等号，相等性に関する認識論的障害

An epistemological obstacle related to the equal symbol and to the notion of equality

溝　口　達　也[※1]

MIZOGUCHI, Tatsuya

キーワード：等号，相等性，認識論的障害，算数・数学教育

Key Words: *the equal symbol, equality, epistemological obstacle, mathematics education*

1．はじめに：問題の所在

はじめに，次のような課題が提示されたときの授業の様子（一部）を見てみよう。

T：　次の等式を正しいものにするのに，どんな数を入れればよいですか。

$$246+14=\underline{\qquad}+246$$

問題を考えるにあたり，まず教師から等号の意味についての問いかけがなされる。（T：教師，その他は子ども）

T：　この等号は何を意味していますか。

Kr：　等しい？　それは何かに等しいの？

Sh：　等号は，何かを足すときに使う。等号がそこにあるから，等号の横に答えを書く。

Ka：　等号は和です。246と14を足せば，その和は260です。

上のような発言から，多くの子どもは等号を演算を実行する指示記号として考えていることが伺える。実際，この後別の子どもの発言を受けて，次のように展開される。

Da：　僕は，等号は，6足す6はいくつですか，ときくようなものだと思う。

T：　もし，6+6=6+6としたら，これは正しい？

Da：　いいえ。

さらに，別の子どもは，次のように発言する。

T：　Shさん，6+6=6+6は正しいですか。

Sh：　私は反対です。6足す6を繰り返しても意味がありません。6足す6を計算した数を書

※1 教科教育講座（数学教育学）　Department of Curriculum and Instruction (Mathematics Education)

くべきです。それが等号の意味です。

T：　ということは，6足す6は6足す6ではないということ？

Sh：　はい。だって，6足す6は12です。6足す6ではありません。

ところが，別の子どもの発言を受けて，授業は次のように展開される。

Ka：　いや，等しいよ。だって，等号の両側は同じ大きさになるよ。

T：　6足す6は，Shさん。

Sh：　12です。

T：　じゃあ，こっちの6足す6は。

Sh：　12です。

T：　12は，12に等しくない？

さらに教師は，次のように続ける。

T：　こうはできるかな？　6+6=5+7

Sh：　いいえ。

T：　どうしてかな？

Sh：　ええっと，ああ，できます。でも，6+6はだめです。

この授業のエピソードは，Sánez-Ludlow & Walgamuth(1998)によって示されたものである。エピソード中において見られる子どもの認識は，我が国の子どもにおいても同様に見受けられるものであるといえる。すなわち，等号は，（等式の）左辺に表記される演算の実行を指示するものである，といった見方である。このような認識は，しばしば矢印としてのそれと位置づけられるものであり，少なくとも我が国の小学校算数科における学習内容の範囲では，児童が双方向の矢印としての認識を有しているに止まっていたとしても，それによる児童の困難が顕在化されることはほとんどない。

数学記号としての等号，及びこれに関わる相等性についての子どもの認識は，従来，上記のような算術や代数の領域において，演算や文字との関連において考察されてきた（代数の領域については，例えば，Kieran, 1981）。これは，等号が，式の中で用いられる記号であることから，当然のこととして認められる。他方，溝口(1999)において指摘したように，子どもの等号の認識を捉えるために，我々は，その対象，定義，及び子ども固有の「相等性」に着目する必要がある。すなわち，もし，等号で結ばれる対象が子どもの既知のものと異なれば，等号に負荷される定義は，必ずしも既存のものと一致するとは限らず，そこには，子どもの有する隠れた「相等性」が反映されるはずである。上記事例の場合，子どもの既有の等号の定義は上述の通り《演算の実行を指示する矢印》であり，（等）式の右辺には演算の実行結果としての数値がその対象としての資格を有するものとして存在し得るという「相等性」が潜在的に認められる。従って，教師の提示するような左辺と同一の式は，この子どもの「相等性」に照らし合わせるとき，既有の定義を文字通り実行し得るものではなく，《実行結果》の解釈を拡大することで，同一でない式が辛うじて認められる。いずれにしても，こうした状態における子どもの等号，及び相等性に関わる認識は，等式の左辺と右辺が同時的に存在するものとして認められるものではなく，後述するように，むしろ一方から他方への行為の結果として認められるものである。

