学校数学における
等号「＝」の認識の変容を捉える観点の設定

溝　口　達　也*

Constructing a framework for students' conceptual change of the equal symbol in school mathematics

Tatsuya Mizoguchi *

キーワード：等号，相等性，認識の変容，認識論的障害，学校数学，数学教育
Key Words : equal symbol, equality, conceptual change, epistemological obstacle, school mathematics, mathematics education

1．はじめに

学校数学において取り扱われる数学的記号において，そのもっとも初期の段階から導入されるものの一つに，等号「＝」をあげることができる。もとより，数学教育において，各種の演算記号や関係記号については，その各段階において，何らかの学習指導を介することで，学習者によって学習される。等号「＝」についても，この例外ではないが，しかし，そのもっとも初期の段階で導入される際の等号「＝」の認識が，後述のように，暗黙のうちにその変容を期待されることから，様々な問題状況を生み出すという現象が観察される。

例えば，次のような事例に，そうした問題状況の一端を垣間見ることができる。小学校第4学年におけるある授業において，以下のような場面が観察された。授業において提示された問題は次の通りである。

> 文房具店で，同じ値段のノート6さつを買いました。次にスーパーに行き，100円のジュースを買って，全部で940円使いました。ノート1さつの値段はいくらでしょう。

この問題に対して，ある児童は，次のように板書した。

---

*教科教育講座（数学教育学）　Department of Curriculum and Instruction, Faculty of Education and Regional Sciences, University of Tottori

$$\square \times 6 + 100 = 940$$
$$= \bigcirc + 100 = 940$$
$$= \bigcirc = 940 - 100 = 840$$
$$= 840 = \bigcirc$$
$$= \square \times 6$$
$$\square \times 6 = 840$$
$$\square = 840 \div 6$$
$$\square = 140$$

さらに，この児童の板書に対して，別の児童は，次のように発言している：「一つの式の中に『は』（＝）が２つ以上あってはいけない。」

こうした現象の観察から指摘され得ることは，児童自身が，自らの等号「＝」あるいはそれに付随する相等性に関してその誤りを認識していない，換言すれば，自らの抱える問題状況に対して無意識である，という点である。

これまでに，そうした問題状況の解決を意図して，様々な実践が試みられてきている（根本，1971；平井，1972；久保田＆浅井，1973）(1)。しかし，こうした優れた実践研究を適切に位置づける基準が必要とされる。というのは，そうした位置づけがなければ，各々の試みは，トピックとして単発的に行われたという評価しか受け得ず，研究の累積性，あるいは指導の系統性を伴わなくなる。

以上のような問題意識の下に，本研究においては，次のような研究課題を設定し，これを解決することを目的とする：学校数学における等号の認識の変容過程を捉える観点は，どのように設定されるか。

この課題を解決するために，本研究においては，先ず，数学的表記一般の問題との関わりから，等号「＝」に潜在的に含まれる問題を指摘し，続いて，等号「＝」の意味する相等性についての吟味から，その固有の問題を指摘する。こうした問題を踏まえて，等号の認識の変容過程を捉える観点を設定し，この観点の下に，その変容過程において予想されるいくつかの障害を指摘する。

２．学校数学における等号「＝」の扱いについての問題の所在

２．１　表記の問題との関わり

等号「＝」は，数学における表記の一つである。数学教育における表記の問題について，広島大学を中心とする一連の優れた研究成果がある。本節では，これらのうち，特に等号「＝」に関わりがあると思われる数学的表記の「多義性」，及び「縮合」についての研究から示唆を得る。

２．１．１　数学的表記の多義性

数学的表記の「多義性」は，「その語を提出する側と，それを提出される側の間の受け取り方のズレの生ずる可能性」（岩合＆板野，1964，p.35）により生じる問題として顕在化する。すなわち，「異なった実体に対して同じ表記が用いられる」（岩合＆板野，1964，P.36）ことによって生じる問題である。

