第二階論理によるペアノ算術

田畑　博敏*

は じ め に

本論文の目的は，第二階論理の言語（第二階言語）によって定式化されたペアノ算術（自然数についてのペアノの公理から導かれる定理の集合）がカテゴリカルであること，すなわち，すべてのモデルが同型であること，を示し，そのことから帰結することがら，特に，自然数上の関数の回帰性（recursion）による定義の可能性，について調べることである。われわれは第一階論理と第二階論理の表現力の比較の観点から，すでに，第二階論理の持つ一般的な特性について調べた（田畑[2001]）。今回は，第二階論理の定式化の特徴が特に顕著に見られるペアノ算術を研究する(1)。

よく知られているように，ペアノは自然数に関する公理系を作ることにより，その公理から算術の真理を定理として導こうとした。その公理の中に数学的帰納法の原理が含まれている。第一階の論理によるこの原理の定式化は，いわゆる公理図式によるもので，具体的な一階の（自由変項を含む）論理式を代入することにより，無数の公理が得られる。それゆえ，数学的帰納法の公理は無数の論理式に対応する無数の公理を含むことになる。しかし，論理式はせいぜい可算個しかないゆえに，論理式が表す自然数の性質もせいぜい可算無限個しかない。他方，第二階論理によって定式化される数学的帰納法の公理は単一の公理であり，それは，「すべての自然数の性質（集合）」に言及していると解釈され，非可算個の性質（集合）を量化の範囲に含んでいる。さらに，第一階の論理によるペアノの公理系はコンパクト性定理により，標準モデルとは同型でない非標準モデルが存在するのに対して，第二階のペアノの公理系はカテゴリカルである（すなわち，すべてのモデルが同型的である)。このような相違は，なによりも定式化の基礎にある論理の相違に由来している。論理の表現力の比較という，言わば通奏低音的動機に導かれている本論文は，特に第二階ペアノ算術のカテゴリー性に焦点を当てる。方法として，論理を表現する言語に，意味の体系としての構造（これ自体は集合論のメタ言語で語られる）を対応させる，モデル論的アプローチを採用する。

そこで，本論文の梗概はつぎのようになる。まず第1節では，第二階ペアノ算術の公理系を提示して，そのモデルのいくつかを考え，非標準的モデルにも触れる。第2節では，第二階論理によるペアノの公理系がカテゴリカルであることを示す。それを受けて，第3節では，公理系の意図されたモデルを，互いに同型なペアノ・モデルの代表としてとり，ここで原始回帰（primitive recursion）という定義図式によって定義される自然数上の演算（加法・乗法・巾法）の存在を示す。第4節では，数学的帰納法のモデルではあるが，他のペアノの公理のモデルとはかぎらないモデルと，（意図された）自然数のモデル上の合同関係との，つながりを論じる。それに関連して，第5節では，帰納モデルのあるものでは，巾法のように，原始回帰によって定義される演算が存在しないことがあ

* 鳥取大学教育地域科学部・地域設計学講座・哲学

ることを見る。そして，演算が自然数（のモデル）上の合同関係と両立するものであるかどうか，がそれの決め手となることを示す。

1.　第二階のペアノ公理系

1．1　ペアノ・モデルと帰納法モデル

われわれは（ゼロを含む）自然数について，素朴な理解を持っている。まず最初の数０（ゼロ）がある。（数１を最初の数とすることもあるが，われわれはゼロから始める。）つぎに，二番目の数としての数１，三番目の数としての数２，等々が続く。直後の数（後者）が前者によって一意に決まることが承認済みであるとすれば，数１はS0 (successor of zero)，数２はSS0，等々と表現されよう。すると，自然数の全体は，

$\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$

としてではなく，むしろ

$\{0,\ S0,\ SS0,\ \cdots\}$

として表されよう。これら自然数は，それぞれ特質を持つとともに，ある共通性も有する。例えば，（最初の数０を除いた）すべての数には，その直前の数（前者）が存在する（１の前者は０，２の前者は１，等）。またｎ番目以下の数は丁度ｎ個存在する（最初の数０以下の数は０そのものであるから一個存在し，二番目の数１以下の数は１と０で二個存在する，等）。このような自然数の持つ特性（各数の特質や共通性）を統一的に把握するにはどうしたらよいか。その一つの解答は，G. ペアノによって与えられた，以下のペアノの公理系（公理の集合を“Π”で表示する）である。ペアノの戦略は，この公理系を中核として，その他の自然数の主要な法則・特性を導く，というものである。

定義１．１．１：以下の公理の集合Πを**ペアノの公理系**という。

Π：　$1P \Leftrightarrow \forall x \neg (c = \sigma x)$

　　$2P \Leftrightarrow \forall x \forall y\ (\sigma x = \sigma y \rightarrow x = y)$

　　$3P \Leftrightarrow \forall X\ [Xc \wedge \forall z\ (Xz \rightarrow X\sigma z) \rightarrow \forall x Xx]$

ここで，“ｃ”は数詞ゼロの一般化，すなわち，構造の領域内に存在するある個体を表示する個体定項（または０項関数記号）であり，“σ”は「後者」をとる関数を表示する１項関数記号である。それにより，通常設定される，「ｃは自然数である」や「自然数の後者も自然数である」といった命題に相当する公理は，ｃが領域のある特定の要素を表示し，σが領域から領域への関数を表示する，というこれらの記号の用法にすでに含まれていることにより，不要である。

公理系Πの第一の公理：１Ｐは，「どんな個体もｃの前者ではない」と主張している。すなわち，ｃの前に数はない，ｃが何かの後者となることはない，と主張している。（集合論の語法では「ｃは関数σの range［値域］に含まれない」と主張している。）この主張は，ある個体ｘとその後者：σｘの関係を，視覚的に，ｘ→σｘ　と表現するとすれば，○→ｃ　またはｃ←○という図は描くことができない（→がｃに到達することはありえない），ということを意味する。第二の公理：２Ｐは，「異なる個体は異なる後者を持つ」または「σは単射である」ということを主張している。図式で示すと，

○→ｘ←□

といった図が描けない（二箇所以上の異なる所から一つの個体に複数の→が到達することはない）こ

とを意味している（ただし，上図の○と□は異なる個体とする)。第三の公理：3Ｐは，数学的帰納法の完全な形の定式化であり，これは，「どんな性質も，もしそれが，ｃが持ち，それを持つ後者も再びそれを持つ（後者系列で遺伝する）ような性質ならば，すべての個体がそれを持つ」と主張している。「性質」は外延的な解釈により，構造の領域の部分集合と解されるから，言い換えると，3Ｐは，「0を（要素として含み)，関数σに関して閉じている任意の集合は，領域そのものと一致する」を意味していることになる。3Ｐの第一階言語での表現が公理図式であり，代入される述語表現がせいぜい可算無限個しか存在しないゆえに，非可算個以上ありうる性質または集合の十全な表現に問題があったのに対して，第二階言語での3Ｐの表現はその難点を免れている。

定義1．1．2

（1）Π全体のモデルである構造を**ペアノ・モデル**（または**ペアノ構造**）という。

（2）公理3Ｐのモデルである構造を**帰納法モデル**という。

（3）PA^2はΠの（意味論的）帰結である文の集合とし，CON(Π）と表す。すなわち，

$$PA^2 = \{\phi \in SENT(L_2) \mid \Pi \models \phi\} = \{\phi \in SENT(L_2) \mid \forall M \forall \psi \in \Pi\ (M \models \psi \Rightarrow M \models \phi\} = CON(\Pi).$$

ここで，Πの各公理の**モデルの例**をいくつか見ておく。

【例1】 上で述べた，われわれが素朴に知っている自然数の構造：

$$\mathcal{N} = \langle N,\ 0,\ S \rangle,$$

すなわち　$N = \{0, S0, SS0, SSS0, \cdots\}$ で，0が最初の数ゼロで，Sが後者関数$S: N \to N$である構造は，ペアノ・モデルである。それゆえ，帰納法モデルでもある。実際，0が最初の数だから，$0 = Sx$となるxはNの要素の中にはない（ゆえに公理1Ｐが満たされる)。$x \neq y$ならば，$Sx \neq Sy$である。なぜなら，$x \neq y$ということは，$SS\cdots S0 = x$，$SS\cdots S0 = y$で，Sの個数が異なることを意味するが，そのとき，それぞれにSを一個ず加えたSxとSyも，依然としてSの個数が異なるから$Sx \neq Sy$となるからである。よって，対偶をとれば，公理2Ｐが満たされることになる。さらに，X0（0が性質Xを持ち)，かつ任意の$z \in N$に対して，$Xz \to XSz$が成り立つならば，X0，XS0，XSS0，…　となって，N中のすべての要素xに対して，Xxが成り立つ。すなわち，公理3Ｐが満たされる。

【例2】 ゼロと，2を加えるという関数：$+2(x) = x+2$から成る偶数$2N = \{0, 2, 4, \cdots\}$の構造：

$$\langle 2N,\ 0,\ +2 \rangle$$

もペアノ・モデルであり，帰納法モデルである。先の例と同様に，容易に確かめうる。

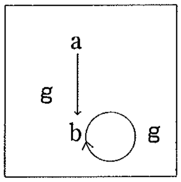
【例3】 構造：$\langle N^*,\ 0^*,\ S^* \rangle$

——ここで，$N^* = \{1, 2, 4, 8, \cdots\}$は2の巾乗：$2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \cdots$の集合であり，$0^* = 2^0 = 1$，すべての$x \in N^*$に対して　$S^*(x) = 2x$である——は，ペアノ・モデルであり，帰納法モデルである。

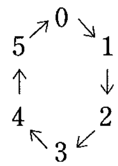
【例4】 構造：$\langle \{a\},\ a,\ f \rangle$

——ここで，fは$\{a\}$上の可能な唯一の関数である——は，帰納法モデルであるが，ペアノ・モデルではない。実際，公理1Ｐを満たさない。しかし，この構造は公理3Ｐのみならず，公理2Ｐも満たす(2)。

【例5】構造：〈{a，b}，a，g〉
——ここで，$a \neq b$，任意の$x \in \{a, b\}$に対して$g(x) = b$——は，帰納法モデルであるが，ペアノ・モデルではない（ただし，この構造で公理1Pは満たされる）(3)。

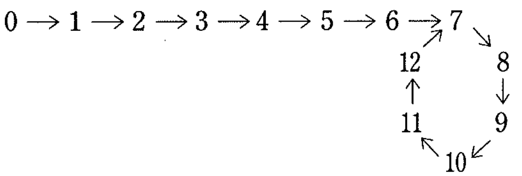


【例6】構造：$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$
——ここで，$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，$c^{\mathcal{A}} = 0$，$\sigma^{\mathcal{A}}$はAからAへの1項関数，すなわち，$\sigma^{\mathcal{A}}: A \rightarrow A$　であり，$\sigma^{\mathcal{A}} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 0\rangle\}$　である——は，帰納法モデルである。
関数$\sigma^{\mathcal{A}}$のインプットとアウトプットの関連は，右図によって図示できる。



この構造は，公理2Pと3Pのモデルではあるが，公理1Pのモデルではない。よって，ペアノ・モデルではない(4)。

【例7】構造：$\mathcal{B} = \langle B, c^{\mathcal{B}}, \sigma^{\mathcal{B}} \rangle$
——ここで，$B = \{0, 1, 2, \cdots, 12\}$であり，$c^{\mathcal{B}} = 0$，$\sigma^{\mathcal{B}} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \cdots, \langle 11, 12\rangle, \langle 12, 7\rangle\}$とする——は，帰納法モデルである。われわれは関数$\sigma^{\mathcal{B}}$の値の配分の仕方を，



と図示できる。この構造は，公理3P，および公理1Pのモデルではあるが，公理2Pのモデルではない(5)。

以上のように，ペアノの三公理のモデルには，各種のものがある。各公理の意味することは，これらのモデルを調べることにより，一層明確に理解できる。つぎに，われわれは，三番目の公理3P，すなわち「数学的帰納法」の原理の定式化を比較しよう。

1．2　帰納法の定式化の比較

数学的帰納法（以下「帰納法」と呼ぶことがある）の第二階言語による定式化：

$$\forall X\,[Xc \land \forall z\,(Xz \rightarrow X\sigma z) \rightarrow \forall x\,Xx]$$

は，公理図式ではなく，**単一の**公理である。この公理は，第一階言語による，公理図式としての定式化（公理の無限集合）：

$$\phi x \land \forall z\,(\phi z \rightarrow \phi \sigma z) \rightarrow \forall x\,\phi x \qquad (\phi x \text{はFREE} = \{x\}\text{である第一階の式})$$

より，大きな表現力を持っている。第一階論理による（一項述語に対応する）論理式は，可算無限個のアルファベットを認めたとしても，各論理式の長さが有限であるかぎり，可算無限の個数しか持たない。それに対して，標準的な意味論を持つ第二階論理では，個体の全宇宙の任意の部分集合に帰納法原理は適用でき，そのような部分集合は（個体が可算無限個しか存在しないとしても），非

可算無限個存在する。"$\forall X$" は，そのような非可算無限個ある部分集合（または個体の持つ性質）のすべてに言及している。

それだけでなく，第一階論理を基礎にした第一階ペアノ算術には，自然数の構造に代表される，意図されたモデルとは同型でないモデル，非標準モデルが存在する。このことは，第一階論理において成り立つコンパクト性定理からの帰結である。他方，以下の補題（補題１．２．１）に見るように，第一階ペアノ算術のモデルである構造$\mathcal{A}$が標準的数しか持たないことと，標準的数の集合が$\mathcal{A}$において第一階の式によって定義可能であることとは，必要十分の関係にある。よって，第一階ペアノ算術が非標準モデルを持つということは，意図された数（標準的数）が第一階の論理式では定義できない，ということを意味する。「算術を適確に表現する」という観点からも，第一階論理の表現力の弱さが，ここで浮彫りになる。

さて，第一階ペアノ算術の非標準モデル，すなわち，意図された標準モデルと同型でないモデルの存在は，第一階論理のコンパクト性定理から，（大まかには）以下のように導かれる。第一階ペアノ算術の言語に，新しい個体定項 "k" を加えて，この言語の語彙を拡大する。さらに，

$$k \neq c,\quad k \neq \sigma c,\quad k \neq \sigma \sigma c,\quad \cdots\cdots$$

という無限に長い文のリストを，第一階ペアノ算術の公理の集合Π^1に公理として新たに加えて，公理系Π^1を拡大する：$\Pi^{1*} = \Pi^1 \cup \{k \neq c,\ k \neq \sigma c,\ k \neq \sigma \sigma c,\ \cdots\}$。この拡大された公理系$\Pi^{1*}$の任意の有限部分集合$\Pi' = \Pi^1 \cup \{k \neq c,\ \cdots,\ k \neq \sigma \overset{n}{\cdots} \sigma c\}$ を取り，$k = \sigma \cdots \overset{n+1}{\sigma} c$と解釈し，$c$と$\sigma$は標準的解釈を与えることによって，この有限部分集合は自然数の構造でモデルを持つ。このとき，コンパクト性定理から，$\Pi^{1*} = \Pi^1 \cup \{k \neq c,\ k \neq \sigma c,\ k \neq \sigma \sigma c,\ \cdots\}$ 自体もモデルを持つことが帰結する[6]。このモデルを，

$$\mathcal{M}$$

とする。$\mathcal{M}$は第一階ペアノ算術PA^1のモデルである（つまりΠ^1のモデルである）とともに，新しい式の集合 $\{k \neq c,\ k \neq \sigma c,\ k \neq \sigma \sigma c,\ \cdots\}$ のモデルでもある。従って，$\mathcal{M}$の領域には非標準数，すなわち，ゼロ（最初の数）でもなく，ゼロの後者でもなく，ゼロの後者の後者でもなく，…，という数，が存在する。いま，$\mathcal{M}$の領域に含まれる（$\mathcal{M}$で解釈された）標準的数：$\mathcal{M}(c)$，$\mathcal{M}(\sigma c)$，$\mathcal{M}(\sigma \sigma c)$，… の集合を$N(\mathcal{M})$ とする，すなわち，

$$N(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M}(c),\ \mathcal{M}(\sigma c),\ \mathcal{M}(\sigma \sigma c),\ \cdots\}。$$

集合$N(\mathcal{M})$ は，構造$\mathcal{M}$において，第一階論理によっては定義できない。仮に，$N(\mathcal{M})$ が定義可能であるとすると，

$$N(\mathcal{M}) = \{\mathbf{x} \mid \mathcal{M}[\mathbf{x}]\ SAT\ \beta\}$$

（ここでβは，$FREE(\beta) = \{x\}$ である第一階の式）

となる。$\mathcal{M}$は第一階ペアノ算術のモデルだったから，第一階の式βで定義された集合$N(\mathcal{M})$ に数学的帰納法が適用できる筈である。すると，$\mathcal{M}$の宇宙は，$N(\mathcal{M})$ の要素，すなわち標準的数以外の要素は含まないことになり，$\mathcal{M}$は非標準的数を含むという，先の結果と矛盾する。こうして，$N(\mathcal{M})$ が，構造$\mathcal{M}$において第一階論理では定義できない，ということが分かる。

一般に，PA^1（第一階ペアノ算術）の標準モデルと，標準的数の集合の（第一階論理での）定義可能性との間を結ぶ，つぎの補題が成り立つ。

補題　１．２．１．

$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A},\ c^{\mathcal{A}},\ \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ をPA^1の第一階モデルとする。このとき，

$\mathcal{A}$が標準モデルである（$\mathcal{A}$の宇宙には標準的数しか存在しない）

⇔標準的数の集合N（$\mathcal{A}$）が$\mathcal{A}$で定義可能である。

【証明】

[⇒：] $\mathcal{A}$が標準モデルであるとすると，$\mathcal{A}$の宇宙の要素はすべて標準的数である。このとき，第一階の論理式“x＝x”は，そのようなすべての要素に対して成り立つから，標準的数の集合，すなわち$\mathcal{A}$の領域**A**そのものは，（式x＝xによって）定義可能である。

[⇒：] 標準的数の集合N($\mathcal{A}$) がＰＡ^{1}のモデル$\mathcal{A}$において，第一階の式βによって定義可能だとする。つまり，N($\mathcal{A}$) ＝ {**x**：$\mathcal{A}$［**x**］ ＳＡＴβ}（ここでβは自由変項としてxのみを含む第一階の式）が成り立つとする……（イ）。いま，（第一階の形での）帰納法の公理の対偶をとり，これを（★）で示す：

$$(\bigstar):\quad \exists x \neg \phi x \rightarrow [\neg \phi c \vee \exists y (\phi y \wedge \neg \phi \sigma y)]$$

この式は，帰納法公理の対偶だから，ＰＡ^{1}のモデル$\mathcal{A}$で，自由変項が“x”のみであるような，任意の第一階の式ϕ xに対して，成り立つ。このϕ xを，N（$\mathcal{A}$）を定義する第一階の式βとみなすと，式（★）の解釈は，つぎのようになる：

「**x**$\not\in$N($\mathcal{A}$) であるような**x**∈**A**が存在するならば，$c^{\mathcal{A}} \not\in$N($\mathcal{A}$) であるか，さもなければ，**y**∈N($\mathcal{A}$) しかし$\sigma^{\mathcal{A}}$(**y**) $\not\in$N($\mathcal{A}$) であるような，**y**∈**A**が存在する」。

いま仮に，**x**$\not\in$N（$\mathcal{A}$）であるような**x**∈**A**が存在する，と仮定する。すなわち，$\mathcal{A}$が非標準モデルである，と仮定する……（ロ）。$\mathcal{A}$は（第一階の）ペアノ・モデルであるから，$c^{\mathcal{A}}$∈N($\mathcal{A}$) である。よって，（★）により，**y**∈N($\mathcal{A}$) しかし$\sigma^{\mathcal{A}}$(**y**)$\not\in$N($\mathcal{A}$) であるような，**y**∈**A**が存在する，ということが帰結する。これは，標準数の集合がある要素を欠いているということに外ならず，標準数の集合を定義できているという，最初の仮定（イ）に矛盾する。従って，二番目の仮定（ロ）は成り立たない。すなわち，$\mathcal{A}$は，非標準モデルではなく，標準モデルである。

Q．E．D．

こうして，帰納法公理の，第一階論理による定式化と，第二階論理による定式化との違いが明確になった。第一階論理による帰納法公理の定式化に関して，非標準数を持つ非標準モデルを取ったとき，（上の補題により標準的数の集合が第一階の式で定義できないから）標準数の集合に対して帰納法を適用できない。言い換えると，第一階の帰納法の図式は，非標準数の出現を食い止められない。標準数であることの必要十分条件を与える第一階の式βを，われわれが手に入れたとすると，¬βは非標準数の必要十分条件を与えることになる。この式βを，第一階の帰納法図式に当てはめて，非標準数の存在を認めると，標準数の集合が要素を欠く，という結果を招き，標準数の集合は定義できなくなる。第一階論理を基礎に取るかぎり，コンパクト性定理を認めねばならない。そうすると，非標準モデルの存在をも認めねばならない。すると，補題１．２．１により，その非標準モデルでは標準的数は定義できなくなる。

これに対して，第二階論理で定式化された第二階ペアノ算術は，以下で見るようにカテゴリカルであるから，第二階の帰納法公理は非標準数を阻止することになる。

１．３　非標準モデル

ここで，非標準モデルに関する「状況」を一瞥しよう。１９３０年代にスコーレム（T. Skolem）よって発見された算術の非標準モデルは，病理的な反例といった程度の認識を得たにすぎなかったが，１９５０年以降のヘンキン（L. Henkin）の高階論理と一般意味論の研究，さらにロビンソン（A. Robinson）のノンスタンダード・アナリシスの展開により，市民権を獲得している。ヘンキン

は，標準意味論とは異なる，一般構造に基づく一般意味論を用いて，算術の（二重の意味で）非標準なモデルを開発した。一般意味論においては，第二階論理は，強い意味で完全となり，コンパクト性も取り戻す。

第二階論理において，**非標準構造**$\mathcal{A}$は，個体の宇宙として集合Aを持ち，関係宇宙として，$A_n \subseteq \mathcal{P}A^n$であるような，集合族：

$$\langle A_n \rangle_{n \geq 1}$$

を持ち，少なくとも一つの$m \geq 1$に対して，

$$A_m \neq \mathcal{P}A^m \quad \cdots\cdots \quad (\bigstar\bigstar)$$

である。この最後の条件（★★）が，第二階の意味で「非標準的」ということの，実質的な内容である。

さて，自然数の第一階理論（第一階ペアノ算術）が持つ非標準モデルから，第二階ペアノ算術の非標準モデルがどのようにして創られるか，その概略を見よう。いま，第一階ペアノ算術の非標準モデルを任意に取り，これを

$$\mathcal{M}$$

とする。任意の$n \geq 1$に対して，n項関係の関係宇宙M_nが，$M_n \subseteq \mathcal{P}M^n$（$M_n$がMのn項デカルト積の巾集合の部分集合）であるような，集合の族：

$$\langle M_n \rangle_{n \geq 1}$$

を選ぶことによって，$\mathcal{M}$から，第二階論理に対応する構造を構成する。こうして得られた第二階の構造を

$$\mathcal{M}^*$$

としよう。$\mathcal{M}^*$は第二階ペアノ算術（PA^2）のモデルだろうか？$\mathcal{M}^*$に関する詳しい構成法が未だ与えられれていないが，もし$\mathcal{M}^*$がPA^2のモデルであるならば，$\mathcal{M}^*$は必ず，第二階の意味で非標準であらねばならない，ということが帰結する。特に，

$$M_1 \neq \mathcal{P}M^1 = \mathcal{P}M$$

である（Mは$\mathcal{M}$の個体宇宙）。

その理由はこうなる。PA^1の非標準モデル$\mathcal{M}$における標準数の集合：

$$N(\mathcal{M})$$

を考える。もし第二階の構造$\mathcal{M}^*$がPA^2のモデルであるならば，それは特に（第二階の）帰納法公理のモデルでもある。さて，標準数の集合$N(\mathcal{M})$が，$\mathcal{M}^*$の一項関係の宇宙M_1の中に含まれている，すなわち，

$$N(\mathcal{M}) \in M_1 \cdots\cdots ①$$

と仮定しよう。この集合$N(\mathcal{M})$は，ゼロを含み，後者に関して閉じている（すなわち，この集合の各要素の後者が再びこの集合の要素となる）から，帰納法公理により，$\forall x\,(x \in M \rightarrow x \in N(\mathcal{M}))$，すなわち，

$$M \subseteq N(\mathcal{M})$$

である。ところで，当然，すべての標準数は$\mathcal{M}$の個体宇宙Mの要素であるから，$N(\mathcal{M}) \subseteq M$である。よって，これらから，

$$M = N(\mathcal{M})$$

が導かれる。しかし，このことは成り立たない。なぜなら，$\mathcal{M}$は非標準モデルであったから，Mには，$N(\mathcal{M})$の要素以外の，非標準的数が要素として含まれているからである。従って，先の仮定①

