数学基礎力調查(大学1年生)第2報

後藤 和雄*

1. Abstract

前回 2001 年 4 月に発表した [3] と同じ学部学科の 1 年生を対象として,同じ問題([1] [2] と同じ問題)で調査を行った。結果について:問題 A については違いがあり、問題 B については違いはないという結果を得た。また、 2 年にわたり同じ問題を解いた学生が 1 人から 1 年間大学の数学をして基礎力が上がったかを調べると、高校までの基礎数学力には変化が認められなかった。

2. 対象・時期・調査方法および問題について

- 1. 問題Aは 1998 年用問題 [1, pp.251-252], [2, p.5] であり, 問題Bは 1999 年度私立型の問題 [2, pp.20] である。[3] にも資料として問題が掲載されている。
- 2. 対象:ある国立大学の工学部1年生を対象とした講義の中で時間をとり(11時30分から)調査を行った。

問題Aは1年生53人,2年生11人,計64人であり、

問題Bは1年生57人,2年生 8人,計65人であった。

問題A,B両方解いた学生は56人であった。

- 3. 時期:問題Aは2001年10月16日, 問題Bは2001年10月23日に実施した。
- 4. 方法:時間は約40分(昼休みにかかった人もいる)で、このテストの出来を数学の評価に反映させる旨を伝えて真剣に取り組むようにお願いした。成績に反映されるという条件下で行われたので自分の力が発揮できたものと考えられる。

3. 結果とその考察

[1, pp.256-257, 263-264] と [2, p.4, 23] に日本の大学と、中国の大学の度数分布が描かれてある。それらから満点の学生の割合と最頻値をまとめたものが表 1 である。表 2 は本調査をまとめたものである。それらを図示したものが図 1, 図 2 で問題 A とB との相関図が図 B である。

問題Aの平均は 22.23 で、問題Bの平均は 19.85 であり、また解いた時間とその見直しにかかった時間は表5 のとおりである。前回の調査 [3] と比べて、解答時間について、問題Aはあまり変わら

^{*}鳥取大学教育地域科学部 地域設計学講座

後藤和雄:数学基礎力調査(大学1年生)第2報

表 1: [1, pp.256-257, 263-264] と [2, p.4, 23] のまとめ

	満点の学生の割合 (%)	最頻値
中国北京にあるトップ校哲学科1年 X	95.65	25
日本の国立大学トップ校の文学系類 A_2	45.00	25
A と並ぶ日本のトップ国立大学の文学部 1 年生 B_2	22.92	24
日本のトップ私立大学の文学部 a_2	4.70	19(7-25 でほぼ一様)
a 大学と並ぶトップ私立大学の人文系学部 b_2	1.89	18(0-25でほぼ一様)

表 2: 本調査での各種基礎統計値

本調査	標本数	最頻值	中央値	平均值	標本標準偏差	満点の学生の割合 (%)
問題A	64	24	23	22.23	2.17	12.5
問題B	65	21	20	19.85	2.89	3.1

表 3: 問題Aの得点分布

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
人数	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
相対度数 (%)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
得点	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	合計
人数	0	0	1	2	2	2	4	10	10	11	14	8	64
相対度数 (%)	0	0	1.6	3.1	3.1	3.1	6.2	15.6	15.6	17.2	21.9	12.5	100%

表 4: 問題Bの得点分布

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
人数	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
相対度数 (%)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5	0	0	1.5
得点	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	合計
人数	0	3	2	5	6	9	9	13	3	7	4	2	65
相対度数 (%)	0	4.6	3.1	7.7	9.2	13.8	13.8	20	4.6	10.8	6.2	3.1	100%

問題Aの度数分布(64人)

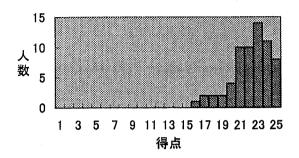


図 1: 問題 A の度数分布 (64 人)(1998 年用問題)

問題Bの度数分布(65人)

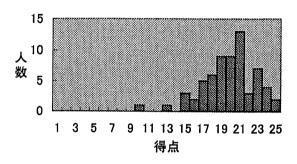


図 2: 問題Bの度数分布 (65人)(1999 年度私立型の問題)

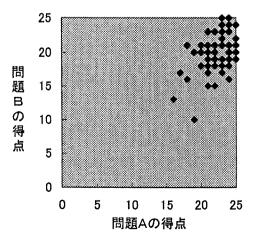


図 3: 問題Aと問題B両方解答した学生の得点の散布図

表 5: 平均解答時間と見直し時間

		人数	平均 (25 点満点)	解いた時間 (分)	見直し時間 (分)	見直し比率 (%)
L	A	64	22.23	19.56	4.3	22
	В	65	19.85	23.56	3.24	14

