問いの生成を軸とした探究型学習
～図形の性質に着目し，解決法を見いだす作図授業の研究～

岡 孝治
鳥取大学附属中学校 数学科
*E-mail: oka_kj@tottori-u.ac.jp

Oka Koji（Tottori University Junior High School）: **Exploring-based learning based on generation of questions. — A study on classes of figure drawings that facilitate solving problems paying attention to characteristics of diagrams**

要旨 — 本研究では，従来行ってきた授業に比べ，生徒に自由度を与え，より多様で深い探究が可能となるような授業を提案する。生徒の探究型学習を保障するため，探究から生成される問いの広がりを予測し，図示した QA マップの作成も行った。これらを，中学校第 1 学年を対象とした作図授業の「ビリヤードの球の経路を考える問題」を通して，生徒の探究により，作図方法を見つけていく授業実践を行った。その結果と考察を報告する。

キーワード — 探究型学習，SRP，問いの生成，QA マップ，作図，図形の性質

Abstract — In this paper I will propose classes that enable more diverse and deeper exploring by giving higher degree of freedom to the students compared to the classes that have been conducted. To assuring exploring-based learning, I predicted breadth of the questions generated by the exploring and also depicted a QA map. I practiced classes finding method of depicting figures focusing on characteristics of diagrams based of these processes using a drill predicting the path of a billiard ball.

Key words — exploring-based learning, SRP, generation of questions, QA map, figure drawing, characteristics of diagrams.

1. はじめに

1.1 子どもたちの学びの実態と研究のねらい

本校の数学科では，日々の授業において問題解決学習を進めてきた。問題解決学習では，問題の提示，自力解決，練り上げの流れで行われている。生徒たちは，答えが一つに決まらない問題や，多様な考え方のできる問題にも取り組んできた。そして，問題解決後も自らさらに課題をみつけ，探究しようとする姿も見られるようになった。ここで，今まで行ってきた問題解決学習では，生徒の活動に応じて教師が適切な支援を行い，期待する活動に導くというものであった。支援によって，期待する活動へと導く活動では，生徒自身の探究が限定されてしまう可能性があり，生徒の主体性も失われてしまうのではないかと考えられる。

そして，生徒がこれから向かうであろう現実の問題や，何十年か先の社会の問題には，既存の知識だけでは解けない問題や，解決までの見通しを立てるのが困難な問題も存在すると考えられる。授業を通して，生徒にそのような問題に向き合っていけるような力をつけるために授業の形態を見直す必要があると考えた。

そこで，本年度の研究では，そのような生徒の探究する力を更に伸ばすことを目指し，従来行ってきた授業に比べ，生徒に自由度を与え，より多様で，より深い探究ができるような授業設計を行いたいと考えた。また，教師が設定した閉じられた場において，提示した問題での活動では，学習者が既存の知識で解ける範囲での探究に限定され，生徒の問いの生成や，さらなる問いへの連鎖なども限定されてしまうのではないかと考えた。

そこで，先行研究より，教授人間学理論 ATD（Anthropological Theory of Didactic）における世界探究パラダイムに基づいた SRP（Study and Research Paths）と呼ばれる探究活動を参考にし，授業設計・実践を行い，考察していく。

2. 世界探究パラダイムに基づいたSRP

2.1 SRPとは

世界探究パラダイムとは，学習者が科学者の態度とされている探究の態度となることを目指すという考え方である。何を学ぶのかは学習者による必然性によって決まっていく。

SRPとは，上記の世界探究パラダイムに基づいた教授・学習の過程を定式化したものである。問題やそれを解決する道具，学習すべき内容など，授業者がすべて設定した中で進められる探究活動ではなく，インターネットをはじめ使えるものは何でも使い，必要なものは必要に応じて学習するといった研究者の活動形態の探究活動のことである。授業者が真偽を判定するわけでもなく，教えるべき内容が事前に決まっているわけでもない。そのため，学習者は，発見した数学的性質に責任を持たなければならない。そのため, 通常の授業では難しかった「なぜ」という構造的な理解を求める問いを学習者が自ら立て，自らその解を作り上げていくような活動が生じると考えられる。