は成り立たない。すなわち，

$$N(\mathcal{M}) \not\in M_1$$

である。しかし，$N(\mathcal{M}) \subseteq M$　であるから，$N(\mathcal{M}) \in \mathcal{P}M$　ではある。よって，

$$M_1 \neq \mathcal{P}M$$

が帰結する。こうして，$\mathcal{M}^*$は「第二階の意味で」(先の条件（★★）を参照) **非標準的**である（すなわち，一項関係の宇宙は，個体宇宙の巾集合の，**真**部分集合となる)。

第二階ペアノ算術がカテゴリカルであるのは，スコーレムが指摘したように[7]，帰納法公理に現れる集合が，標準的な意味によって解釈されるときに，かぎる。すなわち，**標準的意味論**——そこではｎ項関係の宇宙は個体の宇宙のｎ項デカルト積の巾集合である：$A_n = \mathcal{P}A^n$——を用いて，メタ理論から意味を与えるときに，かぎられる。しかし，ヘンキン（Henkin [1950]）は，個体宇宙の非標準化と関係宇宙の非標準化という二重の意味で，非標準モデルを構成することを可能にした。もちろん，もし意味論を変えるならば，われわれは標準的見方を捨てて，一般的な集合概念をモデルに付加しなければならない。

こうして，われわれが非標準的解釈に踏み込んで行くや否や，第二階論理は表現力のある部分を失い，もはやカテゴリカルではなくなる。しかし，意味論を変えても，第二階ペアノ算術は第一階ペアノ算術よりは強力である。なぜなら，PA^1の無矛盾性がPA^2で（意味論的に）証明されるからである。

すでに見たように，第一階ペアノ算術がカテゴリカルでないのは，標準数の集合$N(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M}(c), \mathcal{M}(\sigma c), \mathcal{M}(\sigma\sigma c), \cdots\}$が，非標準数を持つ構造（＝非標準モデル）で，第一階の式によって定義できず，それゆえ，この集合にたいして帰納法公理を適用できないからであった。なぜ，標準解釈を持つ第二階ペアノ算術がカテゴリカルであるか？その理由は，そこでは，すべての可能な（個体の）集合に対して，帰納法公理が適用できるからであり，非標準数を持つ構造は，第二階帰納法公理のモデルにならないからである。

われわれが，第二階論理にとどまり，しかも，十全でない（つまり個体宇宙のｎ項デカルト積の巾集合の<u>真</u>部分集合を関係宇宙として認める）構造を採用するとき，量化は，その構造に現われた集合や関係にしか適用されない。そのとき，一項関係の宇宙は，その要素の一つとして，標準数の集合を含まないかもしれない。ヘンキンの一般構造では，第二階の式によってその構造で定義でききる，すべての集合と関係とを，その宇宙とする。そうすると，第一階のケースと同様に，非標準数を持つ構造では，第二階の式によって標準数の数が定義できない，ということが起こる。

2．第二階ペアノ公理系のカテゴリー性

この節では，第二階ペアノ公理系がカテゴリカル (categorical) であること，すなわち任意のペアノ・モデルが同型である (isomorphic) であることを示す。そのために，まず，二つの補題を準備し，これを用いて二つの定理を証明する。最初の定理（定理２．２．１）は，回帰定理（recursion theorem）と呼ばれるもので，これは，任意のペアノ・モデル$\mathcal{N} = \langle N, c^{\mathcal{N}}, \sigma^{\mathcal{N}} \rangle$と，これと同じタイプの任意の構造$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$との間に，唯一の準同型写像（homomorphism）が存在することを主張する。この準同型は，自然数の切片（ゼロまで減少する鎖）を定義域とする部分関数の合併として定義できる。これが，のぞましい準同型となっているかどうかということ，は確認されねばならない。第二の定理（定理２．３．１）は，$\mathcal{N}$をペアノ構造，$\mathcal{A}$を同タイプの任意の構造

とするとき，$\mathcal{A}$が$\mathcal{N}$のある準同型の像となることの必要十分条件は，$\mathcal{A}$が帰納法モデルである，ということを主張するものである。この二つの定理により，任意のペアノ・モデルが同型的であるということ（定理２．４．１）が導かれる。このような順序で進むことにしよう。

２．１　準備：部分関数

構造$\mathcal{N}=\langle N, c^{\mathcal{N}}, \sigma^{\mathcal{N}}\rangle$をペアノ・モデル，すなわち，ペアノの三公理１Ｐ，２Ｐ，３Ｐをすべて満たす構造とする。$\mathcal{A}=\langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}}\rangle$を，$\mathcal{N}$と同じタイプのsignatureを持つ（すなわち，$c^{\mathcal{A}}$が$c^{\mathcal{N}}$と同様に個体（ただしＡの要素）であり，$\sigma^{\mathcal{A}}$が$\sigma^{\mathcal{N}}$と同様に一項関数（ただしＡ上の）であるような），任意の構造とする。以下の定義は，これらの構造に対して与えられる。

定義　２．１．１：切片の定義

Ｎの部分集合Ｈ（すなわち$H\subseteq N$）が**切片**(segment)であるのは，Ｈが，$c^{\mathcal{N}}$まで減少する鎖(chain)である場合，すなわち

$$c^{\mathcal{N}}\in H \quad \& \quad \forall x\in N\ [\sigma^{\mathcal{N}}x\in H\Rightarrow x\in H]$$

という場合，である。

この定義によれば，明らかに，Ｎと$\{c^{\mathcal{N}}\}$は，ともに切片である[8]。Ｎ自身がＮの最大切片であり，$\{c^{\mathcal{N}}\}$はＮの最小切片である。$\{c^{\mathcal{N}}\}$が切片であるのは，特に公理１Ｐによって保証される。Ｎの切片を小さい方から描けば，つぎのようになる。

$$\{c^{\mathcal{N}}\}$$
$$\{c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}}c^{\mathcal{N}}\}$$
$$\{c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}}c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}}\sigma^{\mathcal{N}}c^{\mathcal{N}}\}$$
$$\vdots$$
$$\{c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}}c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}}\sigma^{\mathcal{N}}c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}}\sigma^{\mathcal{N}}\sigma^{\mathcal{N}}c^{\mathcal{N}},\ \cdots\cdots\ \}=N$$

定義　２．１．２：（切片上の）**部分関数の定義**

ｆが切片上で定義される**部分関数**（partial function）であるのは，ｆがつぎの二つの条件（1），(2）を満たす，切片Ｈ（$\subseteq N$）からＡの中への関数（写像）である場合である：

$$f: H\rightarrow A$$

(1)　$f(c^{\mathcal{N}})=c^{\mathcal{A}}$　（つまり，ペアノ・モデル$\mathcal{N}$でのゼロに相当する要素$c^{\mathcal{N}}$は，ｆによって，構造$\mathcal{A}$の特異要素$c^{\mathcal{A}}$に対応づけられる）

(2)　$f(\sigma^{\mathcal{N}}x)=\sigma^{\mathcal{A}}f(x)$

（つまり，$x\in H$が，ｆによって，$f(x)\in A$　へと写されるならば，$x\rightarrow\sigma^{\mathcal{N}}x$という対応を，$f(x)\rightarrow\sigma^{\mathcal{A}}f(x)$という対応で模倣するように，ｆは，$\sigma^{\mathcal{N}}x$を，$\sigma^{\mathcal{A}}f(x)$へと写す）

こうして，部分関数ｆは，まず（1）により，Ｎの特異要素（最初の数ゼロ）である$c^{\mathcal{N}}$を，Ａの特異要素$c^{\mathcal{A}}$に写像して，写像の基底とする。つぎに，ｆは，双方の構造における関数$\sigma^{\mathcal{N}}$と$\sigma^{\mathcal{A}}$の，インプットとアウトプットの対応の仕方を保存する仕方で写像する。すなわち，ｆは，ｆにより関連づけられた，双方の構造の要素$x\in N$と$f(x)\in A$が，それぞれ，対応する関数$\sigma^{\mathcal{N}}$と$\sigma^{\mathcal{A}}$のインプットであるとき，それらのアウトプット同士で，$\sigma^{\mathcal{N}}x$を$\sigma^{\mathcal{A}}f(x)$へと写像する：

$$f(\sigma^{\mathcal{N}}x)=\sigma^{\mathcal{A}}f(x)。$$

この（2）の条件は，準同型である要件の一つである[9]。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dash, "f"] \arrow[d, dash] & f\ (x) \arrow[d, dash] \\ \sigma^{\mathcal{N}} x \arrow[r, dash, "f"] & \sigma^{\mathcal{A}}\ f\ (x) \end{tikzcd}$$

補題　2．1．3：Nのすべての要素は，（なんらかの）部分関数 f の定義域（domain）：Dom f 中にある。

【証明】

次の方針で証明する。まず，「ある部分関数の定義域に（要素として）含まれる」という条件を満たす，Nの要素の集合Gを定義する。この，Nの部分集合Gに対して，Gが$c^{\mathcal{N}}$を含み，「後者」関数：$\sigma^{\mathcal{N}}$に関して閉じている，ということを示す。$\mathcal{N}$がペアノ・モデルであることにより，公理３Ｐをこの G に適用して，G が N 全体と同一であることを導く。そこで，まず，G を定義する：

　$G = \{x \in N \mid \exists f$（f は部分関数＆ Dom f は切片である＆ $x \in$ Dom f）$\}$。

１．基底：$c^{\mathcal{N}} \in G$。

理由はこうである。f として，$f(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$で定義される関数 $f : \{c^{\mathcal{N}}\} \rightarrow A$　をとる。先に述べたように，公理１Ｐにより，$\{c^{\mathcal{N}}\}$ ＝Dom f $\subseteq N$ は N の切片である。部分関数の定義より，f は部分関数である。$c^{\mathcal{N}} \in \{c^{\mathcal{N}}\}$ ＝Dom f 。∴∃ f （f は部分関数＆ Dom f は切片である＆ $c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f），∴ $c^{\mathcal{N}} \in G$。

２．帰納のステップ：$\forall y\ (y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{N}} y \in G)$。

なぜなら――。任意の $y \in N$ をとり，$y \in G$ と仮定する。すると，G の定義により，ある部分関数 f が存在して，Dom f は切片であり，$y \in$ Dom f 。いま，$\sigma^{\mathcal{N}} y$ をとる。場合を二つに分ける。

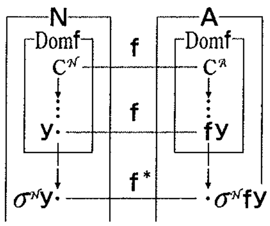
（イ）もし，$\sigma^{\mathcal{N}} y \in$ Dom f ならば，G の定義により，$\sigma^{\mathcal{N}} y \in G$。

（ロ）そこで，$\sigma^{\mathcal{N}} y \notin$ Dom f とする。そして，

$$H = \text{Dom } f \cup \{\sigma^{\mathcal{N}} y\}$$

$$f^* = f \cup \{\langle \sigma^{\mathcal{N}} y,\ \sigma^{\mathcal{A}} f(y) \rangle\}$$

として，f の拡張関数 f＊ を定義する。このとき，以下で示すように，①H，すなわち Dom f＊は切片となり，② f＊は部分関数である。しかも，③ $\sigma^{\mathcal{N}} y \in H =$ Dom f＊ だから，G の定義により，$\sigma^{\mathcal{N}} y \in G$ である。



①まず，上の定義により，H＝Dom f＊ であるが，この H は切片である。なぜなら，Dom f が切片であるから，$c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f ，∴ $c^{\mathcal{N}} \in H$。いま，任意の $x \in N$ をとり，$\sigma^{\mathcal{N}} x$ を考える。$\sigma^{\mathcal{N}} x \in$ Dom f＊＝Dom f $\cup \{\sigma^{\mathcal{N}} y\}$ ＝H　と仮定する。もし $\sigma^{\mathcal{N}} x \neq \sigma^{\mathcal{N}} y$ かつ $\sigma^{\mathcal{N}} x \in$ Dom f ならば，Dom f が切片であるから，切片の定義から，$x \in$ Dom f $\subseteq$ Dom f＊ 。もし $\sigma^{\mathcal{N}} x = \sigma^{\mathcal{N}} y$ ならば，ペアノ公理２Ｐにより，$x = y$ である。ところが，$y \in$ Dom f だから，$x \in$ Dom f $\subseteq$ Dom f＊ 。いずれにせよ，$x \in$ Dom f＊ ＝H。こうして，$\sigma^{\mathcal{N}} x \in H$　という仮定から $x \in H$ が導かれた。すなわち，$\forall x \in N\ (\sigma^{\mathcal{N}} x \in H \Rightarrow x \in H)$。こうして，H は（$\sigma^{\mathcal{N}}$に関して）単調減少条件を満たし，しかも，$c^{\mathcal{N}} \in H$ だったから，この H は（N の）切片である。

②つぎに，f＊が部分関数であることを示すために，部分関数の定義により，f＊が，

(1) $f^*\ (c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$

(2) $f^*\ (\sigma^{\mathcal{N}} x) = \sigma^{\mathcal{A}} f^*\ (x)$　（$\sigma^{\mathcal{N}} x \in H$ であるすべての $x \in N$ に対して）　という二つ

の条件を満たすことを示せばよい。まず，(1)である。Dom f は切片だから $c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f，しかも f は部分関数だから，f $(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$。f * の定義より f $\subseteq$ f *，∴ $c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f $\subseteq$ Dom f *。よって，f * $(c^{\mathcal{N}})$ = f $(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$。次に(2)である。任意の x ∈ N につき，もし $\sigma^{\mathcal{N}}$ x ∈ Dom f ならば，f が部分関数であることと f $\subseteq$ f * から，直ちに成り立つ。もし $\sigma^{\mathcal{N}}$ x $\not\in$ Dom f で，$\sigma^{\mathcal{N}}$ x = $\sigma^{\mathcal{N}}$ y のとき，公理 2 P より，x = y。ところが，f * は f * = f ∪ {⟨ $\sigma^{\mathcal{N}}$ y，$\sigma^{\mathcal{A}}$ (f y)⟩} と定義し，かつ y ∈ Dom f $\subseteq$ Dom f * だから，f * ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y) = $\sigma^{\mathcal{A}}$ f (y) = $\sigma^{\mathcal{A}}$ f * (y)。x = y だから，(2)が成り立つ。

③ f * の定義により，$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f * である。

こうして，「f * は部分関数 & Dom f * は切片 & $\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f *」である。よって，G の定義により，$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ G。ゆえに，上の帰納のステップが成り立つことが示された。

よって，基底と帰納のステップが成り立つから，公理 3 P（数学的帰納法）により，G は N 全体である。すなわち，G = N。　Q. E. D.

以上の証明において，われわれは三つの公理，1 P，2 P，3 P を全部用いた。次に二番目の補題に移る。

補題　2．1．4

f と g が部分関数で，x ∈ Dom f ∩ Dom g とする。このとき，f (x) = g (x)。

（この補題の意味は，二つの部分関数が，共通の定義域に関しては一致する，ということである）

【証明】

先の補題のときと同様に，望ましい性質を持つ，N の部分集合を定義して，これが実際には N と一致することを，公理 3 P を用いて証明する。まず，その（N の）部分集合として，

G = {x ∈ N | ∀ f ∀ g（f と g は部分関数である & x ∈ Dom f ∩ Dom g ⇒ f (x) = g (x)}

を定義する。

1．基底：$c^{\mathcal{N}} \in$ G

なぜなら――。任意の部分関数 f をとると，部分関数の定義により，f はある切片上で定義されるが，その切片に（切片の定義により）$c^{\mathcal{N}}$ が必ず含まれているから，$c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f であり，かつ f $(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$ である。そこで，いま，f と g が任意の二つの部分関数である，とする。$c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f かつ $c^{\mathcal{N}} \in$ Dom g，ゆえに $c^{\mathcal{N}} \in$ Dom f ∩ Dom g。このとき，f $(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$，g $(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$ であるから，f $(c^{\mathcal{N}})$ = g $(c^{\mathcal{N}})$ である。こうして，$c^{\mathcal{N}} \in$ G である。

2．帰納のステップ：∀ y（y ∈ G ⇒ $\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ G)

以下のようにして，これが成り立つことが分かる。任意の y ∈ N をとり，y ∈ G と仮定する。そして，f と g を任意の部分関数とする。場合を二つに分ける。

イ）$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f ∩ Dom g のとき。部分関数の定義の（2）により，

$$\left.\begin{array}{l} f(\sigma^{\mathcal{N}} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(f\,y) \\ g(\sigma^{\mathcal{N}} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(g\,y) \end{array}\right\} \cdots\cdots ①$$

仮定より，$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f　かつ $\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom g。また，部分関数の定義域は切片であり，切片は $\sigma^{\mathcal{N}}$ に関して単調に減少するから，y ∈ Dom f ∩ Dom g。y ∈ G だから，これらのことから，

f (y) = g (y) ……②

∴①，②より，f ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y) = g ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y)　が導かれる。以上より，つぎのことが示された：

$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f ∩ Dom g ⇒ f ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y) ＝g ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y) ……③。

ロ） $\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∉ Dom f ∩ Dom gのとき。このとき，トリヴィアルに，上の③が成り立つ。

こうして，イ），ロ）より，

∀ f ∀g ［ f とgが部分関数＆ $\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f ∩ Dom g ⇒ f ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y) ＝g ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y)］

すなわち，$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ G である。こうして，帰納のステップは成り立つことが示された。

以上により，帰納法公理３Ｐによって，Ｇ＝Ｎ。 **Q．E．D．**

二つの補題が証明できたので，本題の定理に移る。

２．２ 回帰（recursion）に関する定理

定理 ２．２．１：回帰定理（recursion theorem）

任意のペアノ・モデル：$\mathcal{N}$＝〈Ｎ，$c^{\mathcal{N}}$，$\sigma^{\mathcal{N}}$〉と（これと同じタイプの）任意の構造：$\mathcal{A}$＝〈Ａ，$c^{\mathcal{A}}$，$\sigma^{\mathcal{A}}$〉との間に，ただ一つの準同型写像（homomorphism）が存在する。

【証明】

先の二つの補題を組み合わせることにより，Ｎの各要素は，（それを定義域に含む）任意の部分関数によって，Ａ中の同一の要素に写される。なぜなら，最小の切片上で定義される最小の部分関数から出発して，$\sigma^{\mathcal{N}}$に基づいて切片を大きくすることにより，部分関数を大きくするとき，補題２．１．４により，共通の（つまり小さい方の）定義域に含まれるＮの要素は，同一のＡの要素に写される。このようにして，増大する部分関数の列が生じるが，大きい関数は，小さい関数を部分として含んでいる。補題２．１．３により，Ｎの要素は，$c^{\mathcal{N}}$から始めて，この部分関数の列の，定義域の列に新たに加わるが，新しい（大きな）部分関数の定義に含まれたときも，写されるＡの要素は，小さい関数の定義域に含まれていたときと同じＡの要素がそのまま引き継がれるからである。従って，x ∈ Ｎである任意のｘに対して，（x ∈ Dom f となる）任意の部分関数ｆに対して，

$$f(x) = z$$

となるような，唯一の z ∈ Ａが存在する。いま，すべての x ∈ Ｎに対して，ｈ（ｘ）を，上で述べた唯一の，Ａの要素ｚであるような，そういう関数：

$$h : N \rightarrow A$$

と定義する。すなわち，ｈ＝ ｛〈ｘ，z〉｜∃ f (f ：Ｎ→Ａ＆ f は部分関数＆ f (x) ＝ z) ｝とする。言い換えると，ｈはすべての部分関数ｆの合併（union）である。証明すべきことは，この関数ｈが$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$への準同型写像（homomorphism）であり，しかも，そのような唯一の可能な準同型である，ということである。

さて，部分関数の定義により，すべての部分関数ｆに対して，f ($c^{\mathcal{N}}$) ＝$c^{\mathcal{A}}$であるから，

$$h(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}} \cdots\cdots ①$$

である。さらに，補題２．１．３により，Ｎの要素はなんらかの部分関数ｆの定義域に含まれている（$\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Dom f ）ので，任意の $\sigma^{\mathcal{N}}$ y ∈ Ｎに対して，ある部分関数ｆが存在して，ｆ（$\sigma^{\mathcal{N}}$ y）＝ z ∈ Ａ である。ところで，ｈの定義より，h ($\sigma^{\mathcal{N}}$ y) ＝ z だから，

$$h(\sigma^{\mathcal{N}} y) = f(\sigma^{\mathcal{N}} y) \cdots\cdots ②$$

ｆは部分関数だから，部分関数の定義［定義項の（2)］により，

$$f(\sigma^{\mathcal{N}} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(f\,y) \cdots\cdots ③$$

再び，ｈの定義により，ｈｙ＝ｆｙであるから，これと③により，

$$f(\sigma^{\mathcal{N}} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(h\,y) \cdots\cdots ④$$

②と④より，

$$h(\sigma^{\mathcal{N}} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(h\,y) \cdots\cdots ⑤$$

①と⑤により，関数h（$h: N \to A$）が準同型であること，が示された。

残された課題は，hの唯一性（uniqueness）である。hの定義と，上の①，⑤により，hは，切片Nを定義域とする部分関数である。いま，定義域をNとする任意の部分関数fをとる。補題2．1．4により，$x \in \mathrm{Dom}\,h \cap \mathrm{Dom}\,f$ である任意の $x \in N$ に対して，$h(x) = f(x)$ である。ところが，$\mathrm{Dom}\,h = \mathrm{Dom}\,f = N$ であるから，$N = \mathrm{Dom}\,h \cap \mathrm{Dom}\,f$ である。よって，任意の $x \in N$ に対して，$h(x) = f(x)$ である。すなわち，

$$f = h$$

である。こうして，準同型hは唯一に決まる。　Q．E．D．

2．3　帰納法モデルとペアノ・モデル

つぎに，帰納法モデルとペアノ・モデルの間の関係に関する定理に移る。

定理　2．3．1

構造 $\mathcal{N} = \langle N, c^{\mathcal{N}}, \sigma^{\mathcal{N}} \rangle$ をペアノ・モデルとし，$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ を $\mathcal{N}$ と同タイプの任意の構造とする。このとき，

$\mathcal{A}$ は $\mathcal{N}$ の準同型像（homomorphic image）である

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ は帰納法モデルである。

【証明】

［⇒：］$\mathcal{A}$ を，準同型 $h: N \to A$ による，$\mathcal{N}$ の準同型像とする（すなわち $A = h[N]$）。示すべきことは，$\mathcal{A}$ が公理3Pのモデルである，ということである。いま，

$$c^{\mathcal{A}} \in H \quad かつ \quad \forall y\ (y \in H \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}} y \in H)$$

