問いの生成を軸とした探究型学習（3年）

〜多様な解法が生まれる問いの可能性〜

永原 益穂
鳥取大学附属中学校 数学科
E-mail: nagaharam@tottori-u.ac.jp

Masuo NAGAHARA (Tottori University Junior High School): **Inquiry-based learning (the third grade) centering on generating questions. —Questions that give rise to various solutions**

要旨 — 本研究は，答えや解が 1 つであるという一般的な問に対して様々な解や解法を考えることができる問にするための方法を考えていくことである。問に対して条件を付加して新たな問にしたり，いろいろな発想で解を導いていくことができるような問を提示し，多様な考え方を用いて解を導くことができる授業を提案する。また，規則性の問に対して生徒自らが問を生成し，問が成立するための過程等も考察する。多様的な考え方で問を解く授業を繰り返すことで，思考が広がり，いろいろな発想で問に向き合う生徒が多くなっていった。

キーワード — 多様的な考え方，問いの生成，規則性の問題、様々な発想

Abstract — In this paper, We will consider ways to make various solutions and solutions possible for the general question that there is only one answer or solution. We propose a lesson in which you can add conditions to a question to make it a new question, present a question that allows you to derive a solution with various ideas, and derive a solution using various ideas. In addition, student oneself generates a question for the question of the regularity and examines the processes for a question to be established. By repeating the lessons to solve questions with various ideas, the thinking expanded and the number of students who faced the questions with various ideas increased.

Key words — diverse ideas, question generation, regularity problems, various ideas

1．はじめに

1．1 新学習指導要領をふまえて

2021 年度から全面実施される新学習指導要領における中学校数学科の目標は、「数学的な見方・考え方」を働かせ、「数学的活動」を通して、「知識及び技能」「思考力・判断力・表現力等」「学びに向かう力、人間性等」の３つの柱で整理された資質･能力を育成することを目指すと示された（文部科学省「中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編」）。

また，鳥取県教育委員会「令和２年度鳥取県学校教育のめざすもの」の中で，育成を目指す資質・能力として，「学びに向かう力，人間性等」の項目の中に，「問題解決などにおいて，粘り強く考え，その過程を振り返り，考察を深めたり評価･改善したりする態度」とされている。つまり，授業の中で単に問題や課題を解決するだけでなく，個人でじっくりと課題に向き合う時間を確保したり，他と協働したりして思考錯誤する中でいかにやりくりをしながら問題解決を図っていくような授業展開を目指すことが必要になってくる。

1．2 本校及び３年数学科の取り組み

本校数学科では，問題解決学習等の授業を通して育てたい生徒の姿を次の３点にまとめている。

- 困難に直面しても，果敢に立ち向かい克服していこうとする生徒。
- 学んだ数学的な見方・考え方（知識・技能等）を，学んだ以上に使いこなせる（実践できる）生徒。
- 学んだことを生かしつつ，既存の認識を越えてさらに新しいことを生みだせる生徒。

１．３　本研究の目的

このような生徒の姿を実現するために本研究の目的を次のように２つ設定した。まず１つめは，ある問に対して条件を付加したりすることで，新たな問にすることにより，解が１つではなく，２つ，３つ，・・・となる問にすることである。これは，問そのものを変化させることである。もう１つは，多様な解法が生まれる問の可能性を考えることである。解は１つであっても様々な解き方ができる問を生成していく。授業者において必要なことは，多様な解法を用いて問題解決を行う問を設定したり，領域を越えた考え方が生まれる問を設定したりすることである。また，生徒自らが思考を深めるために，その時々に応じたふさわしい支援をしていくことも重要となる。

２．問題解決学習の具体例

２．１　多様な解が生まれる問の生成

一般的に授業で扱う教科書の問題は答えが1つであることが多い。「次の計算をしなさい。」，「次の方程式を解きなさい。」等の問題では，その問を解く過程を大切にしながらも導いた解が正しいかどうかについて生徒も授業者も吟味する傾向がある。その場合でも，できるだけ発想の広がりを持たせるようにして授業展開を図ることが重要である。

実際の授業で扱った次の問について考察する。基本的なよくある問であるが，条件を提示したり必要な支援をしながら，この問の持つ広がりを考えていく。その時の授業の様子や生徒A～Dのつぶやき等も紹介する。

> 問　x についての方程式
> $ax=b$
> を解きなさい。

この問において，文字 x は，「x についての方程式」と定義づけがなされているが，係数 a と b については条件が与えられていない。授業では，ほとんどの生徒が，$x=\frac{b}{a}$ と解答して終わり，それ以上考えようとしていなかった。

