第二階論理の特性について

田　畑　博　敏*

は　じ　め　に

第一階論理の拡張としての第二階論理は，個体変項の量化のみならず，関係変項の量化も許される。それゆえに，第二階論理は強力な表現力を備えている。だが，その表現力と引き換えに，第一階論理の持つメタ定理のいくつかが失われる。本論文の目的は，古典的（標準的）な仕方で提示される第二階論理の持つこのような基本的な特性を，可能なかぎり丁寧に調べることである。（尚，本論文は，以後実行する予定の，第一階論理のさまざまな拡張論理研究の序となる。）

まず，第二階論理の持つ強い表現力の実例を瞥見することから始める[(1)]。

（1）**算術的帰納法**（arithmetical induction：いわゆる数学的帰納法）は以下のように表現される：

$$\forall X\ [X0 \wedge \forall x\ (Xx \rightarrow Xsx) \rightarrow \forall x Xx].$$

この式は「ゼロについて成り立ち，かつそれについて成り立つ任意の数の後者についても成り立つような，任意の性質は，すべての数について成り立つ性質である」と言っている。

（2）**個体の同一性**が，ライプニッツの考え方に従って第二階論理で定義される。

$$\forall x \forall y\ [x = y \longleftrightarrow \forall X\ (Xx \longleftrightarrow Xy)]$$

この式はこう言っている：「個体が同一であるのは，あらゆる性質を共有するとき，かつそのときにかぎる」。

（3）「大抵のRはSである」または「性質Rを持つ大部分の事物は性質Sをも持っている」ということを第一階論理で表現することはきわめてむずかしい。しかし，第二階論理では，この文を，「集合R∩Sから集合R－Sの中への一対一対応関係が存在しない」と解釈することによって，つぎの式で表現できる[(2)]：

$$\neg \exists X^2\ [\forall x\ (\exists y X^2 xy \longleftrightarrow Rx \wedge Sx) \wedge \forall x\ (\exists y X^2\ yx \rightarrow Rx \wedge \neg Sx) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (X^2 xy \wedge X^2 xz \rightarrow y = z) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (X^2 xy \wedge X^2 zy \rightarrow x = z)]$$

この式は，「集合R∩Sは集合R－Sより大きい（濃度が大である）」と言っているので，「大抵のRはSである」の通常の意味を表現している，と考えられる。

（4）**有限性**と**無限性**が第二階論理で定式化できる。量化可能な関数変項を認めるとして，式：

$$\forall f\ [\forall x \forall y\ (fx = fy \rightarrow x = y) \rightarrow \forall y \exists x\ (y = fx)]$$

は，「（個体の全宇宙を**A**とするとき）一対一の関数 f：**A**→**A**がすべて**上への**（onto）関数となる」を意味するから，これは個体の宇宙が「有限である」ということを表現している[(3)]。もちろん，同じことが関係変項のみを用いても，以下のように表現できる：

$$\forall X^2\ [\forall x\ (\exists y X^2 xy \longleftrightarrow x = x) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (X^2 xy \wedge X^2 xz \rightarrow y = z) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (X^2 xy \wedge X^2 zy \rightarrow x = z) \rightarrow \forall y \exists x X^2 xy]$$

＊鳥取大学教育地域科学部・地域設計学講座・哲学

（5）**整列順序**（well ordering）の公理。"≦"が順序[4]のとき，式：

$\forall X\ [\exists y Xy \to \exists u\ (Xu \wedge \forall z\ (Xz \to u \leqq z))]$

は，「すべての非空の（個体の）集合には最小元が存在する」ということを表現している。

（6）**包括公理**（comprehensive axioms）。この公理は「定義可能なすべての関係は存在する」と主張するが，つぎの式で表現される：

$\exists X^n\ \forall x_1 \cdots \forall x_n\ (X^n x_1 \cdots x_n \longleftrightarrow \phi)$

（ここで，X^nはϕの中で自由変項としては出現していない。）

（7）**可算である**（being countable）という性質も第二階論理で表現可能である。一つの集合が可算であるのは，その集合上で定義される線形順序が存在して，その集合のすべての要素がその順序に関する有限個の先行者しか持っていないとき，かつそのときにかぎる。ところで，二項関係Rが線形順序であることは第一階論理で表現されるし[5]，集合の有限性も上の(4)と同様な仕方で第二階論理で表現される。よって，集合Sの可算性はつぎのような第二階論理の式で表現できる：

$\exists R$ [Linear-Or (R) $\wedge \forall x$ ($Sx \to$ {z：Rzx} は有限である)] [6]

数学的な例のみならず，日常的な表現の例も挙げることができる。

（8）「どんな種類の人もいる」はつぎのように表現できる：

$\forall X \exists y Xy$

（9）「右翼にせよ左翼にせよ，あらゆる独裁体制に共通な少なくとも一つの特徴がある」：

$\exists X \forall z\ [Az \wedge (Rz \vee Lz) \to Xz]$

（10）「共通な性格の全然無い異なる男性を愛することのできる何人かの女性がいる」：

$\exists x\ [Wx \wedge \exists y \exists z\ \{My \wedge Mz \wedge y \neq z \wedge Lxy \wedge Lxz \wedge$
$\neg \exists X\ (Xy \wedge Xz)\}]$

さて，このように強い表現力を持つ第二階論理は，その強さのメリットとして，第二階算術のペアノの公理系が（どの二つのモデルも同型であるという意味で）範疇的である（categorical），ということが帰結する。しかし，反面，第二階論理はコンパクト論理ではない（つまり，コンパクト性定理が成り立たない）し，レーヴェンハイム＝スコーレム定理も成り立たない。また，コンパクト性の不成立により，不完全である。さらに，第二階論理に対して標準的または非標準的意味論を与えるとき，背景となる集合論に依存する。これらの点は，論理体系相互間の比較，集合論との比較をおこなうとき，考慮せねばならない論点となる[7]。以下，本論文では，それらの考察の準備的研究を目的として，古典的・標準的な提示法に依拠する，第二階論理の諸特性を調べる。

1．第二階文法

第二階論理に厳密な構文論を与えるために，第二階言語の文法（第二階文法）を提示する。まず，量化可能な変項のタイプと，予め用意する定項にタイプを与える関数を定義する。以下に述べるような条件を満たす集合ＶＡＲと関数ＦＵＮＣから成る順序対Σを記号系（signature）と呼ぶ：

$\Sigma = \langle \mathrm{VAR}, \mathrm{FUNC} \rangle$。

（i）ＶＡＲはつぎの条件(1)－(4)を満たす集合である[8]：

（1）$1 \in \mathrm{VAR}$，　$\langle 0, 1 \rangle \in \mathrm{VAR}$；

（2）$\alpha \in \mathrm{VAR}$　のとき，$\alpha = \langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1 \rangle$（$n \geqq 1$）または$\alpha = \langle 1, \overset{n+1}{\cdots}, 1 \rangle$　；

（3）$\alpha \in \mathrm{VAR}$　かつ　$\alpha = \langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1 \rangle$（$n > 1$）のとき，$\langle 0, 1, \overset{n-1}{\cdots}, 1 \rangle \in \mathrm{VAR}$；

（4）$\beta \in$ＶＡＲ　かつ　$\beta = \langle 1, \overset{n}{\cdots}, 1\rangle$（$n > 1$）のとき，$\langle 1, \overset{n-1}{\cdots}, 1\rangle \in$ＶＡＲ。