2.2 SRPの構造について

SRPの構造として，以下のような要素が挙げられる。

数多くの問いを生み出し，より多くの知識に出会えるような生成的な強い力をもった一つの問い Q_0 (イニシャルクエスチョン) から始まる

この問いに答えるために，考察を繰り返し，いくつかの関連する問い Q_1, Q_2, ・・・(サブクエスチョン) を生じる。

これらのサブクエスチョンに答えるための回答も生じる。これを繰り返すことで, イニシャルクエスチョンに対する最終的な自分なりの回答 A_0 を作り上げていく。

萩原 (2018) は Q_0 に対する最終的な回答 A_0 までの経路を分析するために図にまとめている。この図を本研究ではQAマップとし，授業設計の際に，生徒の探究の広がりを把握する手段として扱った。

また，この Q_0 が満たすべき条件として，

① mathematical legitimacy （数学的合法性）

数学の核心をついた内容であること

② social legitimacy （社会的合法性）

数学や学校を超え，社会や世界と関連した内容であること

③ functional legitimacy （機能的合法性）

数学的関心や他の学問的関心に基づく新たな探究へと導く内容であることが挙げられる。

以上をふまえ，始めの問いを元にして，学習者が，なぜ～という問いを自ら立て，自らその解を作り上げていく，問いの生成を軸とするような授業を設計していく。

3. 授業設計の実際

3.1 問題の所在と新しい提案

中学校学習指導要領の図形領域の目標の中には，「見通しをもって作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに，論理的に考察し表現する能力を培う」とある。しかし，作図の授業の実際は，図形の性質を利用するというよりも作図の仕方が重要視されているのではないかと考えられる。教科書には，定規とコンパスだけを使うとだけあり，小学校では作図に用いていた分度器をなぜ，中学校では使わないのかなどには触れられていない。また，現行の教科書では，作図の方法・手順が太字で示されており，定規とコンパスを用いたかき方に焦点が当たっているように捉えられる。そのため，作図が学習指導要領で述べられているほど重要な役割を果たしていないのではないかと考えられる。学習指導要領では，図形の対称性に着目したり，図形を決定する要素に着目したりして，作図の方法を考察し，表現するとある。この「図形の性質に着目し，作図の方法を考察し，表現する」という部分にもっと焦点を当てた授業ができないかと考えた。

そこで，今回の授業では，授業者が学習者に作図の方法を示すのではなく，教材を通して，学習者が様々な方法で探究しながら，実測による作図の不正確さに気付き，より正確に，より効率よく作図するためにはどうすればよいかを考え，図形の性質に着目していくことを目的としている。図形の性質を用いた作図ができたという事実を手掛かりにして，この単元を通して様々な作図の問題に取り組んでいく。その際に，常に二等辺三角形を根拠にして考えることができ，作図を通して図形の性質の発見などを自ら行うことができるようになることを期待している。

3.2. 本時の学習に向けた教材研究

生徒自らが問いを生成し，さらなる問いの連鎖が生まれるような探究型の授業を行うために，教師は何をどのように準備するのか。

① 最初の問い Q_0（イニシャルクエスチョン）

生徒の探究活動が始まるような最初の問いの設定である。この問いは，数多くの問いを生み出し，より多くの知識に出会えるような，生成的な強い力をもった問いである必要があると考えられる。

最初の問いである Q_0 に答えるべく，様々な資料を調べたり，模型などで検証・考察を行ったりすることで，次々と Q_0 に部分的な解を与える様々な新たな問い Q（サブクエスチョン）が生まれる。さらに問いに答えるべく，探究することで新たな問いが生まれる。このような最初の問い Q_0 を考えることは，この探究型学習を実現するに当たって，非常に重要な問題となった。今回の授業では，この問い Q_0 を「球 A を球 C に当てずに，球 B に当てるにはどのような経路をたどれば良いか。」とした。設定理由は，身近な教材であり，球はどのように進むか，壁に何回当てればよいかなど多様な問いが予測される。また，～を作図しなさいという問いではなく，自分で解に向かうためのプロセスの中で，図形の性質に着目し，作図の有用性に気付くことのできる教材であると考え，設定を行った。