表 6: [3] の調査での平均解答時間と見直し時間

	人数	平均 (25 点満点)	解いた時間 (分)	見直し時間 (分)	比率 (%)
A	64	21.4	20.4	5.7	27.9
В	59	19.9	31.0	9.3	.30.0

ないが、問題Bは7.5分短い。見直し時間について、問題Aは1.4分短く、問題Bは約6分短い。この原因は試験後30分で12時の昼休みになるため、その時間に近づいたらもう一度見直さないで退出する学生が多くなった。このことが原因である。高校1年までに学習していることであり、すべて記入しているものは、間違いがあると思って見直さずに退出する学生が多かった。早く退出したものも、すべて記入しているが、間違っている所があり、満点はとれていなかった。やさしいことを間違いなく正解するということの大切さや、難しさを理解していないように思われる。

問題Aと問題B両方を解いた人の得点間のピアソン相関係数は 0.51 (データ数 56) であり,寄与率は 26.4 %である。また,表 3 と表 4 を用いて 2 つの分布に差があるか同一分布にしたがっているかどうかを調べる。ウイルコクソン (Wilcoxon) 符号付き順位和検定を両側 1 % ($>5 \times 10^{-7}$) で検定すると有意である。スピアマン (Spearman) の順位相関係数検定も 1 % (>0.00808) 有意である。問題Aと問題Bと両方を受けた学生のデータを用いて,対応のある t-検定を行うと両側 1 % ($>4 \times 10^{-8}$) で有意である。したがって,論文 [3] と同じ結果がえられる。すなわち, 2 つの問題A,Bの得点には, (線型の) 相関はなく,かといって全くでたらめに分布もしていないと考えられる。Wilcoxon 符号付き順位和検定,Spearman の順位相関係数検定の結果よりAとBとには問題に差があるといえる。

対応のある t-検定の結果によると、(学生の数学基礎力が一定で問題 A,Bの解答にその能力が射影されていると仮定すると) 2 つの問題の性質には有意な差が認められる。 2 つの問題 AとB は異なる能力を測っているか、時間をおくと各個人の数学能力は集団の中である程度一定していない、などがその原因と考えられる。このことは [3] でも述べた。

問題Aは64人が解答し、各問題の誤答率は表7である。

問題Bは65人が解答し,各問題の誤答率は表8である。

問題番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11(x)	(y)	
誤答数	0	2	1	5	4	7	11	6	8	0	4	3	
誤答率 (%)	0	3	2	8	6	11	17	9	13	0	6	5	
問題番号	12	13	14	15	16	17	18	19	20(a)	(b)	21(I)	(II)	(III)
誤答数	0	4	8	14	2	1	7	28	1	4	8	25	14
誤答率 (%)	0	6	13	22	3	2	11	44	9	6	13	39	22

表 7: 問題 A での各小問の誤答数と誤答率

表 8: 問題Bでの各小問の誤答数と誤答率

問題番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
誤答数	2	23	6	16	22	5	3	17	5	8	16	10	-
誤答率 (%)	3	35	9	25	34	8	9	26	8	12	25	15	
問題番号	13(a)	(b)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23(a)	(b)
誤答数	7	8	14	15	37	15	8	13	22	13	24	8	18
誤答率 (%)	11	12	22	23	57	23	12	20	34	20	37	12	28

4. 誤答の内容

各問題について問題番号, 内容について詳しく述べる。

問題Aの誤解答。ただし 」 内は解答者が記入した塊の解答を表す

問題1.

問題2.

問題3.

 $\frac{25}{45}$ -20, -17, -2, 9, 12 問題4.

問題 5.

 $0.5, \frac{1}{2}$ -290, -40, -15, -10, -2問題 6.

問題7. ± 8

問題8. ± 9

問題 9 . $-2, |2|, [\pm 2, \pm 4], 4$

問題 10.

問題 11. (x):

問題 11. (y):

問題 12.

問題 13.
$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{2}$$
, $x < -\frac{1}{2}$, $2 < x$, $2 < x < \frac{1}{2}$, 記入なし問題 14. $(-2,\frac{1}{3})$, $\frac{2}{3}$, 1 , $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 2 , 2 , $\frac{1}{3}$, 2 , -3

問題 15. 10,
$$-1 \pm \sqrt{3}$$
, $\pm \sqrt{10}$, $\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}$, $1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm 2\sqrt{2}$, $1 \pm \sqrt{5}$, $-1 \pm \sqrt{3}i$, $\frac{-1 \pm \sqrt{20}}{2}$, 記入なし

 $\begin{array}{l}
28, & 6xy - 7 \\
1 & \end{array}$ 問題 16.