例えば，

$$(3+2)\times 6=3\times 6+2\times 6$$

という等式について，教師は，分配法則を児童に伝えたかったのに対して，児童は，等号「＝」の左辺の計算結果は，右辺の計算結果と等しくなる，と捉えたとしよう。この場合，教師は，等号「＝」を少なくとも《⇄》(左辺の計算は右辺のように計算することと等しく，かつ，右辺の計算は左辺のように計算することと等しい）として提出している一方，児童は《→》(左辺の計算は，右辺のような計算を実行することでもとめられる）としてのみ受け取っているのである。これは，両者の等号「＝」に対する解釈の違いであると同時に，等号「＝」に付与する定義の違いでもある。いずれの定義も，前者が後者に比べ教育的に望ましいとされるにしても，誤りではない。

こうした事情を受けて，岩合氏らは，「この種の多義語では，発生から成長への過程を重視して観察することが重要である」(岩合＆板野，1964，p.36）と指摘している。すなわち，断片的な子どもの認識の達成のみを問題とする以上に，そうした認識の変容こそを問題とすることが指摘されているといえる。

以上，数学的表記の多義性の問題から，我々は，従って，学校数学における等号「＝」をその定義（意味）の進化（変容）として捉えることが要請される。

2.1.2　数学的表記の縮合

数学的表記の問題には，同時に数学的表記の「縮合」の問題が含まれる。すなわち，上記のように，等号「＝」において，その定義，換言すれば，児童の等号「＝」について有する認識が進化しつつも，「＝」という表記そのものは保存されるわけである。平林氏らは，この状況を次のように説明している。「表記の縮合は，まずみかけの上での表記の短縮であり，略記である。しかし縮合は単なる略記ではない，縮合された表記は，形態上は短縮しながらも，原表記のもっているあるものを保存し，その復元性が約束されていなければならない。」(平林＆藤井，1965，p.１)

例えば，等式５＋３＝４＋４は，《左辺の自然数の和と右辺の自然数の和が等しい》ことを意味し，このとき，その和は数値として一致する。このことは，数の範囲を拡張しても同様である。ところが，ベクトルに関する等式$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$が与えられたとき，これは《左辺の２つのベクトルの和は右辺のベクトルに等しい》ことを意味し，このとき，ベクトル$\vec{a}+\vec{b}$とベクトル$\vec{c}$は，その方向と大きさが一致することが要請され，空間上で必ずしも一致する(2)ベクトルとして存在する必要はない。さらに，集合に関する等式Ａ＝Ｂは，《Ａ⊂ＢかつＡ⊃Ｂ》であることを意味する。

このような数学的表記の「縮合」の目的は，「文脈を浮立たせることにより，表記の理解と伝達を容易にすることにある」(平林＆藤井，1965，p.12)。にもかかわらず，この縮合による問題は，上記の「多義性」の問題から示唆された等号「＝」の定義の進化の問題と関連して，等号「＝」によって結合される二者の対象としての変容を捉えることが要請される。まさに等号「＝」の定義は，これによって結合される二者がいかなる数学的対象であるかに依存するといえる。

2.2　相等性との関わり

前節で示されたように，等号「＝」の認識については，その定義の進化，及び等号によって結合される対象の変容という問題が指摘された。これらは，いわば形式的言語である数学的表記としての等号「＝」についての吟味から得られたものである。一方，我々は，通常，等号「＝」で示される関係を「等しい」(もしくは「相等しい」) といった自然言語で表現する。一般に，相等性は，「量もしくは数に関する二つの経験間に相違のないことを洞察する意識。あるいは量ないし数一般

において相違なしと考えられる概念」[3] と規定されるが，我々は，日常的にこの「等しい」関係を多様に用いている。これは，必ずしも「等しい」と言った明確な表現を用いられるわけではないが，例えば，Freudenthal は，次のような例をあげている（Freudenthal,1983, pp. 478-479）；

Amsterdam is the capital of the Netherlands.

あるいは，

The capital of the Netherlands is Amsterdam.

すなわち，“is” が，数学的表記としての等号「＝」と同様に用いられており，その「左辺」と「右辺」に「同じもの（the same thing)」が置かれているわけである。さらに，“is” によって結ばれる別の仕方として，次のような例があげられる；

Socrates is a man.

