第二階論理の非標準モデル

田畑　博敏*

はじめに

第二階論理が、解釈のための標準モデルである標準構造（standard structure）に関して不完全である、すなわち、標準構造で妥当である第二階論理式のすべてを、かつそれらのみを演繹できる計算体系が存在しない、ということはよく知られている[1]。このことは、標準構造のクラスが小さすぎて、それによって妥当性が認定される妥当式の集合が大きすぎる、ということに起因する。なぜなら、標準構造では、個体宇宙が決まることによって、関係宇宙が、個体間の<u>**可能なすべての関係**</u>を一挙に同時に含むような唯一の関係宇宙を設定するように、最初から制限されているからである。これまでに、われわれは標準構造に基づく第二階論理の特性と、それに関連する形で第二階ペアノ算術とを、言語の表現力の比較という観点から論じてきた[2]。本論では、第二階論理を解釈するための非標準モデルとして、ヘンキンに由来する[3]一般構造（general structure）を考察する。一般構造では、ある（自然数）nに対してn項関係宇宙 A_n が、個体宇宙Aのn項デカルト積の巾集合 $\mathcal{P}A^n$ の真部分集合となるような非標準構造が、標準構造とともに、考察の対象となる。その結果、構造のクラスはきわめて大きいものとなり、妥当式の集合はそれに（いわば）反比例して収縮する。そのようにして小さくなった妥当式の集合は、第一階論理計算の単純な拡大である（以下で述べる）計算体系 C^-_2 によって演繹される集合に一致することになる。さらに、妥当性を、「すべての一般構造で真となること」と解釈し直すならば、完全性定理やレーベンハイム・スコーレムの定理が、（C^-_2 より強い）第二階論理計算 C_2 においても成り立つようになる。

このような非標準的構造を意味論の道具に用いることは、われわれが多領域的（または多ソート的many-sorted）見地に立つ、ということを意味する。それは、つぎのような考え方である。われわれは、第二階論理の量化が適用される関係や関数が、個体宇宙によって予め一義的に決定されている、と考える必要はない。関係や関数のうちには、われわれにとって扱いやすいものもあれば、そうでないものもある。例えば、個体宇宙が可算であっても、その上で定義される関係・関数は可能的には非可算個存在するが、それらがすべて第二階の言語で定義可能であるかどうかについては、何の保証もない。標準構造の背後にある集合論では、巾集合の概念が確固たるものとして認められており、従って、各関係宇宙 A_n は、個体宇宙のn項デカルト積の巾集合 $\mathcal{P}A^n$ が、すべての可能なn項関係の全体を形づくっている。しかし、われわれは、（A^n の部分集合としての）さまざまな関係のうちで、われわれがコントロールしやすいものに限って量化することを考えることも可能である。非標準構造で、n項関係の宇宙を、$\mathcal{P}A^n$ の複数個ある<u>真</u>部分集合のうちの一つとするのは、以上のような多領域的見地の反映である。

---

*鳥取大学教育地域科学部・地域設計学講座・哲学

ここで、本論文が扱う構造と定理との関係を概観する。まず、標準構造（standard structure）のクラスS.Sにおいて妥当となるSOL（第二階論理：second order logic）の文の集合を“$\models$S.S”と表示する。すなわち、$\models$S.S＝{ φ：φはSOLの文＆$\models_{s.s}$ φ}とする。$\models$S.S のすべての文を生成する完全な計算体系は存在しないが、健全な計算体系C_2は存在する[4] 。さらに、C_2を一層弱めた計算体系C^{-}_2を定義できる[5]。計算体系C_2およびC^{-}_2で論理的定理として導かれる式の集合を、それぞれ、“$\vdash C_2$”（または“$\vdash$SOL”）および“$\vdash C^{-}_2$”（または“$\vdash$MSL”）とする（“MSL”は多領域論理many-sorted logicに由来する）。このとき、$\vdash C_2$は$\models$S.Sの真部分集合である。そこで、妥当性の条件を厳しくして$\vdash C_2$に対する適切な意味論を与えるために、われわれは以下において、広義の構造である**フレーム**（frame）を導入し、それに基づいて、**一般構造**（general structure）を定義する。それらの定義によって、フレームのクラス$\mathcal{F}$で妥当となる第二階言語の式の集合$\models\mathcal{F}$、および一般構造のクラス$\mathcal{GS}$で妥当となる第二階言語の式の集合$\models\mathcal{GS}$が定まる[6]。それらは、$\vdash C^{-}_2$と$\vdash C_2$に一致する。すなわち、

$$\models\mathcal{F} = \vdash C^{-}_2$$

および

$$\models\mathcal{GS} = \vdash C_2$$

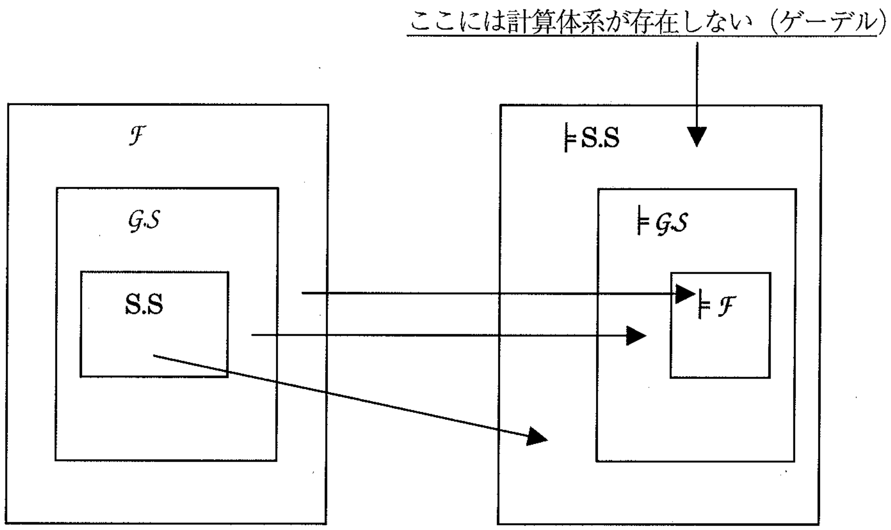
となる。そして、各構造のクラス間の包含関係は

$$\mathrm{S.S} \subseteq \mathcal{GS} \subseteq \mathcal{F}$$

であるから、それらの構造で妥当となる式の集合の包含関係は、これとは逆に、

$$\models\mathcal{F} \subseteq \models\mathcal{GS} \subseteq \models\mathrm{S.S}$$

となる。以上の関連を、マンザノに従って図示すると、つぎのようになる[7]。



以下の各節において、これらのことを確認していく。

1. 第二階フレーム

まず、われわれは、標準構造のクラス S.S よりもはるかに広いクラスとなる、第二階フレームのクラス $\mathcal{F}$ を定義することから始める。

1.1 フレームとはなにか

1.1.1 フレームの定義

第二階フレーム $\mathcal{A}$ はつぎのように定義される：

$$\mathcal{A} = < A, < A_n >_{n \geq 1}, < C^{\mathcal{A}} >_{c \in \text{OPER.CONS}} >。$$

ここで

(i) $A \neq \emptyset$　は個体の宇宙であり、非空である。

(ii)各 $n \geq 1$ に対して、$\emptyset \neq A_n \subseteq \mathcal{P}A^n$。

(iii)FUNC(R)= <0,1, …^{n},1>というタイプを持つ、各 n 項関係定項 $R \in$ OPER.CONS（=個体定項と関係定項の集合）に対して、$R^{\mathcal{A}}$ は、（標準構造の場合と同様）個体上の n 項関係である。いま、われわれは、$R^{\mathcal{A}} \in A_n$ という条件を加える。すなわち、構造において（考察の対象として）予め特定された関係は、対応する宇宙のメンバーでなければならない、ということである。

(iv) FUNC(f)=<1,1, …$^{n+1}$,1>というタイプを持つ、各 n 項関数定項 $f \in$ OPER.CONS に対して、$f^{\mathcal{A}}$ は個体上の n 項関数である。さらに、$f^{\mathcal{A}} \in A_{n+1}$ である。とくに、個体定項 a に対して、$\{a\} \in A_1$ という条件がつく。

すでに述べたように、フレームのクラスを $\mathcal{F}$ と表記する。

標準構造の定義と比較してわかる、この定義の特徴は、(ii)にある。つまり、n 項関係の宇宙 A_n は、フレームでは、A の n 項デカルト積 A^n の巾集合 $\mathcal{P}A^n$ の、任意の部分集合でありうる。標準構造では、$A_n = \mathcal{P} A^n$ であった。また、構造において予め特定されている関係と関数に対して、それらが対応する宇宙に含まれている、という条件が、量化の目的達成のために課されている。

1.1.2 命題：標準構造のクラス S.S は、すべてのフレームのクラス $\mathcal{F}$ の真部分クラスである。

【証明】

定義により、任意の標準構造はフレームである…①。さらに、フレームの定義の(ii)により、その n 項関係宇宙 A_n が、$A_n \subseteq \mathcal{P}A^n$ かつ $A_n \neq \mathcal{P}A^n$ であるような、そういうフレーム $\mathcal{A} = < A, < A_n >_{n \geq 1}, < C^{\mathcal{A}} >_{c \in \text{OPER.CONS}} >$ を取ると、これは、全フレームのクラス $\mathcal{F}$ のメンバーではあるが、標準構造のクラス S.S のメンバーではない…②。よって、①、②より、標準構造のクラスは、フレームのクラスの真部分クラスである。すなわち、$S.S \subseteq \mathcal{F}$、しかし $S.S \neq \mathcal{F}$ である。　Q.E.D.