問題 17.

2, ±2, -2,2, 4,-2, 2,4 記入なし, 図がまちまち図 4 を参照 問題 18.

問題 19.

問題 20 (1).

 $-8, \frac{1}{9}, 0.5, 2^{\frac{1}{3}}$ 問題 20 (2).

問題
$$21$$
 (I) . $(4,2)$, $(1,-4)$, $(1,4)$, $(4,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$ (座標の書き方でない)

問題 21 (II).
$$\left(\frac{11}{3}, \frac{16}{3}\right)$$
, $\left(\frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{14}{3}\right)$, $\left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{31}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{31}{3}, \frac{2}{3}\right)$

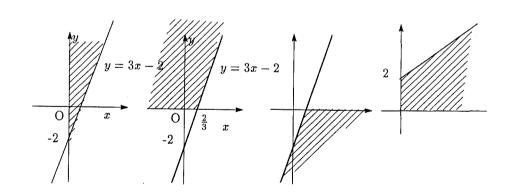


図 4: 問題19の誤解答例

問題Bの誤解答。ただし 内は解答者が記入した塊の解答を表す

問題1. 0.750, 750000

問題2. 64, 0.8, 80, 800, 8000, 8.0×10^7

問題3.

11.5, $\frac{23}{2}$, $\frac{4}{3}$, 116, 121, 156, 386

問題 5.
$$-0.0122$$
, -0.0022 , -122 , -121 , -49 , -38 , -1 , 22 , 49 , 222 問題 6. $(, 1)$, $\boxed{0-1}$, $\left(-\frac{2}{5}, -1\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ 問題 7. $x < 2$ 問題 8. ± 7 問題 10. $\boxed{x = -5, 1}$, $(x + 1)(x - 5)$, $\boxed{x = 5, -1}$, $(x - 1)(x - 4)$ 問題 11. $3 < x < 2.5$, $\frac{5}{2} < x < 3$, $\boxed{x > 3, \frac{10}{4} > x}$, $\boxed{x > 4, x < \frac{3}{2}}$, $x > 3$, $-5 > x > -6$, $\boxed{\frac{5}{2} \cdot 3}$, $\frac{5}{2} \le 0 < 3$, $\frac{5}{2} < x < 7$, $\frac{5}{2} < x < 3$, $\boxed{x > 3, \frac{10}{4} > x}$, $\boxed{x = 2, x = \frac{5}{3}}$, $\boxed{51.3}$, $\boxed{5$

問題Aについて

問題 23 (1). -5, 2, 3, 4

約10%以上の誤解答しているものは、

問題 24 (2). -18, -13, -3, 1, 3, 5, 6, 9, 11, 15

6番の $-5 \times \{8 - 10 \div (-5)\}$ の計算 (11%が不正解)

7番の $\sqrt{49}$ を平方根 49 と間違えている問題 (17%が不正解)

8番の $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$ も平方根と誤解答 (9%が不正解)

すなわち、平方根と \sqrt{x} の定義を正確に理解していない

- 9番の || -1| -| -3||ができていない人(13%が不正解)
- 14番の $3x^2 5x 2 = 0$ が解けていない(13%が不正解)
- 15番の $x^2 + 2x 4 = 0$ が解けていない(22%が不正解)
- 18番の |x+1|=3 が解けない人 (11%が不正解)
- 19番の $y \le 3x-2, x \ge 0$ を x-y 平面に図示することが正確にかけていない (44%が不正解)
- 21番の点A(5,-2), 点B(3,6)について、中点が求められない(13%が不正解)

AC:BC=2:1 である点の座標が求められない (39%が不正解)

AB の長さを求めることができない (22%が不正解)。

整数の計算も少し計算が複雑(カッコが2つ以上で,負の数の四則演算が入るもの)になっていたり,絶対値が2重になったり,2次方程式の解(根)が平方根を用いて解かれるものや,分数の計算で図形の点や長さを求める21番の問題などから,単純な計算を間違える,理解していない,といったことが結論される。

問題Bについて

問題2の単位の換算(35%が不正解)

問題4の括弧が2重でかけ算とわり算の計算(25%が不正解)

問題5の括弧が2重で小数の引き算とわり算(34%が不正解)