学習過程として，この問は中学１年で既習であり，なぜこの問を授業者が用意したのかその意図を生徒は理解できなかったようである。ここで，必要な支援として，「この問は，a と b が 0 であるかどうかについて場合分けが必要な問題である。」と条件を与えた。その後の生徒の様子は次の通りである。

生徒A:a が 0 だったらどうなるのだろう。
生徒B：x は 0 になるのだろうか。
生徒C：答えは，無限にあるのではないか。
生徒D：式が成り立たないのではないか。

この問の考え方は，次のようになる。

(ⅰ) $a=0$，$b=0$ のとき
$0\times x=0$ となり，x はどんな数でも数式は成り立つことになり，「無数にある」，「どんな数でもよい」という考え方になる。

(ⅱ) $a=0$，$b\neq 0$ のとき
$0\times x=b$ となり，b が 0 ではないため，この数式を満たす x は存在しない。
また，$x=\frac{b}{a}$ とする生徒がいたが，これは分母が 0 であってはいけないことを理解していないためである。また，符号「≠」の意味が分からない生徒もいた。0 で割ってはいけないことも含めて丁寧な指導が必要である。

(ⅲ) $a\neq 0$，b＝0 のとき
$a\times x=0$ となり，積が 0 ということは，a がどんな数であっても $x=0$ となる。

(ⅳ) $a\neq 0$，b≠0 のとき 一次方程式となり，
$x=\frac{b}{a}$ となる。

以上をまとめると次のようになる。

(ⅰ) $a=0$，$b=0$ のとき x はすべての実数
(ⅱ) $a=0$，b≠0 のとき 解は存在しない
(ⅲ) $a\neq 0$，b＝0 のとき $x=0$
(ⅳ) $a\neq 0$，b≠0 のとき $x=\frac{b}{a}$

次の**図１**は，単元【式の展開と因数分解】の「ある数の2乗」という授業で扱ったワークシートの一部である。

「ある数の２乗」とは，次のような数である。「1,4,9,16,25…」本時の授業は，この数に着目をしながら解いていくということを導入で扱った。

次に，□，○に当てはまる数は何かという問題を扱った。よくある問題としては，「できるだけ小さ

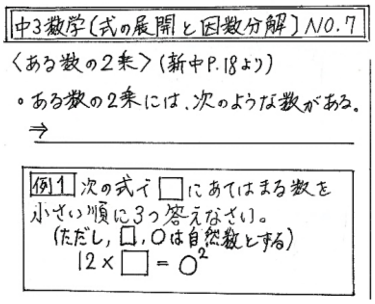


図１　「ある数の２乗」を考える問（ワークシートの一部）

い数をかけてその計算結果がある数の2乗になるために何をかければよいか。」という問が一般的であり，しかも「一番小さい数を一つだけ答えさせる」という問が多い。今回の問題は，実際に等式を満たす□と〇にあてはまる数は無数にあるのだが，□にあてはまる数を小さい順に3つ答えさせる問にした。

□にあてはまる数をなぜ3つにしたのかというと，ある授業で，□にあてはまる数を限定せず無数にしてできるだけたくさんの数を考えるように指示をしたのだが，広がりを持たせすぎたためか，途中で解くのをやめてしまう生徒が多かった。解の多様性は数学の問題としては，魅力的であるかもしれないが，場面によっては生徒の思考が止まる場合もある。そのため求める数を3つに限定をしたのである。「小さい順に3つ」という条件は，「無数に」という条件とは違って解こうとする意欲が上がったのかもしれない。このように無数解がある問題については，求める解の数を限定したほうがよい場合もある。

この問は，問題演習の前の導入で扱ったのだが3つの解全てを導くのは発想力が必要となる。□に当てはまる数として生徒の解答で多かったのは，3 と 12 であった。3 は 1,2,3･･･と順に代入していったときに 12×3＝36 となり，これは，6 の2乗とすぐに分かる。また，12×□＝〇^2 の形をよくみれば，□が 12 であれば，〇は 12 とすぐに分かる。したがって，3 と 12 はすぐに求めることができたようである。

ここで行った支援は，「素因数分解してみるとよい」である。これで，思考が進んだ生徒もあった。さらに，素因数分解した後は，「12×□＝<u>2^2×3×□</u>」と考え，下線部全体として□にあてはまる数の可能性を考えるとよいことを伝えた。

解法としては**図２**のように考えて，□に当てはまる数の中で一番小さい数が 3 であることをまず求める。その後，その 3 とある数の2乗である 1,4,9,16,･･･との積に着目をして□にあてはまる数を求めることができるようになる。