1.2 フレーム上の意味論

1.2.1 フレームにおける項・述語の意味と式の充足

フレーム $\mathcal{A}$ が与えられ、$\mathcal{A}$ 上の割り当て（変項への値の配分 assignment）M が定まったとき、われわれは、解釈：

$$I = < \mathcal{A}, M >$$

すなわち、第二階言語 L2 の項と述語の意味、および L2 の式の充足を、標準構造の場合[8]に準じて定義する。特に、同一性（同等性 equality）も、ここでは、原始的なもの(primitive)と見なす。こうして、非標準モデルによって第二階論理の意味論を与えるときも、第二階言語 L2 は不変であり、フレームにおける項の定義も、フレームにおける式の充足の定義も、標準構造におけるそれらの定

義と平行している。しかし、重要な違いもある。それは、フレームを用いるとき、式φと変項列 x_1, x_2,…, x_n によって定義された関係が n 項関係の宇宙 A_n の中に存在する、という保証がないことである。それは、言い換えると、ラムダ記法による関係記号の意味、つまり $I(\lambda x_1 \cdots x_n\,\varphi)$ が、$\mathcal{A}$ の個体上の関係であったとしても、A_n のメンバーでは必ずしもない、ということを意味する。

1.2.2 フレーム・モデル(frame model)

第二階フレーム $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$、および $<\mathcal{A}, M>$ SAT φである割り当て(assignment) Mがあるとき、$<\mathcal{A}, M>$ はφのフレーム・モデルである、と言う。これは、一つの式に対するフレーム・モデルであるが、式の集合に対してもフレーム・モデルという言葉を使う。すなわち、Γが式の集合であり、$<\mathcal{A}, M>$ が $\gamma \in \Gamma$ である各式γのフレーム・モデルであるとき、$<\mathcal{A}, M>$ は式の集合Γのフレーム・モデルである、と言う。

1.2.3 フレーム上の帰結

われわれは、

$$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$$

と書いて、φ がすべてのフレームのクラス $\mathcal{F}$ における、式の集合Γの**フレーム帰結**(frame-consequence)であることを表示する。その意味は、Γ中のすべての式のフレーム・モデルが、式φのフレーム・モデルでもある、ということである。

命題：フレーム帰結は、標準構造における帰結を含意する。すなわち、任意の、式の集合Γと式φに対して、

$$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{S.S} \varphi.$$

【証明】

$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$ と仮定する…①。いま、$\mathcal{A}$ を、Γの標準モデルであるような、$\mathcal{A} \in S.S$ なる任意の標準構造である：$\mathcal{A} \models_{S.S} \Gamma$、と仮定する…②。$S.S \subseteq \mathcal{F}$ であるから、$\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ でもある。つまり、$\mathcal{A}$ はフレームである。よって、$\mathcal{A}$ はΓのフレーム・モデルでもある。ところが、①の仮定により、Γの任意のフレーム・モデルはφのモデルだから、$\mathcal{A}$ はφのフレーム・モデルである：$\mathcal{A} \models_{\mathcal{F}} \varphi$。ところが、仮定②により、$\mathcal{A}$ は標準構造だった。ゆえに、$\mathcal{A}$ はφの標準モデルである：$\mathcal{A} \models_{S.S} \varphi$。以上により、$(\forall \mathcal{A})(\mathcal{A} \models_{S.S} \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models_{S.S} \varphi)$が示されたから、$\Gamma \models_{S.S} \varphi$ である。こうして、$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{S.S} \varphi$ が示された。

Q.E.D.

1.2.4 フレーム上の妥当性

もし $\emptyset \models_{\mathcal{F}} \varphi$ ならば（つまり、すべてのフレーム・モデルがφを充足するならば)、式φは**フレーム妥当である**、と言われる。

命題：フレーム妥当性は、標準構造での妥当性を含意する。すなわち、任意の、式の集合Γと式φに対して、

$$\models_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \models_{S.S} \varphi.$$

【証明】

任意の式φを取り、$\models_{\mathcal{F}} \varphi$ と仮定する…①。いま、$\mathcal{A} \in S.S$ なる任意の標準構造 $\mathcal{A}$ を取る。$S.S \subseteq \mathcal{F}$ であるから、$\mathcal{A}$ はフレームである。仮定①より、$\mathcal{A}$ はφのフレーム・モデルである。ところが、$\mathcal{A}$ は標準構造であった。よって、$\mathcal{A}$ はφの標準モデルである：$\mathcal{A} \models_{S.S} \varphi$。しかも、$\mathcal{A}$ は任意の標準モデルであった。ゆえに、$\models_{S.S} \varphi$ である。こうして、$\models_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \models_{S.S} \varphi$ が示された。 Q.E.D.

1.2.5 フレーム上の充足可能性

式 φ が**フレーム充足可能である**（frame-satisfiable）のは、φのフレーム・モデルが存在すると

き、かつそのときにかぎる。

命題：フレーム充足可能性は、標準的充足可能性を含意しない。

【証明(9)】

S.S⊆$\mathcal{F}$であるから、φを充足するフレームが存在したとしても、それが、標準構造であるとはかぎらない。よって、フレーム充足可能性が標準的充足可能性を含意する訳ではない。実際、式：

$$\exists x \exists y [\forall X(Xx \leftrightarrow Xy) \wedge \neg(x=y)] \cdots\cdots (\bigstar)$$

を考える。この式はフレーム充足可能であるが、標準構造で充足可能ではない。例えば、個体宇宙が$A=\{0,1\}$であるフレーム$\mathcal{A}$で、１項関係宇宙が

$$A_1=\{\varnothing, \{0,1\}\}$$

であるものを考える。割り当てＭが、個体変項x, yにそれぞれ、０と１を与えたとする。すなわち、$M(x)=0, M(y)=1$。$0\neq 1$であるから、$I=<\mathcal{A}, M>$で、Iは$\neg(x=y)$を充足する：ISAT$\neg(x=y)$。また、A_1のどのメンバーをＸとして取っても、0,1 が（すなわち$M(x)$と$M(y)$が）その要素になるかどうかは完全に一致するから、先と同じ$I=<\mathcal{A}, M>$で、ISAT$\forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$。∴解釈$I$は式（★）を充足する。しかし、$A=\{0,1\}$に基づく標準構造では、１項関係宇宙は

$$A_1=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

である。よって、$M(x)\neq M(y)$である$0=M(x)$, $1=M(y)$を取れば、$Xx \leftrightarrow Xy$を満たさないX(例えば$\{0\}$や$\{1\}$)を取ることができる。よって、式（★）はこの標準構造で充足不可能である。しかも、他のすべての標準構造でも充足不可能である。なぜなら、そもそも、標準構造では、$\forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$は実質的に$x=y$を意味するから、式（★）は標準構造では矛盾した内容を持つからである。従って、式（★）は、標準構造では充足不可能である。　Q.E.D.

