問いの生成を軸とした探究型学習（第 3 学年）
～「逆を考える場面」の授業改善～

小出智栄子
鳥取大学附属中学校　数学科
E-mail: koide_ci@tottori-u.ac.jp

Chieko Koide（Tottori University Junior High School）: **Inquiry-based learning (the third -grade) centering on generating questions.　— Classroom improvement about「Situations of consider the converse」SRP in the argument unit —**

要旨 — 本研究の目的は，生徒の主体的な学びの実現に向けて，「確かさへの問い」を生み出す方策を提案することである。生徒が問いをもって学ぶ探究型授業のモデルとして，SRP を研究の視座としておいた。TDS の観点から，主体的な取り組みを亜教授学的状況と定義することにした．教科書分析から，正しさを疑う場面が少ないことを認めた．結果，反例の存在や証明の必要性を生徒が実感する流れを生み出す授業計画が必要であると分かった．平行線と線分の比の逆と三平方の定理の逆について授業実践について報告する．

キーワード — 亜教授学的状況，逆，反例，平行線と線分の比，三平方の定理

Abstract — The purpose of this study was to think about what the actual design should be for the sake of the realization of students’ proactive learning. I focused on SRP as a model of exploratory learning in which students learn with self-generated questions. From the perspective of TDS, I have decided to define a proactive approach as adidactic situation. From the textbook analysis, it was admitted that there were few scenes where the correctness was doubted. As a result, it turned out that classes was needed to create a flow in which students could realize the existence of counterexamples and the need for proof. I report classes performed about the converse of intercept theorem and line segments and converse of Pythagoream theorem.

Key words — adidactic situation , converse , counterexample , intercept theorem, Pythagoream theorem

1. はじめに

本校では，自ら問い続ける生徒の育成のために『自ら問い続ける』生徒の育成のために『問いの生成を軸とした探究型学習』をテーマに 4 年目の実践になる（小出 2020, 小出 2019 他）．

それ以前より本校の数学科では生徒による主体的な学習を促すために問題解決学習に取り組んできた．その成果として多様な解法を見つけ出し最適を考えたり，問題を解き終わった後も拡張や一般化をして自ら問い続けたりする姿勢が認められた．しかしながら，主体的であると見られた生徒の姿は，数学の授業の流れとして，答えが出た後に生徒が「一般化」「統合」「特殊化」といった活動することを期待されていると察して取り組んでいる姿ではないか，教師が期待する範囲の活動に収束しているのではないかとの反省があった．

それらの反省を受け，未知の事柄に対しても自ら問いを生み出し，問い続け，新たな知を生み出す科学者のような姿勢を期待し教授人間学理論（以下 ATD）の範疇にある世界探究パラダイムへの教授システムの転換を目ざした．更に生徒に自由度を与え，主体的な探究を生み出すために，世界探究パラダイムに基づいた Study and Paths（以下 SRP）を参考にして実践をしている．

この SRP は数学に限らず教科横断型の探究であるため，他教科や総合的な学習の授業設計としても期待される．平成 29 年告示学習指導要領において，主体的に取り組む態度が観点にもなり，主体的な姿とはどのような姿なのか考えることにも繋がると期待する．

2. 世界探究パラダイムに基づく SRP

2.1. 世界探究パラダイムに基づく SRP

世界探究パラダイムに基づく SRP は研究

者が知識を生み出すような探究の過程がモデルとなっている．その過程では，既存の知識や解法をその存在理由も知らぬまま，単に教わるのではなく，問いに答えを与えようとする過程で必要となる知識を生徒が随時学習したり生み出したりするのである．従来の記念碑主義パラダイムや教え込みの授業とは異なり，知識が存在理由を伴って創造される点が世界探究パラダイムの大きな特徴だと言える．

この過程は既存の知識と問題解決や知識手段の創造の往還であり，問いと答えの往還であるとされている．一問一答ではない．最初の問い（イニシャルクエスチョン，以下 Q_0）は連続的に問いを生成することができる強力なものでなければならず，有する条件として，

① 数学的合法性 mathematical legitimacy
② 社会的合法性 social legitimacy
③ 機能的合法性 functional legitimacy