問題8の平方根の記号の意味(26%が不正解)

問題11の2次不等式の解法(25%が不正解)

問題12の2次方程式を解く(15%が不正解)

問題14の三角関数の計算(22%が不正解)

問題15の等差数列の値を求めるもの(23%が不正解)

問題16の ジャンケンで3人とも異なる確率 (57%が不正解)

問題17の無理数の逆数を小さい順に並べる(23%が不正解)

問題19の分母の有理化(20%が不正解)

問題20の絶対値をはずす(34%が不正解)

問題21の分数指数と平方根のかけ算(20%が不正解)

問題22の対数計算(約40%が不正解)

問題23の2次の恒等式の係数(2問ありそれぞれ12と28%が不正解)

を求めるという各問題が、表から分かるとおり10人以上の学生ができていない。

問題 19 の図示ではいろいろな誤答があり、不等式の表す領域が完全に理解されていないことが分かる。直線が書けていないものや、y の上下と x 軸の上下と間違っているなど、式の意味の理解不足の学生がいることは注意に値する。

全般の注意であるが、未知数 x を χ でかいている学生が多い。学生に聞いたところ中学校の先生や高校の先生が書くからという回答と小学校で x と書いていたが、中学校の先生が χ と黒板に書く

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001 年度の人数	0	0	0	0	0	0	0	0	.0	0	0	0	0
2000 年度の人数	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
得点	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	合計
1.4.111	11	10	10	1 .	10	13	20	<i>-</i>	22	~~	21	20	F-4 F-1
2001 年度の人数	0	0	1	2	2	2	4	10	10	11	14	8	64

表 9: 2000年と2001年における問題Aの得点分布

のでそのように直したという回答もあった。教師の文字変数に対する知識の無さがうかがえる。著者もいろいろな時と場所でベテランといわれる教師もそのように書く例を見かけるし,卒業して教師になった元学生からもそのような報告を聞くことがある。

計算の基礎,中学生でできる問題2,4,5,8ができていない。これでは数学をする以前の基礎学力があるのか,または世の中に応用をする学問の計算を正確におこなえるのか,単位の換算は大丈夫なのかといったことを不安に思わなければならない。学生の中には、「コンピュータがあるからできなくてもいい」という人もいるが,コンピュータの計算がどうして正しいと思えるのか,その感覚が不思議である。

コンピュータのプログラムを作るときには、 式をはじめとしていろいろなケースを自分で正確に計算し、具体例を自分で作る。自分で計算した値と、正しいアルゴリズムで作られた正しいプログラムとを比較して、プログラムを正確に間違えなく作成しなればならないのである。

[4] には中学1年の問題として $(1+(0.3-1.52))\div(-0.1)^2$ が取り上げられ正答率 (%) は (最後の2つを除いて)

最難関国立	私立トップ	旧帝国大学	地方国立	地方国立	前回調査	今回
(理工系)	(理工系)	(工学系)	(理工系)	(生物系)		
91.4	79.6	66.6	59.4	58.1	66.1	66.2

である。これと比較すると今回の調査では正答率は 66.2% である。他の大学と同じ傾向を示している。また,前回の調査 [3] では正答率 66.1 であり,前回とほぼ同じ値である。

5 年度が違えば学力差は学年間で認められるか

論文 [3, p.180, 表 3, 4] と今回調査で行った同じ問題AとBとには、年度による違いがあるかどうかを Kolmogorov-Smirnov 検定によって検討する。

問題Aについて:

表 9 は, 2 0 0 0 年と 2 0 0 1 年の問題Aの調査では総人数が同じなので, 2 標本の Kolmogorov-Smirnov 検定をする。両側 5 %の臨界値は 14 である。表の場合(簡単な計算により)順位の最大のずれは 13 であるから,棄却されない。したがって, 2 0 0 0 年と 2 0 0 1 年 2 つの集団には,有意水準 5 %で有意な差は認められない。したがって,有意水準 5 %で同じ分布をしていると考えら

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2001 年度の人数	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2000 年度の人数	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
得点	1.4	1.5	1.0							0	-	V	1
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	合計
2001 年度の人数	0	3	2	5	6	9	9	13	3	7	4	2	65
2000 年度の人数		2						10	-		4	2	00
2000 年度の人数	0	2	1	3	6	7	8	13	9	5	2	1	59

表 10: 2000年と2001年における問題Bの得点分布

れる。しかし,臨界値に近いので有意水準を両側10%に下げれば差が認められることになる。すなわち,有意水準10%で大胆な判断をすれば,2000年と2001年の分布は異なっていると考えられる。