1.2.6 フレームにおける同値性と同一性

二つの式 φ と ψ が**フレーム同値である**（frame-equivalent)のは、われわれが、

$\varphi \models_{\mathcal{F}} \psi$（φを充足する任意のフレーム・モデルでψが充足される）

かつ

$\psi \models_{\mathcal{F}} \varphi$（ψを充足する任意のフレーム・モデルでφが充足される）

ということを証明できるとき、かつそのときにかぎる。明らかに、フレーム同値性は論理的（＝標準的）同値性を含意する。すなわち、以下のことが成り立つ(10)：

$$\varphi \models_{\mathcal{F}} \psi \ \ \& \ \ \psi \models_{\mathcal{F}} \varphi \ \Rightarrow \ \varphi \models_{S.S} \psi \ \ \& \ \ \psi \models_{S.S} \varphi\ 。$$

ところで、このフレーム同値性はきわめて強く、論理的同値性がフレーム同値性を含意することはない。

さらに、われわれは、標準構造では、以下の、同一性の二つの定義を使うことができた(11)：

$\forall Z\ (Zx \leftrightarrow Zy)$：ｘとｙはすべての性質を共有する、

および

$\forall Z^2\ (\forall z Z^2zz \rightarrow Zxy)$：ｘとｙはすべての反射的関係にある、

である。これらは、フレーム同値ではない。また、すべてのフレームでこれらが同一性を定義する、ということもない。そのことは、I(=<$\mathcal{A}$,M>)があるフレーム上の解釈のとき、上の二つの式によって定義される関係が異なることがあるし、それらが同一性とも異なりうる、ということからも示される(12)。

1.3 フレームにおける健全性と完全性

これから、フレームに基づく意味論を立ち上げ、計算体系C^{-}_2、C_2の健全性と完全性を問題にす

る。C^{-}_{2}に関するかぎり、フレーム意味論はうまく行く。すなわち、言語L_2を用いることにより、シークェント計算C^{-}_{2}の規則によって、われわれは、フレーム妥当であるようなすべての式を、かつそれらのみを演繹できる。こうして、$\vdash_{C^{-}_{2}} = \models_{\mathcal{F}}$が成り立つ。すなわち、計算体系$C^{-}_{2}$は、すべてのフレームのクラス$\mathcal{F}$において（弱い意味で）完全であり、健全である。さらに、言語L_2のすべてのΓ（式の集合）と式φに対して、$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C^{-}_{2}} \varphi$　が成り立つ。すなわち、$\mathcal{F}$において、計算体系C^{-}_{2}は、（強い意味で）完全であり、かつ健全である。

しかし、フレーム意味論は、計算体系 C_2 に対しては適合しない。なぜなら、包括原理（comprehension）を用いてC_2で得られるいくつかの定理が、すべてのフレームのクラス$\mathcal{F}$において、妥当ではないからである。つまり、計算体系C_2は$\mathcal{F}$による意味論に関して非健全(unsound)である。

1.3.1 フレームにおけるC^{-}_{2}の健全性

補題：すべてのΓと φ に対して、$\Gamma \vdash_{C^{-}_{2}} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$。

1.3.2 フレームにおけるC_2の非健全性

補題：$\vdash_{C_2} \varphi$　しかし$\models_{\mathcal{F}} \varphi$ではない、そのような式 φ が存在する。

【証明】

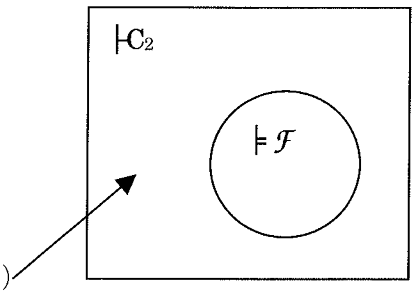
計算体系 C_2 の定理ではあっても、すべてのフレームで真である訳ではない、そのような式の具体例を示せばよい。ところで、C_2では、包括規則(comprehension rule)が原始規則として備わっているから、すべての包括公理(comprehension axiom)が定理として導かれる。そこで、すべてのフレームのクラスで妥当である訳ではないような包括公理を構成するために、式：

$$Rx \lor Tx$$

を取る。この式に対応する包括公理は

$$\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow (Rx \lor Tx)) \cdots \text{（\#）}$$

（R であるかまたは T であるような、すべての個体から、かつそれらのみから成る個体の集合が存在する）である。この式（#）が、偽となるフレームとして、つぎのものを取る：



(#)

$$\mathcal{B} = \langle\{1,2,3\}, \langle B_n \rangle_{n \geq 1}, \langle\{1\},\{2\}\rangle\rangle$$

ここで、$\{1\} = R^{\mathcal{B}}$、$\{2\} = T^{\mathcal{B}}$、かつ $B_1 = \{\{1\},\{2\}\}$ とする。このとき、$\{x \in B : Rx \lor Tx\} = \{1, 2\} \notin B_1 = \{\{1\},\{2\}\}$であるから、この式（#）が存在を主張しているような個体の集合は、フレーム$\mathcal{B}$においては存在しない。従って、式（#）はフレーム$\mathcal{B}$において偽となる。　Q.E.D.

こうして、フレーム意味論は、SOL の計算体系C_2には相応しくないことが判明した。

1.4 フレームにおける同一性の定義不可能性

われわれは、標準構造においては、式：$\forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$によって、同一性：$x=y$ を表現できた。しかし、フレームにおいては、同一性を第二階の式で定義することができない。そのことは、以下のようなフレーム$\mathcal{A}$および解釈 $I = \langle\mathcal{A}, M\rangle$を考えることによって、理解できる。その解釈 I は、式：$\forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$のフレーム・モデルではあるが、$I(x) \neq I(y)$ となる解釈である。実際、フレーム$\mathcal{A}$の個体宇宙 A と 1 項関係宇宙 A_1 を、

$$A = \{1,2,3\}、\quad A_1 = \{\varnothing, \{1,2,3,\}\}$$

とすれば、このとき、どの（異なる）個体1,2,3のペアーを取っても、それらが集合$\varnothing$、{1,2,3}に属するか否かは完全に一致するからである(14)。

この状況を改善するにはどうすべきか？

（イ）最も簡単な解決策は、FOL(first order logic)の場合と同様に、同一性記号を原始論理記号(primitive logical symbol)と見なすことである。すなわち、記号“＝”を、原始関係定項として形式言語に追加して、その意味を、フレーム$\mathcal{A}$で“$=^{\mathcal{A}}$”として、予めフレームの中に、真の同一性関係として確保する。あるいは、式：t=s がフレーム・モデルI=<$\mathcal{A}$, M>で真であるのは、I(t)＝I(s)であるとき、かつそのときに限る、と規定することである。そのとき、計算体系に対しては、同一性の代入規則と同一性の反射律を、原始規則として追加する必要がある。

（ロ）別の方法としては、「望ましくない」フレームを最初から締め出してしまう、というものである。「望ましくない」フレームとは、不可識別者同一というライプニッツの原則が当てはまらず、異なる個体（$x\neq y$）が識別不可能になる（$\forall X(Xx\leftrightarrow Xy)$が成り立つ）、そういうフレームである。このようなフレームを禁じるには、すべての単元集合(singleton)をフレームの関係宇宙に含ませればよい。そのとき、フレームは正規のもの(normal)となり、

$$\forall xy\in A\,[\forall X\in A_1(x\in X\leftrightarrow y\in X)\rightarrow x=y]$$

が満たされるからである(15)。

1.5 与えられたフレームにおける定義可能な関係

フレーム$\mathcal{A}$＝<A, <A_n>$_{n\geq 1}$, <$C^{\mathcal{A}}$>$_{C\in \mathrm{OPER.CONS}}$>と第二階言語$L_2$が与えられたとする。このとき、$\mathcal{A}$と$L_2$の式の集合であるFORM($L_2$)は、関係の定義可能性に関して、一定の仕方で関連する。以下で、その関連を見るが、導入される区別は、第二節での一般構造の定義に用いられる。

1.5.1 フレーム$\mathcal{A}$の第一階関係の定義

(1)フレーム$\mathcal{A}$の（または$\mathcal{A}$上の）第一階のn項 関係を、個体宇宙Aのすべての可能な関係（つまり、A^nのすべての部分集合）とし、そのクラスを、$REL^{1st}(\mathcal{A})$と表示する。すなわち、

$$REL^{1st}(\mathcal{A})=\bigcup_{n\geq 1}\{X:X\subseteq A^n\}=\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{P}A^n$$

である。こうして、単に「$\mathcal{A}$上の第一階関係」という場合は、（標準構造におけるのと同様に）個体宇宙Aを基礎として考えられる、可能なすべての関係を意味する。しかし、フレームの関係宇宙の中に、これらの可能な関係すべてが含まれている訳ではなかった。そこで、

(2)R∈OPER.CONSに対して、$X=R^{\mathcal{A}}$または$X\in A_n$のとき、第一階n項関係Xは$\mathcal{A}$の中への(into)関係であると言い、この関係のクラスを$REL^{1st}(\in\mathcal{A})$で表示する。$\mathcal{A}$上の関係が可能な関係だとすれば、$\mathcal{A}$の中への関係とは、現実に、フレームの関係宇宙に含まれている関係のことである。

こうして定義される関係は、すべて第一階の関係である。第二階のフレームの関係宇宙においても、個体間の関係（つまり第一階の関係）しか存在しない。しかし、$\mathcal{A}$上の(on$\mathcal{A}$)n項関係がすべて$\mathcal{A}$の中への(into$\mathcal{A}$)関係である、とは（定義上）もはや言えない。そのことを、命題として確認しておく。

命題

(1)任意のフレーム$\mathcal{A}$に対して、

$$\bigcup_{n\geq 1}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\subseteq REL^{1st}(\mathcal{A})$$