の 3 つが挙げられている．

この条件から分かるように SRP は教科横断型の特徴を持っており，数学の授業のみで達成されるものではなく，総合的な学習の方が近いと考えられる．また，1 時間の授業で完結するものではない．本研究では，学校現場で許される時間数で，扱う単元にあわせ，広く深く壮大な SRP の中から一部分の探究を抜き出して授業で行ったり，単元全体で取り扱ったりするものであることを理解している．

2.2. 主体的な学習の捉え方

本稿では生徒が「主体的な学習」をしている状況を教授学的状況理論(以下，TDS) の言葉である「亜教授学的状況」と規定することとした．

まず**図 1** は，学習を「学習者」と「ミリュー（環境）」との相互作用によって TDS をモデル化したものである．

「ミリュー」とは, 学習者が働きかける環境であり,「対峙する矛盾や困難，不均等を生成するもの」であると言われる．学習者が働きかけると，ミリューは学習者に情報やフィードバックを与える．また，学習者はミリューに働きかけることで情報やフィードバックを得る．ここでいう「フィードバック」とは，学習者の予想に反した情報である．これによって学習者には自らの考えを振り返ったり，修正したり，新たな情報を得ようとする必要が生まれ，ミリューへの新たな働きかけが生まれる．これらの学習者とミリューの相互作用が「学習」である．この学習によって学習者が何らかの知識や概念を発見・獲得するために，ミリューは教授学的な意味を持たせねばならない．これが「教師」の必要性であり，ミリューへの教師の介入である．例えば，問いに SRP の Q_0 が有する 3 つの条件を与えたり，問題場面を設定したりすることもミリューへの介入であると考える．

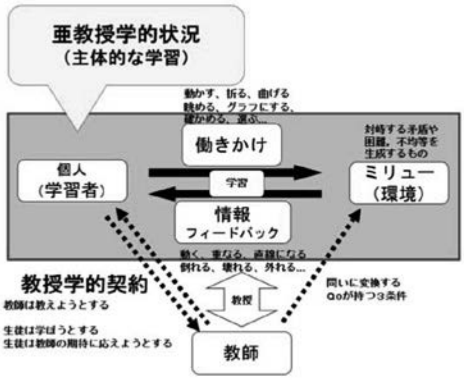

図 1　教授学的状況のモデル

学習者とミリューの相互作用（学習）に応じた教師の働きかけが教授活動と言える．学習者の学習がうまくいくように教師は支援など「教授」を行うのである．

次に，「教授学的契約」について述べる．これは学習者の相互期待に生じる関係であるとされる．例えば，授業において学習者が教師の期待に応えようとして問題解決にあたろうとすることは少なくない．これも教授学的契約の一つの例である．生徒が教授学的契約にもとづき，教師の期待を探って知識を得たとしても，それは TDS の意味での学習にならない．（石川・宮川）

最後に，TDS で,「亜教授学的状況」とは,「教師は存在しているが，生徒があたかもミリューとの相互作用のみを行っているように思う状況」を指す．**図 1** における四角い枠の部分がそれであり，教師が提示したミリューを学習者が自身の問いとして学習に臨み，教師がいるにも関わらず，あたかも自分とミリューだけのやり取りで新たな知識や概念を獲得していると考えている状態である．この状態を本稿では，「主体的な学習」と捉えている．

3. 今年度の実践

3.1. 研究課題の設定

SRP の特徴として，インターネットなど何でも使うということが挙げられる．得られた情報の真偽を自身で確かめながら進むのである．しかし，これまでの実践において，自身が求めた解が妥当なのか生徒が振り返っていたかどうかについては分析できていない．また，インターネットや本から得た正しそうな情報の真偽を確かめようとしたのか検証できていない．

事前に教師が生徒の探究を予想して作成する QA マップにも「本当か？」「なぜ？」と「正しそうなこと」の真偽を確かめる問いを示しはしない．真偽を問いながら進む姿勢こそ SRP が目ざす探究者の姿勢の特徴であるから，記述する必要がないとも考えらえる．

以上より，検証や証明をしていない「一見正しそうなこと」や「得た情報」「直感」に対して，生徒は真偽を問うているのかを検証する必要があると考える．自分で正しさを確かめながら，問いと答えを往還する SRP の実現のために示唆を得たい．そのため，本研究での課題は次のようにおく．

RQ:「正しそうなことがら」に対して生徒は どのように向き合うか.