あるいは，

Apes are mammals.

前者の場合 Socrates $\in$ man を意味しているのに対して，後者の場合 Apes $\subset$ mammals を意味している。

こうした状況は，日本語においても同様に生じるのである。例えば，４＋３＝７に対して，「よん　たす　さん　は　なな　です」と表現したときと，「わたしのなまえ　は　まゆ　です」という両方の場合において，同じ「...は...です」という構文が用いられる。しかし，前者は，その左辺と右辺を置き換えても成立する命題であるのに対して，後者の場合「まゆ」は必ずしも「わたし」だけの名前ではない。にもかかわらず，同じ構文を用いて音声言語として表現するとすれば，後者が，《「わたしのなまえ」→「まゆ」》という関係を表現するのと同様に，前者が《「４＋３」→「７」》という関係のみを表現しているという可能性が残される。

上述のように，「相等性」は，一般には「量もしくは数に関する二つの経験間」について規定されたものであるが，教育における子どもの発達を考慮するとき，そうした経験の範囲を拡げて捉えることも有用である。前節で指摘された，数学的表記の「多義性」，及び「縮合」の問題が，こうした言語活動によって展開される広義の「相等性」からの抽象と密接に関連するものであると見るならば[4],[5]，子どもの有するそうした素朴な「相等性」が数学的表としての等号「＝」へと抽象される過程，あるいは，これに及ぼす影響，について考慮していくことが必要とされる。このことは，実際，子どもの有する「相等性」と数学的表記である等号「＝」との対応として，等号「＝」の認識の変容を捉えることを要請するものである。

3．等号「＝」の認識の変容過程を捉える観点

前章で指摘された学校数学における等号「＝」に関わる問題を受けて，これの認識の変容を捉える観点として，以下の３点を設定することが可能である：

(1)等号「＝」の定義の進化；

(2)等号「＝」で結合される対象の変容；

(3)等号「＝」と「相等性」との対応。

(1)については，これまでにもよく指摘されてきており，むしろこの点にこそ多くの注意が払われてきたといってもよい。例えば，Freudenthal（1983）は，「実際，数学における相等性（equality）は，しばしば定義の問題である。」（p. 479）と述べており，また Sánez-Ludlow & Walgamuth（1998）

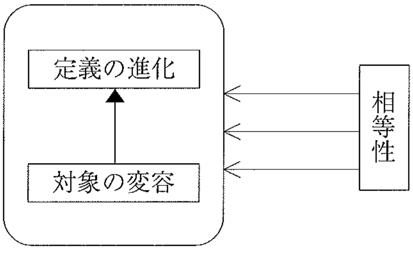
の研究においても，教授実験の中での子どもたちの等号「＝」に付与する意味の変容を詳細に追跡している。さらに，我が国においても，竹内氏（1967）による研究において，相等関係の型として等号「＝」の用いられ方の綿密な分類が行われている。

一方，(2)については，上の竹内氏の研究において等号の意味の分析の中で一部扱われているものの，これまであまり指摘されてこなかった観点であるといえる。この原因の一つには，子どもの等号「＝」の認識の変容過程を，ある学年段階，もしくは，ある題材に限定して[(6)]研究が進められる傾向にあったことがあげられ，前章でも指摘したように，等号「＝」の認識の変容過程をより縦断的に追うことで，初めて対象の変容の問題が浮き彫りにされてくる。

さらに，(3)についても，等号「＝」に付与される定義もしくは意味として語られることはあっても，子どもの有する素朴な「相等性」との関わりでは，ほとんど指摘を受けてこなかった観点であるといえる。実際，これまでの研究における相等性の扱いは，上述の一般的規定としてのそれであり，等号「＝」の認識と相等性との関係は同一のものとして扱われてきたと見ることができる。本研究では，この概念の指示対象をより一般的な範囲に拡げることで，等号「＝」の認識の変容を捉える新たな観点として提示することを試みるのである。