（ii）ＦＵＮＣは，定項（関係定項・関数定項・個体定項）の集合ＯＰＥＲ，ＣＯＮＳを定義域とし，その値として，$\langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1\rangle$（$n \geqq 1$）の形か，または $\langle 1, 1, \overset{n+1}{\cdots}, 1\rangle$（$n \geqq 0$）の形のタイプを取る関数である。

こうして，可能なかぎり一般的な二階言語を考えるとき，ＶＡＲは量化可能な変項の持つすべてのタイプを含む集合である。他方，ＦＵＮＣはそのような言語での演算定項にタイプを割り当てる関数である。タイプのうち，タイプ１は個体のタイプであり，個体変項もこのタイプを持つ。０の後に１がｎ個並んだ形のタイプ：$\langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1\rangle$ はｎ項関係変項（定項）の持つタイプである。１がｎ＋１個並んだ形のタイプ：$\langle 1, 1, \overset{n+1}{\cdots}, 1\rangle$ はｎ項関数変項（定項）のタイプである。尚，ゼロ項関数は個体と同一視される。また，タイプ０は真理値（真または偽）のタイプである。

これから考察するわれわれの第二階論理ＳＯＬ（Second Order Logic）の言語である第二階言語では，量化可能な変項としては，個体変項と関係変項のみを用意する。（関数変項に関わる文や概念は関係変項によって表現し直せるからである。）われわれの論理ＳＯＬまたはλＳＯＬ（抽象化演算子を含む第二階論理）の言語の記号系Σは，

$\Sigma = \langle$ＶＡＲ（ＳＯＬ），ＦＵＮＣ$\rangle$

となる。ここで，ＶＡＲ（ＳＯＬ）とＦＵＮＣは以下のものである：

（ｉ）ＶＡＲ（ＳＯＬ）＝ $\{1, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle, \langle 0, 1, 1, 1\rangle, \cdots\}$

（ii）ＦＵＮＣは上で定義された関数と同じもの。

１．１　λＳＯＬの言語$\lambda - L_2$のアルファベット

われわれの言語$\lambda - L_2$の記号（アルファベット）はつぎのものである：

（１）論理結合子（logical connectives）：$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\longleftrightarrow$

（２）量化子（quantifiers）：$\forall$，$\exists$

（３）抽象化子（abstractor）：λ

（４）括弧：　），（

（５）等号：E，E_1，E_2，…（個体間と関係間の同一性または同等性を表す）
これらはタイプとして，$\langle 0, 1, 1\rangle$，$\langle 0, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle\rangle$，…，
$\langle 0, \langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1\rangle, \langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1\rangle\rangle$ 等を持つ[9]。

（６）偽：$\perp$（タイプは０）

（７）個体変項：x，y，z，x_1，x_2，x_3，…（タイプは１）；
１項関係（性質）変項：X^1，Y^1，Z^1，X^1_1，X^1_2，X^1_3，…（タイプは $\langle 0, 1\rangle$）；
２項関係変項：X^2，Y^2，Z^2，X^2_1，X^2_2，X^2_3，…（タイプは $\langle 0, 1, 1\rangle$）；
等々。

（８）０項関数定項（＝個体定項）：a，b，c，c_1，c_2，c_3，…（タイプは１）；
１項関数定項：f^1，g^1，h^1，f^1_1，f^1_2，f^1_3，…（タイプは $\langle 1, 1\rangle$）；
２項関数定項：f^2，g^2，h^2，f^2_1，f^2_2，f^2_3，…（タイプは $\langle 1, 1, 1\rangle$）；
等々。（タイプ $\langle 1, 1, \overset{n+1}{\cdots}, 1\rangle$（$n > 1$）がＶＡＲ（ＳＯＬ）に含まれないのは，上記のように，関数変項を量化可能な変項に含めないからである。）
１項関係定項：R^1，S^1，T^1，R^1_1，R^1_2，R^1_3，…（タイプは $\langle 0, 1\rangle$）；
２項関係定項；R^2，S^2，T^2，R^2_1，R^2_2，R^2_3，…（タイプは $\langle 0, 1, 1\rangle$）；

等々。これらの定項の集合がＯＰＥＲ．ＣＯＮＳである。

言語L_2のアルファベット（の集合）は，言語$\lambda-L_2$のアルファベット（の集合）から抽象化子“λ”を除いたものである。

１．２　表現：項，述語，式

アルファベットの有限列のうち言語的に有意味なものを三つに分類する。それは，項（何らかの形で個体を表示する）と述語と式である。

（１）**項**（term）は，個体変項か，ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳ中の個体定項か，または$f\tau_1\cdots\tau_n$の形をしている[10]。

（２）**述語**は，等号か，関係変項か，またはＯＰＥＲ．ＣＯＮＳ中の関係定項か，または

$$\lambda x_1\cdots x_n\phi$$

という形をしている[11]。

（３）**式**は以下の形のいずれかの形の記号列である[12]。

（ａ）$\Pi^n\tau_1\cdots\tau_n$　（述語と項によって作られる原子式）

（ｂ）$\tau=t$　（個体間の同一性）

（ｃ）$\perp$　（恒偽文）

（ｄ）$\Pi^n=\Psi^n$　（関係間の同一性）

（ｅ）$\neg\phi$，$(\phi\wedge\psi)$，$(\phi\vee\psi)$，$(\phi\rightarrow\psi)$，$(\phi\longleftrightarrow\psi)$　（複合文）

（ｆ）$\forall x\phi$，$\exists x\phi$，$\forall X^n\phi$，$\exists X^n$　（量化による一般文）

これらの表現はいずれも帰納的に定義されるので，表現が何らかの性質を共通に持つことの証明は，数学的帰納法に基づいて実行される。また，これらの表現には，通常の代入規則が適用できる。

２．標準構造

次節で展開する第二階論理の意味論の準備として，本節では標準構造を与え，それに関連するいくつかの命題を証明する。われわれの第二階言語は，記号系$\Sigma=\langle VAR, FUNC\rangle$，すなわち，量化可能な変項と演算定項（関係・関数定項）にタイプを与える関数を持つ構造について何事かを語るためにデザインされている。そこで，記号系Σを持つ標準構造をつぎのように定める。

２．１　記号系Σを持つ**標準構造**（standard structure）とは，以下の（ｉ）－（iv）を満たす順序３組：

$$\mathcal{A}=\langle A, \langle A_n\rangle_{n\geqq 1}, \langle C^{\mathcal{A}}\rangle_{C\in OPER.CONS}\rangle$$

である。

（ｉ）$A\neq\varnothing$　（個体の宇宙Ａは非空の集合である）

（ii）各$n\geqq 1$に対して，$A_n=\mathcal{P}A^n$；

すなわち，ｎ項関係の宇宙A_nは，個体宇宙Ａのｎ項デカルト積A^nの巾集合（A^nの部分集合の集合）である。従って，ｎ項関係の宇宙は，**Ａ上の**（つまり個体間の）すべての可能なｎ項関係を含んでいる。

（iii）各ｎ項関係定項$R\in$ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳ，およびＲのタイプ$FUNC(R)=\langle 0, 1, \overset{n}{\cdots} 1\rangle$に対して，$R^{\mathcal{A}}$（標準構造$\mathcal{A}$でのＲの意味）は個体上のｎ項関係である。すなわち，

$$R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times \overset{n}{\cdots} \times A$$