であるような，任意の $H \subseteq A$ を考える。われわれは，$H = A$ であることを示したい。さて，仮定により，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{N}$ のhによる準同型像であり，$\mathcal{N}$ はペアノ・モデルであるから，$\mathcal{N}$ に対して公理3Pを用いることができる。そこで，Nの要素で，hによるその像がHの要素であるもの（Hの要素の，hによる逆像）の集合Gを定義する。すなわち，

$$G = \{x \in N \mid h(x) \in H\}。$$

もし（1）**基底**：$c^{\mathcal{N}} \in G$，および（2）**帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in g \to \sigma^{\mathcal{N}} y \in G)$ が示されたとすると，$\mathcal{N}$ に対して公理3Pを適用して，$G = N$ を得る。すると，Gの定義から，$G = N$ により，$\forall x\ (x \in N \Rightarrow h(x) \in H)$ である……①。よって，$h[N] \subseteq H$ である。（実際，$y \in h[N] = \{y \in A \mid \exists x \in N\ (h(x) = y)\}$ とすると，ある $x \in N$ が存在して，$h(x) = y$。ところが，①より，$h(x) \in H$ であるから，$y \in H$。以上より，$y \in h[N] \Rightarrow y \in H$。$\therefore h[N] \subseteq H$。）仮定により，AはNのhによる写像の値域に一致する（つまりhはAの上への写像）であるから，$A = h[N]$ であった。ゆえに，$A \subseteq H$。しかし，Hの定義より，$H \subseteq A$。$\therefore H = A$。よって，$\mathcal{A}$ は公理3Pのモデルとなる。こうして，右辺が導かれる。

そこで，上の（1）と（2）が成り立つことを示せば十分である。

（1）**基底**：$c^{\mathcal{N}} \in G$。

なぜなら，$c^{\mathcal{N}} \in N$，かつHの定義により，$c^{\mathcal{A}} \in H$，そしてhは準同型であるから，$h(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$，$\therefore h(c^{\mathcal{N}}) \in H$，$\therefore c^{\mathcal{N}} \in \{x \in N \mid h(x) \in H\} = G$。

（2）**帰納のステップ**：$\forall y\,(y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{N}} y \in G)$。

任意の$y \in N$をとり，$y \in G$とする。Gの定義により，$h(y) \in H$。Hの定義より，Hは後者関数に関して閉じているから，$\sigma^{\mathcal{A}}(h(y)) \in H$。しかし，hは準同型であるから，$h(\sigma^{\mathcal{N}} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(h(y))$。$\therefore \sigma^{\mathcal{N}} y \in N \,\&\, h(\sigma^{\mathcal{N}} y) \in H$。$\therefore \sigma^{\mathcal{N}} y. \in \{x \in N \mid h(x) \in H\} = G$。こうして，$\forall y (y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{N}} y \in G)$ が示された。

［⇐：］$\mathcal{A}$を帰納法モデルとし，$\mathcal{N}$をペアノ・モデルとする。回帰定理（定理2．2．1）により，$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$への唯一の準同型（写像）hが存在する。$\mathcal{A}$が$\mathcal{N}$の準同型像であることを言うには，hが「上への」(onto) 写像であること，すなわち$h[N] = A$であること，を示せば十分である。いま，$H = h[N]$と定義する。すなわち，

$$H = \{y \in A \mid \exists x\ (x \in N \ \&\ h(x) = y)\}$$

とする。もし，(1) **基底**：$c^{\mathcal{A}} \in H$，(2) **帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in H \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}} y \in H)$ が成り立てば，$\mathcal{A}$が帰納法モデルであることから，公理3Pを適用して，$H = A$，ゆえに$h[N] = A$を得る。

(1) **基底**：$c^{\mathcal{A}} \in H$。

なぜなら——。hは$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$への準同型だから，$h(c^{\mathcal{N}}) = c^{\mathcal{A}}$　かつ$c^{\mathcal{N}} \in N$。もちろん$c^{\mathcal{A}} \in A$だから，$c^{\mathcal{A}} \in \{y \in A \mid \exists x (x \in N \,\&\, h(x) = y)\} = H$。

(2) **帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in H \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}} y \in H)$

任意の$y\ (\in A)$をとり，$y \in H$とする。Hの定義より，ある$x \in N$が存在して，$h(x) = y$。hは準同型だから，$h\ (\sigma^{\mathcal{N}} x) = \sigma^{\mathcal{A}} h\ (x) = \sigma^{\mathcal{A}} y$。しかも，$\sigma^{\mathcal{N}} x \in N$。ゆえに，

$$\sigma^{\mathcal{N}} x \in N \ \ \&\ h\ (\sigma^{\mathcal{N}} x) = \sigma^{\mathcal{A}} y \in A。$$

$$\therefore\ \ \sigma^{\mathcal{A}} y \in \{y \in A \mid \exists x\ (x \in N \ \ \&\ h\ (x) = y)\} = H。$$

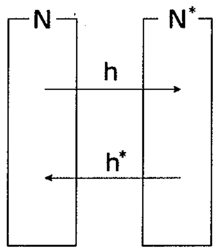
以上より，$\forall y\ (y \in H \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}} y \in H)$ が示された。　　Q．E．D．

2．4　ペアノ・モデルの同型性

さて，先の二つの定理，すなわち回帰定理（定理2．2．1）と定理2．3．1，を用いて，どのような二つのペアノ・モデルも互いに同型であること，言い換えると，ペアノの公理系Πはカテゴリカル（範疇的・定型的：categorical）であること，が証明できる。これをつぎの定理とする。

定理　2．4．1：任意のペアノ・モデルは**同型的**（isomorphic）である。

【証明】



構造：$\mathcal{N} = \langle N,\ c^{\mathcal{N}},\ \sigma^{\mathcal{N}} \rangle$

および　$\mathcal{N}^* = \langle N^*, c^{\mathcal{N}^*}, \sigma^{\mathcal{N}^*} \rangle$

を二つのペアノ・モデルとする。定理2．2．1と定理2．3．1により，$\mathcal{N}$から$\mathcal{N}^*$の上への準同型h：

$$h : \mathcal{N} \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{N}^*$$

が存在し，かつ，$\mathcal{N}^*$から$\mathcal{N}$の上への準同型h^*：

$$h^* : \mathcal{N}^* \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{N}$$

が存在する(10)。ここで，これら二つの準同型hとh^*の合成：

$$h^* \circ h$$

が$\mathcal{N}$から$\mathcal{N}$への準同型写像となることは，容易に示すことができる(11)。ところで，定理2．2．1（回帰定理）によれば，$\mathcal{N}$と$\mathcal{N}$との間には唯一の準同型が存在する。NからNの上への同一性関

数［恒等写像 I（x）＝x］は準同型であり，（関数としては）h*○h と同一である。すなわち，h*○h は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への唯一の同一性関数に外ならない。よって，h は一対一でなければならない（さもなければ，$\mathcal{N}^*$ がペアノ・モデルであることに反する事態が生じる (12)）。従って，h は，$\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}^*$ の上への一対一写像であるような，準同型である。すなわち，h は，$\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}^*$ の上への同型写像（isomorphism）である。　**Q．E．D．**

こうして，すべてのペアノ・モデルは同型的であるから，あたかも唯一のペアノ・モデルが存在するかのように語ることができる。いわば，同型なすべてのペアノ・モデルを代表する構造を，

$$\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$$

と表示する。以後，このモデルを「意図されたモデル」（intended model）と同一視する。

3．　ペアノ・モデルと原始回帰

G．ペアノは，未定義の原始概念として，**自然数**，**ゼロ**，**後者**の概念をとり，それらについての公理系Ⅱ（通常は五つの公理の集まりを考えるが，われわれの場合は，「構造」を対応させるので，三つで十分である），すなわち，1 P，2 P，3 Pを定めることで，自然数を公理化している (13)。われわれは，この公理系の任意のモデルが，意図されたモデル：

$$\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$$

と同型である（isomorphic），というところまで，自然数についての理解を確定させた。

さて，これらの公理に現れる一つの特異な対象としての $c^{\mathcal{N}}$（すなわちゼロ）と一つの演算 $\sigma^{\mathcal{N}}$（すなわち「後者」関数）だけでは，自然数の多面的性質をうまく表現することはむずかしい。そこで，例えば，自然数の加法・乗法・巾法などを導入して，「素数性」といった興味深い概念を容易に定義できるようにしたい。しかし，あくまで，その基礎となるのは，ペアノの公理系でなければならない。では，どのようにすれば，それらの演算を導入できるか？

ペアノの方法は，数学的帰納法の原理を用いて，これらの演算を定義することである。よく知られた加法の定義は，つぎの二つの方程式によって与えられる：

$$(\forall x, y \in N) \qquad x + 0 = x$$
$$x + Sy = S(x + y)。$$

では，そのとき，加法の定義は自然数の構造，つまりわれわれの「意図されたモデル」でのみ定義されるのか，それとも任意のペアノ構造でも定義できるのか？われわれは回帰定理（定理２．２．１）によって，任意のペアノ構造に対して，同一の演算の存在を示すことができる，というのがその答えである。実際，回帰定理の存在意義は，このような定義による関数を一般的化した関数，すなわち原始帰納的関数，の導入を正当化することにある。

では，どのようにして，回帰定理がペアノ・モデルに共通の演算を定義するのか？われわれは，任意のペアノ・モデル：

$$\mathcal{N}^* = \langle \mathbf{N}^*, c^{\mathcal{N}^*}, \sigma^{\mathcal{N}^*} \rangle$$

と任意の（同タイプの）構造：

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$$

を持つとき，方程式：

$$(a)\quad \mathbf{h}(c^{\mathcal{N}^*}) = c^{\mathcal{A}}$$
$$(b)\quad \mathbf{h}(\sigma^{\mathcal{N}^*} y) = \sigma^{\mathcal{A}}(\mathbf{h}(y))$$

が，数学的帰納法によって，hを定義することになることを，以後，具体的に示す。こういった定義は，これらの方程式によって定義される唯一の関数が存在することを示すことによって，自らを正当化しなければならない。実際，このような関数hが唯一存在することは，回帰定理（定理２．２．１）が主張していたことであった。以下で，われわれは，ペアノ・モデルで唯一の加法，乗法，巾法の各演算が存在することを示す（命題３．１．１，命題３．１．２，命題３．１．３）。さらに，回帰定理によって，「ペアノ・モデルでは，数学的帰納法を用いることによって，すべての回帰的演算（recursive operation）が導入されうる」（定理３．２．１）という，より強力な結果が得られる（乗法と巾法の存在は，この定理の系として導かれる）。

自然数上の関数のこのような定義法は，ペアノ・モデル以外でも有効だろうか？ペアノ・モデルではない帰納法モデルでは，（後に見るように）必ずしもそうはならない，ということをヘンキンが示している。しかし，ともかく，この節では，ペアノ・モデルでの関数の確保を追究しよう。

３．１　ペアノ・モデルにおける加法・乗法・巾法

命題　３．１．１：すべてのペアノ・モデルで，唯一の**加法**の演算が存在する。

【証明】

$\mathcal{N}^* = \langle \mathbf{N}^*, c^{\mathcal{N}^*}, \sigma^{\mathcal{N}^*} \rangle$ をペアノ構造とする。示したいことは，以下の（1.1）と（1.2）を満たす，唯一の演算 f が存在すること，である[(14)]：

（1.1）　$f(x, c^{\mathcal{N}^*}) = x$

（1.2）　$f(x, \sigma^{\mathcal{N}^*}(y)) = \sigma^{\mathcal{N}^*}(f(x, y))$。

このことを，回帰定理（定理２．２．１）を用いて，証明するために，われわれは，構造：

$$\mathcal{N}^* = \langle \mathbf{N}^*, c^{\mathcal{N}^*}, \sigma^{\mathcal{N}^*} \rangle$$

をとり，かつ，すべての $x \in \mathbf{N}^*$ に対して，構造：

$$\mathcal{N}x^* = \langle \mathbf{N}^*, x, \sigma^{\mathcal{N}^*} \rangle$$

をとる。回帰定理により，$\mathcal{N}^*$ と $\mathcal{N}x^*$ の間に，唯一の準同型（写像）hx が存在する。その関数：hx は，準同型であるから，つぎの（1），（2）を満たす：

（1）　$hx(c^{\mathcal{N}^*}) = x$

（2）　$hx(\sigma^{\mathcal{N}^*}(y)) = \sigma^{\mathcal{N}^*}(hx(y))$　　（ただし，すべての $y \in \mathbf{N}^*$ に対して）。

二項関数 f を，規則：

$$f(x, y) = hx(y)$$

で定義することにより，この関数 f が上の（1.1）と（1.2）に従うことは容易に確かめうる[(15)]。従って，関数 f の存在は確立された。

つぎに，このような関数 f が唯一つしか存在しないこと（唯一性・一意性）を示すために，先の条件（1.1）および（1.2）を満たす，（別の）関数gが存在する，と仮定する。このとき，すべての $x \in \mathbf{N}^*$ に対して，gx を，規則：

$$gx(y) = g(x, y) \qquad \text{（ただし，すべての } y \in \mathbf{N}^* \text{ に対して）}$$

によって定義する（x を固定して，gx は一項関数とみなす）。ところで，この関数gx は上の条件（1）と（2）を満たす[(16)]。つまり，gx は $\mathcal{N}^*$ から $\mathcal{N}^*$ への準同型である。ところが，回帰定理（定理２．２．１）により，方程式（1）と（2）によって定義される関数，すなわち $\mathcal{N}^*$ から $\mathcal{N}^*$ への準同型は唯一つに定まる。言い換えると，すべての $x \in \mathbf{N}^*$ に対して，hx = gx である。ゆえに，（二項関数として見た h と g に対して）h = g である。　　**Q．E．D．**

こうして，回帰定理（定理２．２．１）を用いて，われわれは，すべての x ，$y \in N^*$ に対して，(1.1) と (1.2) とによって定義される唯一の演算（つまり，「後者」関数 $\sigma^{\mathcal{N}*}$ を基礎にしての加法演算）が存在することを示した。回帰定理が，任意のペアノ・モデルで加法の定義とその存在を正当化する，というのは，この意味においてである。同様の方法により，われわれは乗法と巾法を定義し，回帰定理により，それを正当化できる。以下の二つの命題（命題3.1.2, 命題3.1.3）により，乗法と巾法が定義され，存在が主張される：

命題　３．１．２：乗法の存在

すべてのペアノ・モデルにおいて，唯一の乗法演算が存在する。すなわち，$\mathcal{N}^* = \langle N^*, c^{\mathcal{N}*}, \sigma^{\mathcal{N}*} \rangle$ をペアノ構造であるとすると，以下の条件 (2.1) と (2.2) を満たす，唯一の演算 g が存在する：

(2.1) $g(x, c^{\mathcal{N}*}) = c^{\mathcal{N}*}$

(2.2) $g(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = g(x, y) +^{\mathcal{N}*} x$　（ただし，すべての $x, y \in N^*$ に対して）

ここで，“$+^{\mathcal{N}*}$” は，すでに定義され，その唯一存在が確かめられた二項演算としての，加法である。

命題　３．１．３：巾法の存在

すべてのペアノ・モデルにおいて，唯一の巾法演算が存在する。すなわち，$\mathcal{N}^* = \langle N^*, c^{\mathcal{N}*}, \sigma^{\mathcal{N}*} \rangle$ をペアノ構造であるとすると，以下の条件 (3.1) と (3.2) を満たす，唯一の演算 h が存在する：

(3.1) $h(x, c^{\mathcal{N}*}) = \sigma^{\mathcal{N}*}(c^{\mathcal{N}*})$

(3.2) $h(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = h(x, y) \cdot^{\mathcal{N}*} x$　　（ただし，$\forall x, y \in N^*$）

ここで，“$\cdot^{\mathcal{N}*}$” は，すでに定義され，その唯一存在が確かめられた二項演算としての，乗法である。

乗法を定義する方程式：(2.1)，(2.2) の通常の書き方は，

(2.1)′：$x \cdot 0 = 0$

(2.2)′：$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$

であり，巾法を定義する方程式：(3.1)，(3.2) の通常の書き方は，

(3.1)′：$x^0 = 1$

(3.2)′：$x^{y+1} = x^y \cdot x$

である。ペアノ・モデルでは，すべての回帰的演算（帰納的関数）が定義され，回帰定理により正当化される。そのような一般的な定理を示すことにより，上の二命題（命題３．１．２と命題３．１．３）はその定理の系となる（そのことで，これらの命題の個別的な証明は省略できる）。

３．２　ペアノ・モデルにおける回帰演算

定理　３．２．１：回帰演算は，任意のペアノ・モデルにおいて，数学的帰納法によって導入される。

【証明】

簡単のため，われわれが導入する回帰演算を二項演算にかぎる。まず，そのような特殊な形での定理を述べ，つぎに証明を与える。構造：

$$\mathcal{N}^* = \langle N^*, c^*, \sigma^* \rangle$$

を任意のペアノ・モデルとし，f を N^* 上の一項関数，g を N^* 上の三項関数とする。このとき，以下の方程式 (1.1) と (1.2) ，すなわち，原始回帰（primitive recursion）の方程式，を満たすような，

N^* 上の二項関数 h が存在する。

(1.1)　$h(x, c^{\mathcal{N}*}) = f(x)$；

(1.2)　$h(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = g(x, y, h(x, y))$　　　（ただし，$\forall x, y \in N^*$）

（二項演算に限定した形での）この定理を証明するために，つぎの補題を証明する：

《補題》

$\mathcal{N}^* = \langle N^*, c^{\mathcal{N}*}, \sigma^{\mathcal{N}*} \rangle$ がペアノ・モデルならば，すべての $x \in N^*$ に対して，以下の，原始回帰の方程式 (1)，(2) を満たすような，N^* 上の唯一の（x をひとまず固定して考えることにより，y についての）一項関数 h x が存在する：

(1)　$hx(c^{\mathcal{N}*}) = f(x)$

(2)　$hx(\sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = g(x, y, hx(y))$　　　（ただし，$\forall y \in N^*$）

ここで，f は N^* 上の一項関数，g は N^* 上の三項関数である。

補題の証明

最初に**存在性**を証明する。見やすくするために，N^* のデカルト積を，$N_1 = N^* \times N^*$ とする。$x \in N^*$ であるすべての x に対して，（ひとまずこの x を固定して考えて）このデカルト積 N_1 上でのある要素 $c\,x^{\mathcal{N}*} \in N_1$ と，さらに N_1 上での（形式的には一項の）関数 $\sigma\,x^{\mathcal{N}*}$ を，それぞれ

$$c\,x^{\mathcal{N}*} = \langle c^{\mathcal{N}*}, f(x) \rangle$$

および

$$\sigma\,x^{\mathcal{N}*} : N_1 \to N_1$$

$$\langle y, z \rangle \longmapsto \langle \sigma^{\mathcal{N}*}(y), g(x, y, z) \rangle$$

（つまり，$\sigma\,x^{\mathcal{N}*}(\langle y, z \rangle) = \langle \sigma^{\mathcal{N}*}(y), g(x, y, z) \rangle$）と

定義する。こうして，定まる N_1 の要素 $c\,x^{\mathcal{N}*}$ と N_1 上の関数 $\sigma\,x^{\mathcal{N}*}$ から作られる新しい構造：

$$\mathcal{N}_1 = \langle N_1, c\,x^{\mathcal{N}*}, \sigma\,x^{\mathcal{N}*} \rangle$$

と，さきのペアノ・モデル $\mathcal{N}^* = \langle N^*, c^{\mathcal{N}*}, \sigma^{\mathcal{N}*} \rangle$ に，回帰定理（定理２．２．１）を適用する。すると，$\mathcal{N}^*$ から $\mathcal{N}_1$ への**唯一の準同型**（homomorphism）：

$$m_x$$

が存在して，これがつぎの準同型の定義条件 (1)，(2) を満たすことになる：

(1)　$m_x(c^{\mathcal{N}*}) = c\,x^{\mathcal{N}*}$

(2)　$m_x(\sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = \sigma\,x^{\mathcal{N}*}(m_x(y))$　　　（ただし，$\forall y \in N^*$）

さて，いま，以下で定義される二つの射影関数（projection）Ψ_1, Ψ_2 をとれ：

$$\Psi_1 : N_1 \to N^*$$

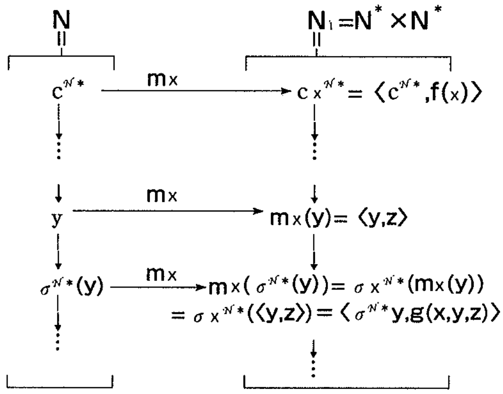
$$\langle x, y \rangle \longmapsto x$$

および

$$\Psi_2 : N_1 \to N^*$$

$$\langle x, y \rangle \longmapsto y$$

（ただし，$x, y \in N^*$ なる任意の x，y に対して）。



また，すべての $x \in N^*$ に対して，（x をひとまず固定して）h x と k x を一項関数とみなして，そ

れらを,

$$hx : N^* \to N^* \qquad y \mapsto \Psi_2(m_x(y))$$

$$kx : N^* \to N^* \qquad y \mapsto \Psi_1(m_x(y))$$

と定義する。すると，以下の証明により，関数 kx が N^* 上の同一性関数（恒等写像）であることが判明する。

まず，関数 kx のインプットとなったとき，対応する関数値がそれ自身となるような，そのようなN * の要素の集合をGと定義する。すなわち，

$$G = \{y \in N^* \mid kx(y) = y\}。$$

もし，GがN * そのものならば，N * の任意の要素をインプットとするときの kx の関数値がインプットそのものということになるから，結局，関数 kx は N^* 上の同一性関数であることになる。実際そのようになることを，($\mathcal{N}^*$ がペアノ・モデルだから）公理３Ｐを $G \subseteq N^*$ に適用することで示す。実際に，

1．**基底**：$c^{\mathcal{N}^*} \in G$

2．**帰納のステップ**：$\forall y \in N^* \ (y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{N}^*} y \in G)$

という二つの主張が成り立つ (17)。よって，公理３Ｐにより，$G = N^*$ である。こうして，kx は N^* 上の同一性関数である（すなわち，$\forall y \in N^* : kx(y) = y$）ことが示された。

さて，いま，さきに定義した関数 hx が，補題で述べられている原始回帰の条件 (1) と (2) を満たすこと，を証明したい。

条件 (1) ：$hx(c^{\mathcal{N}^*}) = f(x)$

これが成り立つことは，つぎのようにして示しうる：

$$\begin{aligned}
hx(c^{\mathcal{N}^*}) &= \Psi_2(m_x(c^{\mathcal{N}^*})) && [h_x\text{の定義}：h_x(y) = \Psi_2(m_x(y))\text{による}] \\
&= \Psi_2(c\,x^{\mathcal{N}^*}) && [m_x\text{は準同型であるから，準同型の第一条件 (1) による}] \\
&= \Psi_2(\langle c^{\mathcal{N}^*}, f(x)\rangle) && [cx^{\mathcal{N}^*}\text{の定義による}] \\
&= f(x) && [\text{射影}\Psi_2\text{の定義による}]
\end{aligned}$$