3.2 研究の手順

（1）教科書における「逆」の扱いを見直す
（2）授業プランの作成
（3）授業実践と，その分析
（亜教授学的状況は生まれているか）
（4）今後の課題

4. 平行線と線分の比（線分の比と平行線）

4.1. 教科書における「逆」の扱い

平行線と線分の比 △ ABC で，辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき ❶PQ//BC ならば，AP : AB ＝ AQ : AC ＝ PQ : BC ❷PQ//BC ならば，AP : PB ＝ AQ : QC
平行線と線分の比の逆（線分の比と平行線） △ ABC で，辺 AB，AC 上に，それぞれ，点 P，Q があるとき， ❶AP : AB ＝ AQ : AC ならば，PQ//BC ❷AP : PB ＝ AQ : QC ならば，PQ//BC

啓林館と東京書籍の令和 3 年度用教科書を調べてみると , 定理を導いた後,「逆を考えてみよう」と問いが与えられる．中学 2 年で，逆はいつでも正しいわけではないと学習をしているため，証明をして定理を導いた後は逆について問う流れが設定してある．その流れについては納得をしている．

しかし，ここで注目する平行線と線分の比❶の逆は，PQ : BC を含めると，反例が生まれるためいつでも正しいとは言えない．教科書では，「逆を考えよう」と問いを提示した時点で PQ : BC の記載がなされていない．つまり，生徒が与えられる命題は証明ができる部分のみに限られ，生徒自身が反例（図 2）を見付ける流れは想定されていない．そのため，命題と生徒の間には，「証明の方法」についての学習は期待されるが, 正しさを問う必要は生まれにくい．

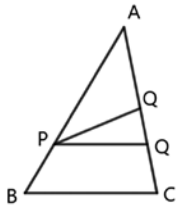

図 2　❶反例

大日本図書では，三角形の長さや点の位置を変えたりながら，線分の比と平行線についてのきまりを探り，見つけたきまりが結果として平行線と線分の比の逆であったと結論付ける．見つけたきまりは「本当にいつでも正しいと言えるか?」と問う場面は期待できるが，生徒が主体的に❶の反例 PQ : BC を意識することは期待できない．

4.2. 授業プラン

平行線と線分の比とその逆は反例の存在や，逆の真偽を問う必要性を感得する場面として期待する．したがって，PQ : BC を含めた状態で生徒に「逆について考えよう」と提示をすることとした．しかしながら平行線と線分の比❶の逆は，3 組の辺の比を同時に扱うため，処理の方法について困難が生じる．そこで，㋐ AP : AB ＝ AQ : AC，㋑ AQ : AC ＝ PQ : BC，㋒ AP : AB ＝ PQ : BC と分割し，それぞれで証明した後で，一つにまとめるよう支援する．つまり，「逆について考えよう」という提示から，❶㋐，❶㋑，❶㋒さらに❷の 4 つの課題に別れて生徒が問題解決に当たるようにする．

練り上げでは, ❶㋐, ❷の逆の証明が正しいことを確かめた後, ❶㋑, ❶㋒の証明について考える.

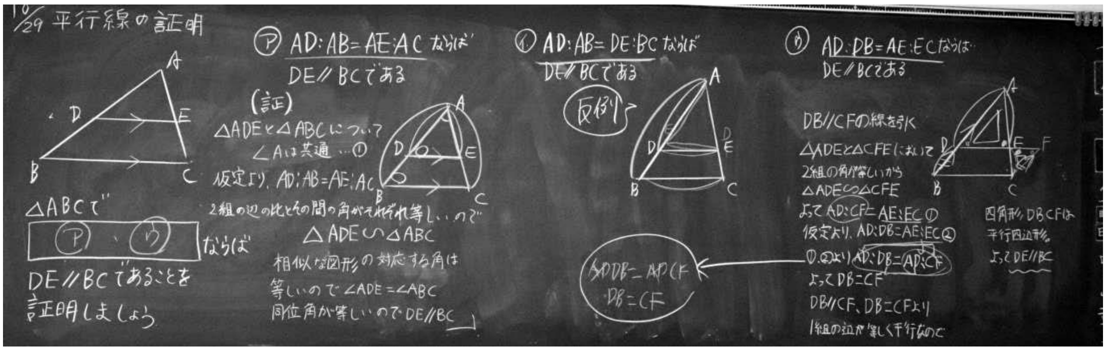

図 3　平行線と線分の比の逆　板書（点 D は点 P を，点 E は点 Q を表す）.