が成り立つ(16)。

(2)任意のフレーム$\mathcal{A}$において、

$$REL^{1st}(\in\mathcal{A})\subseteq REL^{1st}(\mathcal{A})。$$

(3)シグニチュアの選択（つまり個体・関係定項として何を取るか）次第で、

$\{C^{\mathcal{A}}: C \in \mathrm{OPER.CONS}\} \subseteq \mathrm{REL}^{1st}(\mathcal{A})$

1.5.2 $\mathcal{A}$ の第二階の関係の定義

(1) REL($\mathcal{A}$)を、$\mathcal{A}$ のすべての第二階n項関係のクラスとする。すなわち、

$\mathrm{REL}(\mathcal{A}) = \mathrm{U}_{n \geqq 1}\{X: X \subseteq Ai_1 \times \cdots \times Ai_n\}$　ここで、$Ai_j = A$ または $Ai_j = A_m (m \geqq 1)$。

(2)第二階n項関係Xが $\mathcal{A}$ の中への(into $\mathcal{A}$)関係と呼ばれるのは、$X \in A_n$ であるか、または、$R \in$ OPER.CONS に対して $X = R^{\mathcal{A}}$ である場合である。この関係のクラスを REL($\in \mathcal{A}$)と表記する。すなわち、

$\mathrm{REL}(\in \mathcal{A}) = \{X: \exists n (X \in A_n)$ または $R \in \mathrm{OPER.CONS}$ なるある R に対して $X = R^{\mathcal{A}}\}$

命題

(1)定義により、$\mathrm{REL}^{1st}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{REL}(\mathcal{A})$が成り立つ。

(2) シグニチュアの選択次第で、$\mathrm{REL}^{1st}(\in \mathcal{A}) = \mathrm{REL}(\in \mathcal{A})$。

1.5.3　言語 L_2 を用いた、$\mathcal{A}$ 定義可能な第一階関係の定義

個体変項の列$<x_1, \cdots, x_n>$を伴う式φが L_2 を用いて、構造 $\mathcal{A}$ において関係Xを定義するのは、

$X = \{<x_1, \cdots, x_n> \in A^n : \mathcal{A}[{}^{x1\cdots xn}{}_{x1\cdots xn}]\mathrm{SAT}\varphi\}$　（ここで $\mathrm{FREE}(\varphi) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$）

としてXが表現されるとき、かつそのときにかぎる(17)。

$\mathrm{DEF}^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$を、$L_2$ を用いて $\mathcal{A}$ 定義可能なすべての第一階関係の最小クラスとする。

1.5.4　言語 L_2 を用いた、$\mathcal{A}$ 定義可能な第二階関係の定義

Xが L_2 を用いて $\mathcal{A}$ 定義可能な第二階関係である

⇔ Xが $\mathcal{A}$ の第二階関係であり、かつ以下を満たす L_2 の式φが存在する：

$X = \{<v_1, \cdots, v_n> \in Ai_1 \times \cdots \times Ai_n : \mathcal{A}[{}^{v1\cdots vn}{}_{v1\ldots vn}]\ \mathrm{SAT}\ \varphi\}$

（ここで、$\mathrm{FREE}(\varphi) = \{v_1, \cdots, v_n\}$、各 $j (1 \leqq j \leqq n)$に対して、変項 v_j はタイプ $i\,j \in \mathrm{VAR}$(=タイプの集合))

DEF($\mathcal{A}$, L_2)を対応するクラスとする。

1.5.5　L_2 を用いて、パラメータ表示で $\mathcal{A}$ 定義可能な第一階および第二階関係の定義

(1)第一階関係Xが言語 L_2 を用いてパラメータ表示で $\mathcal{A}$ 定義可能であるのは、以下を満たす式φ、個体変項 $x_1, \cdots, x_n$ およびタイプ $i_1, \cdots, i_m \in \mathrm{VAR}$ の（個体変項とはかぎらない）変項 $v_1, \cdots, v_m$ が存在するとき、かつそのときにかぎる：

$X = \{<x_1, \cdots, x_n> \in A^n : \mathcal{A}[{}^{x1\cdots xn}{}_{x1\ldots xn}{}^{v1\cdots vm}{}_{v1\ldots vm}]\ \mathrm{SAT}\varphi\}$

（ここで、$\mathrm{FREE}(\varphi) = \{x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_m\}$、かつパラメータ $v_1, \cdots, v_m$ はタイプ $i_1, \cdots, i_m$ の各宇宙 $Ai_1, \cdots, Ai_m$ に属している。）

(2)第二階関係Xが言語 L_2 を用いてパラメータ表示で $\mathcal{A}$ 定義可能であるのは、以下を満たす式φ、タイプ $k_1, \cdots, k_n, i_1, \cdots, i_m \in \mathrm{VAR}$ の変項 $u_1, \cdots, u_n$ および $v_1, \cdots, v_m$ が存在する場合である：

$X = \{<u_1, \cdots, u_n> \in Ak_1 \times \cdots \times Ak_n : \mathcal{A}[{}^{u1\cdots un}{}_{u1\ldots un}{}^{v1\cdots vm}{}_{v1\ldots vm}]\mathrm{SAT}\varphi\}$

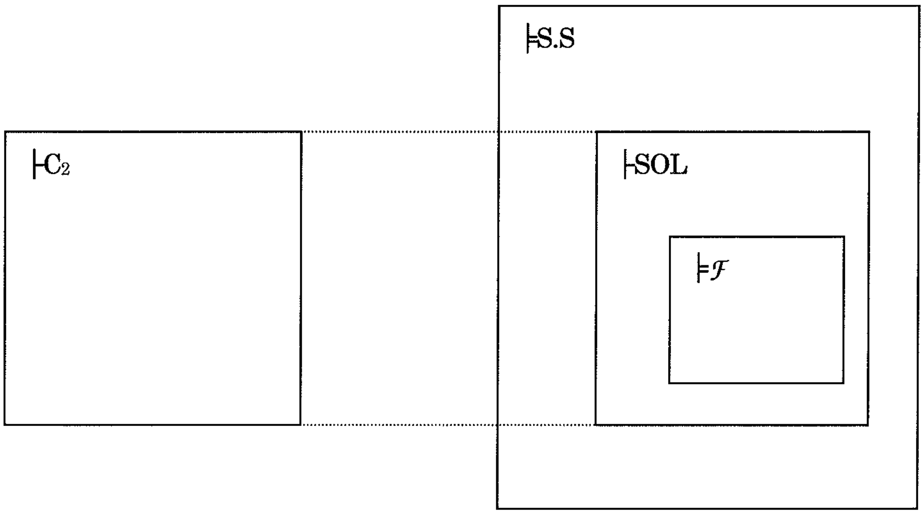
（ここで、$\mathrm{FREE}(\varphi) = \{u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m\}$、かつパラメータ $v_1, \cdots, v_m$ はタイプ $i_1, \cdots, i_m$ の各宇宙 $Ai_1, \cdots, Ai_m$ に属している。）

これら(1), (2)の関係のクラスを、それぞれ、$\mathrm{PARAM.DEF}^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$および PARAM.DEF($\mathcal{A}$, L_2)で表示する。

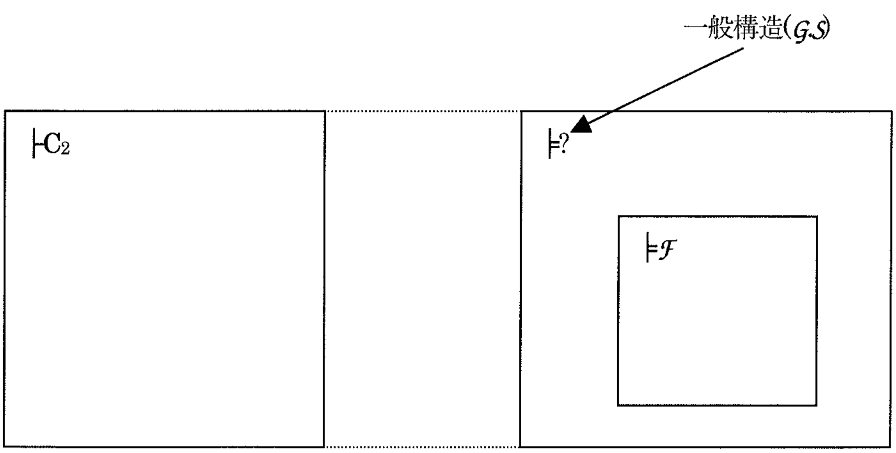
任意の $\mathcal{A}$ において、関係宇宙 A_n の中に予め含まれているすべてのn項関係がパラメータ表示で定義可能である。しかし、すべての可能な関係が（一つの）フレームの宇宙に含まれているとはかぎらない。