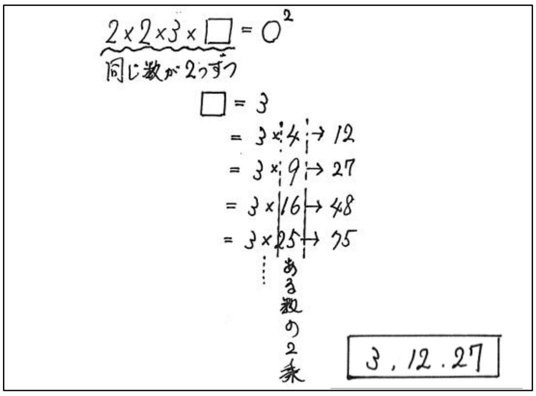


図２　素因数分解による解答例

また，この問題における考え方は，次の単元【平方根】のルートが外れて整数になるという問題にも応用することができる（**図３**）。$\sqrt{120-3x}$が整数になるときの x の値を考える問である。解を導くには，120 と $3x$ はともに 3 を因数にもつので 3 でくくり，40－x＝0,3,3×4,3×9,3×16,…と考えていく。この問も素因数分解の考え方が重要となる。

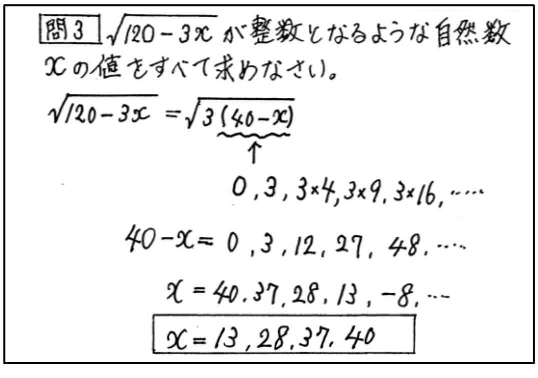


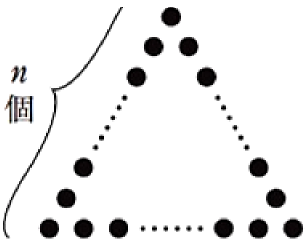
図３　√‾内が〇^{2}になるかを考える問

２．２　図形問題（規則性）における解法の多様性

元々ある問題に条件を加えることにより，解法の多様性につながる事例を紹介する。次の問題において，多様化させるために必要な支援はいかなるものか考えてみたい。

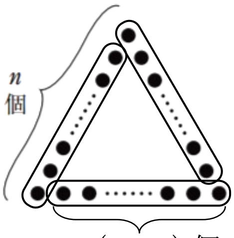
問　次の**図**のように，１辺にｎ個ずつ碁石を並べて正三角形の形をつくる。このとき，碁石全部の個数をいろいろな考え方でｎを使って表しなさい。

図



ここで，この問題解決の多様性を考えるために次の文言を入れて提示した。「いろいろな考え方で碁石全部の個数をnを使って表しなさい。」単純に，表しなさいとするのではなく，様々な発想により多様な考え方ができるよう促した。

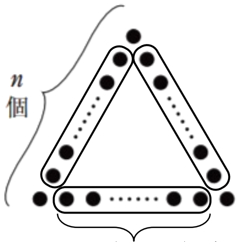
【解法①】



（n−1）個

$(n-1)\times 3 = \boxed{3n-3}$

【解法②】

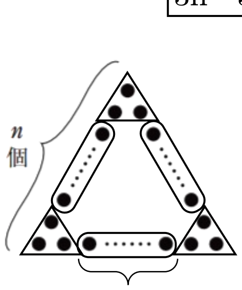


（n−2）個

$(n-2)\times 3+3=3n-6+3$

$=\boxed{3n-3}$

【解法③】



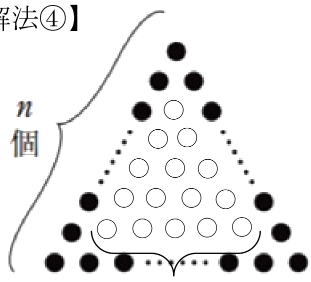
（n−4）個

$(n-4)\times 3+3\times 3=3n-12+9$

$=\boxed{3n-3}$

様々な解法が考えられるが，代表的な解法が上図の３通りであろう。この３通りの解法のうち，一番多かったのが解法①であり（約 60%），次に多かったのが解法②であった（約 30%）。解法③を考えた生徒は少なかったが（約 5%），「いろいろな考え方で」と指示を加えたため，解法①から③を全て考えた生徒もいた。