4.3. 授業の実際

学習課題Q_0「逆について考えよう」と生徒に提示して授業を始めた.

T：「❶の逆と❷の逆，どちらからとりかかる？」
（挙手…❷の方が人数が多い）
T：どうして❷を選んだの？
S_1：「❶は式が長いから大変そう.」
S_2：「式を分割したらいけんの？」
S_3：「三段論法みたいに等しいからいい」
T：「どう分割するの？いくつに？」
S_3：AP : AB ＝ AQ : AC（❶㋐）と AQ : AC ＝ PQ : BC（❶㋑）の 2 つ．AQ : AC を使って三段論法をする.」
T：じゃあ，㋐㋑㋒の 3 つの条件で考えていこう

それぞれが証明することにした.

❶㋐と❷㋒の証明を指名した生徒に板書させ，全員でよみ，正しいことを確認した．次に

T：❶㋑が正しいと証明できた人は？
（S：3 人挙手）
S_4：「いや、できんし.」
S_5：「証明できたん？」
S_6：「証明できたで.」
S_4：「証明せんでいいって．反例あるもん.」
S_4：「前に出ていいですか？」
（図を使って反例があることを伝える）
「こんなんで，三角形の合同条件の時と同じだって．この条件だと他の所にもできるんだって.」
S_7：「あ～確かに反例だわ．じゃあ，この証明は？」
S_8：「どっかが違うんじゃない？」

4.4. 授業の分析

他の学級での実践も含めて，授業は想定通りに展開され，反応も同様であった．❶㋑については面積を求めてみたり，垂線を引いてみたりと，多くの生徒が様々な図形に注目して問い続けていた．これは当初全員が既習の図形の性質を使い論理的な証明を考えようとしていたためである．ミリュー❶㋑からは，「平行四辺形を作れない」「証明ができない」と言ったフィードバックが返ってきた．それに対し，生徒は更に別の図形の性質を使って何度も働きかけ，フィードバックを得続けている．生徒とミリューの間で学習が続いている状態である．その働きかけの最後の工夫として反例を考えたと推察する．反例を疑い始めた生徒は時間をかけずに証明を完了させた.

生徒とミリューへの間で働きかけとフィードバックが何度も繰り返され，反例という情報を発見するに至った．そして，反例を見付けた生徒の発表に，教室全体が納得して認めるまでの流れは亜教授的状況であったと認められる.

しかし，Q_0「逆について考えよう」のサブクウェスチョンとして「本当に逆は成り立つのか？」「反例はないのか？」など証明の必要性や反例に関わる問いは発生しなかった．生徒がミリューに対して持つ問いの中に，正しさへの問いは確かに不足していることが分かった.

5. 三平方の定理の逆

5.1. 教科書における「逆」の扱い

三平方の定理についても「逆を考えよう」と提示し，逆も成り立つだろうという予想のもと，証明をする．その証明は 3 つの教科書共に間接証明法ではなく，同一法を採用しており，生徒がはじめて同一法に触れる教材であると言える．生徒自身が同一法を生み出すことは期待しにくいため，教師の介入，場合によっては教師による紹介が行われると考えらえる．このような教科書の流れでは，「なぜ，今までの証明ではなく同一法を使わなければならないのか」，その必要性やよさを感得する場面が設定できない．従来の記念碑パラダイムに収まってしまうのではないかと懸念する.