② QA マップについて

生徒自身が問いを次々と生成して，探究していく活動を実現するには，あらかじめ教師が授業で示す Q_0 について実際に探究し，この問いが生徒の問いの生成に繋がる問いなのかを吟味する必要がある。問いが単純すぎたり，多様な見方ができないような問いであれば，生徒の自由な探究活動は保障されない。そのため，単純な期待する活動ではなく，最初の問い Q_0 に対して考えられる問いの広がり，探究の経路を図式化したものが QA マップである。これにより，生徒のどのような問いや活動も受け入れることができ，幅広い探究を保障することができる。QA マップを作る際に，授業者の立場でなく，学習者の立場となって作ることが大切であることを改めて実感した。今回の授業においては，ビリヤードの球の経路を考える問いを通して，そこから生み出される問いを予測しマップを作成した。初めは図形の性質に着目する場面で，生徒は，ひし形の性質に着目するであろうと予測したが，角が等しい図形は何かと考えたときに，生徒はひし形ではなく，二等辺三角形の方を考えるのではないかとマップ作成の中で気付いた。現行の教科書に載っている基本の作図では，ひし形の性質を根拠にして説明されている場合が多いため，そのような予測を立ててしまったが，生徒の立場になって，最初の問い Q_0 に対して，どういう探究をして，この問いが出てくるのかなどをしっかりと分析・予測して QA マップを作成する必要があると考えられる。

③ 支援が必要と想定される Q（サブクエスチョン）についての把握

今回の探究活動では，Q_0 に対して，生徒が教師の支援なしに問いを生成し，自分なりの解にたどり着くことが期待される。しかし，探究の中で次の問いの生成が難しい場面も考えられる。このとき，授業者としてそのまま見守ることも必要であるが，生徒が次の問いを生むための支援は必要なのではないかと考えた。そのため，作成した QA マップをもとに，どのサブクエスチョンに，その支援が必要となる可能性があるかを事前に把握しておくことは必要であると考えた。今回の授業では，「球の入射する角度と角度が等しくなる場所をどのように探せばよいのか。」とあるが，図の中にみえない二等辺三角形をどう見いだすかがポイントであり，必要に応じてどのような支援で次の問いに繋げていくのかが難しい部分である。

3.3. 期待する数学的活動による単元計画

（単元の学習指導計画）

第 1 時　ビリヤードの問題（導入）

ビリヤードの球の経路を作図する問題を通して，様々な方法で探究をしながら，より正確により効率よく作図するために，図形の性質に着目していく見方を養うことができる。

第 2 時　直角を作図するには，どのような方法が考えられるか。

ビリヤードの問題から，作図の中で，90° としている部分に焦点を当て，本当に 90° になっているのかという問いから図形の性質を利用して，実際に，コンパスと定規を用いて，90° の作図方法を見いだすことができる。

第 3 時　等しい大きさの角度はどのように作図する

ことができるのか。

ビリヤードの問題から，入射角と反射角が等しい部分に焦点を当て，なぜ角度が等しいといえるのかを，二等辺三角形の性質を振り返り，作図の方法を探究し，角の二等分線の作図方法を見いだすことができる。

第 4 時　2 点から等しい距離にある直線をどのように作図することができるのか。

ビリヤードの問題から，2 点から等しい距離にある直線に焦点を当て，コンパスと定規を用いて，垂直二等分線の作図方法を見いだすことができる。

第 1 ～ 4 時では，第 1 時で，身近なビリヤードの問題を扱い，生徒が様々な方法で球の経路について探究していく。その中で，二等辺三角形の性質に注目し，第 2 時～ 4 時では，常に，その性質を根拠にして，基本の作図方法を考察し，表現することができるようになることを期待している。つまり，ビリヤードの問題から生成された「二等辺三角形の性質を用いると，どんな作図ができるだろう。」という問いが単元を通しての Q_0 となり，今回のテーマである問いの生成を軸とした単元構成ができると考えている。

4. 実践とその分析

4.1. 公開授業による実践

第 1 時　ビリヤードの問題（導入）

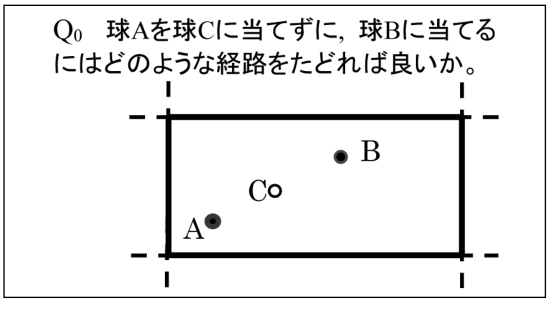


図 1. 問題提示の図

図 1 のように，最初の問い Q_0 を提示した。まずは，個人での探究の時間を設け，ワークシート（**図 2**）に Q_0 に対する見通し，疑問を記述させた。多くの生徒が，球 A を壁に当てて，球 B に当てるという考えを持っており，壁に当たるとどのように球がはね返るのか？壁のどこに当てると，球 B に当てることができるのかなどという疑問を記述していた。