条件 (2) ：$hx(\sigma^{\mathcal{N}^*}(y)) = g(x, y, hx(y))$

これが成り立つことは，つぎのようにして示しうる：

$$\begin{aligned}
h_x(\sigma^{\mathcal{N}^*}(y)) &= \Psi_2(m_x(\sigma^{\mathcal{N}^*}(y))) && [h_x\text{の定義による}] \\
&= \Psi_2(\underline{\sigma\,x^{\mathcal{N}^*}(m_x(y))}) && [\text{準同型の第二条件 (2) による}] \\
&= \Psi_2(\underline{\langle \sigma^{\mathcal{N}^*}(k_x(y)), g(x, k_x(y), h_x(y))\rangle}) && [m_x, \Psi_1, \Psi_2, \sigma\,x^{\mathcal{N}^*}\text{の定義により，……部分は____という順序対と同一になることによる；註(17)での帰納のステップの導出参照}] \\
&= \Psi_2(\langle \sigma^{\mathcal{N}^*}(y), g(x, y, h_x(y))\rangle) && [k_x\text{が同一性関数であることが上で示されたから，}k_x(y) = y\text{による}] \\
&= g(x, y, h_x(y)) && [\Psi_2\text{の定義による}]
\end{aligned}$$

こうして，先に定義した関数 hx が補題で述べられている条件（原始回帰の条件）を満たすことが示された。ゆえに，補題が主張するような関数 hx が確かに**存在する**ということを示したことになる。

そこで，補題の証明を完成させるには，関数 hx の**唯一性**を示さねばならない。これを行うために，原始回帰の条件（＝補題が述べている条件）(1) および (2) を満たすような，他の関数 hx^*

が存在する，と仮定する。いま，

$$H = \{ y \in N^* \mid hx(y) = hx^*(y) \}$$

とおいて，公理３Ｐを用いると，容易に，$H = N^*$ が得られる。すると，N^* の任意の要素に対するhxとhx*の関数値が一致するから，hxとhx*は同一であることになる。

最後に，上の補題を用いて，定理３．１．１（加法の存在と唯一性）を証明したのと類似のやり方によって，いま問題にしている定理（定理３．２．１）を得ることができる。すなわち，規則：

$$h(x, y) = hx(y)$$

によって，補題において，その唯一存在が示されたところの関数ｈｘから，二項関数ｈを得ることができる。この関数ｈは，（ｈｘが補題で述べられた条件(1),(2)を満たす唯一の関数であることにより）最初に提示された原始回帰条件（1.1）と（1.2）を満たすような，唯一の関数である。

Ｑ．Ｅ．Ｄ．

この定理（定理３．２．１）の系（corollary）として，回帰演算（「原始回帰」という形式に従って定義される演算）の一つである，加法・乗法・巾法の唯一存在を主張する命題が得られる。改めて，それらの命題をここでまとめよう：

加法：$f(x)$ として N^* 上の同一性関数をとり，$g(x, y, z) = \sigma^{\mathcal{N}*}(z)$ とする。すると，加法は，以下の原始回帰の二条件を満たす二項関数ｈとして得られる：

$h(x, c^{\mathcal{N}*}) = x$ （通常の表記では $x + 0 = x$）

$h(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = \sigma^{\mathcal{N}*}(h(x, y))$ （$x + (y + 1) = (x + y) + 1$）

乗法：$f(x)$ として値 $c^{\mathcal{N}*}$ の定数値関数をとり，（$+^{\mathcal{N}*}$ を上で得られた加法として）$g(x, y, z) = z +^{\mathcal{N}*} x$ とする。乗法は，以下の原始回帰条件を満たす二項関数ｈとして得られる：

$h(x, c^{\mathcal{N}*}) = c^{\mathcal{N}*}$ （通常の表記では $x \cdot 0 = 0$）

$h(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = h(x, y) +^{\mathcal{N}*} x$ （$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$）

巾法：$f(x)$ として値 $\sigma^{\mathcal{N}*}(c^{\mathcal{N}*})$ の定数値関数をとり，（$\cdot^{\mathcal{N}*}$ を上でえられた乗法として）$g(x, y, z) = z \cdot^{\mathcal{N}*} x$ とする。巾法は，以下の原始回帰条件を満たす二項関数ｈとして得られる：

$h(x, c^{\mathcal{N}*}) = \sigma^{\mathcal{N}*}(c^{\mathcal{N}*})$ （通常の表記では $x^0 = 1$）

$h(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = h(x, y) \cdot^{\mathcal{N}*} x$ （$x^{y+1} = x^y \cdot x$）

４．帰納法モデル

前節で，われわれは回帰定理（定理２．２．１）をペアノ・モデルに適応して，加法や乗法などの回帰演算の唯一存在を確認した。その際，関数を定義するメカニズムは数学的帰納法，すなわち公理３Ｐであった。では，ペアノ・モデルではないような帰納法モデルでも，数学的帰納法によって関数を定義する，ということが可能であろうか？ヘンキンは，一般にそうはならないことを示している（Henkin [1960]）。われわれも，ヘンキンに従って，このことを追究しよう。

ヘンキンによれば，帰納法公理（公理３Ｐ）は，そのモデルを同型性まで特徴づけることはないが，三つの広いカテゴリーに分類される。それは，

ペアノ・モデル（公理３Ｐ以外に１Ｐと２Ｐも成り立つモデル）

循環モデル（公理３Ｐと２Ｐは満たすが１Ｐは満たさないモデル）

スプーン型モデル（公理３Ｐと１Ｐは満たすが２Ｐは満たさないモデル）

の三つである。第１節で挙げたペアノの公理の七つのモデルのうち，ペアノ・モデルであるのは，例

1，例2，例3であり，循環モデルであるのは例4，例6であり，スプーン型モデルであるのは例5，例7である。これらのモデルの間には，どのような関連があるのか？帰納法モデルでの数学的帰納法による関数の定義可能性を知るには，それが他のモデルとどう関連し合うかを知る必要がある。そのために，帰納モデルと合同関係のつながりを調べよう。

4．1　帰納法モデルと合同関係（congruence relation）

定理　4．1．1：構造

$$\mathcal{N} = \langle N,\ 0,\ S \rangle$$

を，ゼロと後者関数を持つ自然数の構造（自然数から成るペアノ公理系の意図されたモデル）とせよ。もし（同じタイプの）構造$\mathcal{A}$が帰納法モデルであるならば，ある合同関係[18]〜に対して，

$\mathcal{A} \cong \mathcal{N}\sim$　　（ただし，$\mathcal{N}\sim = \langle N\sim,\ 0^{\mathcal{N}\sim},\ S^{\mathcal{N}\sim} \rangle$であり，$N\sim = \{[x]\sim \mid x \in N\}$ ＝〜による同値類の集合）

である（すなわち$\mathcal{A}$と$\mathcal{N}\sim$は同型である）。

この定理の意味は，意図された自然数の構造$\mathcal{N}$と同じタイプの，必ずしもペアノモデルとはかぎらない帰納法モデル$\mathcal{A}$に対して，ある合同関係〜を自然数構造$\mathcal{N}$に導入することで，帰納法モデル$\mathcal{A}$と同型のモデル$\mathcal{N}\sim$を，その自然数構造$\mathcal{N}$を改編して得ることができる，というものである。

【証明】

$\mathcal{N} = \langle N,\ 0,\ S \rangle$を，ゼロと後者関数を持つ自然数の構造とする。$\mathcal{A}$が帰納法モデルであるとすると，定理2．3．1（$\mathcal{A}$が帰納法モデルであるとき，かつそのときにかぎり，$\mathcal{A}$は$\mathcal{N}$の準同型像である）より，$\mathcal{A}$は$\mathcal{N}$の準同型像である。よって，$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$の上への準同型hから得られる合同関係h〜によって（田畑［2001］命題2.7.2参照），$\mathcal{N}$を再編して$\mathcal{N}^{\sim h}$を作ると，$\mathcal{A} \cong \mathcal{N}^{\sim h}$となる（田畑［2001］命題2.7.4参照）[19]。よって，$\mathcal{N}$上のある合同関係〜に対して

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{N}\sim$$

である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**Q．D．E．**

4．2　自然数上の合同関係

われわれは，$\mathcal{N} = \langle N,\ 0,\ S \rangle$に，加法と乗法の演算を加え，さらに（大小の）順序を考察範囲に入れることにより，$\mathcal{N}$を拡張して，

$$\langle N,\ 0,\ S,\ +,\ \cdot,\ < \rangle$$

をとる。この拡張は根本的なものではなく，便宜的なものである。なぜなら，$\mathcal{N}$において，加法と乗法が定義できることはすでに見たし，$x < y \Leftrightarrow \exists z\ (z \neq 0 \wedge y = x + z)$として，加法を用いて順序関係“<”が定義できるからである。このように$\mathcal{N}$を拡張する理由は，それによって，構造$\mathcal{N}$上の合同関係（congruence relation）の明確な記述が可能となるためである。

ここで，自然数上の，剰余に関するよく知られた合同関係を一般化してできる関係$R_{m,n}$を，つぎのように定義する。

定義　4．2．1

mとnを，自然数の任意のペアとせよ。以下の規則によって，われわれは，関係$R_{m,n}$を以下の規則によって定義する[20]：

任意の$x,\ y \in N$に対して，

$\langle x,\ y \rangle \in R_{m,n} \Leftrightarrow$　(1) $x,\ y < n \ \&\ x = y$，または

(2) $x,\ y \geq n \,\&\, \exists z\,[z \in \mathrm{N} \,\&\, (x = y + (z \cdot m) \vee y = x + (z \cdot m))]$

つぎの定理によって，N上の合同関係は，同一性関係か，またはこの関係 $R_{m,n}$ に外ならない，ということがわかる。

定理　4．2．2

N上の二項関係Rが $\mathcal{N}$ 上の合同関係（congruence relation）である

⇔RがN上の同一性関係であるか，または，$R = R_{m,n}$ となるような自然数m，nが存在する。

【証明】

［⇒：］Rが $\mathcal{N}$ 上の合同関係であるとし，かつRが同一性関係ではない，と仮定する。(同一性関係ではない合同関係Rを満たすものとして）$x,\ y \in \mathrm{N}$　なるx，yで　$\langle x,\ y\rangle \in R$　かつ $x \neq y$ であるものが存在する。そこで，いま，nを

$$n = \min\,\{x \in \mathrm{N} \mid \exists y\ (\langle x,\ y\rangle \in R \,\&\, y \neq x)\}$$

と定義する。すなわち，自らとは異なる自然数に対してRという関係にある自然数の中の最小の数を，nと定義する。Rは同一性とは異なる同値関係であることと，nの定義により，nは（Rの対称性とnの最小性により）より大きいものに対して関係Rにあるから，

$$z \neq 0 \quad \&\quad \langle n,\ n+z\rangle \in R$$

となるような $z \in \mathrm{N}$ が存在する。さて，mを，nがnとは別の数とRの関係にあるときの，その別の数との差の最小値，すなわち，

$$m = \min\,\{z \in \mathrm{N} \mid z \neq 0 \quad \&\ \langle n,\ n+z\rangle \in R\}$$

と定義する。こうして，われわれは，Rに基づいて，nとmを定義した。それゆえ，$R_{m,n}$ も定まった。示すべきことは，$R = R_{m,n}$ ということである。

まず，$R_{m,n} \subseteq R$ を示す。$\langle x,\ y\rangle \in R_{m,n}$ とする。$R_{m,n}$ の定義より，$x < n$ のときは，$x = y$ であるから，$\langle x,\ y\rangle = \langle x,\ x\rangle$ である。Rは合同関係，よって同値関係だから，反射性より，$\langle x,\ x\rangle \in R$，ゆえに $\langle x,\ y\rangle \in R$。$x,\ y \geq n$ のとき，$R_{m,n}$ の定義により，この関係にあるxとyの組（$\langle x,\ y\rangle$ または $\langle y,\ x\rangle$）は，つぎの表で○印のついた組である：

	n	n+1	n+2	…	n+m	n+m+1	n+m+2	…	n+2m	n+2m+1	n+2m+2	…
n	○			…	○			…	○			…
n+1		○		…		○		…		○		…
n+2			○	…			○	…			○	…
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	
n+m	○			…	○			…	○			…
n+m+1		○		…		○		…		○		…
n+m+2			○	…			○	…			○	…
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	
n+2m	○			…	○			…	○			…
n+2m+1		○		…		○		…		○		…
n+2m+2			○	…			○	…			○	…
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	

この表で○がついている縦と横の組v，wから成る二つの順序対〈v，w〉〈w，v〉はすべてRを満たす。なぜなら，Rが同値関係でもあるから，〈v，v〉という形の順序対はすべてRを満たすし，nとmの定義により，〈n，n＋m〉∈Rから始めて，Rの合同性により，〈n+k,n+k+zm〉（$1\leqq k\leqq m-1$，$0\leqq z$）の形の順序対がすべてRを満たすからである(21)。よって，〈x，y〉∈Rである。こうして，$R_{m,n}\subseteq R$である。逆に，〈x，y〉∈Rとする。いま，Rにより，nとmが定められ，これにより，$R_{m,n}$が確定した。x＜nならば，（Rにより定まった）nの，上記の定義により，x＝y。このとき，$R_{m,n}$の定義により，〈x，y〉∈$R_{m,n}$。x，y≧n，y≧xのとき，x＝n＋w，y＝n＋w＋v（w≧0）とすると，∃z∈N（v＝m・z）が示せる(22)。ゆえに，〈x，y〉∈$R_{m,n}$である。よって，$R\subseteq R_{m,n}$。である。∴$R=R_{m,n}$。

［⇐：］RがN上の同一性関係ならば，トリヴィアルにRは合同関係でもある。そこで，もう一つのケースとして，$R=R_{m,n}$となるような自然数nとmが存在するとする。このとき，$R_{m,n}$が合同関係であることは，定義4.2.1の$R_{m,n}$の定義から示すことができる(23)。

Q．E．D．

さきに定義4.2.1として定義した合同関係（congruence relation）$R_{m,n}$は，n＝0のとき，よく知られた法合同（modular congruence），すなわち二つの自然数の差（の絶対値）がmの倍数であるという合同関係である。このとき，（この関係を〜で表現して）同値類［x]〜（すなわち〈x，y〉∈$R_{m,n}$である自然数xまたはyのクラス）は，以下のようにm個ある：

$[0]_\sim=\{0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ \cdots\}$

$[1]_\sim=\{1,\ m+1,\ 2m+1,\ 3m+1,\ \cdots\}$

⋮

$[m-1]_\sim=\{m-1,\ 2m-1,\ 3m-1,\ 4m-1,\ \cdots\}$

また，n≠0のときの関係$R_{m,n}$は，0からn－1までの自然数に関してのみ，同一性関係であり，n以上の自然数に関して，nを起点とする法合同となり，同値類はm＋n個ある：

n+1個

$[0]_\sim=\{0\}$

$[1]_\sim=\{1\}$

⋮

$[n]_\sim=\{n,\ n+m,\ n+2m,\ n+3m,\ \cdots\}$

m-1個

$[n+1]_\sim=\{n+1,\ n+m+1,\ n+2m+1,\ n+3m+1,\ \cdots\}$

⋮

$[n+m-1]_\sim=\{n+m-1,\ n+2m-1,\ n+3m-1,\ n+4m-1,\ \cdots\}$

4．3　ペアノ公理系の相対的相互依存

定理　4．3．1：（$\mathcal{N}$と同タイプの）すべての帰納法モデルは，公理1Pか公理2Pのモデルでもある。

【証明】

$\mathcal{A}$を帰納法モデルとする。さきの定理4.1.1を用いると，$\mathcal{N}$上のある合同関係（congruence relation）〜に対して，$\mathcal{A}$は$\mathcal{N}$〜と同型である：

$\mathcal{A}\cong\mathcal{N}_\sim$。　（ただし$\mathcal{N}_\sim=\langle N_\sim,\ 0^{\mathcal{N}_\sim},\ S^{\mathcal{N}_\sim}\rangle$で$N_\sim$は〜による同値類の集合）

ところが，定理4.2.2により，～は，N上の同一性関係であるか，または，ある自然数n，mに対して，$R_{m,n}$である，という二つの可能性しかない。これらの二つの可能性に対応して，つぎの（1）と（2）が成り立つが，いずれの場合も定理が主張できる。

（1）$\mathcal{A} \cong \mathcal{N}$の場合。なぜなら，～がN上の同一性関係ならば，$\mathcal{N} = \mathcal{N}\sim$であるからである。このとき，$\mathcal{A}$はペアノ・モデルでもあるから，公理1Pと公理2Pの両方のモデルでもある。

（2）$\mathcal{A} \cong \mathcal{N}\sim$の場合。これは，ある自然数m，nに対して，$\sim = R_{m,n}$のときである。このとき，（a）n＝0と，（b）n≠0，の二つの場合に分けることができる。

（a）n＝0の場合。一項関数S～（正式には$S^{\mathcal{N}}\sim$であるが以後S～と略記する）は順序組み換えとなる：

$$
\begin{aligned}
&S\sim : N\sim \to N\sim \\
&\quad [0]\sim \longmapsto [S0]\sim = [1]\sim \\
&\quad [1]\sim \longmapsto [S1]\sim = [2]\sim \\
&\quad \cdots \\
&\quad [m\text{-}1]\sim \longmapsto [S(m\text{-}1)]\sim = [m]\sim = [0]\sim
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\begin{tikzcd}
{[0]\sim} \arrow[r, "S\sim"] & {[1]\sim} \arrow[r, "S\sim"] & {[2]\sim} \arrow[r, "S\sim"] & \cdots\ \cdots \arrow[r, "S\sim"] & {[m\text{-}1]\sim} \arrow[llll, bend left, "S\sim"]
\end{tikzcd}
$$

明らかに，構造$\mathcal{N}\sim$は，mを法とする剰余類の（S～に基づく）循環型である。従って，公理2Pが満たされる。

（b）n≠0の場合。このとき，$[0]\sim = \{0\}$である。従って，$\forall x \in N\ (x \neq 0 \to x \notin [0]\sim)$，$\therefore \forall x \in N\ (S(x) \notin [0]\sim)$……①。（なぜなら，$\mathcal{N}$はペアノ・モデルだから公理1Pを満たすので，任意のx∈Nに対して，$S(x) \neq 0$，すなわち$S(x) \notin \{0\} = [0]\sim$だから。）ところで，$[S(x)]\sim = S\sim([x]\sim)$である……②。（なぜなら，$S(x) \in N$を代表元とする，$R_{m,n}$すなわち～に基づく同値類$[S(x)]\sim$は，xを代表元とする～に基づく同値類$[x]\sim$に，S～を適用して得られるからである。）それゆえ，①と②より，$\forall [y]\sim \in N\sim\ (S\sim([y]\sim) \neq [0]\sim)$である[24]。こうして，公理1Pが$\mathcal{N}\sim$で成り立つ。このとき，構造$\mathcal{N}\sim$はスプーン型である。

以上により，すべての帰納法モデルは公理1Pまたは公理2Pを満たす。　　　　Q．E．D．

5．帰納法モデルと原始回帰

われわれがよく知っている自然数の加法や乗法は，意図されたペアノ・モデル以外のモデル，例えば，循環型やスプーン型のような，ペアノ・モデルでない帰納法モデルでは，どのように導入できるのか？本節では，帰納法モデルでは，加法や乗法の演算が数学的帰納法によって導入され得るのに対して，巾法はそれができない，ということを示す。任意の帰納法モデル$\mathcal{A}$での加法と乗法は，自然数モデル$\mathcal{N}$での加法と乗法の準同型像となっている。これは，（回帰定理により）$\mathcal{A}$と$\mathcal{N}$の間に存在する，唯一の準同型hと結びついた，合同関係～を介した「商への移行」（passing to the quotient）から得られる。しかし，巾法に見られるように，自然数上の演算fとN上の合同関係～が与えられても，$\mathcal{N}\sim$上の演算gが「商への移行」から得られる，という保証は，一般には，無い。す

なわち，gが，合同関係～に対応した準同型hによる，自然数上の演算fの準同型像である，という保証はない。$\mathcal{N}$～上の演算gの存在は，$\mathcal{N}$上の演算fの，合同関係～との両立可能性に掛かっている。

以下でみるように，自然数上の加法と乗法はユニバーサル演算と名づけられる演算の一つであるのに対して，巾法はそうではない。ユニバーサル演算は自然数上の合同関係と（ある形で）両立可能である。自然数の構造から帰納法モデルに移行するとき，われわれは，ユニバーサル演算の準同型像が得られるような商構造へと，移行していることになる。

５．１　帰納法モデルでの加法と乗法

これから，任意の帰納法モデルで加法と乗法の（唯一の）演算が存在し，それらが，自然数の意図されたモデル$\mathcal{N}$上の加法と乗法の準同型像となっていることを確認する。

定理　５．１．１：すべての帰納法モデルには，唯一の**加法**の演算が存在する。

【証明】

この定理は，つぎの二つの補題によって，示される：

補題１．構造$\mathcal{A}$＝$\langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}}\rangle$が帰納法モデルであれば，すべての$x \in A$に対して，（この x をひとまず固定して）以下の（1），(2) を満たす，A上の唯一の一項演算 h x が存在する。

(1)　$hx(c^{\mathcal{A}}) = x$

(2)　$hx(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = \sigma^{\mathcal{A}}(hx(y))$　（ただし，すべての$y \in A$に対して）

補題２．構造$\mathcal{A}$＝$\langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}}\rangle$が帰納法モデルであれば，以下の方程式（1.1）と（1.2）を満たす，A上の唯一の二項演算 f が存在する。

(1.1)　$f(x, c^{\mathcal{A}}) = x$

(1.2)　$f(x, \sigma^{\mathcal{A}}(y)) = \sigma^{\mathcal{A}}(f(x, y))$

補題１の証明

まず，演算 h x が存在したとして，その**唯一性**（uniqueness）を証明する。h x と h x*を，上の（1），(2) を満たすような，A上で定義された二つの一項演算とする。そして，

$$G = \{y \in A \mid hx(y) = hx^*(y)\}$$

とおく。目指すのは G＝A である。もしこれが示されたならば，A の任意の要素に適用された h x と h x*の値が一致するから，h x＝h x*を導くことができる。$\mathcal{A}$は帰納法モデルであるから，数学的帰納法の公理（公理３Ｐ）を用いることができる。実際，

基底：$c^{\mathcal{A}} \in G$

帰納のステップ：$\forall y \in A\ (y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}}(y) \in G)$

の二つの主張が成り立つ(25)。よって，公理３Ｐにより，G＝A，∴ h x＝h x*。

つぎに，（1），(2) を満たすような一項関数 h x の**存在**を示す。このような関数は，A の要素 x を一つ固定して，一項関数として考えられている。そこで，このような関数を定義することに貢献する A の要素の集合を，H と定義する：

$$H = \{x \in A \mid \exists z\,(hz : A \to A \ \ \&\ z = x\ \&\ hz \text{は (1) と (2) を満たす})\}$$

$\mathcal{A}$は帰納法モデルであるから，A の部分集合 H に，公理３Ｐを適用することを試みる。実際，

基底：$c^{\mathcal{A}} \in H$

帰納のステップ：$\forall y \in A\ (y \in H \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}}(y) \in H)$

が成り立つ(26)。こうして，数学的帰納法（公理３Ｐ）により，H＝A が導ける。よって，任意の x

∈Aに対して，(1)，(2) を満たす $hx: A \to A$ である関数 hx が存在することが示された。

こうして，補題1は証明された。

補題2の証明

まず，二項演算fの**存在**を証明する。fを，すべてのx，y∈Aに対して，その関数値が

$f(x, y) = hx(y)$　　(ただし，hxは，xを固定したとき，補題1でその存在が示された関数とする)

で定義される，A上の二項関数とする。このfが条件 (1.1)，(1.2) を満たすことは容易に示すことができる[27]。

つぎに，fの**唯一性**を示す。f*を，条件 (1.1)，(1.2) を満たす他の関数とせよ。このとき，f = f*を示さねばならない。いま，すべてのx∈Aに対して，(xを固定して一項関数として見た) f*xを

$f^*x(y) = f^*(x, y)$　　(ただし，すべてのy∈Aに対して)

となる一項関数とせよ。すると，f*xは補題1でのべられた条件 (1) と (2) を満たす[28]から，補題1によって，

$f^*x = hx$

が導かれる。よって，fとf*の定義 (すなわち，$f(x, y) = hx(y)$，$f^*(x, y) = f^*x(y)$) によって，f = f*である。こうして，fの唯一性が示された。