次に，以上のように設定された(1)～(3)の観点間の関連について吟味する必要がある。先ず，等号「＝」の定義は，等号「＝」で結合される対象が変容することを契機として進化する。例えば，$4+3=7$という等式における等号「＝」の定義は，《左辺→右辺》で何ら支障はない。すなわち，《左辺の式を計算した結果が右辺の値である》という認識である。しかし，一旦，等式$7=4+3$に直面した子どもにとって，上の定義のままでは，この等式を解釈することができない。第二の等式は，第一の等式と異なり，左辺と右辺に置かれる対象（式と値）が逆になっているわけである。ここに新たに，《左辺←右辺》という定義が加わるのである。すなわち，《左辺の値は右辺の式を計算することで得られる》という認識である。しかし，教師は，さらに子どもが第二の式をも《左辺→右辺》と見ることができること，すなわち，《左辺の値は右辺のように加法形式で分解できる》という認識を期待し，また，この第二の式が第一の式のようにも記述され得る，ということを期待する。ここには，等号「＝」の定義の進化の観点が介在することは明白であるが，そのように進化した定義を，子どもが受け入れることが可能かどうかという点については，言及するものではない。ここに，第三の観点である，等号「＝」と子どもの有する「相等性」の観点が必要とされるのである。すなわち，等号「＝」の認識において，対象の変容を契機として（観点(1)）進化した定義を（観点(2)）受け入れることが可能かどうかを評価する基準として子どもの有する「相等性」を（観点(3)）位置づけるのである。

以上の議論は，以下の図のように示される。



4．等号「＝」の認識の変容過程において予想される障害

本章では，現行[7]の小学校算数科の等号「＝」に関わる指導内容について，一社の教科書[8]に基づいて調査する中から，そこで予想されるいくつかの障害[9]を例示する。

先ず，前章で示されたように，等号「＝」で結合される対象についてその変容を捉え，続いてそれを契機とする定義の進化を記述し，これらが子どもの認識として受け入れられる基準として要請される「相等性」を指摘する。

①□をつかった式

第３学年において，これまでの数，式を対象とする等号「＝」の用い方に加えて，等号「＝」の左辺に□が登場する。このとき，

□＋４＝16

という式について，児童は，《「□にあてはまる数」と４を足した結果が16である》という認識の下に，等号「＝」の定義は，それまでのもの，すなわち《左辺の計算を実行すると右辺の数値が得られる》から特にその進化を要請されるものではない。しかし，教科書の記述に従うならば，次のように展開されている：

□＝16－４
□＝12

といった式の系列においては，右辺のみが独自に計算され，上の□＋４＝16については，子どもは直接□の中に適当な数を当てはめていくことができるのに対し，後者の式の系列においては，子どもは□に対して直接何かを操作することができない。さらに，この点から，等号「＝」に付与する定義についても，第一式においては《「□にあてはまる数」は，16から４を引いた計算結果である》のに対し，第二式においては《「□にあてはまる数」は，12に等しい》という異なる認識が要請される。このことは，上の□＋４＝16においては，□＋４というひとまとまりの中での□として，特に新たな対象であるという自覚を必要とせず，従って「相等性」としてもそれまでと同様の基準を満たすものであるのに対し，後者の式の系列では，一方で左辺は新しい対象としての□であり，他方で右辺はこれまで扱ってきた数や式であり，これらの間に「相等性」を見ることを要請しているわけである。

しかしながら，実際，この点に関しては，教科書の記述の仕方にも問題があるといわざるを得ない。そもそも，「□をつかった式」を学習する意図は何か。これについて，杉山氏は，次のように述べている。「ここに□があるのは，方程式の初歩を教えるためなのではなく，１つは，言葉で述べられたことを素直に式表現することを通して式のよさを理解してもらうため，また，そのことを通して加法と減法の関係を知ってもらうため，そして，等号の理解を深めるために置かれているのである。」（杉山，1999，p.21）筆者もこの意見に賛成する。□＋４＝16という式について，これを中学校で学習するような「移項」に似た操作を施して，□の値をもとめるのでは，児童の等号「＝」についての認識は，これまでと同様に「は」の域を出ない（杉山，1999，p.22）。例えば，□に９や10を入れると16よりも小さくなる，あるいは，15を入れると今度は16より大きくなる，さらには，問題文に示される数量の関係を□を用いて等式として表現する，といった活動を通してこそ，等号「＝」が両辺の等しいことを示している。という認識が達成されることが期待されるのである。従って，上述のような扱いは，等号「＝」に関する児童の有する障害を克服するどころか，むしろそう