こうして，構造$\mathcal{A}$での関係$R^{\mathcal{A}}$は個体のn項デカルト積の部分集合である。

(iv) 各n項関数定項$f \in$ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳ，およびfのタイプＦＵＮＣ（f）＝$\langle 1, \overset{n+1}{\cdots}, 1 \rangle$に対して，$f^{\mathcal{A}}$（標準構造$\mathcal{A}$でのfの意味）は個体上のn項関数である。すなわち，

$$f^{\mathcal{A}}: A \times \overset{n}{\cdots} \times A \to A$$

一旦，個体の宇宙が決定されれば，それに伴い，個体間の関係宇宙も決定されるから，標準構造$\mathcal{A}$＝$\langle A, \langle A_n \rangle_{n \geq 1}, \langle C^{\mathcal{A}} \rangle_{c \in OPER.CONS} \rangle$は，順序対$\mathcal{A}$＝$\langle A, \langle C^{\mathcal{A}} \rangle_{c \in OPER.CONS} \rangle$と同一視できる。

標準構造に関する記述は，（第二階論理の対象言語である第二階言語に対する）メタ言語によって記述される。この場合に，われわれは背景となる集合論を前提していることになる。以後，比較・考察される二つの標準構造は同じ記号系Σ＝〈ＶＡＲ（λＳＯＬ），ＦＵＮＣ〉を持つとする。

2.2　部分構造

$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$を，おなじ記号系を持つ二つの標準構造とする：$\mathcal{A}$＝$\langle A, \langle C^{\mathcal{A}} \rangle_{c \in OPER.CONS} \rangle$，$\mathcal{B}$＝$\langle B, \langle C^{\mathcal{B}} \rangle_{c \in OPER.CONS} \rangle$。このとき，$\mathcal{A}$が$\mathcal{B}$の**部分構造**（substructure）であるのは，$\mathcal{A}$が以下の(i)－(iii)を満たすとき，かつそのときにかぎる：

(i) $A \subseteq B$

(ii) すべてのn項関数定項$f \in$ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳに対して，

$$f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}} \upharpoonright A^n \qquad (f^{\mathcal{B}} \upharpoonright A^n \text{は，関数} f^{\mathcal{B}} \text{の，} A \text{の} n \text{項デカルト積への制限})$$

特殊なケースとしてゼロ項関数（個体定項値）は両構造で同一である：$a^{\mathcal{A}} = a^{\mathcal{B}}$。

(iii) すべてのn項関係定項$R \in$ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳに対して，

$$R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n.$$

ここで，"$\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$"は"$\mathcal{A}$は$\mathcal{B}$の部分構造である"を意味するものとする。

2.3　準　同　型

$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$が同じ記号系を持つ二つの標準構造であるとする。関数（または写像）hが$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$への**準同型**（homomorphism）であるのは，丁度hが以下の(i)－(iii)の条件を満たす場合である。

(i) $h: A \to B$　（hは，定義域がAで値域がBの関数である）

(ii) すべてのn項関数定項$f \in$ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳ，および個体$x_1, \cdots, x_n \in A$に対して，

$$h(f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(x_1), \cdots, h(x_n))。$$

（特殊ケースとして，$h(a^{\mathcal{A}}) = a^{\mathcal{B}}$）

(iii) すべてのn項関係定項$R \in$ＯＰＥＲ．ＣＯＮＳ，および個体$x_1, \cdots, x_n \in A$に対して，

$$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Rightarrow \langle h(x_1), \cdots, h(x_n) \rangle \in R^{\mathcal{B}}。$$

この(iii)の条件法が双条件法"⇔"になる場合，**強い**準同型と呼ばれる。

hが$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の中への準同型であるということを"$\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$"と表し，$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の中への準同型が存在することを"$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$"と表す。準同型は，多少荒っぽい仕方で一方の構造の持つ性質を他方の構造に対応づける[13]。

2.4　同　　型

$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$が同じ記号系を持つ二つの標準構造であるとする。関数$h: A \to B$が$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の上への(onto)**同型［写像］**（isomorphism）であるのは，hが以下の(i)－(iii)の条件を満たすとき，

かつそのときにかぎる：

（ｉ）関数ｈが一対一（injection）で上への（surjection）関数（bijection）である。すなわち，$\forall x \forall y\ [h(x)=h(y) \rightarrow x=y]$ かつ $h[A]=B$ である。ここで，$h[A]$ は，Ａの，ｈによる像（image）である：$h[A]=\{y \in B : \exists x\ (x \in A \wedge y=h(x))\}$。

（ⅱ）準同型の場合の条件（ⅱ）と同じ。

（ⅲ）すべてのｎ項関係定項 $R \in$ OPER．CONS，および個体 $x_1, \cdots, x_n \in A$ に対して，

$$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle h(x_1), \cdots, h(x_n) \rangle \in R^{\mathcal{B}}。$$

ｈが $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への同型であるということを“$\mathcal{A} \overset{h}{\cong} \mathcal{B}$”と表し，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の上への同型が存在することを“$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$”と表す。

２．５　埋め込み

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が同じ記号系を持つ二つの標準構造であるとする。関数 $h : A \rightarrow B$ が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への**埋め込み**（embedding）であるのは，ｈが以下の条件（ｉ）－（ⅲ）を満たすとき，かつそのときにかぎる：

（ｉ）関数ｈが一対一である。すなわち，$\forall x \forall y\ [h(x)=h(y) \rightarrow x=y]$。

（ⅱ）同型の場合の（ⅱ）と同じ。

（ⅲ）同型の場合の（ⅲ）と同じ。

ｈが $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への埋め込みであるということを“$\mathcal{A} \overset{h}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$”と表し，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への埋め込みが存在するということを“$\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$”と表す。

２．６　これから準同型，同型，埋め込みといった標準構造間の写像の間での関係を調べる。

命題２．６．１：ｈを $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への強い準同型とする。このとき，ｈが $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への埋め込みであるとき，かつそのときのみ，ｈが $\mathcal{A}$ から $h[\mathcal{A}]$ の上への同型である。

（ここで，$h[\mathcal{A}] = \langle h[A], \langle h[C^{\mathcal{A}}] \rangle_{c \in \mathrm{OPER.CONS}} \rangle$ [14]）

《証明》

ｈを $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への強い準同型とする。いま，ｈが $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への埋め込みと仮定する。埋め込みの定義の（ｉ）より，ｈは一対一である。またｈは，$\mathcal{A}$ の部分構造 $h[\mathcal{A}]$ において，$h[A]$（$\subseteq B$）の上への関数である。よって，ｈは $h[A]$ への一対一上への関数である。さらに，ｈは埋め込みであるから，同型の定義条件の（ⅱ）と（ⅲ）を満たしている。よって，ｈは $\mathcal{A}$ から $h[\mathcal{A}]$ の上への同型である。逆に，ｈが $\mathcal{A}$ から $h[\mathcal{A}]$ の上への同型であるとする。$h[A] \subseteq B$ だから，関数 $h : A \rightarrow B$ は，一対一中への関数である。よって，ｈは埋め込みの定義条件の（ｉ）を満たす。またｈがＡからＢの部分集合の上への同型であるから，ｈは（同型の場合と同じ）埋め込みの定義条件（ⅱ），（ⅲ）を満たしている。よって，ｈは $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への埋め込みである。（Q．E．D．）

