr ($=Fr_c$) との関係は、水路の傾斜角によって異なり、直線的になっているが、下降傾斜管内の単一跳水現象の場合、直線的だとは断定できないが、Fig 3 のように、同様な傾向が見られることは、興味のあることである。

跳水の長さに関する実験データに対しては、Fig 4 に示すように、 L_j/Y_1 対 Fr 、および、 L_u/Y_1 対 Fr についてのみ強い相関が得られた。

すなわち、単一跳水現象が生ずる範囲では、跳水の長さは、傾斜角に無関係で、フルード数と強い相関があり、最小二乗法によって、次の直線式で表わすことができた。

$$L_u/Y_1 = 7.6 Fr - 17.6 \dots\dots\dots (13)$$

$$L_j/Y_1 = 7.6 Fr - 8.4 \dots\dots\dots (14)$$

V. 水頭損失算定法

本来、跳水部自身の水頭損失は、考えている領域でのエネルギー式から求まるが、単一跳水現象が起こる範囲では、連行空気量が数%であるため、空気の重量流量のオーダーが非常に小さく、それを無視してもかまわないので、次の (15) 式のように、跳水による水頭損失 H_{LM} は、跳水直前断面と、跳水後圧力最大断面との、ピエゾ水頭と、速度水頭を測定すれば求まることになる。

$$\left. \begin{aligned} H_{LM} &= \frac{v_w1^2}{2g} - \frac{v_m2^2}{2g} - R_{pm} \\ R_{pm} &= P_2 - P_1 - L_j \sin\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

しかしながら、室内実験以外には、跳水後圧力最大断面での圧力水頭や速度水頭を測定するのは困難である。そこで、実際に測定できるデータで、単一跳水現象による損失水頭を算定することを目的として、運動量方程式より誘導された関係式と、跳水の長さに関する実験式を用いて、流量 Q_w と水深 Y_1 だけで、跳水による水

頭損失を算定しようと試みたのである。つまり、(12)式より跳水による水頭損失算定値 H_{Lc} は、

$$H_{Lc} = \frac{\overline{v_{w1}^2}}{2g} - \frac{\overline{v_{m2}^2}}{2g} - R_{pc} \dots\dots\dots (16)$$

となり、 $\overline{v_{w1}^2} = g \cdot Y_1 \cdot Fr^2$ 、および、 $\overline{v_{m2}^2} = (1 + \beta)^2 \overline{v_{w1}^2} \lambda^2 = g Y_1 (1 + \beta)^2 \lambda^2 Fr^2$ より、

$$\frac{\overline{v_{w1}^2}}{2g} - \frac{\overline{v_{m2}^2}}{2g} = \frac{Y_1 Fr^2}{2} - \frac{Y_1 (1 + \beta)^2 \lambda^2 Fr^2}{2} \dots\dots\dots (17)$$

となるから、(16)式に、(12)式、(17)式を代入して、水頭損失算定値 H_{Lc} は、

$$\begin{aligned} H_{Lc} &= \frac{Y_1}{2} \{ 1 - \lambda^2 (1 + \beta)^2 \} - R_{pc} \\ &= \frac{Y_1}{2} \{ 1 - \lambda (1 + \beta) \} \{ 1 - \lambda (1 - \beta) \} Fr^2 \\ &\quad - \left\{ S_1 \lambda + \frac{R}{1 + \beta} - Y_1 \right\} \cos \theta \\ &\quad - \left\{ 2 W_o R - L_j \right\} \sin \theta \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。ここで、各項のパラメーターについて、再び考察すると、前述のように、 R_{pc} は R と θ が与えられると、 Q_w 、 Y_1 、 L_u 、 L_j だけの関数となり、 λ 、 β 、 Fr も同様に、 Q_w 、 Y_1 の関数となるから、(18)式より、水頭損失算定値 H_{Lc} も、 Q_w 、 Y_1 、 L_u 、 L_j だけの関数となる。ところが、跳水の長さ L_u 、 L_j は、(13)式、(14)式から、 $L_u = Y_1 (7.6 Fr - 17.6)$ 、 $L_j = Y_1 (7.6 Fr - 8.4)$ となり Y_1 、 Q_w の関数になる。したがって、水頭損失算定値 H_{Lc} は、流量 Q_w と跳水直前断面の水深 Y_1 のデータだけで求まることになる。このようにして求められる水頭損失算定値 H_{Lc} と、(15)式で求められる水頭損失実測値 H_{LM} とを両座標にプロットすると、Fig 5 のようになる。

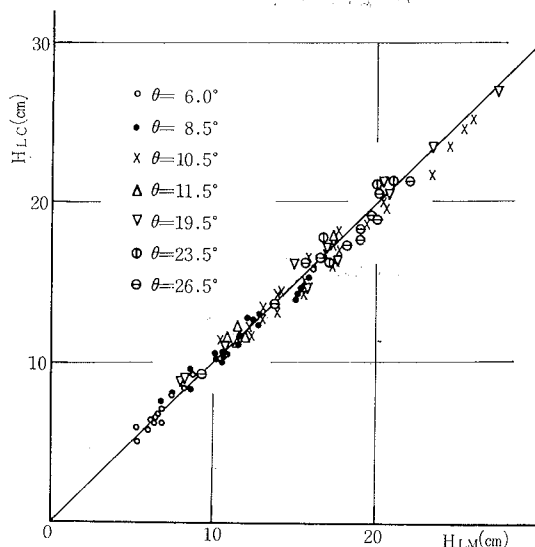


Fig. 5 Head Loss due to Jump by Calculation and Measurement

VI. あとがき

定常的な単一跳水現象は、下降傾斜管内の跳水現象のうちでは、比較的単純なものであるにもかかわらず、跳水直後の渦作用や気泡の合体など複雑な水理現象で、解析的に解くことは困難である。そこで、筆者は、エアポケット内の空気圧を考慮に入れた運動量方程式より誘導された圧力回復算定式と、跳水の長さに関する実験式、および、Kalinske らの跳水による空気連行能力に関する実験式を用いて、流量 Q_w と跳水直前断面の水深 Y_1 だけを測定することによって、単一跳水現象による水頭損失を算定する方法を提案し、その結果、実測値と良く合致し、その近似的算定法の妥当性を立証した。

文 献

1) 井上光弘：鳥大農研究報告，26，(1974)