した障害の現出の傾向を強めているとさえいえる。

②あまりのある算の式

例えば，14÷ 3 = 4 … 2 という式において，左辺がこれまでと同様の数や式であるのに対し，右辺は単なる数でもまた式でもない新しい表記である。すなわち，等号「=」に付与する定義として単純に《左辺の計算結果が右辺の数になる》とするわけにはいかず，等式の両辺に置かれる対象をあたかも同じ数学的対象であると見る「相等性」が要請される。

③円周率

第 5 学年で学習する円周率について，教科書においては「円周率は，くわしく求めると，3.14159……となりますが，ふつう3.14を使います。」という記述の後に，「**円周÷直径=3.14**」と示される。すなわち，これまで，等号「=」の両辺に置かれる対象は「等しい」対象であったのに対して，ここにおいて等号「=」に付与される定義は《等しいとみなす》というものであり，同時にそうした「相等性」が要請される。このことは，また等号「=」の各辺に置かれる数の「……」を用いた表示形式についても新たな要請を強いるものであり，Freudenthal（1983，p.479）が π = 3.14159... と π =3.1415926... について，3.14159... =3.1415926... が何を意味するのか，という指摘をするところの問題である。

④等しい比

第 6 学年で学習する等しい比についての等式は，小学校段階における等号「=」によって結合される対象の変容としてもっとも典型的なものであるといえる。

40：50=120：150

という等式が提示されたとき，子どもは，その両辺に置かれる対象がこれまでの数や式とは全く異なるものであることから，新たに等号「=」の定義を対象に則したものに進化させる必要がある。少なくとも，これまでの等号「=」に付与する定義としては必ずしもそうでなくとも解釈が可能であったのに対し，ここでは「相等性」について《バランス》の認識が要請される。

5．おわりに

本研究の研究課題は，「学校数学における等号の認識の変容過程を捉える観点は，どのように設定されるか。」であった。これに対し，結論として，そのような観点として，

(1)等号「=」の定義の進化

(2)等号「=」で結合される対象の変容

(3)等号「=」と「相等性」との対応

の 3 つを設定した。また，観点間の関連づけとして，等号「=」によって結合される対象の変容を契機として，等号「=」の定義が進化し，そうした表記面における変容を評価するものとして，「相等性」を位置づけた。

本研究は，その全体像の中で，未だその端緒についたばかりである。実際，4．で扱ったことについては，より組織的な分析が必要であるし，研究の趣旨から見て，小・中・高あるいはそれ以上の各段階を見通した分析が要請されるものである。

註

（1）EDMARS 教育研究文献情報データベースによる検索（表題：等号 or 内容の要約：等号 or 索引語：等号）の結果，これらを含む5件が該当した。
（2）「ぴったり重なる」の意。
（3）哲学辞書（1971，平凡社）の「相等性」の項による。
（4）平林氏らは，自然言語のような非形式的言語についても縮合の問題を指摘しており，このようなものについても，数学教育において無視できないものであることを指摘している。（平林＆藤井，1965，p. 1）本節では，「相等性」に特に焦点を当てるため，この問題を縮合の問題には含めずに議論した。
（5）マックレーンは，次のように述べている；「こういった形式的概念は主として未だ数学という明確な形をとる前の「人間の文化的活動」とでも言うべきものから生まれてくる。このゆえに数学の創生についてのわれわれの分析もまたそういった活動について触れていくことになる。」（マックレーン，1992，p. 46）
（6）数多くある方程式等に関する研究の一部もこうした中に取り込むことが可能である。例えば，Pirie & Martin（1997）の研究もそのようなものの一つである。
（7）平成元年3月告示の小学校学習指導要領。
（8）啓林館「新訂さんすう」及び「新訂算数」（平成7年1月　文部省検定済）。
（9）ここでいう障害は，基本的には，筆者がこれまで研究を進めてきた認識論的障害（溝口，1995a；1995b）を想定している。以下概略を示す：認識論的障害は，そもそもフランスの科学哲学者 Gaston Bachelard によって提起された科学史を記述する上で必要とされる概念である。教育においてこれを議論するときには，一般に，子どもの誤り（error）の起源として，個体発生的起源，教授学的起源，認識論的起源を考え，この第三の起源による障害を認識論的障害と呼ぶ。従って，認識論的障害は，「活動のある領域においてはよく機能し，それゆえよく確立しているにもかかわらず，次には，機能不全を起こし矛盾を導くような他の文脈においては満足に作用しない認識」と定義されるものである。数学における認識論的障害は，数学的概念の本性自体に，またそのような数学的概念が発達してきた文化的枠組みによることから，過去の数学者が経験した困難と極めて類似したものであることが指摘される。