5.2. 授業プラン

ここでは,「逆は本当に正しいのか？」と生徒から「正しさへの問い」が生み出されることを期待する．また，同一法のよさや必要性を感じさせたいと考えた．

そこで，新潟市総合教育センター　授業に役立つ指導案の広場で示された「三平方の定理の逆の利用：∠ AOB の大きさを求めよう」を原問題とした．これは，同一法でなく，直接証明をしており，根拠には中学 3 年生単元の円周角の定理や相似を利用しているためである．

しかし，教授学的契約の元で生徒が単元や教科書の流れにそって考えることを避けたい．必要に駆られて三平方の逆の証明を行うようにミリューに条件を与えたいと考えた．問題解決のために三平方の定理の逆を使うことを思いつき，その正しさを証明することが必要になるように場面設定をした．

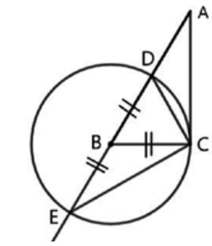

図 4　三平方の定理の逆直接証明

5.3. 授業の実際

学習課題 Q_0 を「∠ AOB の大きさを求めよ」として，座標と課題のみ提示したところ，生徒はノートに自分で座標軸をとり，図を描き始めた．多くの生徒が AB を繋いで三角形を描いた．

「なぜ三角形にしたのか?」と問うことで,「三角形を作ったら，相似とか何か分かるかもしれん．分度器は誤差があるから駄目だし.」との見通しを全体で確認した．他，数人にも同様の発問を繰り返して,「直角三角形が見える」「長さが求まりそうだ」など，三平方の定理や図形の性質を用いるように見通しを立てさせた．そして,「図形の性質に繋げて角度を求めよう」と投げかけて自力解決に入った．

自力解決での解法と人数は次の通りである．

三角形の各辺の長さを求め，三平方の定理の式が成立していることを根拠とする．　…13 人
三角形の相似を証明し，対応する角を整理する．　…15 人
三平方の定理で，AB の長さを求める．△ AOB の外接円を描き，円周角の定理を根拠とする．…10 人
AO，BO を比例のグラフとみなし , 傾きの積が -1 であることを根拠とする　…4 人
AB を対角線とする平行四辺形を作り，それが長方形であることを根拠とする　…1 人
△ AOB を合同な 4 つの図形に分ける　…1 人
＊上記はのべ人数

指名した生徒に板書させて，発表させた．最後に，三平方の定理の逆を使った解答を発表させた．それに対して,「証明していないのに使っていいのか？」「三平方の定理で長さが求まるのはいいけど，それを根拠にして良いのか？」と反論があった．「多分大丈夫だろう」と言う声と「多分じゃダメだろう」「証明しないといけない」と言う意見が飛び交い，三平方の定理の証明の必要性が確認されたところで，授業を終えた．

次の授業で，三平方の定理の逆を直接証明にて行った．AB=5，AC=4，BC=3 の具体的な三角形を扱い，**図 4** のように補助線を書き入れて行った．教師が口頭で証明の道筋を示したのち，生徒自身に記述をさせ，更に文字を用いて一般化した．証明は全部記述させず，数字を文字に変えることで異なる部分のみを書くように指示をした．その後，教科書の同一法を読み，新たな証明の方法を知り，三平方の定理の逆が真であることを確認した．「簡単だ」「文章が短い」「こんな方法見たことない」と言った同一法の有用性に気づくつぶやきが多く聞かれたところで授業を終えた．

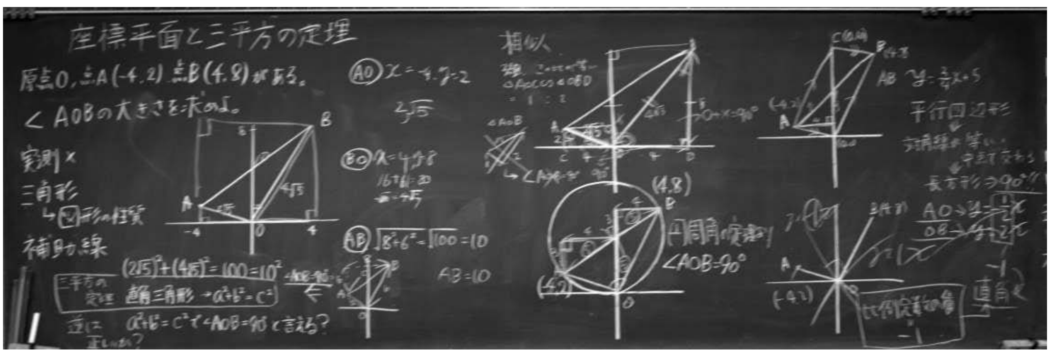

図 5　∠ AOB の大きさを求めよ　板書

5.4. 授業の分析

2学級の授業は想定通りに展開され，反応も同様であった．他1学級は，発表者自身が「三平方の定理の逆が正しいと証明できたら，90°であることが分かるけれど，証明できなかった」と「正しさへの問い」に言及した．