しかしながら，等号（あるいは等式）には，本来行為としての側面（すなわち時間的側面）は関与せず，等号（あるいは等式）によって示される対象の関係（通常の意味での相等関係）を認識することが要請される。子どもがこの認識を達成するためには，従って，それを可能にする子どもの何らかの「相等性」がここに関与するはずであり，我々はこれを顕在化させることにより，学習指導上の示唆を得る可能性が指摘される。

このことを確認するにあたり，従来用いられてきた場面とは異なるものとして，図形の領域における等号の使用に焦点を当てることで，子どもが，どのような等号の用い方をするかを捉える。これは，後述するように，算術や代数の領域とは異なる特徴として，等号が本来有する，関係を表象することを，子どもにとってより自然に把握され得る手段であることが期待されるからである。

以上のことより，本研究の目的は，以下の研究課題を解決することである：子どもは，図形領域において用いられる等号について，どのような認識を有しているか，また，その固有の困難はどのようなものか。

この課題を解決するために，以下のような方法をとる。

1）与えられた図中より適当な三角形を選択し等号を用いた式を立式させるといった調査問題を開発する。

2）小学校6年生，中学校1年生及び中学校2年生を被験者として，開発した調査問題を実施する。

3）実施した調査問題に対する回答に現れる記述を基に子どもの認識を顕在化する。

4）さらに，回答中の記述において用いられる言語を観点とした分析を行い，等号，及び相等性に関する認識論的障害を提起する。

2．調　　　査

(1)　調査問題

本研究においては，上記課題を解決するための調査を実施するにあたり，以下のようなような問題を開発した。

『下の図の中から，適当な三角形を選んで，＝を用いた式を，できるだけ多く作って下さい。また，その式がいえる理由も述べて下さい。』（図1）

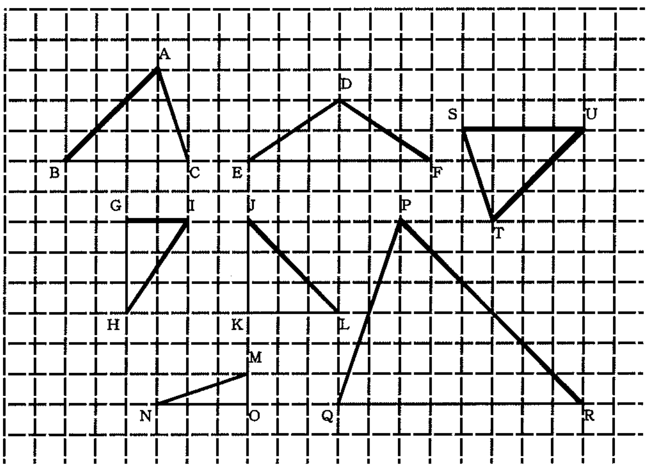

図1　調査問題の図

(2) 調査の対象

下表（表1）のように，鳥取県内の小学校，及び中学校の児童・生徒を対象とした。

表1　調査の対象

学年	小6	中1	中2
（人）	72	156	147

調査対象の設定は，次のような理由による。第一に，文字式の学習を通じて，関係を表象するという等号についての理解が進むと考えられることから，この前後を対象とすること，第二に，等号同様，関係を表象する記号としての合同（≡）及び相似（∽）を学習する以前の子どもの認識を明らかにしたいという意図による。

(3) 調査の方法

開発した調査問題を質問紙形式によって実施した。調査は，2000年6月16日～18日に，各学年とも10～15分程度で，各学級担任の監督の下に実施された。

(4) 調査結果の概要

調査結果の概要は，表2及びそのグラフ（図2）によって示される通りである。表1は，子どもが作った式に対する理由の観点で示されている。一人の子どもが，複数の回答を行っているため，示される数値は重複回答の結果である。

表2　調査結果の概要

	面積	二等辺三角形	直角三角形	合同	相似	その他の性質
小6	70.8%	18.1%	31.9%	50.0%	58.3%	62.5%
中1	84.6%	19.0%	30.8%	49.4%	53.2%	32.7%
中2	73.5%	17.7%	24.5%	54.4%	38.8%	19.0%