2. 一般構造

意味論の道具としてフレームを用いるとき、SOL の計算体系 C_2 は非健全、すなわち、$\models_{\mathcal{F}} \subset \vdash_{C_2}$ となった（1.3.2 節）。元来、われわれが非標準モデルとしてのフレームを使う理由は、標準的妥当式の集合を縮小することにあった。それによって、第二階のすべての定理を、かつそれらのみを手に入れることを目的とした。しかし、フレームに基づく非標準意味論による $\models_{S.S}$ から $\models_{\mathcal{F}}$ への縮小は、C_2 の定理である包括文も排除されるほどに、徹底したものである。



構造としてフレームを取ることによって、計算体系 C_2 は非健全となるが、もしわれわれが C_2 が健全であることを望むとすれば、問題の構造上の集合・関係の宇宙が、少なくとも、SOL の式を用いて定義可能なすべての集合・関係を含むような、そういう構造が必要である。われわれが必要とする、そのような構造がヘンキンの一般構造である。



ヘンキンの一般構造を定義する、以下の三つの方法がある。本節では、最初の二つを扱う。

(a)われわれは計算体系が健全であることを望む。そのことは、構造がすべての包括文(comprehension sentence)を含む式の集合Γのモデルとなる、ということを要求することに等しい。このアプローチは構文論的であり、要求条件は**健全性条件**と呼ばれる。

(b)また、われわれは、パラメータ（＝個体）を用いて定義可能なすべての第一階関係が構造の関係宇宙に含まれること、を要求できる。後に示すように、計算体系が包括シェーマを持つとき、この定義は、最初のものと同等となる。なぜなら、一つの式の中で、どのような自由変項とどのようなパラメータが出現しているかに応じて、関係を定義できるが、包括シェーマ（の閉包）はそのような式で定義できる関係の存在を主張するものだからである。この第二の意味論的アプローチが要求する条件は、**定義可能な閉包条件**と呼ばれる。

(c)定義可能な関係を確保する手段として、関係宇宙に一定の(代数的)閉包条件(closure condition)を課すことが考えられる。第三の定義で要求される条件は、**代数的閉包条件**(algebraic closure condition)と呼ばれる。(これについては第三節で考察する)。

2.1 一般構造の定義

2.1.1 健全性条件による一般構造の定義

$\mathcal{A}$をフレームとする。$\mathcal{A}$が**一般構造**(general structure)であるのは、$\mathcal{A}$がすべての包括文の集合Δのフレーム・モデルであるとき、かつそのときのかぎる。

2.1.2 定義可能な閉包による一般構造の定義

$\mathcal{A}$をフレームとする。$\mathcal{A}$が**一般構造**(general structure)であるのは、言語L_2を用いてパラメータにより$\mathcal{A}$定義可能なすべての関係が、構造の関係宇宙の中に含まれている、すなわち、$A_n=\mathcal{P}A^n\cap \mathrm{PARAM.DEF}(\mathcal{A}, L_2)$であるとき、かつそのときにかぎる。

2.1.3　命題：上で与えられた一般構造の二つの定義は同値である。

【証明】

[⇒:] $\mathcal{A}$を健全性条件によって定義された一般構造である、とする。示すべきことは、言語L_2を用いてパラメータにより$\mathcal{A}$定義可能なすべてのn項関係X^nが、この$\mathcal{A}$の関係宇宙に含まれている($X^n\in A_n$)ということである。パラメータにより定義できる関係を表現するために、φを第二階の式、$x_1,\cdots,x_n$をφに含まれる相互に異なる個体変項、$<v_1,\cdots,v_m>$を$x_1,\cdots,x_n$とは別の、φに含まれるすべての自由変項の列とする。いま、φで自由でない任意のn項関係変項X^nを取る。仮定により、$\mathcal{A}$は以下の形の文（包括文の閉包）のモデルである：

$$[\forall][\exists X^n\forall x_1\cdots x_n(X^n x_1\cdots x_n\leftrightarrow\varphi)]$$

（ここで、先頭に置かれた記号“$[\forall]$”は、式の残余部分の普遍閉包であることを示す)。

従って、適切なタイプを持つすべての個体：$v_1,\cdots,v_m$に対して、解釈$\mathcal{A}[v_1,\cdots,v_m]$は$\exists X^n\forall x_1\cdots x_n(X^n x_1\cdots x_n\leftrightarrow\varphi)$のモデルである。ここで、$I=<\mathcal{A},M>$とする（ここで、$1\leq i\leq m$であるすべてのiに対して$I(v_i)=v_i$)。すると、$I=<\mathcal{A},M>$は$\exists X^n\forall x_1\cdots x_n(X^n x_1\cdots x_n\leftrightarrow\varphi)$のモデルである。それゆえ、包括文の主張通りに、すべての個体$x_1,\cdots,x_n$に対して、

$$<x_1,\cdots,x_n>\in X^n\Leftrightarrow I^{x1\cdots xn}{}_{x1\ldots xn}\mathrm{SAT}\varphi$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}[x_1,\cdots,x_n,v_1,\cdots,v_m]\mathrm{SAT}\varphi$$

となるような、n項関係$X^n\in A_n$が存在する。こうして、式φとパラメータを用いて定義された関係$X^n\in A_n$が関係宇宙に含まれている。

[⇐:]$\mathcal{A}$を定義可能な閉包条件によって定義された一般構造である、とする。証明すべきことは、

その構造中に含まれる関係の存在を主張する表現であるすべての包括文が、$\mathcal{A}$で真である、ということである。これは、上の証明の逆を辿ることで実行できる。そこで、まず、任意の包括文：

$$[\forall][\exists X^n \forall x_1 \cdots x_n(X^n x_1 \cdots x_n \leftrightarrow \varphi)]$$

を取る（ここで、FREE(φ)={$x_1,\cdots,x_n, v_1,\cdots,v_m$ }）。仮定により、$\mathcal{A}$は定義可能な閉包条件によって定義された一般構造であるから、任意の個体$v_1,\cdots,v_m$に対して、

$$X^n=\{<x_1,\cdots,x_n>\in X^n : \mathcal{A}[x_1,\cdots,x_n,v_1,\cdots,v_m]\mathrm{SAT}\varphi\}$$

であるX^nは$\mathcal{A}$の関係宇宙に含まれる。すなわち、$X^n \in A_n$。よって、すべての個体$x_1,\cdots,x_n \in A$に対して、

$$<x_1,\cdots,x_n>\in X^n \Leftrightarrow \mathcal{A}[x_1,\cdots,x_n,v_1,\cdots,v_m]\mathrm{SAT}\varphi$$
$$\Leftrightarrow <\mathcal{A}, M^{x1\cdots xnv1\cdots vm}{}_{x_1\cdots x_n\, v_1\cdots v_m}>\mathrm{SAT}\varphi$$
$$\Leftrightarrow I\,\mathrm{SAT}\varphi$$

なるX^nが存在する。すなわち、$I=<\mathcal{A}, M^{x1\cdots xnv1\cdots vm}{}_{x_1\cdots x_n\ v_1\cdots v_m}>$は$[\forall][\exists X^n \forall x_1 \cdots x_n(X^n x_1 \cdots x_n \leftrightarrow \varphi)]$のモデルである。よって、$\mathcal{A}$は任意の包括文のフレーム・モデルである。　**Q.E.D.**

以後、一般構造のクラスを、$\mathcal{GS}$と表す。

2.1.4 命題 ：一般構造のクラス$\mathcal{GS}$は、より小さい標準構造のクラスS.Sと、より大きいフレームのクラス$\mathcal{F}$との、中間にある。すなわち、

$$\mathrm{S.S} \subseteq \mathcal{GS} \subseteq \mathcal{F}。$$

【証明】

それぞれの構造の定義による(18)。　**Q.E.D.**

2.2 一般構造に基づく意味論

上の命題(2.1.4)においても確認したように、一般構造は同時にフレームでもあるから（$\mathcal{GS}\subseteq\mathcal{F}$）、第二階言語$L_2$に対して、1.2節でのフレーム意味論の各概念がここでも当てはまる。そこで、フレーム意味論に準じる形で、一般構造に基づく意味論、すなわち、**一般意味論**を定義することができる。特に、式φが、式の集合Γの**一般帰結**(general consequence)であることを、$\Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi$ と表記する。

2.2.1 命題：一般帰結はフレーム帰結と標準帰結との中間にある。

【証明】

S.S$\subseteq\mathcal{GS}\subseteq\mathcal{F}$であるから、すべての$\Gamma$（式の集合）と式$\varphi$に対して、

$$\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi \ \Rightarrow\ \Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \quad \cdots①$$

および　$$\Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathrm{S.S}} \varphi \quad \cdots②$$