したがって，これらの3学級では生徒自らが「正しさへの問い」を持ち，証明の必要性を生み出すことができたと言える．最後の発表場面は，学級全体で予想がうまれ，正しさへの問いが生まれ，証明の必要性が生まれ，証明の方法を問うている．生徒たちが働きかけ情報やフィードバックを基に問いと答えの往還を生み出している．この場面にて亜教授学的状況が認められたと考えている．

三平方の定理の逆に注目した生徒と，相似な図形の性質に注目した生徒は，どちらもミリューに対して，直角三角形を作るという同様の働きかけを行っている．生徒は一つの働きかけをして複数の情報を得ることができたため，学習を促進することができたと言える．多様な解法を持つ課題であることをミリューに条件として与えたことが，生徒とミリューの間の相互作用（学習）を充実させたと言える．

本時は座標平面で課題設定したことで多様な解法が可能になった．少ない条件で様々な線分の長さが分かるようになったり，中点の位置が分かったりとたくさんの情報を得ることができたと言える．一次関数や比例など領域を越えた発想も出てきた．つまり，問題場面に座標平面であるという条件を与えたことが有効であったと認められる．

6. 本研究のまとめ

RQ:「正しそうなことがら」に対して生徒はどのように向き合うか.

4.3. より,「ある命題に対し，反例が1つでもあれば正しいとは言えない」という知識が生徒に明確にあることは分かった．また，自分が出した結論に対しては検証しようとする姿勢もあった．しかし，Qo に対するサブクウェスチョンとして「本当か?」「反例はないか?」と「正しさへの問い」を持ち見通しを立てることができていない．

したがって，3.2 のようにミリューに反例を持つことがらを条件として与え，正しさを問う経験をさせることは大変重要であると言える．それができないのであれば,「反例はなさそうか？」「条件は足りているか？」と見通しの段階で筋道や得られた情報の吟味をさせる教授活動が必要であると言える．

①予想を立てる
②反例はないか問う
③正しさの根拠さを問う

5.3. より,「正しさを問う」ために，第三者の見方が大変有効に働いた．多様な解や解法，非定型の問題をミリューとして用いることで,「本当に?」「どうして?」と正しさを問う練り上げを生徒が主体的に生み出すことができるようになると言える．

「三平方の定理の逆を調べよう」と逆を証明する必要性を生み出すことができた．

7. 今後の課題

昨年度は支援の言葉・板書の作り方について，今年度は探究の姿勢として生み出す問いの種類に着目をした．結論としてミリューに与える条件を多数確認した．これらを生かして，今一度，SRP の具体的な授業実践を提案していきたい．

文献

岡本和夫ほか（2021）「未来へひろがる数学3」新興出版社啓林館

藤井斉亮ほか(2021)「新しい数学3」東京書籍株式会社

吉田稔ほか(2021)「数学の世界3」大日本図書株式会社

新潟市総合教育センター　授業に役立つ指導案広場から引用（中学校・数学・11）

シュバラール（2016）. 大滝孝治・宮川健訳「《翻訳》明日の社会における数学指導－ 来たるべきカウンターパラダイムの弁護 －」. 上越教育大学数学教育研究 , 第 31 号 , pp. 73-87.

石川実・宮川健（2012）「「手続きの説明」の学習における伝言ゲームの可能性」日本数学教育学会誌　第 94 巻 , 第 11 号，pp.2-11

宮川 健（2002）. 教授学的状況理論にもとづくコンセプ ションモデルに関する一考察 . 筑波数学教育研究 , 21. pp.63-72.

小出智栄子（2020）問いの生成を軸とした探究型学習（第2学年）～図形領域における SRP ～ . 鳥取大学附属中学校研究紀要 pp.47-54

小出智栄子（2019）問いの生成を軸とした探究型学習 . 鳥取大学附属中学校研究紀要 pp.51-58