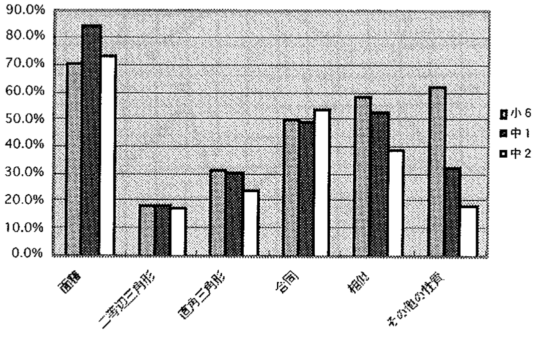

図2　調査結果の概要

本調査問題のいわゆる「正答」としては，上図（図１）に示される三角形の面積が等しいことを等号を用いて示すことである。各学年とも，７割超がこの点について回答している(注1)一方で，その他の理由に基づく等式を作っている。特に，「相似」で示される回答(注2)は，学年進行とともに減少してきてはいるものの，高い割合を示している。さらに，「二等辺三角形」や「直角三角形」で示される回答の割合も，決して無視できるほど低いものではない。子どものこのような実態は，いかなる要因によるものであるのか。この点にこそ，本研究の主要なテーマが介在する。以下に，特徴的な中学校第１学年，及び第２学年の生徒の記述を事例として示す。

(5)　生徒の記述

以下に示す事例は，回答用紙の各々の子どもの記述を子どもごとにすべて転記したものである。

①　生徒AU（中１）

$\Delta ABC = \Delta TSU = \Delta PRQ$，$\Delta GHI = \Delta OMN$	図形の形が同じである
$\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta STU$	面積が同じである

②　生徒GY（中１）

$\Delta GHI = \Delta JKL = \Delta MNO$	直角三角形だから
$\Delta DEF = \Delta JKL$	二等辺三角形だから
$\Delta ABC = \Delta STU$	同じ大きさの三角形だから
$\begin{matrix}\Delta ABC\\ \Delta STU\end{matrix} = \Delta PQR$	ΔPQRを逆にして縮小すると，ΔABC，ΔSTUと同じだから
$\Delta DEF = \Delta ABC = \Delta STU$	面積が同じだから

③　生徒NS（中１）

$\Delta ABC = \Delta SUT$	大きさが同じ
$\Delta STU = \Delta PQR$，$\Delta ABC = \Delta PQR$	拡大と縮小の関係
$\Delta GIH = \Delta DEF$	ΔGIHの辺GIのところに線対しょうに図形をかくと同じ大きさ
$\Delta GIH = \Delta JKL = \Delta MNO$	三つとも直角三角形

④　生徒TM（中１）

$\Delta ABC = \Delta STU$	同じ形
$\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta STU$	面積が同じ
$\Delta DEF = \Delta JKL$	二等辺三角形
$\Delta GIH = \Delta JKL = \Delta MNO$	直角三角形
$\Delta ABC = \Delta STU = \Delta PQR$	底辺の長さと高さの長さの比が同じ

⑤　生徒IS（中２）

$\Delta ABC = \Delta TUS$ 底辺高さが同じ／形も同じ

$\Delta DEF = \Delta JKL$ 二等辺三角形同じ

$\Delta ABC = \Delta DEF$ 色が同じ

⑥ 生徒US（中２）

$\Delta ABC = \Delta STU$ 面積が同じだから

$\Delta ABC = \Delta STU$ 周囲の長さが同じだから

3. 「同じ」：等号を示す言葉

子どもの等号の認識に関しては，これまでにも，演算上の行為として結びついた認識としての誤りが示唆されてきた (Kieran, 1981; Sánez-Ludlow & Walgamuth, 1998; Pirie, 1998)。例えば，下のような事例（小４）は，そのような指摘の示すところである。

$$
\begin{aligned}
&\square\times 6+100=940\\
&\qquad =\bigcirc+100=940\\
&\qquad =\bigcirc=940-100=840\\
&\qquad =840=\bigcirc\\
&\qquad =\square\times 6\\
&\square\times 6=840\\
&\quad \square=840\div 6\\
&\quad \square=140
\end{aligned}
$$