【解法④】



（n−3）個

また，若干名ではあるが，解法④のような考え方をした生徒もいた。求める外側の●正三角形の中に，○を全て埋め尽くす。●と○の合計の数を計算し，中にできた正三角形の○の数を求めて全体の合計から引いて解いていた。この解法は，時間はかかるかもしれないが，発想としては面白い。また，この解法は１からｎまでの和の求め方が必要となる。

ここで，以前に行った授業等を紹介する。**図４**は，１から n までの和の求め方について本時よりも前に行った授業の様子である。初項・末項を扱い，等差数列の一般項を n で表すことも学習した。これらの内容は発展的なであるが，３年生になって初めて学習したものではない。この学年の生徒はもともと，発展的・応用的な学習スタイルが中学１，２年生の頃から確立しており，時には高校数学の内容も一部ではあるが学習している。この授業では，等差数列の知識を持ち合わせながら，復習中心の授業となった。

図４　１から n までの和を求める板書

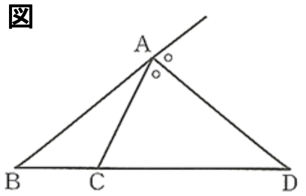
具体的な計算については，次の通りである。
（●と○の合計の数）は，１からｎまでの和であるので，$\frac{1}{2}n(n+1)$となる。
(中の三角形の○の数)は，１からｎ－３までの和であるので，$\frac{1}{2}(n-3)(n-2)$となる。
よって，正三角形を表す●の数は，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(n-3)(n-2) \\ &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n+3\right) \\ &= \frac{6}{2}n-3 \\ &= \boxed{3n-3} \end{aligned}$$

２．３　多様な解法が生まれる図形相似問題

問　次の**図**のように，△ＡＢＣの∠Ａの外角の二等分線と辺ＢＣの延長との交点をＤとする。ＡＢ＝８cm，ＡＣ＝６cm，ＣＤ＝１０cm のとき，辺ＢＣの長さをいろいろな発想で求めなさい。

図



これは，単元【図形と相似】の「角の二等分線」の授業で扱った問題であり，**図５**はこの時に扱ったワークシートの一部である。発想を広げるために元々あった問題に「いろいろな発想で」と付加し，さらに同じ図形も加えて出題した。ワークシート左面は，角の二等分線の証明を考える例題を扱い，右面は，その線分比の法則を使って線分の長さを求める問題とした。

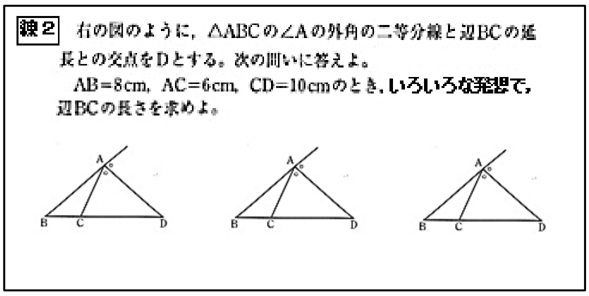

練2　右の図のように，△ABCの∠Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をDとする。次の問いに答えよ。
AB=8cm，AC=6cm，CD=10cmのとき，**いろいろな発想で**，辺BCの長さを求めよ。

図５　多様な解法が生まれる問の設定

補助線を引いて考える問題である。補助線は**図６**のように平行線・延長線など様々なものが考えられる。

・解法①　→　△CAB∽△CED
・解法②　→　△ABC∽△EBD
・解法③　→　BE : EA＝BC : CD
・解法④　→　EC : CD＝AB : BD
・解法⑤　→　△ACD と合同な三角形をつくる

「解は１つでも解法は数通りある問題」を多く扱い，お互いに学びあい，様々な解法があることのよさに気づかせるという授業を繰り返した。このことにより，生徒は問題解決の場面において解を求めることが出来たとしても，次の別の問へ向かうのではなく，今解いたばかりの問に対して別の解法を考えようとする場面が増えた。