ところで，補題2の条件 (1.1)，(1.2) は加法を定義する原始回帰であった。従って，唯一の加法の存在が示されたことになる。

Q. E. D.

つぎの定理は，帰納法モデルで唯一つ存在する加法が，自然数の意図されたモデル$\mathcal{N}$の準同型像となっていること，すなわち，(ペアノ・モデルとはかぎらない) 任意の帰納法モデルにも唯一つ存在する加法が，われわれがよく知っている加法の大まかな対応物になっていること，を保証する。

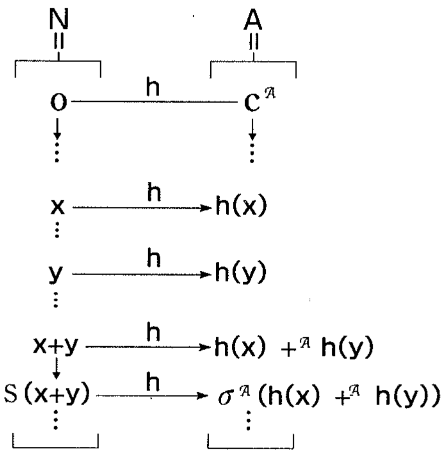
定理　5．1．2

自然数の構造：$\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$ と帰納法モデル：$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ が与えられたとする。このとき，$\mathcal{A}$の加法　$+^{\mathcal{A}}$　は，$\mathcal{N}$の加法　＋　の準同型像 (homomorphic image) である。

【証明】

回帰定理 (定理2．2．1) により，$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$への唯一の準同型写像が存在するが，定理2．3．1 (すなわち，$\mathcal{A}$が帰納法モデル⇔$\mathcal{A}$が$\mathcal{N}$の準同型像) により，$\mathcal{A}$は$\mathcal{N}$の唯一の準同型像である。そこで，hを，$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$の上への唯一の準同型 (写像) とする。われわれは，帰納法モデルである構造$\mathcal{A}$の加法　$+^{\mathcal{A}}$　が，$\mathcal{N}$の加法＋の準同型像であることを示さねばならない。そのためには，Nで定義された加法の結果x＋yをhでAに写したときの像：$h(x+y)$ が，xとyのそれぞれのhによる像 $h(x)$，$h(y)$ のAにおける加法の結果：$h(x) +^{\mathcal{A}} h(y)$ と一致することを示せばよい。すなわち，すべてのx，y∈Nに対して，

$$h(x+y) = h(x) +^{\mathcal{A}} h(y) \cdots\cdots (\bigstar)$$



となることを示せばよい。そこで，

$$G = \{ y \in N \mid h(x) +^{\mathcal{A}} h(y) = h(x+y) \}$$

とおく。すなわち，Aの任意の要素 x を固定して，この x にNのどんな要素 y を加えても上の（★）が成り立つことを示すために，このような要素 y の集合GがAそのものと一致することを示したい。$\mathcal{N}$はペアノ・モデルであるから，Gに公理３Ｐを適用できる。

1．基底： $0 \in G$

なぜなら，

$$\begin{aligned}
&h(x) +^{\mathcal{A}} h(0) \\
&= h(x) +^{\mathcal{A}} c^{\mathcal{A}} && [h(0) = c^{\mathcal{A}} による] \\
&= h(x) && [c^{\mathcal{A}} は \mathcal{A} での 0 に相当し，+^{\mathcal{A}} は加法であるから] \\
&= h(x+0) && [x+0=x による]
\end{aligned}$$

2．帰納のステップ： $\forall y \in N\ (y \in G \Rightarrow Sy \in G)$

Aの任意の要素 y をとり，$y \in G$ と仮定する。Gの定義より，$h(x) +^{\mathcal{A}} h(y) = h(x+y)$ ……①

このとき，

$$\begin{aligned}
h(x) +^{\mathcal{A}} h(Sy) &= h(x) +^{\mathcal{A}} \sigma^{\mathcal{A}}(h(y)) && [h は準同型だから] \\
&= \sigma^{\mathcal{A}}(h(x) +^{\mathcal{A}} h(y)) && [+^{\mathcal{A}} は \mathcal{A} での加法だから] \\
&= \sigma^{\mathcal{A}}(h(x+y)) && [上の①より] \\
&= h(S(x+y)) && [h は準同型だから] \\
&= h(x+Sy) && [+ は \mathcal{N} での加法だから]
\end{aligned}$$

こうして，基底と帰納のステップが成り立つことが示されたから，公理３Ｐにより，$G=N$。Gの定義により，任意のGの要素 y に対して（★）が成り立つ、よって，任意の $x \in N$，$y \in N$ に対して，（★）が成り立つ。　**Q．E．D．**

ここで，これまでの二つの定理の意味を振り返って見よう。帰納法モデル $\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ が与えられたとする。すると，回帰定理（定理2.2.1）によってその唯一存在が保証されている，$\mathcal{N}$と$\mathcal{A}$の間の準同型写像 h から，合同関係～が得られるが，これによって$\mathcal{N}$を整序した$\mathcal{N}\sim$と$\mathcal{A}$は，定理4.1.1により，同型である：

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{N}\sim。$$

そうすると，$\mathcal{A}$での加法　$+^{\mathcal{A}}$　は，$\mathcal{N}$での加法　$+$　の**商への移行**（passing to the quotient）である。すなわち，f を$\mathcal{N}\sim$から$\mathcal{A}$への（上で述べられた）同型写像とすれば，$+^{\mathcal{A}}$は

$$f[x]_\sim \ +^{\mathcal{A}}\ f[y]_\sim = f\ [x+y]_\sim$$

によって，得られる。言い換えると，$\mathcal{N}$での加法の準同型像として帰納法モデル$\mathcal{A}$ではたらく加法$+^{\mathcal{A}}$は，代表元間での（元の$\mathcal{N}$における）加法の結果 $x+y$ を代表元とする，～による剰余類 $[x+y]_\sim$ の f による像に一致する。

定理　５．１．３：すべての帰納法モデルには，唯一の**乗法**演算が存在する。

【証明】

加法の場合と同様に，つぎの二つの補題を示すことにより，定理は証明しうる。

補題１． 構造：$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle$ を帰納法モデルとする。そのとき，$x \in A$ であるすべての x に対して，以下の（1），(2）を満たす，A上の唯一の一項演算 k x が存在する：

(1)　$kx(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}$

(2)　$kx(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = kx(y) +^{\mathcal{A}} x$　　（$\forall y \in A$，また$+^{\mathcal{A}}$はA上の加法）

補題２． 構造：$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ を帰納法モデルとする。そのとき，A上の二項演算 h で，以

下の (2.1) と (2.2) を満たすものが唯一存在する：

(2.1)　$h(x, c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}$

(2.2)　$h(x, \sigma^{\mathcal{A}}(y)) = h(x, y) +^{\mathcal{A}} x$。

補題1は唯一性と存在性に分けて証明できる[29]。補題2は補題1を用いて証明できる[30]。補題2は (2.1), (2.2) を満たす演算，つまり乗法が唯一存在することを主張している。

Q. E. D.

定理　5. 1. 4

自然数の構造：$\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$ と，帰納法モデル：$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ とが与えられたとき，構造$\mathcal{A}$の乗法「$\cdot^{\mathcal{A}}$」は，$\mathcal{N}$での乗法「・」の準同型像 (homomorphic image) である。

【証明】

さきの定理5.1.2の場合と同様に，定理2.2.1（回帰定理）により，$\mathcal{N}$から$\mathcal{A}$への唯一の準同型写像hが存在するが，仮定より，$\mathcal{A}$が帰納法モデルであるから，定理2.3.1により，$\mathcal{A}$は$\mathcal{N}$の（hによる）準同型像となっている，すなわち，$\mathcal{A} = h[\mathcal{N}]$。この（上への）準同型h：$N \to A$を用いて，$\mathcal{A}$の乗法$\cdot^{\mathcal{A}}$が$\mathcal{N}$の乗法・の準同型像となっていることを示す。そのためには，x，y∈Nであるすべてのx，yに対して，

$$h(x) \cdot^{\mathcal{A}} h(y) = h(x \cdot y) \quad \cdots\cdots (\bigstar)$$

を示せば十分である。そこで，任意のx∈Nを固定する。そして，このxについて，

$$G = \{y \in N \mid h(x) \cdot^{\mathcal{A}} h(y) = h(x+y)\}$$

とおき，G＝Aを示せばよい。実際，1．**基底**：$0 \in G$，2．**帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in G \Rightarrow Sy \in G)$ が成り立つ[31]。よって，$\mathcal{N}$がペアノ・モデルだから，Gに公理3Pを適用して，G＝Aを得る。こうして，すべてのx，y∈Nに対して，(★) が成り立つ。

Q. E. D.

5．2　帰納法モデル上の巾法演算

定理　5．2．1：すべての帰納法モデルが巾法演算を持つとはかぎらない。

【証明】

帰納法モデル：$\mathcal{A} = \langle A, c^{\mathcal{A}}, \sigma^{\mathcal{A}} \rangle$ に対する巾法演算は，以下の (3.1), (3.2) を満たすようなA上の二項関数hとなろう：

(3.1)　$h(x, c^{\mathcal{A}}) = \sigma^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}})$

(3.2)　$h(x, \sigma^{\mathcal{A}}(y)) = h(x, y) \cdot^{\mathcal{A}} x$　（$\forall x, y \in A$で，$\cdot^{\mathcal{A}}$はA上の乗法）

さて，われわれは，これらの条件 (3.1), (3.2) によって定義されるいかなる関数も存在しないような帰納法モデルを作ることができる。構造：

$$\mathcal{B} = \langle B, c^{\mathcal{B}}, \sigma^{\mathcal{B}} \rangle$$

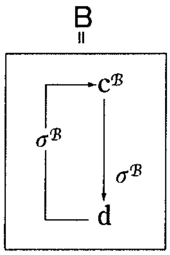
において，$B = \{c^{\mathcal{B}}, d\}$ とし，$c^{\mathcal{B}} \neq d$，$\sigma^{\mathcal{B}}(c^{\mathcal{B}}) = d \cdots\cdots$①，$\sigma^{\mathcal{B}}(d) = c^{\mathcal{B}} \cdots\cdots$②

とする。このとき，$\mathcal{B}$は循環型の帰納法モデルである。それにも関わらず，さきの方程式 (3.1), (3.2) は目的の関数を定義できない。なぜなら，一方で，

$$h(c^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}}) = \sigma^{\mathcal{B}}(c^{\mathcal{B}}) = d \qquad [(3.1) と①]$$

しかし，他方で，

$$h(c^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}}) = h(c^{\mathcal{B}}, \sigma^{\mathcal{B}}(d)) \qquad [②より]$$



$= \mathrm{h}(c^{\mathcal{B}},\ d) \cdot^{\mathcal{B}} c^{\mathcal{B}}$　　［(3.2) より］

$= c^{\mathcal{B}} \neq d$　　［$\cdot^{\mathcal{B}}$ は B 上の乗法で，$c^{\mathcal{B}}$ は B でゼロに相当］

$\therefore \mathrm{h}(c^{\mathcal{B}},c^{\mathcal{B}}) \neq \mathrm{h}(c^{\mathcal{B}},c^{\mathcal{B}})$，つまり矛盾となる。よって，この帰納法モデル$\mathcal{B}$では巾法を定義できない。従って，すべての帰納法モデルが巾法演算を持つとはかぎらない。

Q. E. D.

5．3　ユニバーサル演算

これまでの諸定理において，加法や乗法のような演算は**数学的帰納法**によって定義できる（言い換えると，任意の**帰納法モデル**にそのような演算が存在する）のに対して，巾法のような他の演算はそうではない（巾法が存在しない帰納法モデルがある），ということを見た。なぜ，そのような違いが生じるのか？加法・乗法と，巾法との間には，どのような差異があるのか？数学的帰納法によって演算を定義するとき，公理３Ｐ以外の原理が関係して来るのか？これらに関しての試金石は，元の構造の準同型像である商代数にある。つまり，商演算の存在条件が，商の基礎にある合同関係と演算との両立可能性に関わっている，ということの中にある。

そこで，自然数の演算がどれほど自然数の合同関係を柔軟に反映できるか，ということの指標となる概念から定義する。

定義　５．３．１：ユニバーサル演算の定義

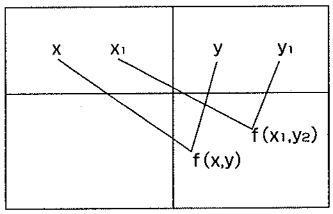
$\mathcal{N}$の二項演算 f が**ユニバーサル演算**である

⇔ $\mathcal{N}$上のすべての合同関係～に対して，f が以下の（※）を満たす：

（※）$\forall x,\ y,\ x_1,\ y_1$：

$\langle x, x_1\rangle \in \sim$ & $\langle y, y_1\rangle \in \sim$

$\Rightarrow \langle f\ (x,y),\ f\ (x_1,y_1)\rangle \in \sim$。

N=


要するに，自然数上の二項演算がユニバーサルであるということは，任意の合同関係によって自然数が分類されても，類の代表元に無関係に，演算（の結果）が類に関して保存される，ということである。

定理　５．３．２

f，～，h を以下のものとする。

f：$\mathcal{N}$＝〈N，０，S〉上の二項演算，

～：N 上の合同関係（congruence relation）

h：～に対応する，$\mathcal{N}$から$\mathcal{N}$～への準同型（ただし，$\mathcal{N}$～＝〈N～，$0^{\mathcal{N}\sim}$，$S^{\mathcal{N}\sim}$〉）

とする。このとき，

∃g（g は$\mathcal{N}$～上の二項演算である＆g は f の$\mathcal{N}$～における準同型像である）

⇔ f はユニバーサル演算である。

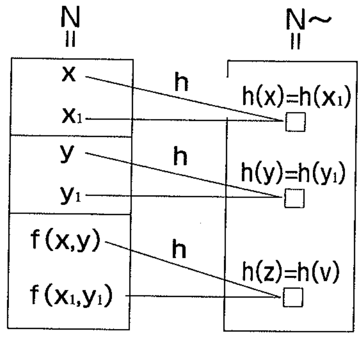
【証明】

いま，N の二つの要素 x，y に対する f の値が z となるような，すなわち，f（x，y）＝z　となるような，N 内の三つの要素：x，y，z を h で$\mathcal{N}$～に写して，h (x)，h (y)，h (z) を得て，それらの順序三組〈h (x), h (y), h (z)〉から成るような集合 g を作る。言い換えると，

$$g = \{\langle h(x), h(y), h(z)\rangle \mid f(x, y) = z\}$$

とする。もしgを$\mathcal{N}\sim$上の演算と見ると，gは$\mathcal{N}$上の演算fの**準同型像**になっている[32]。

[⇒：]



gを実際に$\mathcal{N}\sim$上の関数と仮定する。(gの定義の仕方から，gは$\mathcal{N}\sim$におけるfの準同型像になっている。) さて，fがユニバーサル演算であることを示すために，任意のx, y, x_1, y_1 ($\in N$) をとり，$\langle x, x_1\rangle \in \sim$，$\langle y, y_1\rangle \in \sim$ と仮定する。$\sim = \{\langle x, y\rangle \in N\times N \mid h(x) = h(y)\}$ であるから，$h(x) = h(x_1)$，$h(y) = h(y_1)$ ……①である。示すべきことは，$\langle f(x,y), f(x_1,y_1)\rangle \in \sim$ である。いま，$f(x,y) = z$，$f(x_1,y_1) = v$とすると，gの定義から，$\langle h(x), h(y), h(z)\rangle \in g$，かつ$\langle h(x_1), h(y_1), h(v)\rangle \in g$であり，gが関数であること：

$$\langle u, w, t\rangle \in g \text{ かつ } \langle u, w, s\rangle \in g \Rightarrow t = s$$

と，①より，$h(z) = h(v)$，すなわち，$h(f(x,y)) = h(f(x_1,y_1))$ である。よって，～の定義より，$\langle f(x,y), f(x_1,y_1)\rangle \in \sim$ である。

[⇐：]

fについて，定義5.3.1での条件(※)が満たされているとする。gが関数であることを示すには，$\langle x, y, z\rangle \in g$ & $\langle x, y, v\rangle \in g \Rightarrow z = v$を示せば十分である。いま，$\langle x, y, z\rangle \in g$，$\langle x, y, v\rangle \in g$とする。すると，gの定義より，(hは準同型であるが必ずしも一対一とはかぎらないから) ある$x_0, x_1, y_0, y_1 \in N$が存在して，$h(x_0) = x = h(x_1)$，$h(y_0) = y = h(y_1)$，である。ところで，(※) より，

$$\langle x_0, x_1\rangle \in \sim \ \& \ \langle y_0, y_1\rangle \in \sim \ \Rightarrow \langle f(x_0, y_0), f(x_1, y_1)\rangle \in \sim \cdots\cdots ②$$

であるが，$h(x_0) = h(x_1)$ より$\langle x_0, x_1\rangle \in \sim$が成り立ち，$h(y_0) = h(y_1)$ より$\langle y_0, y_1\rangle \in \sim$が成り立つことによって，②の前件が成り立つから，後件：$\langle f(x_0, y_0), f(x_1, y_1)\rangle \in \sim$ が導かれる。ゆえに，～の定義により，

$$h(f(x_0, y_0)) = h(f(x_1, y_1))。\cdots\cdots ③$$

ところが，$\langle x, y, z\rangle \in g$だったから，$\langle h(x_0), h(y_0), z\rangle \in g$，ゆえにgの定義により，$x_0$，$y_0$に対するfの値の，hによる像がzに外ならないから，

$$z = h(f(x_0, y_0)) \cdots\cdots ④$$

である。また，$\langle x, y, v\rangle \in g$だったから，$\langle h(x_1), h(y_1), v\rangle \in g$，ゆえに，再びgの定義により，

$$v = h(f(x_1, y_1)) \cdots\cdots ⑤。$$

③，④，⑤により，

$$z = v$$

が導ける。

gが$\mathcal{N}\sim$上の演算(関数)であることが示されたから，(さきに述べたように) gの定義により，gはfの準同型像となる。

Q．E．D．

定理　5．3．3：巾法はユニバーサル演算ではない。

【証明】

定義4.2.1での関係$R_{m,n}$で$n=0$，$m=3$とすると，$R_{3,0}$は３を法とする（剰余に関する）合同関係となる。そのとき，$\langle 2, 2 \rangle \in R_{3,0}$かつ　$\langle 0, 3 \rangle \in R_{3,0}$である。しかし，$2^0$と$2^3$とは，３を法として合同ではない。実際，

$$2^0 = 1 \in [1]^{\sim} = \{1, 4, 7, 10, \cdots\},$$
$$2^3 = 8 \in [2]^{\sim} = \{2, 5, 8, 11, \cdots\}。$$

$\therefore \langle 2^0, 2^3 \rangle \notin R_{3,0}$である。

Q.E.D.

さて，自然数上の演算 j が，ユニバーサル演算である（自然数上の）演算 f と g から，原始帰納（primitive recursion）の図式によって得られた，とする。このとき，j もユニバーサル演算だと言えるか？必ずしもそうは言えない。巾法がそうはならない例となっているからである。しかし，もし j が可換的である（commutative）ならば，すなわち，交換律がなりたつならば，j はユニバーサルでもある。つぎの定理がこのことを主張する。

定理　5．3．4

j が，ユニバーサル演算 f，g から原始回帰によって得られる，$\mathcal{N} = \langle N, 0, S \rangle$上の二項演算であるとする。このとき，もし j が可換的である（commutative）ならば，j はユニバーサルである。

【証明】

j が f と g から原始回帰によって得られるとすると，すべての x，$y \in N$に対して，

（イ）$j(x, 0) = f(x)$

（ロ）$j(x, Sy) = g(x, y, j(x, y))$

とおくことができる。さらに，j が可換的であり，f と g はユニバーサル演算である，とする。いま，～を$\mathcal{N}$上の合同関係（congruence relation）である，とする。示すべきことは，j がユニバーサルである，ということである。このためには，さきの定理5.3.2によって，$\mathcal{N}\sim = \langle N\sim, [0]^{\sim}, S^{\sim} \rangle$の中に j の準同型像 $j^{\sim}$ が存在すること，を示せば，必要にして十分である。すなわち，

$$j^{\sim}([x]^{\sim}, [y]^{\sim}) = [j(x, y)]^{\sim}$$

であるような，**唯一の $j^{\sim}$ が存在する**こと，を示せばよい。これを証明するために，まず，次の命題を証明する。

<u>**命題**</u>：すべての$x \in N$に対して，構造$\mathcal{N}\sim = \langle N\sim, [0]^{\sim}, S^{\sim} \rangle$において，以下の条件(1)，(2)を満たす，唯一の演算 $j^{\sim}[x]^{\sim}$ が存在する。

(1) $j^{\sim}[x]^{\sim}\ [0]^{\sim} = f^{\sim}[x]^{\sim}$

(2) $j^{\sim}[x]^{\sim}\ S^{\sim}[y]^{\sim} = g^{\sim}[x]^{\sim}[y]^{\sim}(j^{\sim}[x]^{\sim}\ [y]^{\sim})$

（ここで，f～とg～は，ユニバーサルである f とgの準同型像であり，これらは，定理5.3.2によって，その存在が保証されている。）

最初に，命題が主張する，$j^{\sim}[x]^{\sim}$の<u>**唯一性**</u>を示す。そこで，$j^{\sim}[x]^{\sim}$と$j^{\sim *}[x]^{\sim}$を，条件（1），(2)を満たす二つの演算とする。いま，

$$G = \{[y]^{\sim} \in N\sim \mid j^{\sim}[x]^{\sim}\ [y]^{\sim} = j^{\sim *}[x]^{\sim}[y]^{\sim}\}$$

とおく。目標は，$G = N\sim$である。$\mathcal{N}\sim$は帰納法モデルであるから，N～の部分集合である G に対して，公理３Ｐが適用できる。実際，

１．**基底**：$[0]^{\sim} \in G$，

および　２．**帰納のステップ**：$\forall [y]^{\sim} \in N\sim\ ([y]^{\sim} \in G \Rightarrow S^{\sim}[y]^{\sim} \in G)$

が成り立つ[33]。よって，公理３Ｐにより，$G = N^{\sim}$。これと，Ｇの定義により，

$$\forall [y]^{\sim} \in N^{\sim}\ (\ j^{\sim}[x]^{\sim}[y]^{\sim} = j^{\sim *}[x]^{\sim}[y]^{\sim})$$

が成り立つ。従って，$j^{\sim}[x]^{\sim} = j^{\sim *}[x]^{\sim}$である。

つぎに，$j^{\sim}[x]^{\sim}$の<u>存在性</u>を示す。Ｈを，（対応する）関数 $j^{\sim}[x]^{\sim}$ が存在するような，$N^{\sim}$のすべての要素 $[x]^{\sim}$の集合，すなわち，

$H = \{[x]^{\sim} \in N^{\sim} \mid \exists [z]^{\sim}\ (\ j^{\sim}[z]^{\sim}: N^{\sim} \to N^{\sim}$ ＆ $j^{\sim}[z]^{\sim}$は(1),(2)を満たす ＆ $[x]^{\sim} = [z]^{\sim})\}$ とせよ。目標は$H = N^{\sim}$である。事実，

１．**基底**：$[0]^{\sim} \in H$

および　２．**帰納のステップ**：$\forall [y]^{\sim} \in N^{\sim}\ ([y]^{\sim} \in H \to S^{\sim}[y]^{\sim} \in H)$