（溝口, 1999）

Pirie(1998) によれば，このような子どもの実態は，*"from verbal mathematical to symbolic language"* の問題として指摘されるものである。すなわち，算数・数学において用いられる（音読される）コトバから記号的言語への移行上の問題である。実際，算術や代数の領域における子どもの等号の認識に関する問題の多くは，Pirie の指摘する点に含まれる。上の事例においても，児童（小４）は，等号をあたかも矢印として用いているといえる。実際，小学校低学年のたし算や引き算の学習においては，このような等号の用い方であったとしても子どもは問題を解決し得る。しかしながら，こうした算術や代数の領域で見られた子どもの等号の認識の仕方は，本調査におけるような図形の領域においては見られない。

本調査問題において，子どもは，暗黙のうちに，三角形同士の関係を尋ねられている。日本語で，等式（あるいは方程式）を音読するとき，通常，「〜は....です」といった表現が用いられる。そしてこの表現は，本来，方向性を有したものである (Freudenthal, 1983; 溝口, 1999)。すなわち，$3+4=7$ という等式において，7 は構成される対象である。一方，本調査問題においては，三角形は，すでに構成されているものである。子どもが構成する対象は，そうした三角形同士の関係である。このために，算術や代数の領域で見られるような問題は，本調査問題に対する回答の中には表面化してこない。しかしながら，別の固有の問題が次のように浮上してきているといえる。

もし，子どもが $\Delta ABC = \Delta TUS$ を音読すれば，「ΔABC と ΔTUS は同じです」とするであろうことが予想される。前章で示した生徒の記述に見られるように，子どもは，理由の記述において，ごく

一部の記述で「等しい」あるいは「いっしょ」という表現がとられるのを除いて，「同じ」という表現を多用しており，これは，全学年に共通していることである。子どもにとって，等号で示される関係は，まさに「同じ」関係なのである。日本語で「同じ」とは，『「等しい」が、ある観点では異なることを認めながらも、今論ずる点では差がないというのに対し、「同じ」は今問題になる重要な諸点ではすべて等しいという気持で言う。』（岩波国語辞典第五版）とある。子どもが用いるこれらの語の意味が，必ずしもこうした辞書的意味であるかは明確ではないものの，少なくとも子どもは，面積が「等しい」三角形を尋ねられれば，そのように回答するであろうが，子どもにとって，まさに「今問題になる重要な諸点ではすべて等しい」という意味でこの語を用いているといえる。すなわち，子どもは調査問題における「＝を用いた式」を語「同じ」をもって翻訳していると見ることが可能である。逆に，Steinbring(1998) によれば，日常言語から数学的な専門的言語への移行に関して，「学習や理解の特殊な場合において，誰しも“卓越した手段(*metodic aids*)”を認めなければならない」と指摘されるように，我々は，子どもの等号を表現する言語に関して，そのような「卓越した手段」を本来必要とするはずである。にもかかわらず，実際には，この「同じ」という表現が，数学的な意味づけなしに，日常的な意味づけにおいて用いられているわけである。

4. 等号の認識を捉える枠組みに基づく考察

溝口(1999)は，子どもの等号の認識の変容を捉える観点を以下のように設定した。すなわち，1）等号によって結合される対象の変容を契機として，2）等号の定義が進化し，3）そうした表記面における変容を評価（価値判断）するものとして子どもの固有の「相等性」を位置づけた（図2）。

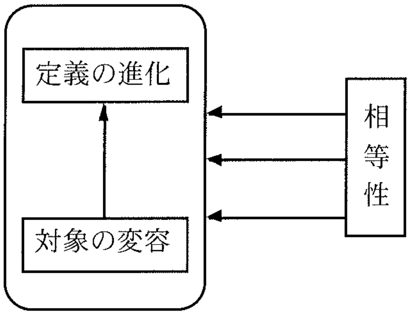

図3　子どもの等号の認識を捉える枠組み

この枠組みに基づけば，本調査における子どもの回答は次のように解釈される。例えば，生徒 GY の回答における2番目及び5番目の記述から，ΔDEF は，生徒 GY にとって面積を表しもすれば，この図形の特徴（性質）を表す表記でもある。等号で結ばれる関係は，本来数値に関する相等であるが，生徒 GY は，他の理由による関係を示す。すなわち，生徒 GY にとっての等号の定義はそのような多様な意味を有するものであるわけである。このような子どもの示す困難の起源は，彼らの有する「同じ」という語で表象される概念にあり，まさにこれが，子どもの「相等性」を支配していると指摘される。