このはじめの疑問が，Q_0 から生成された問いに当たると考えられる。その後は，グループにして，それぞれの問いを共有しながら，探究を行わせた。

図 3 のように，模型を使って，実際に球を打つ実験を行い，はね返りの仕方を検証していたグループがあった。また，**図 4** のようにインターネットを用いて，入射角と反射角の関係など，まだ習っていない知識を自分達で情報収集し，探究していたグループもあった。

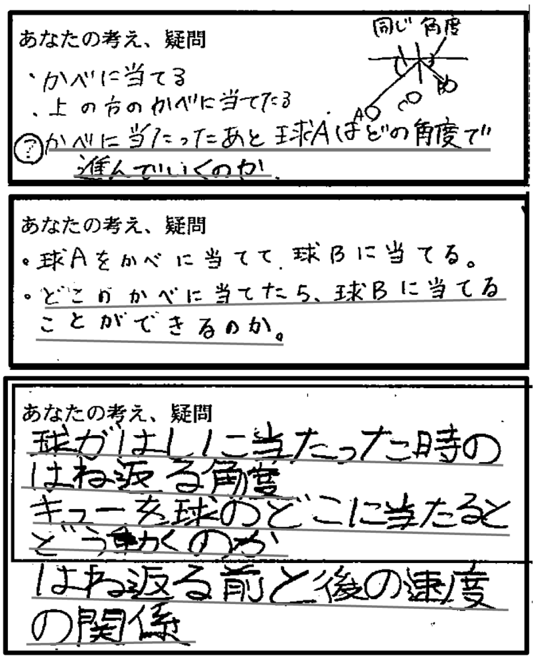


図 2. ワークシートの記述（見通し，疑問）

図 3. 授業の様子（模型を使って実験）

図 4. 授業の様子
（インターネットを用いて情報収集）

実際に，球の経路の作図の活動に入ると，**図 5** のように，分度器を用いて，球の入射角と反射角が等しくなるポイントを探す生徒も見られた。

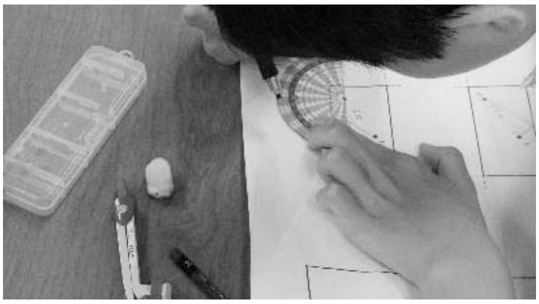
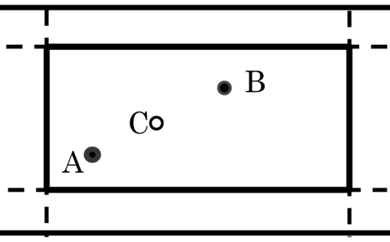


図 5. 授業の様子
（分度器を用いて作図している様子）

第 1 時　授業展開

Q0　球Aを球Cに当てずに、
球Bに当てるにはどのような経路をたどれば
良いか。



期待する活動 A
実物の模型 , 分度器などを用いての経路を考える。
・模型を使い，実際に球を壁に当てて検証する。
・球 A が壁に入射と反射する角度に注目し，分度器などによって等しい角度になるポイントを探す。

期待する活動 B
球のはね返り方を等しくすればよいということに気付き，球 A の経路を考えることができる。
・球 A が壁に入射と反射する角度に注目し，分度器などによって等しい角度になるポイントを探す。
・図の対称性を使って，作図する方法をみつけることができる。なぜその方法で作図できるのかを二等辺三角形の性質を使って説明することができる。

期待する活動 C
球が壁に当たる場所を効率よく求められる方法はないか考えることができる。
・図の対称性を使って，作図する方法をみつけることができる。なぜその方法で作図できるのかを二等辺三角形の性質を使って説明することができる。（壁に 1 回当てた場合）
・球 A が壁に当たった回数を変えた場合の経路を考えることができる。（壁に 2 回以上当てた場合）

支援（一般的な支援）
・実測した値は正確なのか。
・効率よくポイントを見つける方法はないのか。
支援（特殊な支援）
・図の対称性を使って球の経路を作図する方法はないだろうか。
・ビリヤード台の外側も考えるとどうなるか。