が成り立つ[34]。$\mathcal{N}^{\sim}$が帰納法モデルであることにより，$N^{\sim}$の部分集合であるＨに公理３Ｐを適応して，$H = N^{\sim}$。こうして，すべての$[x]^{\sim} \in N^{\sim}$に対して，(1)，(2) をみたす，$N^{\sim}$上の<u>一項関数</u> $j^{\sim}[x]^{\sim}$ が唯一存在する。従って，$j^{\sim}\ ([x]^{\sim},\ [y]^{\sim}) = j^{\sim}[x]^{\sim}[y]^{\sim}$と定義すれば，このような<u>二項関数</u> $j^{\sim}$ が唯一つ存在することが示された。つまり，ｊの準同型像となる，$\mathcal{N}^{\sim}$上の関数 $j^{\sim}$ が存在する。よって，定理5.3.2 により，ｊはユニバーサルである。

Ｑ．Ｅ．Ｄ．

定理5.3.4 によれば，すべての可換的演算はユニバーサルであるが，このことの逆は成り立たない。すなわち，ユニバーサルな演算であっても可換的であるとはかぎらない。このことを主張するのがつぎの定理である。

定理　５．３．５：すべてのユニバーサル演算が可換的である，とはかぎらない。

【証明】

例として，すべての$x,\ y \in N$に対して，

$$j\,x\,y = x^2 \cdot y$$

である二項演算ｊを考えると，このｊはユニバーサルである[35]。しかも，ｊは，

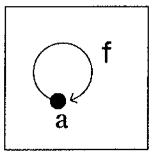
$$\begin{cases} f\,x = 0 \\ g\,x\,y\,z = z + x^2 \end{cases}$$

として，ユニバーサル演算ｆ，ｇにより，原始回帰により得られる。しかし，$j(2,1) = 4$，$j(1,2) = 2$だから，ｊは可換ではない。　**Ｑ．Ｅ．Ｄ．**

註

(1)　われわれは，田畑［2001］で用いた用語（これはManzano［1996］に基づく）を踏襲して用いる。今回もManzano［1996］（特に第３章）に多くを負っている。また，第一階論理上で展開される（古典的）モデル理論についても，懇切丁寧なManzano［1999］を参照した。

(2)　ｆは$\{a\}$上の関数だから$f\,a = a$となるが，公理１Ｐ：$\forall x \neg (a = f\,x)$から全称例化により，$\neg (f\,a = a)$が導けるから，矛盾となる。よって，この構造は公理１Ｐを満たさない。ところが，公理２Ｐは満たす。実際，任意のｘ，ｙとして，ａ以外にないから，$f\,x = f\,y \to x = y$は，$f\,a = f\,a \to a = a$に外ならないが，これはトリヴィアルに成り立つからである。また，公理３Ｐが成り立つことは以下のようにして分かる。領域$\{a\}$の部分集合Ｘとしては∅（空集合）か$\{a\}$そのものしかない。$X = \emptyset$のとき，$a \notin \emptyset$だから，$\neg X\,a$，ゆえに，ト



リヴィアルに，$Xa \wedge \forall z\,(Xz \to Xfz) \to \forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$……（※）が成り立つ。また，X＝{a}のとき，領域の要素はaのみだから，$\forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$が成り立つから，トリヴィアルに（※）が成り立つ。よって，Xの全称化により，公理3Pが成り立つ。

(3)　まず，公理3Pが満たされることは，つぎのようにして分かる。X＝∅，X＝{b}のとき，$\neg Xa$であるから，$Xa \wedge \forall z\,(Xz \to Xgz) \to \forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$……（※）　はトリヴィアルに成り立つ。X＝{a}のとき，Xaは成り立つが，$a \neq b \notin \{a\}$ $\therefore \neg Xb$。ところが，$b = ga$　$\therefore \neg Xga$，$\therefore Xa \wedge \neg Xga$，$\therefore \neg \forall z\,(Xz \to Xgz)$。よって，トリヴィアルに（※）が成り立つ。X＝{a，b}のとき，Xa，Xbが共に成り立つから，$\forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$が成り立つ。よって，トリヴィアルに（※）が成り立つ。こうして，与えられた構造は公理3Pを満たす。しかし，公理2Pは満たされない。なぜなら，$g(a) = g(b) = b$，しかし$a \neq b$だから，$\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y}(g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$であるからである。

(4)　公理2P，すなわち　$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}\,(\sigma^{\mathfrak{A}}\mathbf{x} = \sigma^{\mathfrak{A}}\mathbf{y} \to \mathbf{x} = \mathbf{y})$が成り立つことは，関数$\sigma^{\mathfrak{A}}$の値の配分の仕方を

$$\begin{array}{c} \sigma^{\mathfrak{A}}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A} \\ \| \qquad \| \\ 0 \to 1 \\ 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 4 \\ 4 \to 5 \\ 5 \to 0 \end{array}$$

と図示することによって，わかる。同一の数が，異なる二つの数の，関数$\sigma^{\mathfrak{A}}$による関数値になっていないこと，つまり

$$\begin{array}{l} \mathbf{x} \searrow \\ \mathbf{y} \longrightarrow \sigma^{\mathfrak{A}}(\mathrm{x}) = \sigma^{\mathfrak{A}}(\mathrm{y}) \end{array}$$

という図が含まれないことは，一目瞭然であるからである。また，公理3Pが成り立つことは次のようにして分かる。XがAの非空真部分集合合のとき，例えばX＝{0，1，2，3，4}のとき，z＝4とすると，Xz，しかし$\neg X5$，$\therefore \neg X\sigma^{\mathfrak{A}}4$となるように，Xから排除されたAの要素の前者をzとすると，$Xz \wedge \neg X\sigma^{\mathfrak{A}}z$であるから，必ず$\forall z\,(Xz \to X\sigma^{\mathfrak{A}}z)$は不成立である。よって，トリヴィアルに，$Xc^{\mathfrak{A}} \wedge \forall z\,(Xz \to X\sigma^{\mathfrak{A}}z) \to \forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$……（※）が成り立つ。また，X＝Aのとき，当然$\forall \mathbf{x}\,\mathbf{A}\mathbf{x}$だから，$\forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$は成り立つ。よって（※）が成り立つ。X＝∅のとき，$\neg Xc^{\mathfrak{A}}$。よって，トリヴィアルに（※）が成り立つ。こうして，公理3Pが成り立つ。しかし，この構造は公理1Pのモデルではない。実際，$0 = c^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{A}}5$，$\therefore \exists \mathbf{x}\,(c^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{A}}\mathbf{x})$，$\therefore \neg \forall \mathbf{x} \neg\,(c^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{A}}\mathbf{x})$だからである。

(5)　公理3Pのモデルであることは，つぎのようにして示しうる。Xが，B－{0}以外の，Bの真部分集合のとき，排除された，0以外のBの要素の，前者をzとすれば，$Xz \wedge \neg X\sigma^{\mathfrak{B}}z$であるから，これが反例となって，$\forall z\,(Xz \to X\sigma^{\mathfrak{B}}z)$は不成立である。よって，トリヴィアルに，$Xc^{\mathfrak{B}} \wedge \forall z\,(Xz \to X\sigma^{\mathfrak{B}}z) \to \forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$……（※）が成り立つ。X＝B－{0}のとき，$0 \notin \mathbf{B} - \{0\} = X$，$\therefore \neg Xc^{\mathfrak{B}}$，よって，トリヴィアルに，（※）が成り立つ。B＝Xのとき，$\forall \mathbf{x}\,\mathbf{B}\mathbf{x}$，$\therefore \forall \mathbf{x}\,X\mathbf{x}$，よって，トリヴィアルに，（※）が成り立つ。こうして，この構造は公理3Pのモデル

となっている。公理１Ｐのモデルであることは，０すなわち$c^{\mathcal{B}}$に前者が存在しないことが図からすぐ読み取れることにより，明らかである。また，公理２Ｐのモデルでないことは，つぎのようにして示し得る。$x=6$とすると，$\sigma^{\mathcal{B}}x=\sigma^{\mathcal{B}}6=7$。$y=12$とすると，$\sigma^{\mathcal{B}}y=\sigma^{\mathcal{B}}12=7$。∴ $\sigma^{\mathcal{B}}x=\sigma^{\mathcal{B}}y=7$。しかし，$6=x\neq y=7$。∴$\exists x\exists y\ (\sigma^{\mathcal{B}}x=\sigma^{\mathcal{B}}y\wedge x\neq y)$，すなわち$\neg\forall x\forall y\ (\sigma^{\mathcal{B}}x=\sigma^{\mathcal{B}}\rightarrow x=y)$だから，公理２Ｐは成り立たない。

(6) コンパクト性定理によれば，文の任意の集合Φと任意の式ψに対して，

$$\Phi\models\psi \quad \Rightarrow (\exists\Delta)\,[\Delta\subseteq\Phi\wedge\Delta\text{は有限である}\wedge\Delta\models\psi]$$

である（田畑[2001] 151頁）。ψとして，式$x\neq x$を取ると，任意のモデルMで，$M\not\models x\neq x$が真となるから，

$$\Delta\not\models x\neq x\Leftrightarrow\neg\forall M\ (M\models\Delta\Rightarrow M\models x\neq x)\Leftrightarrow\exists M\ (M\models\Delta)\Leftrightarrow\Delta\text{はモデルを持つ}$$

$$\Phi\not\models x\neq x\Leftrightarrow\neg\forall M\ (M\models\Phi\Rightarrow M\models x\neq x)\Leftrightarrow\exists M\ (M\models\Phi)\Leftrightarrow\Phi\text{はモデルを持つ}$$

となる。よって，コンパクト性定理（の代入例）の対偶：

$$\forall\Delta\ [\Delta\subseteq\Phi\wedge\Delta\text{は有限である}\Rightarrow\Delta\not\models x\neq x]\Rightarrow\Phi\not\models x\neq x$$

は，

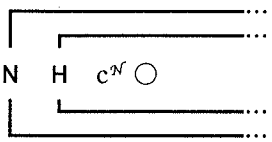
「Φの任意の有限部分集合がモデルを持てば，Φもモデルを持つ」

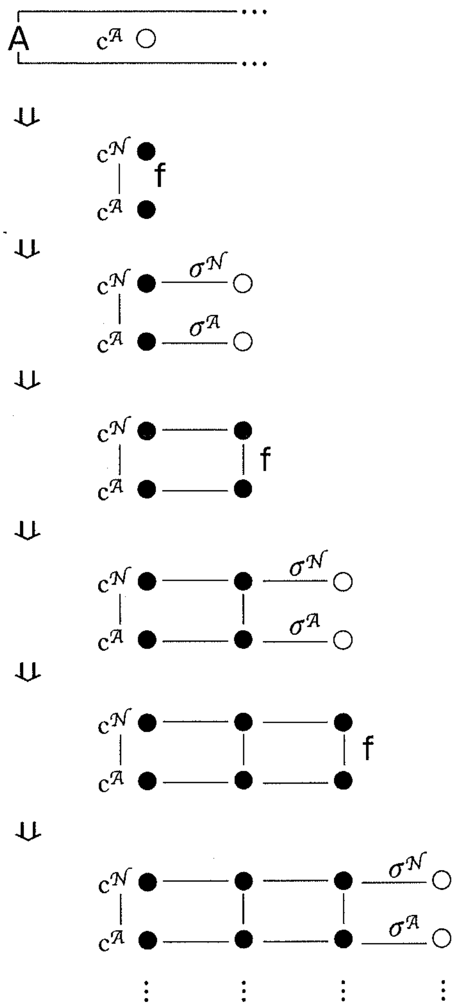
を意味するから，「Π^{1*}の任意の有限部分集合がモデルを持てば，Π^{1*}そのものもモデルを持つ」が導かれる。

(7) Manzano [1996]（121頁）によれば，すでに１９２９年頃，スコーレムはそれを指摘している。

(8) $\mathcal{N}$はペアノ・モデルであるから，その個体宇宙Nには$c^{\mathcal{N}}$が含まれている：$c^{\mathcal{N}}\in N$。また，$\sigma^{\mathcal{N}}$はNからN－$\{c^{\mathcal{N}}\}$の上への（onto）の写像だから，もし$\sigma^{\mathcal{N}}x\in N$ならば，$\sigma^{\mathcal{N}}x\neq c^{\mathcal{N}}$かつ$x\in N$であり，ともかく$x\in N$である。∴$\sigma^{\mathcal{N}}x\in N\Rightarrow x\in N$が成り立つ。よって，Nは切片である。また，$x\in N$なる任意のxをとり，$\sigma^{\mathcal{N}}x\in\{c^{\mathcal{N}}\}$とすると，$\sigma^{\mathcal{N}}x=c^{\mathcal{N}}$である。しかし，$\mathcal{N}$はペアノ・モデルであるから，公理１Ｐが成り立つので，$c^{\mathcal{N}}\neq\sigma^{\mathcal{N}}x$である。よって，矛盾となる。よって，トリヴィアルに，$\forall x\in N\ (\sigma^{\mathcal{N}}x\in\{c^{\mathcal{N}}\}\Rightarrow x\in\{c^{\mathcal{N}}\})$が成り立つ。無論，$c^{\mathcal{N}}\in\{c^{\mathcal{N}}\}$である。よって，$\{c^{\mathcal{N}}\}$は切片である。

(9) 部分関数が，すなわち，H（$\subseteq$N）の要素からAの要素への写像が，いかに生成されるかを，（実際は時間とは無関係であるが）時間上で，模式的に描写すると，以下のようになろう。





両構造の特異要素を見つける

それらを対応させる

対応させられた要素をインプットとしたときの，
$\sigma^{\mathcal{N}}$と$\sigma^{\mathfrak{A}}$によるアウトプットを探す

それらを対応させる

対応させられた要素をインプットとしたときの，
$\sigma^{\mathcal{N}}$と$\sigma^{\mathfrak{A}}$によるアウトプットを探す

それらを対応させる

…探す

(10)　定理２．２．１により保証された$\mathcal{N}$から$\mathcal{N}^*$への準同型に関して，定理２．３．１により，

　　$\mathcal{N}^*$ が$\mathcal{N}$の準同型像である⇔$\mathcal{N}^*$ は帰納法モデルである

である。ところで，仮定により，$\mathcal{N}^*$ はペアノ・モデルである。よって，帰納法モデルでもある。∴$\mathcal{N}^*$ は$\mathcal{N}$の準同型像である。よって，$\mathcal{N}$から$\mathcal{N}^*$ の<u>上への</u>ある準同型 h が存在して，$N^* = h[N]$ である。また，同じ定理により，

　　$\mathcal{N}$が$\mathcal{N}^*$ の準同型像である⇔$\mathcal{N}$は帰納法モデルである

が成り立つ。仮定により，$\mathcal{N}$はペアノ・モデルであるから，帰納法モデルでもある。よって，$\mathcal{N}^*$ から$\mathcal{N}$の<u>上への</u>ある準同型 h^* が存在して，$N = h^*[N^*]$。

(11)　以下の(1),(2)が成り立つことにより，$h^* \circ h$ が，$\mathcal{N}$から$\mathcal{N}$への準同型であることを示したことになる。

　(1)　$(h^* \circ h)(c^{\mathcal{N}}) = h^*(h(c^{\mathcal{N}})) = h^*(c^{\mathcal{N}^*}) = c^{\mathcal{N}}$

(2)　任意の $y \in N$ に対して，

$(h^* \circ h)(\sigma^{\mathcal{N}} y) = h^*(h(\sigma^{\mathcal{N}} y))$　［合成写像の定義より］

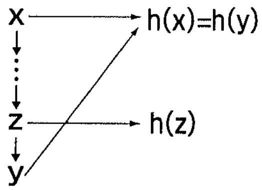
$= h^*(\sigma^{\mathcal{N}*}(h(y)))$　［h が準同型であるから］

$= \sigma^{\mathcal{N}}(h^*(h(y)))$　［h* が準同型であるから］

$= \sigma^{\mathcal{N}}((h^* \circ h)(y))$　［合成写像の定義より］

(12)　h が一対一でないとする。すると，ある x，$y \in N$ が存在して，

$x \neq y \quad \& \quad h(x) = h(y)$



である。$y = \sigma^{\mathcal{N}} \sigma^{\mathcal{N}} \cdots \sigma^{\mathcal{N}} x$　とおくことができる（N の要素は補題２．１．３より部分関数の定義域に含まれるから，切片の列を大きい方から小さい方に辿れるから）。$y = \sigma^{\mathcal{N}} z$ として，場合に分ける。

i）$z = x$ のとき。$h(x) = h(z) = w$　とすると，
$h(y) = h(\sigma^{\mathcal{N}} z) = \sigma^{\mathcal{N}*}(h(z)) = \sigma^{\mathcal{N}*}(w)$。ところが，$h(x) = h(y)$ だから，
$h(y) = w$，$\therefore w = \sigma^{\mathcal{N}*} w$ となり，$\mathcal{N}^*$ がペアノ・モデルであることに反する。

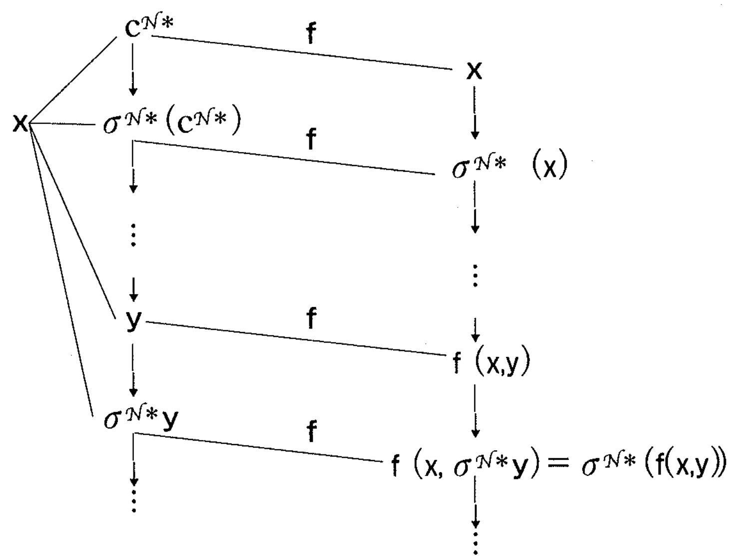
ii）$z \neq x$ のとき。

イ）$h(z) = h(x)$ のとき。上の i）と同様の議論により，$\mathcal{N}^*$ がペアノ・モデルであるという仮定に反する，という不合理が生じる。

ロ）$h(z) \neq h(x)$ のとき（右上図参照）。h は準同型だから，$h(y) = h(\sigma^{\mathcal{N}} z) = \sigma^{\mathcal{N}*}(h(z)) = \sigma^{\mathcal{N}*}(h(\sigma^{\mathcal{N}} \sigma^{\mathcal{N}} \cdots x)) = \sigma^{\mathcal{N}*} \sigma^{\mathcal{N}*} h(\sigma^{\mathcal{N}} \cdots x) = \cdots \cdots = \sigma^{\mathcal{N}*} \sigma^{\mathcal{N}*} \cdots h(x)$。ところが，$h(y) = h(x)$，$\therefore \sigma^{\mathcal{N}*} \sigma^{\mathcal{N}*} \cdots h(x) = h(x)$。こうして，この場合も，$\mathcal{N}^*$ がペアノ・モデルであるという仮定に反する事態となる。

(13)　高名なペアノの公理系（すでに述べたように，通常は五つの公理であるが）は，次第に洗練される形で考えられたらしい（ペアノ[1969]の「はじめに」参照）。全３巻のペアノ全集（Peano [1957], [1958],[1959]）の第Ⅱ巻に収められている，１８８９年のラテン語による論文：“Arithmetices principia, nova methodo exposica ”（Heijenoort [1967]に英語による抄訳がある）では９個の公理を挙げているが，このうちの４個は，“＝” に関する法則である。ペアノ[1969]に全訳の邦訳がある，１８９１年の論文 “Sur concetto di numero” では，五つに整理され，算術の公理として分離されている（邦訳93頁参照）。

(14)　定項関数と後者 $\sigma^{\mathcal{N}*}$ を用いた，原始帰納の定義方式による，加法 f（x，y）の値の決まり方を（見取り図風に）図示すると，以下のようなものになろう。（x は固定されており，y が変化するものとみなす。）



⒂ 規則：$f(x, y) = hx(y)$ によって定義された f が (1.1) と (1.2) を満たすことは，つぎのようにして示しうる：

(1.1) $f(x, c^{\mathcal{N}*}) = hx(c^{\mathcal{N}*})$　　[規則による]

$= x$　　[h x が準同型であるから上の (1) による]

(1.2) $f(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = hx(\sigma^{\mathcal{N}*}(y))$　　[規則]

$= \sigma^{\mathcal{N}*}(hx(y))$　　[h x が準同型であるから上の (2) による]

$= \sigma^{\mathcal{N}*}(f(x, y))$　　[規則]

⒃ $gx(y) = g(x, y)$ で定義される g x が上の (1)，(2) を満たすことは，つぎのようにしてわかる：

(1) $gx(c^{\mathcal{N}*}) = g(x, c^{\mathcal{N}*})$　　[g x の g による定義による]

$= x$　　[g が上の条件 (1.1) を満たすことによる]

(2) $gx(\sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = g(x, \sigma^{\mathcal{N}*}(y))$　　[g x の g による定義による]

$= \sigma^{\mathcal{N}*}(g(x, y))$　　[g が上の条件 (1.2) を満たすことによる]

$= \sigma^{\mathcal{N}*}(gx(y))$　　[再び g x の g による定義による]

⒄ 基底と帰納のステップが成り立つことを順次示す。

1．**基底**：$c^{\mathcal{N}*} \in G$

なぜなら，$kx(c^{\mathcal{N}*}) = \Psi_1(m_x(c^{\mathcal{N}*}))$　　[k_x の定義による]

$= \Psi_1(c_x^{\mathcal{N}*})$　　[m_x が準同型であるから (1) より]

$= \Psi_1(\langle c^{\mathcal{N}*}, f(x)\rangle)$　　[$c_x^{\mathcal{N}*}$ の定義による]

$= c^{\mathcal{N}*}$　　[射影関数 Ψ_1 の定義による]

むろん，$c^{\mathcal{N}*} \in N^*$ であるから，$c^{\mathcal{N}*} \in N^*$ & $k_x(c^{\mathcal{N}*}) = c^{\mathcal{N}*}$。$\therefore c^{\mathcal{N}*} \in G$。

2．**帰納のステップ**：$\forall y \in N^* (y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{N}*}(y) \in G)$

任意の $y \in N^*$ をとり，$y \in G$ と仮定する。G の定義より，$k_x(y) = y$ ……①

さて，$k_x(\sigma^{\mathcal{N}*}(y)) = \Psi_1(m_x(\sigma^{\mathcal{N}*}(y)))$　　[k_x の定義による]

$=\Psi_1(\sigma_x^{\mathcal{N}*}(m_x(y)))$ [m_xが準同型だから(2)の条件による]

ところが，最後の式の下線部分____については，以下のようになる：

$\sigma_x^{\mathcal{N}*}(m_x(y))=\sigma_x^{\mathcal{N}*}(\langle\Psi_1(m_x(y)),\Psi_2(m_x(y))\rangle)$ [m_xの定義により$m_x(y)$が順序対であることと射影Ψ_1,Ψ_2の定義による]

$=\langle\sigma^{\mathcal{N}*}(\Psi_1(m_x(y))),\ g(x,\Psi_1(m_x(y)),\Psi_2(m_x(y)))\rangle$

[$\sigma_x^{\mathcal{N}*}$の定義による]

$=\underline{\langle\sigma^{\mathcal{N}*}(k_x(y)),\ g(x,k_x(y),hx(y))\rangle}$ [k_xの定義より$k_x(y)=\Psi_1(m_x(y))$；hxの定義より$hx(y)=\Psi_2(m_x(y))$による]

よって，まとめると，

$k_x(\sigma^{\mathcal{N}*}(y))=\Psi_1(\sigma_x^{\mathcal{N}*}(m_x(y)))$

$=\sigma^{\mathcal{N}*}(k_x(y))$ [____の部分が____のような順序対であることと，射影Ψ_1の定義による]