2000年度の分布と同じかどうかを (Kolmogorov-Smirnov 検定で) 調べる。1標本と考えて, $\frac{13}{64}=0.2031>0.16693$ (片側 2.5%での臨界値) であり,有意となる。したがって,2001年調査の分布は2000年調査の分布とは違っていることが示される。このことは,一見上記のことに矛盾しているようだが,2標本と考えているときは,ある未知な母集団から2つのサンプルをとって2つの標本集団が作られている。これら2つは同じ母集団に属するかどうかを調べているのに対して,1標本のときは,2000年調査の分布と同じかどうかを調べているのであり,その構造の違いにより結果に違いがみられる。

問題Bについて:

表 10 は問題Bについてである。 2 つの(累積相対度数)分布関数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ の最大ノルム $\sup_{-\infty < x < \infty} |F_1(x) - F_2(x)| = 0.071 = \frac{29}{59} - \frac{36}{65} < \alpha$ であるから 2 0 0 0 年度と 2 0 0 1 年度の 2 つの分布には片側 2.5 %で違いは認められない。 ただし, 1 標本のときの臨界値は片側 2.5 %で, n=59 のとき, $\alpha=0.17373$,n=59 のとき, $\alpha=0.17373$, であり, 2 0 0 0 年か 2 0 0 1 年のど 5 らかの分布を真の分布として, 1 標本の Kolmogorov-Smirnov 検定を行った。

6. 1年間で数学計算能力は変化したか

2000年と2001年とでは(再履修している学生がいて)問題Aは9人,問題Bは7人が約1年をおいて,同じ問題を解いているので1年間に学力は進歩しているかを Wilcoxon 符号付き順位和検定で調べる。

表 11 より、問題 A は、順位和 T 値は 5 で両側 5 %は、下側 3、上側 33 であるから有意水準 5 %では棄却されない。

表 12 より,問題 B は,順位和 T 値は 5 で両側 5 %は,下側 0,上側 21 であるから有意水準 5 %では棄却されない。すなわち,問題 A と B 共に 2 0 0 0 年と 2 0 0 1 年とでの各学生の成績には(再履修学生を集団と見て)変化がなかったと言える。

このことは再履修している学生は7人と9人とで、問題A、問題B共に約1年の期間をあけてテ

2000 年の得点	22	22	10	23	10	ี กา	99	10		⇒r
2000 年071年派		22	19	23	19	21	22	19	20	計
2001 年の得点	20	21	20	24	21	23	23	22	24	9 人
得点の差	-2	-1	1	1 .	2	2	1	3	4	

表 11: 同一学生の2000年と2001年での問題Aの得点表

表 12: 同一学生の2000年と2001年での問題Bの得点表

2000 年の得点	21	22	19	20	18	20	24	計
2001 年の得点	20	18	21	18	19	17	24	7人
得点の差	-1	-4	3	-2	1	-3	0	

ストをしたが、数学の成績は変化していないことを示している。問題Aについては、9人中7人が1から4点の点数の増加がみられる。2人は1から2点の点数の減少がみられる。が、24点が最高で25点満点の学生はいなかった。

問題Bについては、7人中2人が1, 3点の点数の増加で24点で点数の変化がないものが1人、4人は1点から4点の点数の減少がみられる。各個人をみれば、1年間に高校1年程度の数学の計算問題ができなくなっていることを示している。問題Bについては、その解答に必要な能力が低下していることを暗示しているのではないだろうか。

しかし、データ数は7と9で少数であるので、統計的には変化があったとは言えないが、表を眺めると、問題Aについての計算能力はのびているようにみえる。問題Bについての計算能力は低下しているようにみえる。真実はどうなのかは、データ数を増やして調査する必要がある。最履修の学生のデータという条件下の結果であることを考慮に入れなければならない。このことは注意しておかなければならない。

参考文献

- [1] 岡部恒治, 戸瀬信之, 西村和雄: 分数ができない大学生, 東洋経済新報社, 1999.
- [2] 岡部恒治, 戸瀬信之, 西村和雄:小数ができない大学生, 東洋経済新報社, 2000.
- [3] 後藤和雄, 榮 惠子:数学基礎力調查(大学1年生), 鳥取大学教育地域科学部紀要 (地域研究), 第3巻第1号,(2001)179-189.
- [4] 理科離れを探る, 朝日新聞社, 2001年1月25日.
- [5] 理科離れを探る,朝日新聞社,2001年3月1日.