支援（一般的な支援）
・球 A の経路として，他にも考えられる場合はないだろうか。
支援（特殊な支援）
・球 A が壁に 2 回，3 回当たるときは球の経路はどのように考えられるか。

図 6. 第 1 時 授業展開

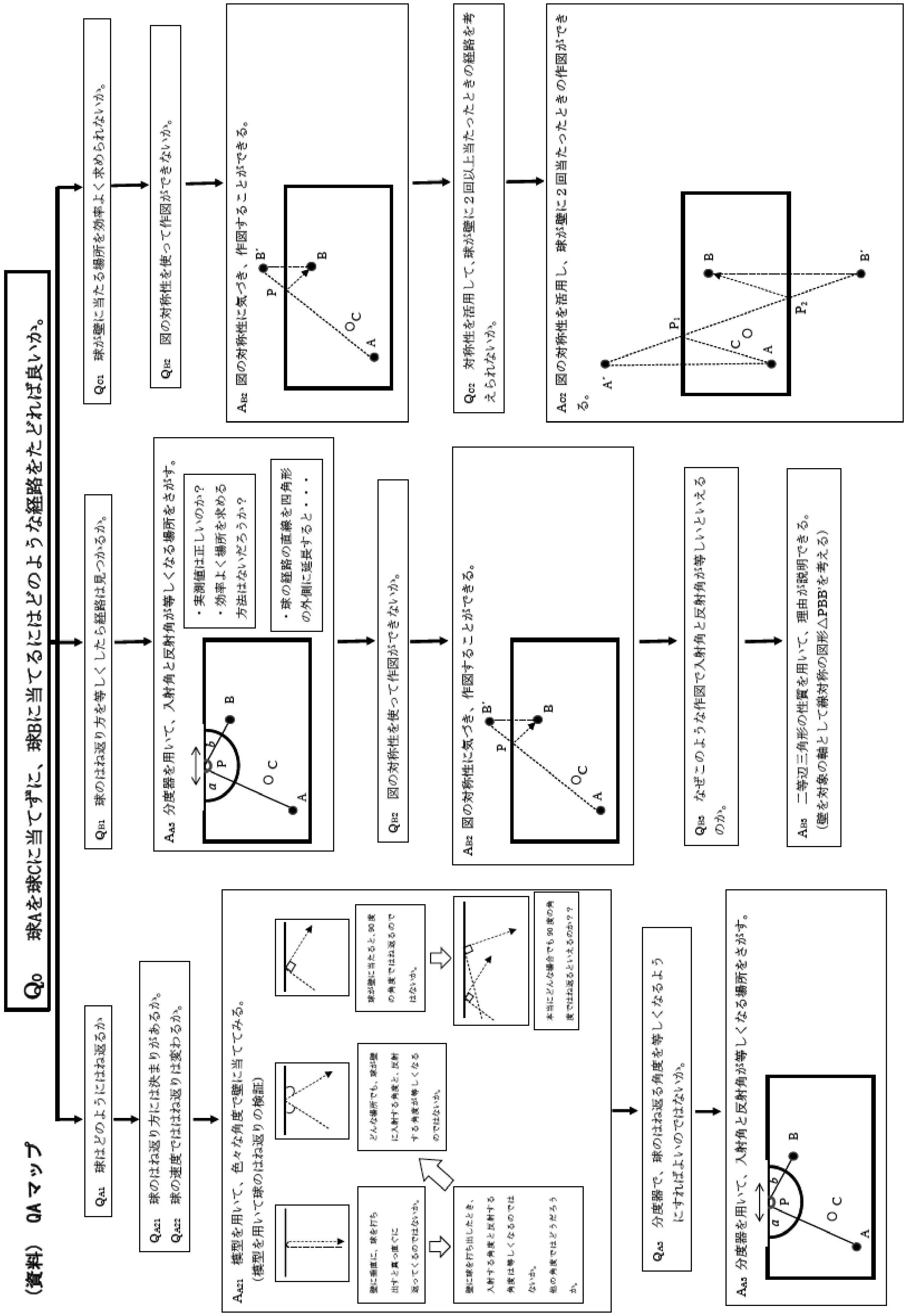

（資料） QAマップ
Q0 球Aを球Cに当てずに、球Bに当てるにはどのような経路をたどれば良いか。
QA1 球はどのようにはね返るか
QA21 球のはね返り方には決まりがあるか。
QA22 球の速度ではね返りは変わるか。
AA21 模型を用いて、色々な角度で壁に当ててみる。
（模型を用いて球のはね返りの検証）
壁に垂直に、球を打ち出すと真っ直ぐに返ってくるのではないか。
壁に球を打ち出したとき、入射する角度と反射する角度は等しくなるのではないか。他の角度ではどうだろうか。
どんな場所でも、球が壁に入射する角度と、反射する角度が等しくなるのではないか。
球が壁に当たると、90度の角度ではね返るのではないか。
本当にどんな場合でも90度の角度ではね返るといえるのか？？
QA3 分度器で、球のはね返る角度を等しくなるようにすればよいのではないか。
AA3 分度器を用いて、入射角と反射角が等しくなる場所をさがす。
QB1 球のはね返り方を等しくしたら経路は見つかるか。
AA3 分度器を用いて、入射角と反射角が等しくなる場所をさがす。
・実測値は正しいのか？
・効率よく場所を求める方法はないだろうか？
・球の経路の直線を四角形の外側に延長すると・・・
QB2 図の対称性を使って作図ができないか。
AB2 図の対称性に気づき、作図することができる。
QB3 なぜこのような作図で入射角と反射角が等しいといえるのか。
AB3 二等辺三角形の性質を用いて、理由が説明できる。（壁を対象の軸として線対称の図形△PBB'を考える）
QC1 球が壁に当たる場所を効率よく求められないか。