$=\sigma^{\mathcal{N}*}(y)$ [①より$k_x(y)=y$による]

こうして，$\sigma^{\mathcal{N}*}(y)\in N^*\ \&\ k_x(\sigma^{\mathcal{N}*}(y))=\sigma^{\mathcal{N}*}(y)$であるから，Gの定義により，$\sigma^{\mathcal{N}*}(y)\in G$となる。以上より，

$\forall y\in N^*\ (y\in G\Rightarrow\sigma^{\mathcal{N}*}(y)\in G)$

が示された。すなわち，帰納のステップが成り立つことが示された。

(18) 構造上の「合同関係」とは，構造$\mathcal{A}=\langle A,\langle A_n\rangle_{n\geq1},\langle c^{\mathcal{A}}\rangle_{c\in \mathrm{OPER.CONS}}\rangle$の二項関係$R\subseteq A\times A$で，以下の条件(i)－(iii)を満たすもののことである：

(i) RはA上の同値関係（すなわち反射的・対称的・推移的である関係）である。

(ii) 任意のn項関数定項f，およびAの要素$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$に対して，

$\langle x_1,y_1\rangle\in R,\ \cdots,\langle x_n,y_n\rangle\in R\Rightarrow\langle f^{\mathcal{A}}(x_1,\cdots,x_n),\ f^{\mathcal{A}}(y_1,\cdots,y_1)\rangle\in R$

すなわち，関係Rを満たす個体の一方（のグループ）に適用された関数の値は，同じ関係を満たす他方（のグループ）に適用された関数値に対して，再び関係Rを満たす。

(iii) 任意のn項関係定項T，および個体$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in A$に対して，

$\langle x_1,y_1\in R,\ \cdots,\langle x_n,y_n\rangle\in R\Rightarrow(T^{\mathcal{A}}(x_1,\cdots,x_n)\Leftrightarrow T^{\mathcal{A}}(y_1,\cdots,y_n))$

すなわち，関係Rを満たす個体の一方（のグループ）は，同じ関係にある他方（のグループ）と，任意の関係を満たすか否かに関して常に一致する。

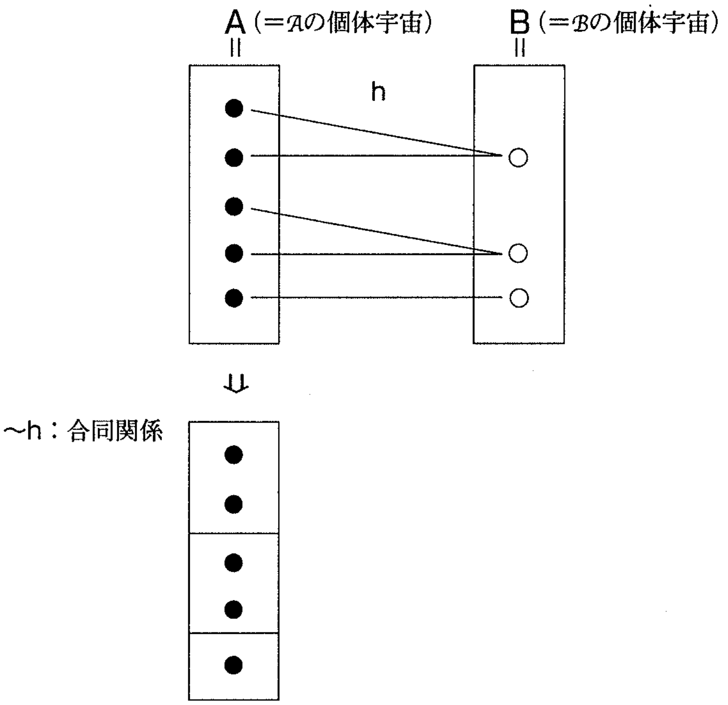
田畑［2001］139-140頁参照。

(19) 復習を兼ねて，田畑［2001］から，関連する「命題」を（証明ぬきで）拾い出してみる。

(i) 命題2.7.2（田畑［2001］140頁）：hを構造$\mathcal{A}$から他の構造$\mathcal{B}$の中への強い準同型であるとする。このとき，$\sim h=\{\langle x,y\rangle\in A\times A\mid h(x)=h(y)\}$として定義される関係$\sim h$は，A上の合同関係である。

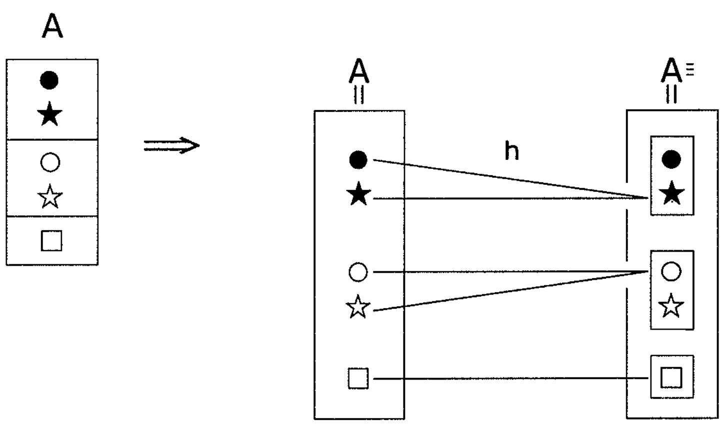
この命題は，強い準同型（「強い」という限定は，もとの構造での要素間の関係成立が，写された先での関係成立の，十分条件のみならず必要条件でもあることを示すが，関係ではなく関数のみをわれわれはいま問題にしているので，この限定の有無は無関係である）によって他の構造の同一個体に写されるもとの構造の個体同士が関係$\sim h$を満たす，として$\sim h$を定義すると，この関係$\sim h$は合同関係にある，と主張している。要するに，（他の構造の）同一の要素に写される，もとの構造の要素どうしは，ある程度の類似性がある筈だと予想されうるが，実際に，「合同関係」を満たすという，相当に類似度の高い関係にあることになる。つぎの図示により，その状況を（大

まかではあるが）視覚化できよう：



（ii）命題 2.7.3（田畑［2001］140-141 頁）：$\mathcal{A}$ 上の任意の合同関係≡に対して，≡＝〜**h** であるような，$\mathcal{A}$から，（$\mathcal{A}$から作られる）別の構造：$\mathcal{A}^{\equiv} = \langle A^{\equiv}, \langle c^{\mathcal{A}^{\equiv}} \rangle_{c \in \mathrm{OPER.CONS}} \rangle$ の上への（onto）強い準同型 **h** が存在する。

この命題は，上の命題（命題 2.7.2）とは逆に，元の構造上に合同関係が存在すれば，それを言わば材料にして，合同関係を満たす，同じ同値類の要素は，すべて自らが属する当の同値類に写される，という仕方で（強い）準同型を作ることができる，と主張している。以下の図でこのことを大まかに示す：

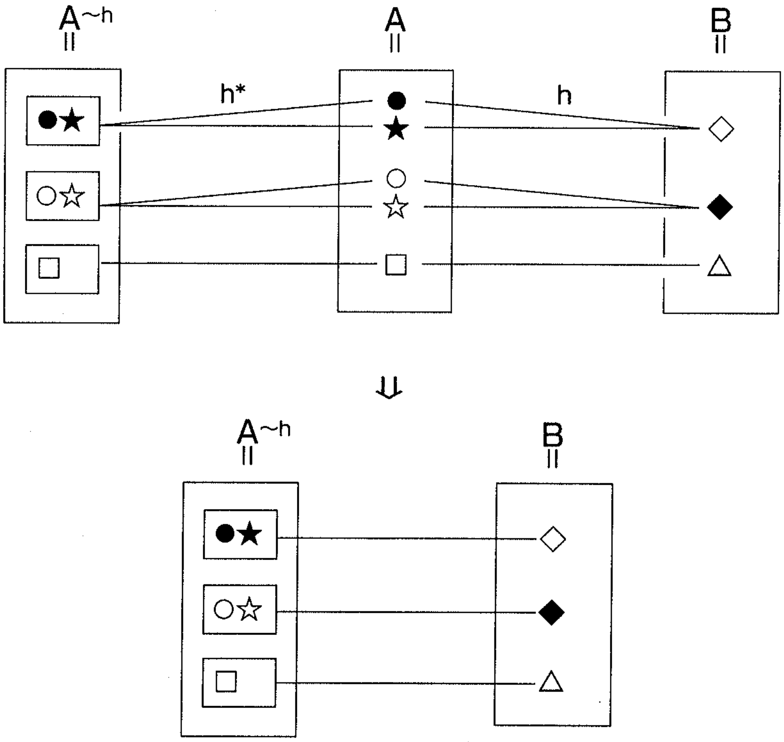


(iii) 命題 2.7.4 (田畑 [2001] 141 頁)：h が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への (onto) 強い準同型であるとする。そのとき，

$$\mathcal{A}^{\sim h} \cong \mathcal{B} \qquad (\text{ただし}\ \mathcal{A}^{\sim h} = \langle A^{\sim h}, \langle C^{\sim h} \rangle_{C \in OPER.CONS} \rangle$$

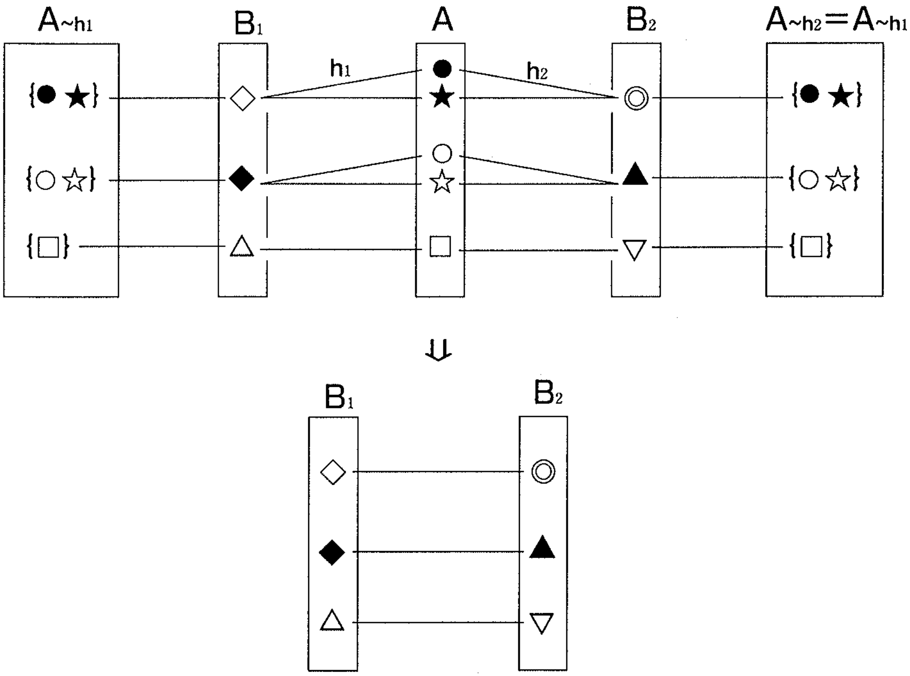
$$A^{\sim h} = \{[x]^{\sim h} : x \in A\} = \sim h\text{の同値類の集合})$$

この命題の内容は以下のようなことである。$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への強い準同型 h が存在するとすれば，上の命題 2.7.2により，$\mathcal{A}$ の個体宇宙 A 上に〜 h という合同関係が定義できるが，命題2.7.3 により，この合同関係〜 h に基づいて，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}^{\sim h}$ の上への強い準同型 h＊ が作れる。このとき，〜 h という合同関係そのものが，「Bの同一要素に写されるAの要素を（言わば）同一視する」という関係として定義されていたので，Bの同一要素 b に写されるAの要素 a，a′ …が全部，こんどは $A^{\sim h}$ の同一要素 $[a]^{\sim h}$ に（$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}^{\sim h}$ への準同型 h＊ により）写されるから，Bの要素 b と，$A^{\sim h}$ の要素 $[a]^{\sim h}$ を同型対応させることができる筈である。これが，この命題の意図である。以上のことは，つぎの図により，大まかに理解できる：



(iv) 命題 2.7.5 (田畑 [2001] 142 頁)：h 1 と h 2 が，それぞれ，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}_1$ の上への，および，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}_2$ への，強い準同型であり，かつ〜 h 1 ＝〜 h 2 のとき，$\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$ である。

この命題は，命題 2.7.4 より，$\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{A}^{\sim h1} = \mathcal{A}^{\sim h2} \cong \mathcal{B}_2$ が導かれることと，$\cong$ が同値関係であることから証明される。つぎの図により，この命題の意図の概略を示すことができる：



⒇　定義に基づいて，$R_{m,n}$の具体例を考える。$m=3$，$n=0$，すなわち$R_{3,0}$をとる。定義は$\langle x, y\rangle \in R_{3,0} \Leftrightarrow$ (1) $x, y<0$ & $x=y$ または (2) $x, y \geqq 0$ & $\exists z\ (x=y+3z \vee y=x+3z)$ であるが，Nでは，(1)は常に偽であるから，(2)が実質的定義条件である。(2)の連言の前半は常に成り立つから，事実上，後半部が定義条件である。つまり，xがyに対して$R_{3,0}$の関係にあるのは，$x-y$または$y-x$が3の倍数である場合である。通常「3を法として合同」と表現される関係，すなわち3で割った剰余が同じか否か（0か1か2か否か）で当の関係の有無を決めるものである。「同一剰余を持つ」関係で分類してできる剰余類は

$[0]_{\sim}=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$

$[1]_{\sim}=\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \cdots\}$

$[2]_{\sim}=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, \cdots\}$

となる。ここで，見られる循環が，帰納法モデルの中の循環モデルと関連する。

また，別の具体例として，$R_{m,n}=R_{5,2}$をとる。

定義条件は，$\langle x, y\rangle \in R_{5,2} \Leftrightarrow$ (1) $x,y<2$ & $x=y$ または (2) $x,y \geqq 2$ & $\exists z\ (x=y+5z \vee y=x+5z)$ であるから，2より小さい自然数までの同値類はその自然数から成る単元集合で，2以上の自然数の場合，5を法とする剰余類となる。

$[0]_{\sim}=\{0\}$

$[1]_{\sim}=\{1\}$

$[2]_{\sim}=\{2, 7, 12, 17, 22, 27, \cdots\}$

$[3]_{\sim}=\{3, 8, 13, 18, 23, 28, \cdots\}$

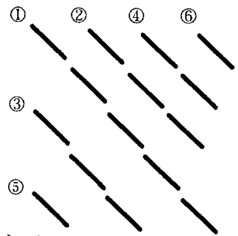
$[4]_{\sim}=\{4, 9, 14, 19, 24, 29, \cdots\}$

$[5]_{\sim}=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, \cdots\}$

$[6]^{\sim}=\{6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31,\cdots\}$

ここで見られる，「一直線」と「循環」の結合，すなわち「スプーン型」は，帰納法モデルのスプーン型と関連する。

(21) 実際，まず，$\langle n,n\rangle$ から $\langle n+1,n+1\rangle$，$\langle n+2,n+2\rangle$，…，つまり，表の（左上から右下の方向に走る）対角線上の順序対がすべて R を満たす（図①）。つぎに，$\langle n,n+m\rangle$ から出発して，$\langle n+1,n+m+1\rangle$，$\langle n+2,n+m+2\rangle$，… の列（対角線と平行に右下に走る図②の列）の順序対が R を満たす。この列と対角線に対して対称な列：$\langle n+m,n\rangle$，$\langle n+m+1,n+1\rangle$，$\langle n+m+2,n+2\rangle$，… の順序対列も R を満たす（図③）。これは，この列の出発点 $\langle n+m,n\rangle$ が，$\langle n,n+m\rangle\in R$ と R の対称性により得られるからである。さらに，$\langle n,n+m\rangle\in R$ と $\langle n+m,n+2m\rangle\in R$ より R の推移性により，$\langle n,n+2m\rangle$ を出発点として対角線と平行に走る列（図④）が得られ，この列と対角線に対して対称な $\langle n+2m,n\rangle$ で始まる列が（図⑤）得られ，$\langle n,n+2m\rangle\in R$ と $\langle n+2m,n+3m\rangle\in R$ と R の推移性から $\langle n,n+3m\rangle$ で始まる列（図⑥）が得られ，…，等々となる。



(22) 最初の仮定からは，R が合同関係である，ということしか知られないが，n と m を定義することにより，言わば，R の「正体」を調べるための「探り」を入れた。$n=0$ ならば，R は「m を法とする合同」の関係である。もし $n\neq 0$ ならば，$0\leqq k\leqq n-1$ までの各自然数 k については，$\langle k,\ k\rangle$ という形の順序対のすべてが，かつそれのみが R を満たす。$R_{m,n}$ の定義により，$\langle k,\ k\rangle$ は $R_{m,n}$ を満たす。そこで，いま，x，y のいずれもが n に等しいか，n より大きいとして，$y\geqq x$ とした。もし $x=n+w$，$y=n+w+v$ ならば $y=x+v$ だから，順序対 $\langle x,\ y\rangle$，すなわち $\langle n+w,n+w+v\rangle$ は，表において，対角線の列より上の列に現れる。そのとき，“$n+w+v$” の “v” の部分は，ある自然数 z に対して，$v=zm$ である。
そうすると，$y=x+zm$，$\therefore\exists z\ [z\in N\ \&\ (x=y+zm\vee y=x+zm)]$。ゆえに，$\langle x,\ y\rangle\in R_{m,n}$ となる。

(23) i) $R_{m,n}$ は同値関係である。$x=x$ は常に成り立つので，$x<n\ \&\ x=x\Leftrightarrow x<n$。また，$0\in N\ \&\ x=x+0=x+0\cdot m$，$\therefore\exists z\ [z\in N\ \&\ (x=x+z\cdot m)]$ 。ところが，$x<n\vee x\geqq n$ よって，$x<n\vee x\geqq n\ \&\ \exists z\ [z\in N\ \&\ (x=x+z\cdot m)]$ ，すなわち $\langle x,\ x\rangle\in R_{m,n}$。よって反射性が成り立つ。また $R_{m,n}$ の対称性は，“&” と “=” と “∨” の対称性に由来して成り立つ。最後に，推移性を示す。$\langle x,\ y\rangle\in R_{m,n}$ かつ $\langle y,\ w\rangle\in R_{m,n}$ とし，$x=y+z_1m$，$w=y+z_2m$ とする（他の場合も同様だから省略する）。$x\geqq w$ のとき，$x-w=(z_1-z_2)\cdot m\geqq 0$，$m\geqq 0$ だから，$(z_1-z_2)\geqq 0$，$\therefore(z_1-z_2)\in N$。$\therefore x=w+(z_1-z_2)\cdot m$。$w\geqq x$ のときも同様に $w=x+(z_2-z_1)\cdot m$，$z_2-z_1\in N$。∴どちらにせよ，$\exists z[z\in N\ \&\ (x=w+zm\vee w=x+zm)]$，$\therefore\langle x,\ w\rangle\in R_{m,n}$。

(ii) つぎに，まず**関数**に関して，$R_{m,n}$ の関係にあるもの同士が保存されることを示す。$\langle x,\ y\rangle\in R_{m,n}$ とする。$\langle Sx,\ Sy\rangle\in R_{m,n}$ である。なぜなら，(イ) $x<n$ で $x=y$ のとき，$Sx=Sy$。$Sx<n$ のとき，$R_{m,n}$ の定義により，$\langle Sx,\ Sx\rangle=\langle Sx,\ Sy\rangle\in R_{m,n}$ である。$Sx\geqq n$ のときも，$Sx=Sx+0=Sx+0m$，$\therefore\exists z[z\in N\ \&\ (Sx=Sy+(zm)\vee Sy=Sx+(zm)]$ $\therefore\langle Sx,\ Sy\rangle\in R_{m,n}$。そこで，(ロ) x，$y\geqq n$ とし，$y\geqq x$，$y=x+zm$ とする。$Sy=S(x+zm)=S(zm+x)=zm+Sx=Sx+zm$（ここで

“＋”の交換律を仮定する），∴∃z［z∈N＆（S x＝S y＋zm∨S y＝S x＋zm）］。いずれにせよ，⟨S x，S y⟩∈$R_{m,n}$。

つぎに**加法**に関して。$\langle x_1,y_1\rangle \in R_{m,n}$ かつ $\langle x_2,y_2\rangle \in R_{m,n}$ とする。示すべきは，$\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle \in R_{m,n}$ である。いま，$x_1=y_1+z_1\cdot m$，$y_2=x_2+z_2\cdot m$ とする（他の場合も同様か簡単）。$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=(x_1-y_1)-(y_2-x_2)=(z_1-z_2)\cdot m$。（イ）$z_1\geqq z_2$ のとき，$m\geqq 0$ だから，$(z_1-z_2)\cdot m\geqq 0$，$\therefore \exists z\,[(x_1+x_2)=(y_1+y_2)+z\,m]$。（ロ）$z_2>z_1$ のとき，$m\geqq 0$ だから，$(z_1-z_2)\cdot m\leqq 0$，$\therefore \exists z\,[(y_1+y_2)=(x_1+x_2)+z\,m]$。いずれにせよ，$\exists z\,[z\in N\,\&\,(x_1+x_2=y_1+y_2+z\,m \vee y_1+y_2=x_1+x_2+z\,m)]$。ゆえに，$\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle \in R_{m,n}$ である。

乗法の場合も同様。　　Q．E．D．

(24) 実際，$[y]\sim\in N\sim$とする。すると，$y\in N$。ところが，①より，$\forall y\in N\ (S(y)\notin[0]^{\sim}=\{0\})$ だったから，$[S(y)]^{\sim}\neq[0]^{\sim}$。しかし，②より，$[S(y)]^{\sim}=S^{\sim}([y]^{\sim})$ $\therefore S^{\sim}([y]^{\sim})\neq[0]^{\sim}$。

(25) まず，**基底**：$c^{\mathfrak{A}}\in G$から。h_xも$h_x{}^*$も，条件(1)を満たすから，$h_x(c^{\mathfrak{A}})=x$，$h_x{}^*(c^{\mathfrak{A}})=x$，$\therefore h_x(c^{\mathfrak{A}})=h_x{}^*(c^{\mathfrak{A}})$，$\therefore c^{\mathfrak{A}}\in A\ \&\ h_x(c^{\mathfrak{A}})=h_x{}^*(c^{\mathfrak{A}})$，$\therefore c^{\mathfrak{A}}\in G$。つぎに，**帰納のステップ**：$\forall y\in A\ (y\in G\Rightarrow\sigma^{\mathfrak{A}}(y)\in G)$ を示す。任意の$y\in A$をとり，$y\in G$と仮定する。これにより，$h_x(y)=h_x{}^*(y)$ である……①。

$h_x(\sigma^{\mathfrak{A}}(y))=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_x(y))$　　［h xが(2)を満たすから］
$=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_x{}^*(y))$　　［上の①より］
$=h_x{}^*(\sigma^{\mathfrak{A}}(y))$　　［h x*が(2)を満たすから］

(26) まず，**基底**：$c^{\mathfrak{A}}\in H$を示す。$x=c^{\mathfrak{A}}$の場合のh_x，すなわち$h_{c^{\mathfrak{A}}}$として，同一性関数：$h_{c^{\mathfrak{A}}}(z)=z\ (z\in A)$ をとる。すると，$h_{c^{\mathfrak{A}}}(c^{\mathfrak{A}})=c^{\mathfrak{A}}=x$，∴(1)を満たしている。また，$h_x(\sigma^{\mathfrak{A}}(y))=h_{c^{\mathfrak{A}}}(\sigma^{\mathfrak{A}}(y))=\sigma^{\mathfrak{A}}(y)=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_{c^{\mathfrak{A}}}(y))=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_x(y))$。よって，(2)を満たす。こうして，$h_{c^{\mathfrak{A}}}:A\to A\ \&\ h_{c^{\mathfrak{A}}}$は(1)，(2)を満たす。むろん$c^{\mathfrak{A}}\in A$。$\therefore c^{\mathfrak{A}}\in H$。つぎに，**帰納のステップ**：$\forall y\in A\ (y\in H\Rightarrow\sigma^{\mathfrak{A}}(y)\in H)$ を示す。任意の$y\in A$をとり，$y\in H$と仮定する。すると，Hの定義より，(1)，(2)を満たすような関数$h_y:A\to A$が存在する。いま関数$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}$を，規則：