命題２．６．２：ｈを $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への準同型とする。このとき，ｈが埋め込みであるとき，かつそのときのみ，ｈは $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B} \upharpoonright h[A]$ の上への同型である。（ここで，$\mathcal{B} \upharpoonright h[A]$ は，個体領域 $h[A]$ を持ち，ｎ項関数として $(h[A])^n$ に制限された，$\mathcal{B}$ におけるｎ項関数を持ち，ｎ項関係として，$\mathcal{B}$ における関係と $(h[A])^n$ との共通部分を持つ，$\mathcal{B}$ の部分構造である。）

《証明》

$h[\mathcal{A}] = \mathcal{B} \upharpoonright h[A]$ であるから，上の命題２．６．１の系として導かれる。（Q．E．D．）

命題２．６．３：ｈが $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ の中への埋め込みであるとき，かつそのときのみ，構造 $\mathcal{C}$ が存在し

て$\mathcal{C}\sqsubseteq\mathcal{B}$（すなわち$\mathcal{C}$は$\mathcal{B}$の部分構造）かつhが$\mathcal{A}$から$\mathcal{C}$の上への同型である。

《証明》

hが$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$への埋め込みであるとする。このとき，命題2．6．2により，hは，$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}\restriction h[A]$の上への同型である。ところで，構造$\mathcal{B}\restriction h[A]$は，その個体領域がh［A］で，関数は$(h[A])^n$に制限された$\mathcal{B}$の関数，関係は$(h[A])^n$と$\mathcal{B}$における関係との共通部分であるような，$\mathcal{B}$の部分構造である。よって，$\mathcal{B}\restriction h[A]$を$\mathcal{C}$と見なすことにより，hは$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の部分構造$\mathcal{C}$の上への同型となっている。逆に，$\mathcal{C}\sqsubseteq\mathcal{B}$かつhが$\mathcal{A}$から$\mathcal{C}$の上への同型であるような構造$\mathcal{C}$が存在するとする。$\mathcal{C}$における関数は$\mathcal{B}$の関数の$(h[C])^n$への制限であるから，$\mathcal{C}$での関数の値はそのまま$\mathcal{B}$での関数の値となり，$\mathcal{C}$における関係は$\mathcal{B}$における関係と$(h[C])^n$との共通部分であるから，$\mathcal{C}$における関係はそのまま$\mathcal{B}$における関係でもあること，およびhが同型であることから，埋め込みの定義条件の(ii)と(iii)は満たされる。hは$\mathcal{B}$の中への一対一関数だから，埋め込みの定義条件(i)も満たす。よって，hは$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の中への埋め込みである。(Q. E. D.)

命題2．6．4：上で定義された部分構造（$\sqsubseteq$），準同型（$\to$），同型（$\cong$）および埋め込み（$\dot{\sqsubseteq}$）は，相互に以下のような含意関係（矢印）にある。

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A}\sqsubseteq\mathcal{B} & & \\ & & \Big\downarrow \text{①} & & \\ \mathcal{A}\cong\mathcal{B} & \xrightarrow{\quad\text{②}\quad} & \mathcal{A}\dot{\sqsubseteq}\mathcal{B} & \xrightarrow{\quad\text{③}\quad} & (\mathcal{A}\to\mathcal{B}) \end{array}$$

《証明》

②の含意は，同型と埋め込みの定義と，上への関数は中への関数の特別なケースであることにより示される。③の含意も，埋め込みと準同型の定義と，一対一の関数が関数の特別なケースであることと，双条件法からその一方の条件法が導かれることによる。①の含意は命題2．6．3を用いて以下のように示される。$\mathcal{A}$を，$\mathcal{B}$内部での$\mathcal{A}$自身のコピーであると見なす。すなわち，恒等写像：h(x)＝xは，$\mathcal{A}$から$\mathcal{A}$の上への（自己）同型である。いま，仮定により$\mathcal{A}\sqsubseteq\mathcal{B}$だから，$\mathcal{C}\sqsubseteq\mathcal{B}$かつhが$\mathcal{A}$から$\mathcal{C}$の上への同型であるような，$\mathcal{B}$の部分構造$\mathcal{C}$（つまり$\mathcal{A}$そのもの）が存在する。よって，命題2．6．3により，hは$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の中への埋め込みである（$\mathcal{A}\dot{\sqsubseteq}\mathcal{B}$）。(Q. E. D.)

2．7　合同関係と準同型

これから，同値関係よりももっと類似性の高い関係として合同関係を定義し，それと準同型との関連を調べる。

2．7．1　合同関係

標準構造$\mathcal{A}$と２項関係$R\subseteq A\times A$が与えられたとする。Rが**合同関係**（congruence relation）であるのは，以下の条件(i)－(iii)を満たすとき，かつそのときにかぎる：

(i) RはA上の同値関係である。すなわち，Rは反射的，対称的，推移的であり，その定義域と値域はAである。

(ii) 任意のn項関数定項f∈OPER．CONS，および$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in A$に対して
$$\langle x_1, y_1\rangle \in R, \cdots, \langle x_n, y_n\rangle \in R \Rightarrow \langle f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \cdots, y_n)\rangle \in R$$
すなわち，関係Rを満たす個体どうしに適用された関数の関数値も再び関係Rを満たす。

(iii) 任意のn項関係定項T∈OPER．CONS，および$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in A$に対して

$\langle x_1, y_1\rangle \in R, \cdots, \langle x_n, y_n\rangle \in R \Rightarrow [\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in T^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle y_1, \cdots, y_n\rangle \in T^{\mathcal{A}}]$

すなわち，関係Rを満たす個体グループが同一の関係を満たすかどうか，は常に一致する。

命題2．7．2：hが$\mathcal{A}$からの，他の構造$\mathcal{B}$の中への強い準同型であるとする。そのとき，

$\sim h = \{\langle x, y\rangle \in A \times A : h(x) = h(y)\}$

はA上の合同関係である。

この命題は，強い準同型によって他の構造の同一個体に写される元の構造の個体どうしを関係～hと定義するとき，この関係～hは合同関係にある，と主張している。

《証明》

（i）～hが同値関係であることは容易に示すことができる[15]。

（ii）任意のn項関数定項$f \in$OPER．CONS，および$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in A$に対して，$\langle x_1, y_1\rangle \in \sim h, \cdots, \langle x_n, y_n\rangle \in \sim h$と仮定する。このとき，～hの定義によって，

$h(x_1) = h(y_1), \cdots, h(x_n) = h(y_n)$ ……①

である。hは準同型であるから，

$h(f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(x_1), \cdots, h(x_n))$　［準同型の定義(ii)より］

$= f^{\mathcal{B}}(h(y_1), \cdots, h(y_n))$　［①より］

$= h(f^{\mathcal{A}}(y_1, \cdots, y_n))$ ……②　［再び準同型の定義より］

さらに，$\langle f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \cdots, y_n)\rangle \in A \times A$……③。よって，②と③と～hの定義から，$\langle f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \cdots, y_n)\rangle \in \sim h$　が導かれる。

（iii）任意のn項関係定項$R \in$OPER．COPNS，および$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in A$に対して$\langle x_1, y_1\rangle \in \sim h, \cdots, \langle x_n, y_n\rangle \in \sim h$と仮定する。このとき，～hの定義により

$h(x_1) = h(y_1), \cdots, h(x_n) = h(y_n)$ ……④

である。そこで，

$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle h(x_1), \cdots, h(x_n)\rangle \in R^{\mathcal{B}}$　［強い準同型の定義より］