QB2 図の対称性を使って作図ができないか。
AB2 図の対称性に気づき、作図することができる。
QC2 対称性を活用して、球が壁に2回以上当たったときの経路を考えられないか。
AC2 図の対称性を活用し、球が壁に2回当たったときの作図ができる。
A
B
C
P
B'
A'
P1
P2
a
b

図 7. 第 1 時 QA マップ

球の入射角と反射角が等しくなるという考え方で，二等辺三角形の性質に注目して考えている生徒も見られた。**図 8** は二等辺三角形の対称性を利用した考え方である。**図 9** は，垂線と交点を利用している。(点 A，点 B から下した垂線と壁との交点 A'，B' とすると，それらの点 A'，B' と B，A をそれぞれ結び，その交点から下した垂線と壁の交点を求める。)

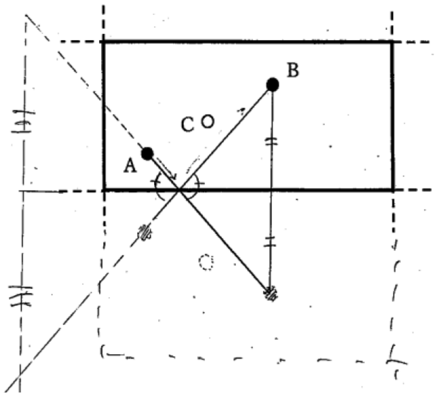


図 8．生徒のワークシート
（二等辺三角形の対称性の活用）

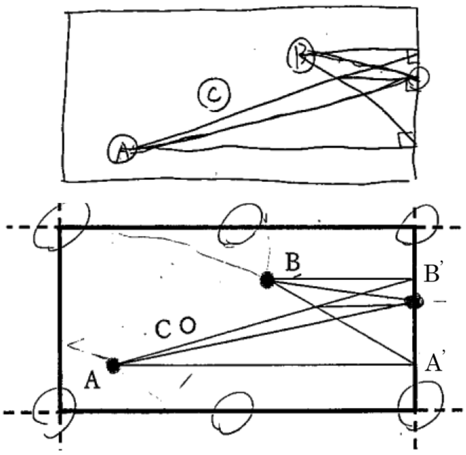


図 9．生徒のワークシート (交点の活用)

4.2. 公開授業の分析

今回の授業では，生徒がより自由な探究を促すため，問題を提示した際，細かな問題の条件は付けなかった。そのため，QA マップ (**図 7**) には書いていなかった球を打つ強さや，球の回転，球を浮かすなどの考え方をしている生徒も見られた。また，球の素材について探究していた生徒もいた。このように，授業者が予想していた以上に多様な考え方が見られたのは，最初の問い Q_0 が生徒にとって，身近であり，自然な問いであったことが考えられる。また, 実際に, ビリヤードの模型を用いて, 球の軌道を確認することで，球の入射角と反射角の関係についての様々な問いの生成につながったグループがあり，模型のような具体物も今回のような探究型学習では有効であると考えられる。