が成り立つことが容易に示せる(19)。　**Q.E.D.**

2.2.2 系：**一般妥当性**（一般構造における妥当性 general validity）は**フレーム妥当性**(frame validity)と**標準妥当性**(standard validity)との中間にある。すなわち、すべての式φに対して、

$$\models_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \models_{\mathcal{GS}} \varphi \quad かつ \quad \models_{\mathcal{GS}} \varphi \Rightarrow \models_{\mathrm{S.S}} \varphi$$

が成り立つ(20)。

2.3 一般構造における健全性と完全性

2.3.1 一般構造におけるC_2の健全性

$\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$FORM($L_2$)とするとき、すべての$\Gamma$と$\varphi$に対して、$\Gamma \vdash_{C_2} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi$。

【証明】

計算体系C_2は、計算体系C^{-}_2に包括シェーマを追加することによって得られる。ところで、

C^-_2はフレームに関して健全であった。すなわち、

$$\Gamma \vdash_{C^-_2} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$$ である(1.3.1 節)。

このことから、

$$\Gamma \cup \Delta \vdash_{C^-_2} \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \models_{\mathcal{F}} \varphi \cdots ①$$

が導かれる。しかるに、C_2とC^-_2の関係は、C_2の定理の集合を$\vdash_{C_2}$と表記し、**Δを包括文の集合とすると**、$\vdash_{C_2} = \vdash_{C^-_2} \cup \{\varphi : \Delta \vdash_{C^-_2} \varphi\}$であるから

$$\Gamma \cup \Delta \vdash_{C^-_2} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C_2} \varphi \cdots ②$$

である。他方、包括文はすべてのフレームで成り立つ訳ではない(1.3.2 節)が、一般構造の定義(2.1.1)により、包括文のモデルになるようなフレームこそ一般構造に他ならないから、

$$\Gamma \cup \Delta \models_{\mathcal{F}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \cdots ③$$

が成り立つ。これら①、②、③より、

$$\Gamma \vdash_{C_2} \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi$$

が成り立つ。 Q.E.D.

2.3.2 $\mathcal{GS}$におけるC^-_2の不完全性

$\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ FORM(L_2)のとき、(すべてのΓとφに対して、$\Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{C^-_2} \varphi$) という訳ではない。

【証明】

定義により、一般構造では、個体宇宙も関係宇宙も空ではない ($A \neq \emptyset, A_n \neq \emptyset$)。よって、式$\exists X \exists x Xx$ はすべての一般構造で真である。しかし、この式は C^-_2 では証明できない(21)。ゆえに、$\models_{\mathcal{GS}} \varphi$ではあるが、$\vdash_{C^-_2} \varphi$ではない、式$\varphi$が存在する。すなわち、$C^-_2$は不完全である。 Q.E.D.

2.3.3 $\mathcal{GS}$におけるC_2の完全性は、$\mathcal{F}$におけるC^-_2の完全性から導ける。

$\Sigma \cup \Gamma \cup \{\psi, \varphi\} \subseteq$ FORM(L_2)であるとき、もし$\mathcal{F}$においてC^-_2が完全ならば、$\mathcal{GS}$において、C_2は完全である。すなわち、

$$(\forall \Sigma)(\forall \psi) : \Sigma \models_{\mathcal{F}} \psi \Rightarrow \Sigma \vdash_{C^-_2} \psi$$
$$\Rightarrow (\forall \Gamma)(\forall \varphi) : \Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{C_2} \varphi。$$

【証明】

まず、フレームにおいてC^-_2が完全である、と仮定する。すなわち、

$(\forall \Sigma)(\forall \psi) : \Sigma \models_{\mathcal{F}} \psi \Rightarrow \Sigma \vdash_{C^-_2} \psi$ (ここで、$\Sigma \cup \{\psi\} \subseteq$ FORM(L_2)である)。

そのとき、任意のΓ、Δ、φに対して、

$$\Gamma \cup \Delta \models_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash_{C^-_2} \varphi \cdots ①$$

である。ここで、特に、Δはすべての包括文の集合である、とする。ところで、一般構造の定義により、Δのモデルとなるようなフレームが一般構造であるから、

$$\Gamma \cup \Delta \models_{\mathcal{F}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \cdots ②$$

が成り立つ。他方で、計算体系C_2の規則は、C^-_2の規則に包括シェーマ規則 (前提なしで包括シェーマを導入することを許す規則) を加えたものに他ならないから、

$$\Gamma \cup \Delta \vdash_{C^-_2} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{C_2} \varphi \cdots ③$$

が成り立つ。これら①、②、③から、任意のΓ、φに対して、

$$\Gamma \models_{\mathcal{GS}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{C_2} \varphi$$

が導かれる。 Q.E.D.

3. 一般構造の代数的定義

前節において、われわれは、二つの同値な一般構造の定義を与えた。それらは、いずれも形式言語に依存した定義である。本節では、代数的閉包条件を用いる、一般構造の、別の定義を考察する。

3.1 構造における基本的関係

REL($\mathcal{A}$)を、$\mathcal{A}$上のすべての関係――すなわち、$\mathcal{A}$のある宇宙に含まれるすべての第二階関係（特殊な場合として第一階関係を含む）――のクラスとする。当然、このクラスは、任意の有限の項数n（$n \geqq 1$）を持つすべての関係を含んでいる。さて、われわれは、REL($\mathcal{A}$)の中の一定の関係に名前をつける。そして、パラメータにより$\mathcal{A}$定義可能なすべての第一階・第二階関係のクラスを、代数的手段によって定義可能とさせるところの、いくつかの**基本的関係と演算**を定義する。こうして定義されたクラスから、一般構造に含まれるべき個体間の関係が手に入る。

代数的手段に使われる**基本的関係と演算**は以下の７個である：

(a)**メンバー性**(membership)

$n \geqq 1$なるすべてのnに対して

$$\in_n = \{ \langle X, x_1, \cdots, x_n \rangle \in A_n \times A^n : \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in X \}$$

として定義される関係を「メンバー性」と呼ぶ。関係を、何らかの言語によって内包的に記述された条件として捉えるのではなく、個体の順序n組みの集合としてn項関係宇宙の中に存在する関係を、メンバー性という集合論的道具により、言わば「直接に」捉える。

(b)**差**(difference)

同一タイプの関係R,S $\in$REL($\mathcal{A}$)に対して――すなわち、RもSも、$\mathcal{A}$の一定の宇宙から作られる同じデカルト積の部分集合であるとき――

$$R - S$$

は、集合の通常の差(difference)を表す。

(c)**デカルト積**(Cartesian product)

$R \in$REL($\mathcal{A}$)であるすべての関係Rと関係宇宙A_nに対して、デカルト積を、通常の通り、

$$A_n \times R$$

で表す（すべての$n \geqq 1$に対して）。$A \times R$も同様である。

(d)**置換１**（最後の項目が先頭に来る置換permutation）

$R \in$REL($\mathcal{A}$)かつ$R \subseteq A_{i_1} \times \cdots A_{i_n}$($n \geqq 2$)とする。ただし、$A_{i_j}$($1 \leqq j \leqq n$)は、A(個体宇宙)またはあるkに対して$A_k$(k項関係宇宙)である。このとき、Rの置換１をつぎのように定義する：

$$PER_1(R) = \{ \langle v_n, v_1, \cdots, v_{n-1} \rangle : \langle v_1, \cdots, v_n \rangle \in R \}。$$

(e) **置換２**（第一の項目が第二の項目になる置換）

上と同様に、$R \in$REL($\mathcal{A}$)とする。このとき、置換２をつぎのように定義する：

$$PER_2(R) = \{ \langle v_2, v_1, v_3, \cdots, v_n \rangle : \langle v_1, \cdots, v_n \rangle \in R \}。$$

(f)**射影**(projection)

上と同様に、$R \in$REL($\mathcal{A}$)とする。このとき、射影をつぎのように定義する：

$$PROJ(R) = \{ \langle v_1, \cdots, v_{n-1} \rangle : \exists u \langle v_1, \cdots, v_{n-1}, u \rangle \in R \}。$$

(g)**単元集合**(singleton)

すべての$R \in A$または$R \in A_n$に対して、

{R}

はRの単元集合である。

3.1.1 上の7項目の下での閉包(closure)

$\mathcal{A}$を第二階のフレーム、REL($\mathcal{A}$)を$\mathcal{A}$の宇宙上でのすべての関係のクラスとする。すべての$D \subseteq$ REL($\mathcal{A}$)に対して、