$\Leftrightarrow \langle h(y_1), \cdots, h(y_n)\rangle \in R^{\mathcal{B}}$　［④より］

$\Leftrightarrow \langle y_1, \cdots, y_n\rangle \in R^{\mathcal{A}}$　［強い準同型の定義より］

すなわち，$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle y_1, \cdots, y_n\rangle \in R^{\mathcal{A}}$。（Q．E．D．）

命題2．7．3　$\mathcal{A}$上の任意の合同関係≡に対して，≡＝～hであるような，$\mathcal{A}$から他の構造：$\mathcal{A}_{\equiv} = \langle A_{\equiv}, \langle C^{\mathcal{A}_{\equiv}}\rangle_{c \in \mathrm{OPER.CONS}}\rangle$の上への（onto）強い準同型hが存在する。

《証明》

構造$\mathcal{A}_{\equiv}$が以下のように定義されるとせよ：

（i）$A_{\equiv} = \{[x]_{\equiv} : x \in A\}$は，関係≡によって生成される同値類$[x]_{\equiv} = \{z \in A : x \equiv z\}$の集合。

（ii）任意のn項関数定項$f \in$OPER．CONS，および$x_1, \cdots, x_n \in A$に対して，

$f^{\mathcal{A}_{\equiv}}([x_1]_{\equiv}, \cdots, [x_n]_{\equiv}) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)]_{\equiv}$。

すなわち，$A_{\equiv}$のメンバーである同値類間に適用された新しい関数$f^{\mathcal{A}_{\equiv}}$の関数値は，同値類の代表元に適用された元の関数$f^{\mathcal{A}}$の関数値の≡による同値類である。

（iii）任意のn項関係定項$R \in$OPER．CONS，および$x_1, \cdots, x_n \in A$に対して，

$\langle [x_1]_{\equiv}, \cdots, [x_n]_{\equiv}\rangle \in R^{\mathcal{A}_{\equiv}} \Leftrightarrow \langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in R^{\mathcal{A}}$。

すなわち，$A_{\equiv}$のメンバーの同値類間に新しい関係$R^{\mathcal{A}_{\equiv}}$が成り立つのは，同値類の対応する代表元の間に元の関係$R^{\mathcal{A}}$が成り立つとき，かつそのときにかぎる。

hが，Aの任意の元xをそれの同値類$[x]_{\equiv}$に写像する関数である，とせよ。すなわち，

$h : A \to A_{\equiv}$

$x \longmapsto [x]_{\equiv}$（つまり，$h(x) = [x]_{\equiv}$ということである）

1．このとき，hは上への（onto）関数である。実際，$A_{\equiv} = \{[x]_{\equiv} : x \in A\} = \{z : \exists x(x \in A \wedge z = [x]_{\equiv})\}$だから，任意のzについて，$z \in A_{\equiv}$とすると，ある$x_0 \in A$が存在して，$z = [x_0]_{\equiv}$である。hの定義より，$h(x_0) = [x_0]_{\equiv} = z$であるから，$z \in \{z : \exists x(x \in A \wedge h(x) = z)\} = h[A]$，つまりzはhの値域$h[A]$に属する。こうして，$A_{\equiv} \subseteq h[A]$。hはAから$A_{\equiv}$への関数として定義されているので，トリヴィアルに$h[A] \subseteq A_{\equiv}$。これらにより$h[A] = A_{\equiv}$，すなわち関数hは上への関数である。

2．つぎに準同型の定義条件2．3（ii）に相当する等式を示したい。実際，

$$h(f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)) = [f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)]_{\equiv} \quad \text{［hの定義より］}$$
$$= f^{\mathcal{A}}_{\equiv}([x_1]_{\equiv}, \cdots, [x_n]_{\equiv}) \quad \text{［上の（ii）より］}$$
$$= f^{\mathcal{A}}_{\equiv}(h(x_1), \cdots, h(x_n)) \quad \text{［hの定義より］}$$

3．さらに準同型の定義条件2．3（iii）を双条件法に強めた式が成り立つことを示す。

$$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle [x_1]_{\equiv}, \cdots, [x_n]_{\equiv} \rangle \in R^{\mathcal{A}_{\equiv}} \quad \text{［上の（iii）より］}$$
$$\Leftrightarrow \langle h(x_1), \cdots, h(x_n) \rangle \in R^{\mathcal{A}_{\equiv}} \quad \text{［hの定義より］}$$

4．最後に，$\equiv = \sim h$ということを確かめる。任意の$x, y \in A$に対して，

$\langle x, y \rangle \in \equiv \Leftrightarrow x \equiv y$

$\Leftrightarrow [x]_{\equiv} = [y]_{\equiv}$　［≡が合同関係だから同値関係でもあるから(16)］

$\Leftrightarrow h(x) = h(y)$　［hの定義より］

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \sim h$　［$\langle x, y \rangle \in A \times A$および$\sim h = \{\langle x, y \rangle \in A \times A : h(x) = h(y)\}$より］

（Q．E．D．）

命題2．7．4　hが$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の上への（onto）強い準同型であるとする。そのとき，

$\mathcal{A}^{\sim h} \cong \mathcal{B}$.　（ただし$\mathcal{A}^{\sim h} = \langle A^{\sim h}, \langle C^{\sim h} \rangle_{c \in OPER.\,CONS} \rangle$）

《証明》

hが$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$の上への強い準同型であるとする。このとき，先の命題2．7．2により，$\mathcal{A}$上の合同関係$\sim h$が定義できる。すると，命題2．7．3によって，$\mathcal{A}$から$\mathcal{A}^{\sim h}$の上への関数で，$\sim h = \sim h'$であるような強い準同型h′が存在する。このとき，$\mathcal{A}^{\sim h} \cong \mathcal{B}$である。なぜなら，

$H : A^{\sim h} \to B$

$[x]^{\sim h} \mapsto h(x)$　（ただし$A^{\sim h} = \{[x]^{\sim h} : x \in A\}$である）

によって定義される関数Hは同型（isomorphism）であるからである。実際に，Hは以下の（i）−（iii）を満たす。

（i）Hは十分に定義されていて，一対一で上への関数である。なぜなら，まず，

$\langle x, y \rangle \in \sim h \Leftrightarrow [x]^{\sim h} = [y]^{\sim h}$　［～hが合同（∴同値）関係であることから］

$\Leftrightarrow h(x) = h(y)$　［Hが関数であることと～hの定義より］

$\Leftrightarrow H([x]^{\sim h}) = H([y]^{\sim h})$　［Hの定義により］

こうして，Hの関数値の同一性$h(x) = h(y)$が，$\langle x, y \rangle$の～hの帰属如何によって決定されるが，仮定よりhは，従って～hは十分に定義されているから，Hも十分に定義されていることになる。また，上の必要十分の中に，$h(x) = h(y) \Rightarrow [x]^{\sim h} = [y]^{\sim h}$が含まれている

ので，Hは一対一である。さらにhが上への（onto）関数だからHも上への関数である[17]。

（ii）任意のn項関数定項$f \in$ OPER. CONS，および$A^{\sim h}$の任意の要素$[x_1]^{\sim h}, \cdots, [x_n]^{\sim h}$に対して，

$$
\begin{aligned}
& H(f^{\mathcal{A}^{\sim h}}([x_1]^{\sim h}, \cdots, [x_n]^{\sim h})) \\
&= H([f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)]^{\sim h}) && [\text{命題}2.7.3\text{の}A_{\equiv}\text{における(ii)による}] \\
&= h(f^{\mathcal{A}}(x_1, \cdots, x_n)) && [H\text{の定義}] \\
&= f^{\mathcal{B}}(h(x_1), \cdots, h(x_n)) && [h\text{が}\mathcal{A}\text{から}\mathcal{B}\text{への準同型であることから}] \\
&= f^{\mathcal{B}}(H([x_1]^{\sim h}), \cdots, H([x_n]^{\sim h})) && [H\text{の定義による}]
\end{aligned}
$$