図10には, 授業後の生徒の振り返りを示している。今回の授業で扱った問いについては，難しいと感じる生徒はいたが，自分で自由に方法を考え，自分なりの答えを探究する活動は楽しいと感じている生徒も多かった。小学校のときに，作図方法を学んだ二等辺三角形の性質を根拠として探究していくことで，分度器を使わずに 90° を作図することができるなど，作図において図形の性質に着目することの有用性を感じていた生徒もいた。そして，今後の課題としては，以下の 3 点があげられる。

1) <u>QA マップの妥当性の検証</u>

授業設計の際に，支援が必要と想定される Q (サブクエスチョン) について，**図 7** より，やはり Q_{B1} から Q_{B2} を自分達だけで生成するのが難しく，支援が必要であったグループが多かったと思われる。

先ほど述べたように，授業において，想定していなかった考え方が見られたので，QA マップを作る際の問いの広がりの検討をもっとしておくべきであった。最初の問い Q_0 について, 条件を付ける(球の回転は考えない) などの制限をかければ，問いの広がりは，QA マップで想定した範囲内に収まっていたのかもしれないが，生徒の自由な探究を考えると，細かな条件を付けるべきなのかは，今後も実践を通して，生徒の活動にどのように影響するのかを分析していかなければならない。

2) <u>生徒の考えを検証する力の育成</u>

目指すべき生徒の姿は，最初の問いから自分達の探究によって，問いを生成し，問題の本質にせまっていくのが理想であるが，球の経路の図が 1 通りかけると探究が止まっているグループが多く，自分達のかいた図が妥当かどうかを検証する活動が少なかったと感じた。このような探究し続ける力を日々の授業を通じて，身に着けさせていかないといけないと感じた。

3) <u>問いの生成過程をどのように可視化するか</u>

問いの生成を軸とする授業を設計をしていく中で，授業者による作成した QA マップの妥当性の検証は必須である。そのために生徒がどのような

プロセスで問いを生成していくのかを把握し，検証していかなければならないと感じた。今回は，最初の問いから生成した問いと，最後に導いた答えの把握できたが，問いが生成される途中過程については十分に把握ができていなかった。ワークシート等を工夫し，問いの生成過程がわかるようにしていく必要があると感じた。

◎ 授業での新しい気づき
- ビリヤードの角度を求めるときに図形（直角三角形など）が使えることが分かった。これからの問題でも活用していきたい。
- 角度をはからなくても，コンパス，定規だけで，いろいろな角度を作ることができると分かりました。
- 角度で球が当たる位置が分かる。二等辺三角形を利用すれば答えを求めることができる。
- 他のスポーツなども角度を意識することがあるのでそれといっしょなのかなと思いました。コンパスと定規でいろいろな図形や角度を表すことができる。ビリヤードで学習を進め，向かい合う角度は，同じなどが分かった。
- 1 回目にボールがはねかえった直線と 3 回目の直線は平行になる。
- こうすれば，こうなる。二等辺三角形をつくるなどというところを意識できました。二等辺三角形を使って，こんなことができるのかと思いました。

◎ 授業の感想
- 知らなかったことや考えたことがなかったことを知り , 考えることができて良かった。今日知れたことを次回の続きに活かしていきたい
- 今回の授業は答えがなく，いろんな方法があり，なるほどといえる考え方もあって，普段とは違って考え方が広がって楽しかったです。
- 最初，とても難しかったけれど，そのうち方法や求め方が見つかり，「理解できた」と思えるようになった。

図 10．生徒の振り返り

文献

宮川健，濵中裕明，大滝孝治（2016）「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動（1）―理論的考察を通して―」，全国数学教育学会誌『数学教育研究』，22（2），25-36.

濵中裕明，大滝孝治，宮川健（2016）「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動（2）―電卓を用いた実践を通して―」，全国数学教育学会誌『数学教育研究』，22（2），59-72.

荻原友祐，（2018）『「重心」の知の構成に関する研究―教授人間学理論を視座として―』，鳥取大学数学教育研究，第 20 巻，Vol. 20，No，2

塩崎李衣（2012）「中学校数学における作図の位置付けと機能」，上越数学教育研究，第 27 号，159-168

文部科学省（2018）「中学校学習指導要領　数学編」，日本文教出版

本研究は，公益財団法人博報堂教育財団の研究助成を受け，実践，分析を行ったものである。