文献

Freudenthal,H.（1983）. *Didactial Phenominology of Mathematical Structure.* D. Reidel Publishing Company.
平林一栄，藤井昌興.（1965）. 数学教育における表記の問題（第4報）7. 数学的表記の縮合について. 日本数学教育会誌　数学教育学論究Vol. 10，pp. 1-13.
平井敏夫.（1972）. 等号・不等号の指導についての考察－記号の理解を深めるために－. 日本数学教育学会誌　算数教育54(6), pp. 12-14.
岩合一男，板野暢之.（1964）. 数学教育における表記の問題（第2報の1）3. 多義語. 日本数学教育会誌　数学教育学論究Vol. 7，pp. 35-42.
久保田長生，浅井信雄.（1973）.「－，＋」や等号・不等号を用いた式の指導はどのようにすればよいか－低学年－. 日本数学教育学会誌　算数教育55(2), pp. 12-14.
マックレーン，S.（彌永昌吉監修，赤尾和男，岡本周一共訳）（1992）. 数学－その形式と機能. 森北出版株式会社.
溝口達也.（1995a）. 認識論的障害の克服過程の記述カテゴリーによる特徴づけ：極限概念を事例として.

日本数学教育学会誌　数学教育学論究Vol.63・64, pp.27-48.
溝口達也. (1995b). 数学学習における認識論的障害の克服の意義：子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当てて. 筑波大学教育学系論集20(1), pp.37-52.
根本和子. (1971). 等号の意味－３年における－. 日本数学教育学会誌　算数教育53(12), pp.21-23
Pirie,S.& Martin,L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation!. *Educational Studies in Mathematics 34*(2), pp.159-181.
Sánez-Ludlow,A & Walgamuth,C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics 35*(2), pp.153-187.
杉山吉茂. (1999). これからの数学教育・数学教育研究のあり方. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会（編). 新しい算数・数学教育の実践をめざして. 東洋館出版社. pp.17-25.
竹内芳男. (1967). 算数・数学科における相等関係について（Ⅰ）－等号の研究－. 山形大学紀要（教育学科）4(2), pp.1-13.
哲学辞典. (1971). 平凡社

本稿は，日本数学教育学会　第31回数学教育論文発表会（1998.11，福岡）における発表原稿に加筆，修正を加えたものである。

(1999年６月10日受理)

Abstract

The purpose of this paper is to respond to the following research problem: how we construct a framework for students' conceptual change of the equal symbol in school mathematics.

In conclusion, we construct such a framework as follows:

(1)evolution of the definition of the equal symbol;

(2)change of the objects connected by the equal symbol;

(3)a student's "equality" which evaluates the equal symbol.

In order to draw this conclusion, the research is conducted as follows: first, discussing *the equivocality* and *the contraction* of mathematical notation in students' knowing about the equal symbol, and then contriving "*equality*", which is a student's naive conception that expands general concept of equality; second, for the relation of these categories, the definition of the equal symbol evolves with changes of the objects connected by the equal symbol as a turning point,and a student's "equality" is set up as evaluation to accept such a definition.

Finally, some epistemological obstacles related to students' knowing about the equal symbol expected in present elementary mathematics in Japan are illustrated.