（iii）任意のn項関係定項$R \in$ OPER. CONS，および$A^{\sim h}$の任意の要素$[x_1]^{\sim h}, \cdots, [x_n]^{\sim h}$に対して，

$$
\begin{aligned}
& \langle [x_1]^{\sim h}, \cdots, [x_n]^{\sim h} \rangle \in R^{\mathcal{A}^{\sim h}} \\
&\Leftrightarrow \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in R^{\mathcal{A}} && [\sim h\text{を，命題}2.7.3\text{の(iii)での}\equiv\text{と見る}] \\
&\Leftrightarrow \langle h(x_1), \cdots, h(x_n) \rangle \in R^{\mathcal{B}} && [\text{仮定により}h\text{が}\underline{\text{強い}}\text{準同型であるから}] \\
&\Leftrightarrow \langle H([x_1]^{\sim h}), \cdots, H([x_1]^{\sim h}) \rangle \in R^{\mathcal{B}} && [H\text{の定義：}H([x]^{\sim h}) = h(x)\text{による}]
\end{aligned}
$$

（Q. E. D.）

命題2.7.5　h_1とh_2が，それぞれ，$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}_1$の上への，および$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}_2$の上への，強い準同型であり，かつ$\sim h_1 = \sim h_2$のとき，$\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$である。

《証明》

命題2.7.4より，$\mathcal{A}^{\sim h_1} \cong \mathcal{B}_1$，$\mathcal{A}^{\sim h_2} \cong \mathcal{B}_2$が導かれる。しかし，仮定により，$\sim h_1 = \sim h_2$である。$\therefore \mathcal{B}_1 \cong \mathcal{A}^{\sim h_1} \cong \mathcal{B}_2$。$\cong$は同値関係だから，$\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$。（Q. E. D.）

3．標準的意味論

これまでの節でわれわれは，言語とそれが表現すべき存在（＝構造）を提示した。標準的構造は個体の宇宙を基盤として，その上に個体間の関係の宇宙を築いていた。本節では「意味」，すなわち，言語と存在（構造）を繋ぐものを，解釈と充足の概念によって展開する。解釈は，変項の持つ不定性を構造の要素の割り当てという形で捉えたものである。この解釈が項と述語の意味を与え，それによって文の充足が定義され，真理の概念の基礎となる。これらの事柄を，一歩一歩具体的に展開し，その後，メタの性質，高次の関係，表現力の問題等へと探究を進めることにする。

3．1　割り当て（assignment）

3．1．1　第二階論理において，割り当ては変項の集合から宇宙への写像Mである：

$$M : \nu \cup (\bigcup_{n \geq 1} \nu_n) \to A \cup (\bigcup_{n \geq 1} A_n)$$

（ここで，各nに対して，$M(\nu) \subseteq A$，$M(\nu_n) \subseteq A_n = \mathcal{P}A^n$。すなわち，n項関係は常に$A^n$の巾集合において値を得る。）

3．1．2　Mが割り当てであり，xが個体変項で，xがAの元であるならば，M^x_{x}はxをxに写像する割り当てであり，xと異なる変項についてはMと全く一致する。従って，$M^x_{\mathrm{x}} = (M - \{\langle x, M(x) \rangle\}) \cup \{\langle x, \mathrm{x} \rangle\}$。

3．1．3　Mが割り当てであり，X^nがn項関係変項であり，X^nがA_nの要素であるとき，$M^{X^n}_{\mathrm{X}^n}$

は，変項X^nを関係$\mathbf{X}^n$へと写像する割り当てであり，他の変項に関してはMと一致する。従って，$M^{\mathbf{X}^n}{}_{X^n} = (M - \{\langle X^n, M(X^n)\rangle\}) \cup \{\langle X^n, \mathbf{X}^n\rangle\}$。

３．１．４　同様にして，われわれは，タイプの相異なる任意の変項$v_1, \cdots, v_n$，およびこれらと同じ添え字の変項と同タイプを持つ，Ａ中の個体または個体間の関係$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$に対して，

$$M^{\mathbf{v}1\cdots\mathbf{v}n}{}_{v1\cdots vn}$$

を定義する。すなわち，$M^{\mathbf{v}1\cdots\mathbf{v}n}{}_{v1\cdots vn} = (M - \{\langle v_1, M(v_1)\rangle, \cdots, \langle v_n, M(v_n)\rangle\}) \cup \{\langle v_1, \mathbf{v}_1\rangle, \cdots, \langle v_n, \mathbf{v}_n\rangle\}$。

３．２　解釈（interpretation）

標準構造上の解釈$\mathcal{I}$は，順序対〈$\mathcal{A}$，M〉である：

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}, M\rangle$$

ここで，Mは$\mathcal{A}$上の割り当てである。一旦，解釈が与えられると，すべての項はＡにおける要素を表示し，その解釈の下ですべての式は真か偽となる。「解釈の下で真である」という概念が「充足」関係によって，正確に定式化される。

３．２．１　項と述語の指示の定義，$\lambda-L_2$の式の充足の定義

解釈$\mathcal{I}$を$\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}, M\rangle$とする。$\tau$が項で$\mathbf{x} \in A$のとき，$\mathcal{I}(\tau) = \mathbf{x}$は，項$\tau$が$\mathcal{I}$の下で個体$\mathbf{x}$を表していることを示す。

（T１）$\mathcal{I}(x) = M(x)$

（T２）$\mathcal{I}(a) = a^{\mathcal{A}}$

（T３）$\mathcal{I}(f\tau_1\cdots\tau_n) = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{I}(\tau_1)\cdots\mathcal{I}(\tau_n))$

Π^nがｎ項述語で$\mathbf{X}^n \in A_n = \mathcal{P}A^n$ならば，$\mathcal{I}(\Pi^n) = \mathbf{X}^n$は，$\Pi^n$が解釈$\mathcal{I}$において関係$\mathbf{X}^n$を表現していることを示す。

（P１）$\mathcal{I}(X^n) = M(X^n)$

（P２）$\mathcal{I}(R) = R^{\mathcal{A}}$

（P３）$\mathcal{I}(=) = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in A^2 : \mathbf{x} = \mathbf{y}\} \cup (\bigcup_{n\geqq 1}\{\langle \mathbf{X}^n, \mathbf{Y}^n\rangle \in A_n{}^2 : \mathbf{X}^n = \mathbf{Y}^n\})$

（P４）$\mathcal{I}(\lambda x_1\cdots x_n\phi) = \{\langle \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\rangle \in A\times\cdots\times A : \mathcal{I}^{\mathbf{x}1\cdots\mathbf{x}n}{}_{x_1\cdots x_n}\ \mathrm{SAT}\ \phi\}$