(※) $\forall x\in A:h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}(x)=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_y(x))$

によって定義する。すると，この関数$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}$は(1)を満たす。なぜなら，

$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}(c^{\mathfrak{A}})=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_y(c^{\mathfrak{A}}))$　　［上の規則(※)による］
$=\sigma^{\mathfrak{A}}(y)$　　［仮定によりh yは(1)を満たすから］

つまり，$z=\sigma^{\mathfrak{A}}(y)$とおくと，$h_z(c^{\mathfrak{A}})=z$となっているので，(1)を満たしている。また，$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}$は，(2)も満たす。なぜなら，

$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}(\sigma^{\mathfrak{A}}(x))=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_y(\sigma^{\mathfrak{A}}(x)))$　　［上の規則(※)による］
$=\sigma^{\mathfrak{A}}(\sigma^{\mathfrak{A}}(h_y(x)))$　　［h yは，(2)を満たす：$h_y(\sigma^{\mathfrak{A}}(x))=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_y(x))$］
$=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}(x))$　　［再び規則(※)による］

こうして，$z=\sigma^{\mathfrak{A}}(y)$とおくと，$h_z(\sigma^{\mathfrak{A}}(x))=\sigma^{\mathfrak{A}}(h_z(x))$ となっているので，$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}$は，(2)を満たしている。こうして，$\sigma^{\mathfrak{A}}(h_y(x))$ はAからAへの関数だから，$h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}:A\to A\ \&\ h_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}$は(1)，(2)を満たす，ということが示された。従って，$\exists z\,(h_z:A\to A\ \&\ z=\sigma^{\mathfrak{A}}(y)\ \&\ h$

z は (1), (2) を満たす) & $\sigma^{\mathcal{A}}(y) \in A$。 $\therefore \sigma^{\mathcal{A}}(y) \in H$。こうして，帰納のステップが示された。

(27) 実際，以下のようにして，f は条件 (1.1)，(1.2) を満たす：

(1.1) $f(x, c^{\mathcal{A}}) = h_x(c^{\mathcal{A}})$ [定義による]
$= x$ [h_x が (1) を満たすことによる]

(1.2) $f(x, \sigma^{\mathcal{A}}(y)) = h_x(\sigma^{\mathcal{A}}(y))$ [定義による]
$= \sigma^{\mathcal{A}}(h_x(y))$ [h_x が (2) を満たすことによる]
$= \sigma^{\mathcal{A}}(f(x, y))$ [再び定義による]

(28) f^*_x が，補題1で述べられた条件 (1)，(2) を満たすことは，つぎのようにして示される：

条件(1)：$f^*_x(c^{\mathcal{A}}) = f^*(x, c^{\mathcal{A}})$ [f^*_x の f^* による定義による]
$= x$ [f^* が (1.1) を満たすことによる]

条件(2)：$f^*_x(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = f^*(x, \sigma^{\mathcal{A}}(y))$ [f^*_x の f^* による定義による]
$= \sigma^{\mathcal{A}}(f^*(x, y))$ [f^* が (1.2) を満たすことによる]
$= \sigma^{\mathcal{A}}(f^*_x(y))$ [f^*_x の f^* による定義による]

(29) **《補題1の証明》** <u>**唯一性**</u>から示す。k_x と k_x^* が (1), (2) を満たす二つの一項演算であるとする。ここで，$G = \{y \in A \mid k_x(y) = k_x^*(y)\}$ とする。Aの部分集合であるGに公理3Pを適用する（$\mathcal{A}$ が帰納法モデルだから）ために，まず．1．**基底**：$c^{\mathcal{A}} \in G$ を示す。k_x も k_x^* も仮定により(1)を満たすから，$k_x(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}$，$k_x^*(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}$，$\therefore k_x(c^{\mathcal{A}}) = k_x^*(c^{\mathcal{A}})$，$\therefore c^{\mathcal{A}} \in A$ & $k_x(c^{\mathcal{A}}) = k_x^*(c^{\mathcal{A}})$，$\therefore c^{\mathcal{A}} \in G$。つぎに，2．**帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in G \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}} y \in G)$ を示す。任意の $y \in A$ をとり，$y \in G$ と仮定する。Gの定義より，$k_x(y) = k_x^*(y)$ ……①。このとき，

$k_x(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = k_x(y) +^{\mathcal{A}} x$ [k_x は(2)を満たすから]
$= k_x^*(y) +^{\mathcal{A}} x$ [上の①より]
$= k_x^*(\sigma^{\mathcal{A}}(y))$ [k_x^* は(2)を満たすから]

$\therefore \sigma^{\mathcal{A}}(y) \in A$ & $k_x(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = k_x^*(\sigma^{\mathcal{A}}(y))$，$\therefore \sigma^{\mathcal{A}}(y) \in G$。こうして，帰納のステップも成り立つことが示されたから，公理3Pにより，$G = A$ が成り立つ。。$\therefore \forall y \in A\ [k_x(y) = k_x^*(y)]$，ゆえに $k_x = k_x^*$。すなわち唯一性が示された。

つぎに<u>**存在性**</u>を示す。まず，

$H = \{x \in A \mid \exists z\ (k_z : A \to A\ \&\ k_z$ は(1),(2)を満たす & $z = x)\}$

とおく。Hは，xを固定したとき，k_x が(1),(2)を満たす，A上の一項関数となるような，そのようなxの集合である。まず，1．**基底**：$c^{\mathcal{A}} \in H$ を示す。$k_{c^{\mathcal{A}}}$ として，定数値関数：$k_{c^{\mathcal{A}}}(z) = c^{\mathcal{A}}\ (z \in A)$ をとる。$k_{c^{\mathcal{A}}}(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}$ ∴条件(1)が満たされた。$k_{c^{\mathcal{A}}}(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = c^{\mathcal{A}}$，他方，$+^{\mathcal{A}}$ はA上の加法だから，$k_{c^{\mathcal{A}}}(y) +^{\mathcal{A}} c^{\mathcal{A}} = k_{c^{\mathcal{A}}}(y) = c^{\mathcal{A}}$。ゆえに $k_{c^{\mathcal{A}}}(\sigma^{\mathcal{A}}(y)) = k_{c^{\mathcal{A}}}(y) +^{\mathcal{A}} c^{\mathcal{A}}$，∴条件(2)が満たされた。こうして，$k_{c^{\mathcal{A}}}$ は(1),(2)を満たすA上の一項関数だから，$c^{\mathcal{A}} \in H$。よって，基底が成り立つことが示された。つぎに，2．**帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in H \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}}(y) \in H)$ を示す。任意の $y \in A$ をとり，$y \in H$ と仮定する。Hの定義より，(1),(2)を満たす関数 k_y ($k_y : A \to A$) が存在する。いま，$k_{\sigma^{\mathcal{A}}(y)}$ を，つぎの規則（%）により定義する：

$k_{\sigma^{\mathcal{A}}(y)}(x) = k_y(x) +^{\mathcal{A}} x$ …… (%)

この関数 $k_{\sigma^{\mathcal{A}}(y)}$ は(1)を満たす。なぜなら，$K_{\sigma^{\mathcal{A}}(y)}(c^{\mathcal{A}}) = k_y(c^{\mathcal{A}}) +^{\mathcal{A}} c^{\mathcal{A}} = k_y(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{A}}$ [仮定により k_y は(1)を満たすから]。$k_{\sigma^{\mathcal{A}}(y)}$ は(2)も満たす。実際，

$k_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}(\sigma^{\mathfrak{A}}(x)) = k_y(\sigma^{\mathfrak{A}}(x)) +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(x)$　[上の定義（%）による]

$= (k_y(x) +^{\mathfrak{A}} y) +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(x)$　[k_yが(2)を満たすから]

$= k_y(x) +^{\mathfrak{A}} (y +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(x))$　[Aでの加法の結合律]

$= k_y(x) +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(y +^{\mathfrak{A}} x)$　[加法の定義条件による]

$= k_y(x) +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(x +^{\mathfrak{A}} y)$　[Aでの加法の交換律]

$= k_y(x) +^{\mathfrak{A}} (x +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(y))$　[加法の定義条件]

$= (\underline{k_y(x) +^{\mathfrak{A}} x}) +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(y)$　[加法の結合律]

$= k_{\sigma^{\mathfrak{A}}(y)}(x) +^{\mathfrak{A}} \sigma^{\mathfrak{A}}(y)$　[下線部……に（%）を適用]

以上より，$\mathfrak{A}$は帰納法モデルだから，公理３Ｐを適用して，Ｈ＝Ａ。ゆえに，Ａのすべての要素xに対して，(1),(2)を満たす一項関数k_xが存在する。

(30) **《補題２の証明》**条件 (2.1)，(2.2) を満たすような，Ａ上の二項演算ｈが**存在する**ことを示す。いま，ｈを，すべてのx，$y \in A$に対して，$h(x, y) = k_x(y)$ ……（#）と定義する。ここで，k_xは，上の補題１で，その唯一存在がすでに証明されている関数である（k_xを一項関数と考えていたときは，xを固定していたが，これから，xはＡ上で変化するものと見なす)。このｈが条件 (2.1)，(2.2) を満たすことは，つぎのようにして示せる。

条件 (2.1)：$h(x, c^{\mathfrak{A}}) = k_x(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{A}}$　[k_xが補題１で述べた条件(1)を満たすことによる]

条件 (2.2)：$h(x, \sigma^{\mathfrak{A}}(y)) = k_x(\sigma^{\mathfrak{A}}(y))$　[上の定義（#）による]

$= k_x(y) +^{\mathfrak{A}} x$　[k_xが条件(2)を満たすから]

$= h(x, y) +^{\mathfrak{A}} x$　[上の定義（#）による]

こうして，(2.1)，(2.2) を満たす二項演算ｈが存在することが示された。

つぎに，このｈの**唯一性**を示す。h^*を，条件 (2.1)，(2.2) を満たす他の関数とせよ。示すべきことは，$h^* = h$である。いま，任意の$x \in A$を固定して，h^*_xを，

$\forall y \in A : h^*_x(y) = h^*(x, y)$ ……（〒）

として定義される一項関数とせよ。このh^*_xは，**補題１**で述べた条件(1),(2)を満たす。実際

(1)：$h^*_x(c^{\mathfrak{A}}) = h^*(x, c^{\mathfrak{A}})$　[上の定義（〒）による]

$= c^{\mathfrak{A}}$　[h^*が条件 (2.1) を満たすから]

(2)：$h^*_x(\sigma^{\mathfrak{A}}(y)) = h^*(x, \sigma^{\mathfrak{A}}(y))$　[定義（〒）による]

$= h^*(x, y) +^{\mathfrak{A}} x$　[h^*が条件 (2.2) を満たすから]

$= h^*_x(y) +^{\mathfrak{A}} x$　[定義（〒）による]

ところが，**補題１**より，(1),(2)を満たすこのような一項関数は唯一つに決まる。それがk_xであった。よって，$h^*_x = k_x$である。ゆえに，（〒）より，$h^*(x, y) = k_x(y)$である。しかし，ｈは，$h(x, y) = k_x(y)$として定義されていた。従って，$h^* = h$である。

Q. E. D.

(31) まず，１．**基底**：$0 \in G$が成り立つことを示す。

$h(x) \cdot^{\mathfrak{A}} h(0) = h(x) \cdot^{\mathfrak{A}} c^{\mathfrak{A}}$　[ｈが準同型，$\therefore h(0) = \sigma^{\mathfrak{A}}$]

$= c^{\mathfrak{A}}$　[$\cdot^{\mathfrak{A}}$は$\mathfrak{A}$での乗法だから]

$h(x \cdot 0) = h(0)$　[$x \cdot 0 = 0$だから]

$= c^{\mathfrak{A}}$　[$h(0) = \sigma^{\mathfrak{A}}$だから]

$\therefore\ h(x) \cdot^{\mathfrak{A}} h(0) = h(x \cdot 0)$

つぎに，2．**帰納のステップ**：$\forall y\ (y \in G \Rightarrow Sy \in G)$ が成り立つことを示す。任意の $y \in N$ をとり，$y \in G$ と仮定する。Gの定義により，$h(x) \cdot^{\mathcal{A}} h(y) = h(x \cdot y)$ ……①。さて，

$h(x) \cdot^{\mathcal{A}} h(Sy) = h(x) \cdot^{\mathcal{A}} S(h(y))$ ［hが準同型だから］

$= h(x) \cdot^{\mathcal{A}} h(y) +^{\mathcal{A}} h(x)$ ［$\cdot^{\mathcal{A}}$ はA上の乗法］

$= h(x \cdot y) +^{\mathcal{A}} h(x)$ ［上の①より］

$= h(x \cdot y + x)$ ［定理5.1.2より，hは$\mathcal{N}$の加法$+$を$\mathcal{A}$の加法$+^{\mathcal{A}}$に写像しているから］

$= h(x \cdot Sy)$ ［・は$\mathcal{N}$上の乗法で (2.2) を満たすから］

こうして，$h(x) \cdot^{\mathcal{A}} h(Sy) = h(x \cdot Sy)$，$\therefore Sy \in G$。以上より，$\forall y\ (y \in G \Rightarrow Sy \in G)$ が示せた。ゆえに，公理3Pにより，$G = N$。 **Q．E．D．**

(32) gの定義の仕方から，任意の $x,\ y,\ z \in N$ をとり，$f(x,\ y) = z$ とすると，

$\langle h(x),\ h(y),\ h(z) \rangle \in g$

である。通常の関数の書き方で，つまり"$\langle a,b,c \rangle \in g$"の代わりに $g(a,b) = c$ という書き方で書くと，

$h(f(x,\ y)) = g(h(x),\ h(y))$

であるから，$\mathcal{N}\sim$上の関数gは，$\mathcal{N}$における関数fの，hによる準同型像となっている。

(33) まず，1．**基底**：$[0]^{\sim} \in G$ を示す。$j^{\sim}_{[x]^{\sim}}$ は仮定により(1)を満たすから，$j^{\sim}_{[x]^{\sim}}[0]^{\sim} = f^{\sim}[x]^{\sim}$。$j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}$ も(1)を満たすから，$j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}[0]^{\sim} = f^{\sim}[x]^{\sim}$。$\therefore j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}[0]^{\sim} = j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}[0]^{\sim}$。もちろん，$[0]^{\sim} \in N\sim$ だから，$[0]^{\sim} \in G$。

つぎに，2．**帰納のステップ**：$\forall [y]^{\sim} \in N\sim\ ([y]^{\sim} \in G \Rightarrow S^{\sim}[y]^{\sim} \in G)$ を示す。任意の $[y]^{\sim} \in N\sim$ をとり，$[y]^{\sim} \in G$ と仮定する。Gの定義により，$j^{\sim}_{[x]^{\sim}}[y]^{\sim} = j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}[y]^{\sim}$ ……①。ところが，

$j^{\sim}_{[x]^{\sim}} S^{\sim}[y]^{\sim} = g^{\sim}[x]^{\sim}[y]^{\sim}(j^{\sim}_{[x]^{\sim}}[y]^{\sim})$ ［$j^{\sim}_{[x]^{\sim}}$ は(2)を満たすから］

$= g^{\sim}[x]^{\sim}[y]^{\sim}(j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}[y]^{\sim})$ ［帰納法の仮定：①］

$= j^{\sim *}_{[x]^{\sim}} S^{\sim}[y]^{\sim}$ ［$j^{\sim *}_{[x]^{\sim}}$ は(2)を満たすから］

むろん，$S^{\sim}[y]^{\sim} \in N\sim$ であるから，Gの定義により，$S^{\sim}[y]^{\sim} \in G$。以上より，

$\forall [y]^{\sim} \in N\sim\ ([y]^{\sim} \in G \Rightarrow S^{\sim}[y]^{\sim} \in G)$

が示された。すなわち，帰納のステップが示された。

(34) まず，1．**基底**：$[0]^{\sim} \in H$ が成り立つことを示す。いま，

$j^{\sim}_{[0]^{\sim}} = f^{\sim}$

と，すなわち

$\forall [x]^{\sim} \in N\sim$：$j^{\sim}_{[0]^{\sim}}[x]^{\sim} = f^{\sim}[x]^{\sim} = [fx]^{\sim}$ …… (★)

と，定義せよ（仮定により，fがユニバーサルだから，定理5.3.2から，$\mathcal{N}\sim$上にfの準同型像$f^{\sim}$が存在するゆえ，この定義が可能である）。このとき，$j^{\sim}_{[0]^{\sim}}$ が条件(1),(2)を満たすことは，以下のようにして示される。

条件(1)：$j^{\sim}_{[0]^{\sim}}[0]^{\sim} = f^{\sim}[0]^{\sim}$ ［上の定義（★）による］

条件(2)：$j^{\sim}_{[0]^{\sim}} S^{\sim}[y]^{\sim} = f^{\sim} S^{\sim}[y]^{\sim}$ ［定義（★）による］

$= f^{\sim}[Sy]^{\sim}$ ［$S^{\sim}$はSの準同型像だから］

$= [fSy]^{\sim}$ ［定義（★）による］

$= [jSy0]^{\sim}$ ［jはf，gから原始回帰により得られるから条件（イ）より］

$= [j\,0\,S\,y]^{\sim}$　[j は**可換的**だから]
$= [g\,0\,y\,(j\,0y)]^{\sim}$　[原始回帰の条件（ロ）より]
$= [g\,0\,y\,(j\,y0)]^{\sim}$　[再び j の**可換性**より]
$= [g\,0\,y\,(f\,y)]^{\sim}$　[回帰条件（イ）より $j\,y0 = f\,y$]
$= g^{\sim}\,[0]^{\sim}\,[y]^{\sim}\,[f\,y]^{\sim}$　[$g^{\sim}$ は g の準同型像だから]
$= g^{\sim}\,[0]^{\sim}\,[y]^{\sim}\,f^{\sim}\,[y]^{\sim}$　[(★) より $[f\,y]^{\sim} = f^{\sim}\,[y]^{\sim}$ だから]
$= g^{\sim}\,[0]^{\sim}\,[y]^{\sim}\,j^{\sim}\,[0]^{\sim}\,[y]^{\sim}$　[(★) より $j^{\sim}\,[0]^{\sim}\,[y]^{\sim} = f^{\sim}\,[y]^{\sim}$]

こうして，$j^{\sim}{}_{[0]^{\sim}}$ が(2)を満たすことが示された。よって，(1),(2)を満たす関数 $j^{\sim}{}_{[0]^{\sim}}: N^{\sim} \to N^{\sim}$ が存在する。∴ $[0]^{\sim} \in H$。

つぎに，2．**帰納のステップ**：$\forall\,[y]^{\sim} \in N^{\sim}\ ([y]^{\sim} \in H \Rightarrow S^{\sim}\,[y]^{\sim} \in H)$ を示す。任意の $[y]^{\sim} \in N^{\sim}$ をとり，$[y]^{\sim} \in H$ と仮定する。H の定義より，任意の y，$x \in N$ に対して，

$$\begin{cases} j^{\sim}{}_{[y]^{\sim}}\,[0]^{\sim} = f^{\sim}\,[y]^{\sim} \\ j^{\sim}{}_{[y]^{\sim}}\,S^{\sim}\,[x]^{\sim} = g^{\sim}\,[y]^{\sim}\,[x]\,(j^{\sim}{}_{[y]^{\sim}}\,[x]^{\sim}) \end{cases}$$

である関数 $j^{\sim}{}_{[y]^{\sim}}$ が存在する。そこで，

$$j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}\,[x]^{\sim} = [j\,S\,y\,x]^{\sim} \quad \cdots\cdots (※)$$

と定義する。この $j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}$ が(1),(2)を満たすことは，以下のように示すことができる。

条件(1)：$j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}\,[0]^{\sim} = [j\,S\,y\,0]^{\sim}$　[上の定義（※）より]
$= [f\,S\,y]^{\sim}$　[j は f から原始回帰により得られるから（イ）より]
$= f^{\sim}\,S^{\sim}\,[y]^{\sim}$　[仮定より f はユニバーサルだから，準同型像についての定理 5.3.2 より]

条件(2)：$j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}\,S^{\sim}\,[x]^{\sim} = j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}\,[S\,x]^{\sim}$　[$S^{\sim}$ は S の準同型像だから]
$= [j\,S\,y\,S\,x]^{\sim}$　[上の定義（※）より]
$= [g\,S\,y\,x\,(j\,S\,y\,x)]^{\sim}$　[原始回帰の条件（ロ）より]
$= g^{\sim}\,S^{\sim}\,[y]^{\sim}\,[x]^{\sim}\,[j\,S\,y\,x]^{\sim}$　[$g^{\sim}$ は g の準同型像だから]
$= g^{\sim}\,S^{\sim}\,[y]^{\sim}\,[x]^{\sim}\,(j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}\,[x]^{\sim})$　[上の定義（※）より]

こうして，$j^{\sim}{}_{S^{\sim}[y]^{\sim}}$ が(1),(2)を満たすことが示されたので，$S^{\sim}\,[y]^{\sim} \in H$。よって，帰納のステップが成り立つことが示された。

(35) $\sim$ を $\mathcal{N}$ 上の任意の合同関係とする。いま，$\langle x, x_1 \rangle \in \sim$，$\langle y, y_1 \rangle \in \sim$ と仮定する。すると，$\mathcal{N}^{\sim}$ への準同型 h によって，$h(x) = [x]^{\sim}$ となる剰余類を考えることができる。仮定より，$[x]^{\sim} = [x_1]^{\sim}$，$[y]^{\sim} = [y_1]^{\sim}$ だから，$[j\,(x,y)]^{\sim} = [x^2 \cdot y]^{\sim} = [x \cdot x \cdot y]^{\sim} = [x]^{\sim} \cdot^{\sim} [x]^{\sim} \cdot^{\sim} [y]^{\sim} = [x_1]^{\sim} \cdot^{\sim} [x_1]^{\sim} \cdot^{\sim} [y_1]^{\sim} = [x_1 \cdot x_1 \cdot y_1]^{\sim} = [x_1^2 \cdot y_1]^{\sim} = [j\,(x_1, y_1)]^{\sim}$，∴ $\langle j\,(x,y),\ j\,(x_1,y_1) \rangle \in \sim$。ゆえに，定義 5.3.1 により，j はユニバーサルである。

参考文献

Heijenoort, J .(ed.) [1967]: *From Frege to Gödel: A Sorce Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Harvard U. P.
Henkin, L . [1950]: "Completeness in the theory of types". *The Journal of Symbolic Logic*, vol.15, pp.81-91.
———— [1960]: "On mathematical induction". *The American Mathematical Monthly*, vol.67, num.4, pp.323-338.

Manzano, M. [1996]: *Extensions of First Order Logic*. Cambridge U.P.
――――[1999]: *Model Theory*. Clarendon Press.
田畑博敏 [2001]:「第二階論理の特性について」鳥取大学教育地域科学部紀要・地域研究・第3巻第1号, 133-157頁.
Peano. G .[1957]: *Opere Scelte*, volume Ⅰ. E dizioni cremonese.
―――― [1958]: *Opere Scelte*, volume Ⅱ. E dizioni cremonese.
―――― [1959]: *Opere Scelte*, vilume Ⅲ. E dizioni cremonese.
ペアノ [1969] :『ペアノ 数の概念について』「現代数学の系譜2」小野勝次・梅沢敏郎訳・解説, 共立出版。