5. 「同じ」：等号，相等性に関する認識論的障害（注3）

これまで，数学教育における認識論的障害研究の主要な方向は，数学的概念の発達の歴史上，直

接的にその時々における概念の痕跡を分析することによって得られた認識論的障害であった。一方で，この概念の創始者であるバシュラール（Gaston Bachelard）に立ち戻るならば，そうした歴史を通じて見られる認識の傾向そのものにも注目する価値がありそうである(注4)。バシュラールは，『科学的精神の形成』(1938/1993)の１つの章として，「ことばの障害 *obstacle verbal*」を取り上げている。そこでは「海綿 *épongne*」という語を例に，数々の身近なイマージュの過度の拡大 *extension abusive des images familières* が歴史において見られることが指摘される。それは，「たった一つのイマージュ，あるいはたった一語が，すべてを説明しつくしている」(及川他訳, p.100) ようなものであり，「イマージュの積み重ねがあきらかに理性に反するということ，不用意に重ねられた具体的な事象が，現実的な問題の抽象的で判明なる見方を妨害する」(及川他訳, p.102) ようなものである。

では，数学教育という営みにおいては，そうした事例としてどのようなものが見られるであろうか。実際，「あらゆるコミュニケーションの手段は，ある仕方での児童・生徒の理解を支援し得るものであり，また別の仕方でそうした理解を妨げるものでもある。教師，そして児童・生徒にとって何が数学学習の障害となり，また支えとなるのか，という問いは数学教育研究において主要な課題でもある。」(Steinbring, et al., 1998)，と指摘されるところである。

そのような１つに，本稿で扱う等号“＝”をあげることが可能である。この定義は，数学において次のように述べられる：２つの記号 a, b が同一の数学的対象を表すとき，a と b は互いに相等しい（単に等しい）関係にあるといい，記号で $a=b$ あるいは $b=a$ と表す（竹内, 1967)。ところが，数学の歴史において，この記号が確立したのは，1600 年代初頭であり，それまでに“＝”の代わりとして，*aequales*, *aequantur*, *esgale*, *faciunt*, *ghelijck*, *gleich* のような語が用いられたり，あるいは略記として *aeq* が用いられてきたのである (Cajori, 1993)。このことは，記号“＝”が用いられる以前に，それに代わる様々な音読可能な語が割り当てられてきたことを意味すると考えられ，そのような語が個々に「イマージュ」を備えていたことは十分に考えられることである。さらに言えば，上の定義においても「同一」という語が用いられている。果たして，「同一」はいかにして定義され得るのか。そもそも，「同一」という語を用いずに定義を述べることは可能でないのか。換言すれば，我々が通常受け入れる定義においてさえ，そうした認識の痕跡が言語を介在して存在すると見ることができる。

では，現在の児童・生徒たちは，記号“＝”をどのように読むか。すなわち，この現出こそが上記の「同じ」に他ならない。この児童・生徒たちの言語上の習慣は，バシュラール流にいえば「そのイマージュがかならずしも消えさってしまうものではなく，ひとり歩きする思考を生みだすことにあり，イマージュの領域において補足され，自己完結しようとする」(1938/1993, 及川他訳, p.111) 傾向を帯びているのである。

本調査において，与えられた複数の三角形の図に対して，“＝”を用いた式を作るように児童・生徒は指示されるが，これに対し，「同じ」という語から連想し，「同じ直角三角形だから」あるいは「同じ二等辺三角形だから」といった理由により“＝”による式を作っているのである。実際には，児童・生徒は，等式が数値に関する相等性を示すものであることを学校数学において直接的には指導されてきていない。しかし，そのことについて「正しい」あるいは「誤り」の評価をする問題とは異なる次元において，語「同じ」が，より正確にいえば，「同じ」の背後にある児童・生徒の認識が認識論的障害（Janvier,1998; 溝口,1995a,1995b; Sierpinska,1994）として機能していることが示されるのである。