Dが7項目に関して閉じている

⇔すべての基本関係がDにふくまれ、Dがすべての基本演算の下で閉じている、

である。

3.1.2 代数的に定義された関係

第二階フレーム $\mathcal{A}$ が与えられたとする。このとき、代数的に定義された関係のクラスALG.DEF($\mathcal{A}$)は、**7項目に関して閉じた**REL($\mathcal{A}$)**の最小部分集合**として定義される。すなわち、

$$\text{ALG.DEF}(\mathcal{A}) = \cap\{D : \text{REL}(\in\mathcal{A}) \subseteq D \subseteq \text{REL}(\mathcal{A})$$
$$\&D \text{は7つの基本関係・演算の下で閉じている}\}$$

フレームの定義によれば、非空の集合Aが与えられ、OPER.CONS中のすべての記号に適切な解釈が定められても、それによって一意にフレーム$\mathcal{A}$が決定される訳ではない。Aに基づくフレーム$\mathcal{A}$は多数存在する。従って、各集合Aに対して、複数のALG.DEF($\mathcal{A}$)が存在する。

3.2 一般構造の代数的定義

3.2.1 代数的閉包(algebraic closure)による定義

フレーム$\mathcal{A}$が**一般構造**である

⇔すべての$n \geqq 1$に対して、$A_n = \mathcal{P}A^n \cap \text{ALG.DEF}(\mathcal{A})$。

こうして、代数的に定義された一般構造とは、n項関係宇宙が、7項目に関して閉じた（個体の順序n組の集合としての）関係の集合であるような、フレームである。

3.2.2 命題：上で与えられた代数的閉包を用いる一般構造の定義は、定義可能閉包により与えられた定義(2.1.2)と同等である。

【証明】

示すべきことは、

$$\text{ALG.DEF}(\mathcal{A}) = \text{PARAM.DEF}(\mathcal{A}, L_2)$$

ということである。

[⊇:]まず、7項目の基本関係・基本演算がパラメータによって定義されることを示す(22)。

[⊆:]つぎに、パラメータによって定義された関係が代数的に定義可能であることを示せばよい(23)。

Q.E.D.

*　　*　　*

われわれは、本論において、第二階論理の非標準モデルとしての、フレームおよび一般構造を考察してきた。言語の表現力が論理のメタ特性とどのように関連するか、というのがわれわれの問題意識の出発点であった。以後、われわれは二つの方向でこの探求を進める。一方は、第一階論理の一層の拡張であるタイプ理論であり、他方は本論の序論（「はじめに」）で取り上げた多領域論理の方向である。前者においては、対象の階層性と言語との相互関連が、後者においては、論理の統一的視点ということが、問題となるであろう。

註

(1)第二階論理の不完全性は、ゲーデルの不完全性定理から帰結する。大雑把には以下のようになる。まず、第二階ペアノ算術の公理系（公理の連言）をΠとし、ゲーデル文をGとすると、不完全性定理によって、$\Pi \models G$、しかし$\Pi \vdash G$ではない。このとき、$\Pi \rightarrow G$は第二階論理の妥当式であるが、論理的定理ではない。すなわち、$\models \Pi \rightarrow G$　しかし、$\vdash \Pi \rightarrow G$ではない。なぜなら、もし$\vdash \Pi \rightarrow G$ならば、第二階論理で$\Pi \vdash G$となるが、これは、先の、不完全性定理からの、$\Pi \vdash G$でない、ということと矛盾するからである。よって、第二階論理には、妥当であるが証明できない式が存在する、すなわち、不完全である。Henkin [1950] p.81 および Mendelson[1997]p.376 参照。また、Manzano [1996] pp.96-114 では、直接に、第二階論理の表現力に訴える方法による証明が与えられている。本論での考察は Manzano [1996]（特に第4章）に多くを負っている。

(2)田畑 [2001], 田畑 [2002] を参照されたい。本論での記号法は、参照の便も考慮して、これら先行の拙論でのそれに、原則として、一致させる。

(3) Henkin [1949],Henkin [1950], Henkin [1953]参照。１９５０年の論文で、ヘンキンは、一般構造に基づく非標準意味論である一般意味論に関して、タイプ理論（高階論理）の完全性を初めて証明した。第二階論理の同様の完全性証明の方法については、１９４９年の論文で示されたいわゆる「ヘンキン流」の証明方法で証明を実行できることが、Henkin [1950]の脚注6で述べられている。これの簡潔な記述は Mendelson[1997]pp.378-380 に見られる。

(4)第二階論理の計算体系 C_2 はシークェント計算として展開される。原始規則は、仮定導入，単調性、場合分け、非矛盾、前件選言導入、後件選言導入、前件個体存在化、後件個体存在化、個体反射性、同一個体導入、前件関係存在化、後件関係存在化、外延性、および包括シェーマの１４個である。Manzano [1996]第2章 pp.73-90 参照。

(5)C^{-}_2は、C_2の１４個の原始規則のうち、包括シェーマ(comprehension schema)の規則を取り除いて、規則を１３個に減らすことで、C_2を弱めて得られる計算体系である。また、C^{-}_2では、等号が個体記号間で使われるとき、C^{-}_2の原始記号と見なされる。Manzano [1996] pp.73-78 参照。Henkin [1953]での F** と F*が、それぞれ、C_2 と C^{-}_2に対応する。

(6)本論では、「集合」と「クラス」という言葉を、集合論の伝統に即する形で厳密に使い分ける、ということはしないが、強いて区別するとすれば、「集合」は式の集まりを、「クラス」は構造の集まりを表すのに用いる。

(7)Manzano [1996] p.153.

(8)田畑 [2001] pp.143-144 参照。

(9) Manzano [1996] p.156 による。

(10)実際、このことは、つぎのようにして示せる。まず、$\varphi \models_{\mathcal{F}} \psi \,\&\, \psi \models_{\mathcal{F}} \varphi$と仮定する…①。いま、$I = \langle \mathcal{A}, M \rangle$で $I \models_{S.S} \varphi$となるような、任意の標準モデル I を取ると、$S.S \subseteq \mathcal{F}$であるから、$I$はφのフレーム・モデルでもある。つまり、$I \models_{\mathcal{F}} \varphi$である。ところが、①の仮定より、$\varphi \models_{\mathcal{F}} \psi$ であるから、$I \models_{\mathcal{F}} \psi$ である。Iは標準モデルだったから、$I \models_{S.S} \psi$ である。つまり、Iは ψ の標準モデルである。以上より、φの任意の標準モデルは、ψ の標準モデルでもある。ゆえに、$\varphi \models_{S.S} \psi$ である。同様に、$\psi \models_{S.S} \varphi$ が成り立つ。ゆえに、$\varphi \models_{S.S} \psi \,\&\, \psi \models_{S.S} \varphi$　が導かれる。こうして、フレーム同

値性から論理的（標準的）同値性が導かれることが示せた。

(11)田畑 [2001] p.150 参照。

(12)A={0,1}を個体宇宙とするフレーム $\mathcal{A}$ を考える。１項関係宇宙 A_1 を、

$$A_1=\{\varnothing,\{0,1\}\}\subset \mathcal{P}A^2$$

とすると、この関係宇宙のどの１項関係 Z に対しても、個体 x と y で、Zx と Zy の真理値が一致するから、

$$\{<x,y>\in A^2 : I^x{}_x{}^y{}_y \text{ SAT } \forall Z(Zx\leftrightarrow Zy)\}=\{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,1>\}$$

となる。他方、A={0,1}上の２項関係は A^2（=A×A）の部分集合であるから、4^2=16 個存在するが、そのうち、反射的であるのは、<0,0>と<1,1>を含む、以下の４個である：

{<0,0>, <1,1>, <0,1>, <1,0>}

{<0,0>, <1,1>, <0,1>}

{<0,0>, <1,1>, <1,0>}

{<0,0>, <1,1>}

いま、もし、２項関係宇宙 A_2 のなかに、上の４個の反射的関係の内で上から３番目のものしか含まれていないとする。すなわち、

$$A_2=\{\ \cdots\ \{<0,0>,<1,1>,<1,0>\}\ \cdots\ \}$$

とする。このとき、

$$\{<x,y>\in A^2 : I^x{}_x{}^y{}_y \text{ SAT } \forall Z^2(\forall z Z^2zz\to x=y)\}=\{<0,0>,<1,1>,<1,0>\}$$

こうして、式：∀Z(Zx↔Zy)と∀Z^2(∀z Z^2zz→x=y)によって定義される関係は、フレーム上では、異なることがあり、しかも、それらは同一性関係{<0,0>, <1,1>}とも異なりうることが分かる。

(13) Manzano [1996]p.158 による。

(14)詳しくはこうなる。例えば、I(x)=1、I(y)=3 とする。1≠3 であるから、I(x)≠I(y)である。ところが、式∀X(X1↔X3)は成り立つ。なぜなら、I(X)として取れるのは、∅か{1,2,3}であるが、I(X)=∅のとき、1∈∅↔3∈∅が成り立ち、I(X)={1,2,3}のとき、1∈{1,2,3}↔3∈{1,2,3}が成り立つからである。同様に、I(x)=1&I(y)=2 または I(x)=2&I(y)=3 のときも、I(x)≠I(y)であるが、式∀X(Xx↔Xy)は真となる。