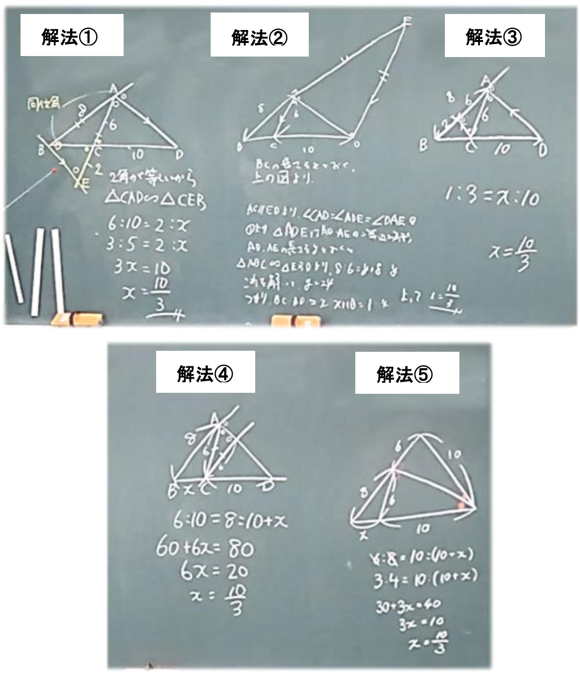


図６　多様な解法が生まれた板書

２．４　図形規則性問題における問の生成

問や課題は，授業者が用意することが多いが，時には生徒が用意することもある。「規則性の問題を考えなさい。」と発問しただけでは生徒は考えにくいようである。この時もある程度授業者がどのような問にしていくのか支援をしたほうが，問の作成をしやすくなる。授業では，単純に「問を作りなさい」とせずに，「規則性の問題について，三角形や四角形・・・，その長さや面積や形・・・等に着目するようにして問をつくりなさい」という

ふうに発問し，ワークシートを配布して（**図７**），生徒自らに問を作成することを試みた。

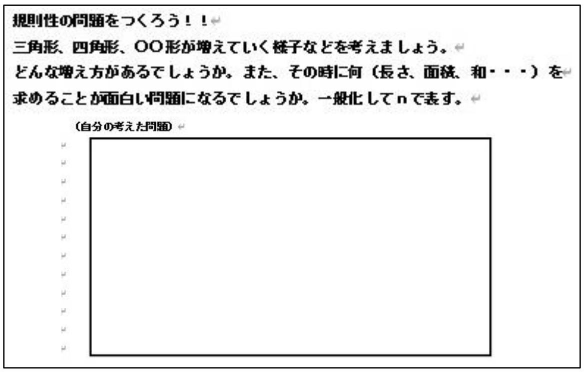

規則性の問題をつくろう！！
三角形、四角形、〇〇形が増えていく様子などを考えましょう。
どんな増え方があるでしょうか。また、その時に何（長さ、面積、和・・・）を求めることが面白い問題になるでしょうか。一般化してnで表す。
（自分の考えた問題）

図７　授業で配布したワークシートの一部

図８は，生徒が作成した問の一部である。規則性の問については，多様な考え方や様々な発想で解を導くことができる。授業展開として，今回はまず個人で考え、次にその考えた問を班で共有し，班の中で新たな条件を付加して解を導くことができるかを考えたり，やりくりをしながら問を皆で解いてみたりした。自分一人だけで考えるだけでなく他の発想からも学び，お互いに意見や考えを交換することも大切である。

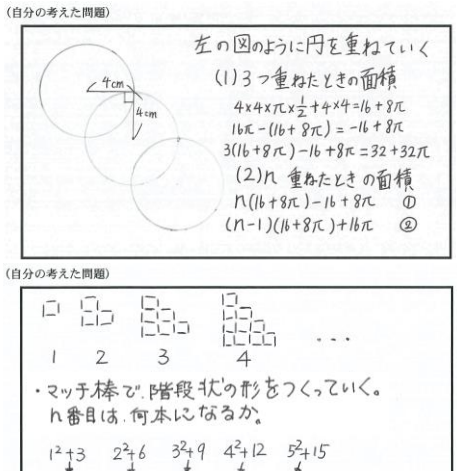


図８　生徒が生成した問の一部

３．考察とまとめ

本研究は，解が１つしかない問に対して条件等を付加することを通して，解が１つではなく，様々な解を導くことができる問になる可能性について考えてきた。また，解は１つでも解法が何通りもあるような問について，班や集団での学びあいを通して，多様な考え方や豊かな発想で，解を導こうとする授業も展開した。そして，実際に生徒自らに問を作成させ，班活動を通してさらにその問の練り上げや，新たな問の可能性についても考えてきた。

新学習指導要領の中の育成を目指す資質･能力として，「学びに向かう力，人間性等」の項目の中に「多様な考えを認め，よりよく問題解決する」とある。授業を通して，この項目についても達成することができたと考える。

今後も，多様な解法が生まれる問の可能性を考える授業設計をしながら，配布するワークシートの中に生徒に授業を振り返って感想を書かせ，その感想を分析し，どのような思考の広がりがあったのかということや問いの生成の可能性があるのかについても研究を続けていく。

参考文献

「文部科学省」(2018)「中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編」日本文教出版
鳥取県教育委員会（2021）「令和2年度　鳥取県学校教育のめざすもの」