ここで，$\mathcal{I}^{\mathbf{x}1\cdots\mathbf{x}n}{}_{x_1\cdots x_n}\ \mathrm{SAT}\ \phi$は，解釈$\mathcal{I}^{\mathbf{x}1\cdots\mathbf{x}n}{}_{x_1\cdots x_n}$が式$\phi$を充足するということを示す。一般に，

$$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi$$

と書いて，解釈$\mathcal{I}$が式ϕを**充足する**（satisfy）ことを示す。

（F１）$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \Pi^n\tau_1\cdots\tau_n \Leftrightarrow \langle \mathcal{I}(\tau_1), \cdots, \mathcal{I}(\tau_n)\rangle \in \mathcal{I}(\Pi^n)$

特に　$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \mathcal{I}(\tau_1) = \mathcal{I}(\tau_2)$。また，$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \bot$は不成立。

（F２）$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \Pi^n = \Psi^n \Leftrightarrow \mathcal{I}(\Pi^n) = \mathcal{I}(\Psi^n)$

（F３）$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi$でない；　$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi\vee\psi \Leftrightarrow \mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi$または$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \psi$；

$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi\wedge\psi \Leftrightarrow \mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi$かつ$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \psi$；

$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi\rightarrow\psi \Leftrightarrow \mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi$ならば$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \psi$；

$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi\longleftrightarrow\psi \Leftrightarrow \mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \phi$のときかつそのときのみ$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \psi$

（F４）$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \forall x\phi \Leftrightarrow$ すべての$\mathbf{x} \in A$に対して　$\mathcal{I}^{\mathbf{x}}{}_x\ \mathrm{SAT}\ \phi$；

$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \exists x\phi \Leftrightarrow$ 少なくとも一つの$\mathbf{x} \in A$に対して　$\mathcal{I}^{\mathbf{x}}{}_x\ \mathrm{SAT}\ \phi$；

（F５）$\mathcal{I}\ \mathrm{SAT}\ \forall X^n\phi \Leftrightarrow$ すべての$\mathbf{X}^n \in A_n$ に対して　$\mathcal{I}^{\mathbf{X}^n}{}_{X^n}\ \mathrm{SAT}\ \phi$；

$\mathcal{I}$ SAT $\exists X^n \phi \Leftrightarrow$ 少なくとも一つの$\mathrm{X}^n \in \mathrm{A}_n$に対して　$\mathcal{I}^{X^n}_{x^n}$ SAT ϕ

3．2．2　式のモデル

式ϕが与えられたとき，解釈$\mathcal{I}$が**ϕのモデル**であるのは$\mathcal{I}$ SAT ϕ（$\mathcal{I}$がϕを充足する）ときかつそのときにかぎる。また，式の集合Γが与えられたとき，解釈$\mathcal{I}$が**Γのモデル**であるのは，すべての式$\phi \in \Gamma$に対して，$\mathcal{I}$ SAT ϕのときかつそのときにかぎる。解釈$\mathcal{I}$が式ϕのモデルであることを

$\mathcal{I} \vDash \phi$

と表記し，解釈$\mathcal{I}$が式の集合Γのモデルであることを

$\mathcal{I} \vDash \Gamma$

と表記する。また，ϕが割り当てを必要としないような文（自由変項を含まない文）であるとき，「構造$\mathcal{A}$はϕのモデルである」または「ϕは$\mathcal{A}$で真である」と言い，“$\mathcal{A} \vDash \phi$”と表記することがある。Γが割り当てを含まない文の集合であるとき，構造$\mathcal{A}$がΓのモデルであることを“$\mathcal{A} \vDash \Gamma$”と表記する。

3．2．3　充足性の定義

式ϕが充足可能である（satisfiable）のは，少なくとも一つの解釈$\mathcal{I}$が存在して$\mathcal{I} \vDash \phi$であるとき，かつそのときにかぎる。**式の集合Γが充足可能である**のは，Γ中のすべての式を同時に充足する解釈が存在する，すなわち（$\exists \mathcal{I}$）（$\forall \phi$）（$\phi \in \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \vDash \phi$），のときかつそのときにかぎる。また，式$\phi$が**充足不可能である**（unsatisfiable）のは，ϕが充足可能ではないとき，かつそのときにかぎる。式の集合Γが**充足不可能である**のは，Γが充足可能でないとき，かつそのときにかぎる。

3．3　帰結と妥当性

帰結関係は正しい推論の仮定（または仮定の集合）と結論との間に成り立つ意味論的関係であり，論理の基本概念である。正しい推論とは，さまざまなモデルや状況・世界の差異にも関わらず推論の過程を一貫するあるパターンである，という考えを定式化したものが，（論理的）帰結の概念である。それは，正しい推論においては真なる仮定の集合Γから偽なる結論ϕが導かれることは在り得ない，とも言い換えることができる。そして，モデルの概念を用いて，

$\Gamma \cup \{\neg \phi\}$

がいかなるモデルをも持たないこと，として定式化される。これは，Γの中の任意の式を充足する解釈が常にϕのモデルでもある（$\forall \mathcal{I}$（$\mathcal{I} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \vDash \phi$））ということに他ならない。意味論的な帰結の概念（$\vDash$）に対応するのが構文論的な導出可能の概念（$\vdash$）であり，これは推論過程を形式的に具象化するものである。また，われわれは，妥当性を式の空集合からの帰結と定義する。任意の解釈が空集合のモデルであるから，この定義により，妥当な式を，すべての解釈がそのモデルとなるような式（直観的にはあらゆる世界で成り立つ式）として定義できる。

3．3．1　（論理的）帰結の定義

式ϕが式の集合Γの**帰結**（consequence）であるのは，Γのモデルである任意の解釈がϕのモデルでもある，すなわち$\Gamma \vDash \phi$（詳しくは$\forall \mathcal{I}$（$\mathcal{I} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \vDash \phi$）），のときかつそのときにかぎる。式$\phi$が集合$\Gamma$の帰結であることを

$\Gamma \vDash \phi$

と表記する。ϕがΓの帰結ではないことを“$\Gamma \nvDash \phi$”と表記する。このとき，ϕはΓから**独立している**（independent）とも言う。（われわれは同じ記号“$\vDash$”を，モデルを表すにも帰結を表すにも用いるが，文脈により混乱は避けうる。）

3．3．2　妥当性の定義

式ϕが**妥当である**（valid）のは，$\varnothing \vDash \phi$であるとき，かつそのときにかぎる。任意の解釈が式の空集合のモデルであるから，結局，妥当な式とはすべての解釈で充足される（すべての解釈をモデルとする）式のことである。式ϕが妥当であることを

$$\vDash \phi$$

と表記する。すべてのΓ（式の集合）と式ϕに対して，「$\Gamma \vDash \phi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg \phi\}$ が充足不可能」ということが成り立つ[18]。

3．4　論理的同値

以下で二つの式が互いに他の帰結であることを論理的同値として定義する。これはメタ概念である。この概念は，われわれの言語の単純化や，別形の意味論提示の際の基礎となる。

3．4．1　定　　義

二つの式ϕとψが**論理的に同値である**（logically　equivalent）のは，$\phi \vDash \psi$かつ$\psi \vDash \phi$（言い換えるとϕのモデルである任意の解釈がψのモデルでもあり，ψのモデルである任意の解釈がϕのモデルでもある）とき，かつそのときにかぎる。ϕとψが論理的に同値であることを

$$\phi \vDash\dashv \psi$$

と表記する。

3．4．2　命題

すべての式ϕ，ψに対して，$\phi \vDash\dashv \psi \Leftrightarrow \vDash \phi \longleftrightarrow \psi$。すなわち，二つの式が論理的に同値であるということは，その二つの式からなる双条件法の文が妥当であるということに他ならない[19]。