(15)例えば、個体宇宙が A={1,2,3}であるフレーム $\mathcal{A}$ を取る。これが正規でなく、１項関係宇宙が{{1,2,3},∅}であるようなとき、1≠3 であるにも関わらず、1∈{1,2,3}↔3∈{1,2,3}、1∈∅↔3∈∅となり、１と３は識別できない。しかし、正規なフレームでは、例えば、A_1={{1,2,3},∅,{1},{2},{3}}といった仕方で、すべての単元集合{1},{2},{3}が A_1 に含まれるから、識別できない個体 x と y、すなわち∀X∈A_1(x∈X↔y∈X)が成り立つような個体 x と y は、必ず同一である。（もちろん、この場合は、１と３は識別できるから、同一ではない。）

(16)なぜなら、定義により、$REL^{1st}(\mathcal{A})=\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{P}A^n$ であるのに対して、フレームにおいては、$A_n\subseteq\mathcal{P}A^n$ だから、$\bigcup_{n\geq 1}A_n\subseteq\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{P}A^n$、∴$\bigcup_{n\geq 1}A_n\subseteq REL^{1st}(\mathcal{A})$、となるからである。

(17)解釈 $I=<\mathcal{A}, M^{x1\cdots xn}{}_{x1\ldots xn}>$を、$\mathcal{A}$=[$^{x1\cdots xn}{}_{x1\ldots xn}$]または $\mathcal{A}$=[$x_1,\cdots,x_n$]と略記する。田畑 [2001]p.147 参照。

(18)任意の標準構造 $\mathcal{A}=\langle A,\langle A_n\rangle_{n\geq 1},\langle C^{\mathcal{A}}\rangle_{C\in OPER.CONS}\rangle$を取る。$\mathcal{A}$ は特に $A_n=\mathcal{P}A^n$ となるフレームである（フレームの定義 1.1.1 による）。しかも、この構造では包括文が妥当になるから、一般構造の第一の定義（2.1.1）により、$\mathcal{A}$ は一般構造である。よって、S.S⊆$\mathcal{G.S}$ である。また、任意の一般構造は（一般構造の定義 2.1.1 により）特殊なフレームであるから、$\mathcal{G.S}\subseteq\mathcal{F}$ である。

(19)①については以下のようにして示すことができる。$\mathcal{A}\in\mathcal{GS}$とする。いま、$\mathcal{A}$が$\Gamma$のモデル（つまり$\mathcal{A}$が$\Gamma$中のすべての式のモデル）であるとする…（イ）。$\mathcal{GS}\subseteq\mathcal{F}$であるから、$\mathcal{A}\in\mathcal{F}$である。…（ロ）。ところが、$\Gamma\models_{\mathcal{F}}\varphi$と仮定されていた。すなわち、$\Gamma$の任意のフレーム・モデルは$\varphi$のモデルである、と仮定されていた。ゆえに、この仮定と、（イ）（ロ）から、$\mathcal{A}$がφのフレーム・モデルである、ということが導かれる。$\mathcal{A}$は一般構造だったから、$\mathcal{A}$はφの一般構造モデルである。こうして、$(\mathcal{A}\in\mathcal{GS}\&\mathcal{A}\models\Gamma)\Rightarrow\mathcal{A}\models_{\mathcal{GS}}\varphi$ が示された。ゆえに、$\Gamma\models_{\mathcal{GS}}\varphi$。この結論は、仮定$\Gamma\models_{\mathcal{F}}\varphi$の下で導かれたから、$\Gamma\models_{\mathcal{F}}\varphi\Rightarrow\Gamma\models_{\mathcal{GS}}\varphi$、つまり①が示されたことになる。②も全く同様のやり方で示しうる。

(20)これは、2.2.1 の命題で、$\Gamma=\varnothing$と置いた場合に外ならない。

(21)ここで詳しく追跡する余裕はないが、C^{-}_{2}が原始述語定項として等号を持っていることを考慮して、同一性を表現する原始式以外のすべてに「偽」を振り当て、同一性表現のみに「真」を振り当て、命題結合子は通常の真理関数で解釈し、量化表現の真理値は量化子を除いた部分の真理値に一致すると解釈すると、$\vdash_{C^{-}_{2}}\varphi$ならば$\varphi$は真となるが、$\exists X\exists xXx$は真とならず、よって、この式は C^{-}_{2} では証明できないと結論する、というテクニックを使うことができる。Manzano[1996]p.95 参照。

(22)第二階関係としての(a)メンバー性については、$\in_n=\{<X,x_1,\cdots,x_n>\in A_n\times A^n : \mathcal{A}[^{Xx_1\cdots x_n}{}_{Xx_1\ldots x_n}]\mathrm{SAT}(Xx_1\cdots x_n)\}$ と表せる。(b)差は、$R=\{<u_1,\cdots,u_n>\in A_{i1}\times\cdots\times A_{in} : \mathcal{A}[^{u_1\cdots u_n}{}_{u_1\ldots u_n}]Ru_1\cdots u_n\}$、$S=\{<u_1,\cdots,u_n>\in A_{i1}\times\cdots\times A_{in} : \mathcal{A}[^{u_1\cdots u_n}{}_{u_1\ldots u_n}]Su_1\cdots u_n\}$ とすると、$R-S=\{<u_1,\cdots,u_n>\in A_{i1}\times\cdots\times A_{in} : \mathcal{A}[^{u_1\cdots u_n}{}_{u_1\ldots u_n}](Ru_1\cdots u_n\wedge\neg Su_1\cdots u_n)\}$と表せる。(c)デカルト積は、$R\in\mathrm{REL}(\mathcal{A})$のとき、$A_n\times R=\{<X,u_1,\cdots,u_n>\in A_n\times A_{i1}\times\cdots\times A_{in}\ \mathcal{A}[^{Ru_1\cdots u_n}{}_{Ru_1\ldots u_n}]\mathrm{SAT}(Ru_1\cdots u_n)\}$ と表せる。(d)置換１は、$\mathrm{PER}_1(R)=\{<v_n,v_1,\cdots,v_{n-1}>\in A_{i1}\times\cdots\times A_{in} : \mathcal{A}[^{v_1\cdots v_n}{}_{v_1\ldots v_n}]\mathrm{SAT}(Rv_1\cdots v_n)\}$ と表せる。(e)置換 2 は、$\mathrm{PER}_2(R)=\{<v_2,v_1,v_3,\cdots,v_n>\in A_{i1}\times\cdots\times A_{in} : \mathcal{A}[^{v_1\cdots v_n}{}_{v_1\ldots v_n}]\mathrm{SAT}(Rv_1\cdots v_n)\}$ と表せる。(f)射影は、$\mathrm{PROJ}(R)=\{<v_1,\cdots,v_{n-1}>\in A_{i1}\times\cdots\times A_{in} : \mathcal{A}[^{v_1\cdots v_n}{}_{v_1\ldots v_n}]\mathrm{SAT}\exists u(Rv_1\cdots v_{n-1}u)\}$ と表せる。(g)単元集合は、$\{R\}=\{X\in A_n : \mathcal{A}[^{X}{}_{X}]\mathrm{SAT}(X=R)\}$ または$\{R\}=\{X\in A : X=R\}$ と表せる。

(23)式φの形成規則に基づく数学的帰納法によるが、式ψと式ξがおのおの関係RとSを定義するとき、式$\psi\wedge\xi$が関係$R\cap S$を定義するように、（文結合集合子・量化子とブール演算子との対応により）パラメータを含む式により定義される関係がブール演算子に関しても閉じていることを利用して、それらが、７項目の基本関係・基本演算に関して閉じた関係の集合に含まれることを示さねばならない。

参考文献

Henkin,L.[1949]: "The completeness of the first order functional calculus". The Journal of Symbolic Logic. vol.14. pp.159-166.

Henkin,L.[1950]: "Completeness in the theory of types". The Journal of Symbolic Logic, vol.15. pp.81-91.

Henkin,L.[1953]: "Banishing the rule of substitution for functional variables". The Journal of

Symbolic Logic, vol.18, num.3. pp.201-208.

Manzano,M.[1996]: Extensions of First Order Logic. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 19. Cambridge University Press.

Mendelson,E.[1997]: Introduction to mathematical Logic. Fourth edition.Chapman&Hall/CRC.

田畑博敏[2001]:「第二階論理の特性について」、鳥取大学教育地域科学部紀要・地域研究、第3巻・第1号、133-157頁。

田畑博敏[2002]:「第二階論理によるペアノ算術」、鳥取大学教育地域科学部紀要・地域研究、第4巻・第1号、37-84頁