6．おわりに

(1) 研究の結論

本稿では，冒頭で述べた研究課題の解決を目的として，実態調査を基に，子どもの等号，相等性に関する認識を明らかにし，その固有の困難の起源として語「同じ」によって表象される概念を認識論的障害として特定した。

(2) 今後の課題

今後の課題として，子どもが「同じ」という語に関する認識をどのように発達させるかということについての継続的な追跡調査，及び個々の子どもの「同じ」についての具体的な認識対象の範囲を捉えることが必要とされる。

注

(注1) ただし，「合同」で示される回答では，その多くが，「△ABC＝△TUS」を回答したものである。本調査の対象である児童・生徒は，「合同」について未習であり，実際には「等しい（相等）」と同義にこの語を用いていると解釈できる。

(注2) 「合同」同様，本調査の対象である児童・生徒にとって「相似」は未習の内容であるものの，実際の子どもの記述においては「拡大・縮小」や「形が同じ」という表現で示される。

(注3) 認識論的障害は，そもそもフランスの科学哲学者であるガストン・バシュラールによって提起された科学史を記述する上で必要とされた概念である。教育においてこれを議論するとき，一般に，子どもの誤り（*error*）の起源として，個体発生的起源，教授学的起源，認識論的起源を考え，この第三の起源による障害を認識論的障害と呼ぶ。従って認識論的障害は，「活動のある領域においてはよく機能し，それゆえよく確立しているにもかかわらず，次には，機能不全を起こし矛盾を導くような他の文脈においては満足に作用しない認識」と定義される(Brousseau,1983)。数学における認識論的障害は，数学的概念の本性自体に，またそのような数学的概念が発達してきた文化的枠組みによることから，過去の数学者が経験した困難と極めて類似したものであることが指摘される。

(注4) 実際，バシュラール(1938/1993)の指摘する認識論的障害は，「ことばの障害」の他にも，「最初の経験 *l'expérience première*」や「アニミスムの障害 *l'obstacle animiste*」等のように，一般的な認識の傾向としてまとめられている。

引用・参考文献

Bachelard, G. (1938a/1993). *La formation de l'esprit scientifique, contribution à une psychanalyse de la connaissance objective.* Paris, J. Vrin. （及川 馥，小井戸光彦訳. (1975). 国文社.）

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (2), 165-198.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations (Two volumes bound as one).* Dover: NY.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 79-103.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics 12* (3), 317-326.

溝口達也. (1995a). 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究 63・64, 27-48.
溝口達也. (1995b). 数学学習における認識論的障害の克服の意義：子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当てて. 筑波大学教育学系論集 20(1), 37-52.
溝口達也. (1999). 学校数学における等号「＝」の認識の変容を捉える観点の設定. 鳥取大学教育地域科学部紀要（教育・人文科学）1(1), 195-203.
Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-stones. Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. G. & Sierpinska, A. (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* NCTM. Reston, VA. 7-29.
Sánez-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics 35* (2), 153-187.
Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* The Falmer Press.
Steinbring, H. (1998). From "Stoffdidactik" to Social Interactionism: An Evolution of Approach to the Study of Language and Communication in German Mathematics Education Research. Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. G. & Sierpinska, A. (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* NCTM. Reston, VA. 102-119.
竹内芳男. (1967). 算数・数学科における相等関係について（I）－等号の研究－. 山形大学紀要（教育学科）4(2), 1-13.

Summary

This research focuses on students' conceptions of the equal symbol and on their notion of equality which evaluates the equal symbol, especially in the field of geometric figures rather than the field of arithmetic or algebra. The purpose of this paper is solving a research subject: "what conceptions do students have of the equal symbol used in the field of geometric figures, and what are their peculiar difficulties?" For this, in this research, the survey carries out for the sixth, the seventh, and the eighth graders, in which students chose suitable sets of triangles from the proposed figures, make the expressions using the equal symbol, and describe the reasons why their expressions are valid. Analysis is made from the viewpoint of language to clarify students conceptions and their difficulties based on their descriptions. As a conclusion, the notion of "*onaji*" is identified as an epistemological obstacle related to the equal symbol and the notion of equality.