3．4．3　**命題**：すべての式ϕ，ψに対して以下のことが成り立つ：

（1）$\bot \vDash\dashv \neg x = x$

（2）$\phi \wedge \psi \vDash\dashv \neg(\neg \phi \vee \neg \psi)$

（3）$\phi \to \psi \vDash\dashv \neg \phi \vee \psi$

（4）$\phi \longleftrightarrow \psi \vDash\dashv \neg(\phi \vee \psi) \vee \neg(\neg \phi \vee \neg \psi)$

（5）$\forall v \phi \vDash\dashv \neg \exists v \neg \phi$

《証明》

命題3．4．2により，容易に証明できる[20]。

3．4．4　**命題**：すべての式ϕ，ψに対して以下のことが成り立つ。（証明略）

（1）$\neg \phi \vDash\dashv \phi \to \bot$

（2）$\phi \wedge \psi \vDash\dashv (\phi \to (\psi \to \bot)) \to \bot$

（3）$\phi \vee \psi \vDash\dashv (\phi \to \bot) \to \psi$

（4）$\phi \longleftrightarrow \psi \vDash\dashv \{(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \phi) \to \bot)\} \to \bot$

（5）$\forall v \phi \vDash\dashv (\exists v (\phi \to \bot)) \to \bot$

他にも，第二階論理における論理的に同値な式の対がある。例えば，二つの個体x，yが同一であることを表現する式：$\forall Z(Zx \longleftrightarrow Zy)$は，つぎの式と論理的に同値である：$\forall Z^2(\forall z Z^2 zz \to Z^2 xy)$。後者の式は，個体xとyは任意の反射的2項関係にある，と主張する。同一性が最小の反射的関係であることと，標準構造においてはすべての集合や関係が関係宇宙の中に与えられていることとにより，この同値関係が成り立つ。よって，等号記号を原始記号として用いない第二階論理において，$\forall Z(Zx \longleftrightarrow Zy)$と$\forall Z^2(\forall z Z^2 zz \to Z^2 xy)$のいずれもが，

$x = y$の代わりに用いられる。

また，言語を単純化して，{¬，∨，∃} のみを原始論理記号とする場合，他の記号：⊥，∧，→，⟷，∀を命題３．４．３を基礎として定義できる。{⊥，→，∀} のみを原始論理記号とする場合（様相論理の場合等），他の記号：¬，∧，∨，⟷，∃は命題３．４．４を基礎として定義できる。

３．５　与えられた構造における定義可能な集合と関係

標準構造$\mathcal{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \geq 1}, \langle C^{\mathcal{A}} \rangle_{c \in OPER.CONS} \rangle$と第二階言語$\lambda - L_2$または$L_2$が与えられると，単に$\mathcal{A}$の個体間関係のみならず，個体間の関係の関係（第二階関係）や，言語を用いて定義される関係，といった関係をも定義できる。われわれの言語の記号系によって標準構造に当初から与えられているのは個体の宇宙と，その上での関係である。しかし，それ以外に，いくつかの言わば隠された関係がある。本節ではそれを，当初の個体間関係（第一階関係）も含めて統一的に扱う。

３．５．１　まず構造$\mathcal{A}$の第一階関係をつぎのように定義する。$\mathcal{A}$を標準的な第二階構造だとする。$\mathcal{A}$上のｎ項の**第一階関係**Ｘとは，個体の宇宙のｎ項デカルト積の部分集合である：$X \subseteq A^n$。$REL^{1ST}(\mathcal{A})$を$\mathcal{A}$上のすべての第一階関係のクラスとする：

$$REL^{1ST}(\mathcal{A}) = \{X : \exists n\,(X \subseteq A^n)\} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P} A^n。$$

任意の第一階関係Ｘが$\mathcal{A}$の中への（into）関係であるのは，$X \in A_n = \mathcal{P} A^n$または$X = R^{\mathcal{A}}$の場合である。$\mathcal{A}$の中への第一階関係全体のクラスを$REL^{1ST}(\in \mathcal{A})$と表記する。

ここで定義された関係は第一階関係，すなわち個体間の関係である。標準的第二階構造$\mathcal{A}$の宇宙に存在する関係は，すべて個体間の関係である。逆に，構造が標準的であるとき，個体間の関係はすべて構造の宇宙の中にある。こうして，標準的構造では，$\mathcal{A}$上のすべてのｎ項第一階関係は$\mathcal{A}$の中への関係である。上の定義より，以下の命題が成り立つ：

３．５．１．１　**命題**：標準構造$\mathcal{A}$に対して，

（１）$REL^{1ST}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \geq 1} A_n \ (= \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P} A^n)$；

（２）$REL^{1ST}(\mathcal{A}) = REL^{1ST}(\in \mathcal{A})$。

３．５．２　**$\mathcal{A}$の第二階関係の定義**

$\mathcal{A}$が標準的第二階構造であり，$Ai_1, \cdots, Ai_n$が$\mathcal{A}$の宇宙である（各Ai_jが個体宇宙かまたは関係宇宙，すなわち$Ai_j = A$または$Ai_j = A_m$，$m \geq 1$）とき，これらの宇宙のデカルト積の部分集合Ｘ：

$$X \subseteq Ai_1 \times \cdots \times Ai_n$$

は，$\mathcal{A}$の**第二階関係**（second order relation）である。$REL(\mathcal{A})$を$\mathcal{A}$のすべての第二階関係のクラスとする：

$$REL(\mathcal{A}) = \bigcup \{X : X \subseteq Ai_1 \times \cdots \times Ai_n\} = \bigcup \mathcal{P}\,(Ai_1 \times \cdots \times Ai_n)。$$

$X \in A_n$または$X = R^{\mathcal{A}}$（ある$R \in OPER.CONS$に対して）であるとき（すなわちＸが構造に当初から与えられた関係宇宙の一つであるとき），第二階関係Ｘは$\mathcal{A}$の中への（into）関係と言う。$REL(\in \mathcal{A})$を，$\mathcal{A}$の中への第二階関係全体のクラスとする。固有第二階関係を，$REL^{2ND}(\mathcal{A}) = REL(\mathcal{A}) - REL^{1ST}(\mathcal{A})$として定義する。

第二階の関係において，すべてのAi_jに対して$Ai_j = A$のとき，定義3.5.1での第一階関係となる。こうして，第二階関係の集合は，（真）部分集合として，第一階関係の集合を含んでいる。また，記号系の選択により，構造の中に固有第二階関係を持たない（異なる記号系を選べば持てる）。個体の可算無限宇宙を持つ構造$\mathcal{A}$（$|A| = \aleph_0$）に対して，$\mathcal{A}$の第一階関係の集合$REL^{1ST}(\mathcal{A})$は$2^{\aleph_0}$個のメンバーを持つ(21)。また，$\mathcal{A}$の（固有）第二階関係の集合$REL^{2ND}(\mathcal{A})$は２の$2^{\aleph_0}$乗

個のメンバーを持つ[22]。

３．５．２．１　**命題**：上の定義（3.5.2）より，以下のことが導かれる：

（1）$\mathrm{REL}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{REL}(\mathcal{A})$，しかし $\mathrm{REL}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}) \neq \mathrm{REL}(\mathcal{A})$

（2）$\mathrm{REL}^{\mathrm{1ST}}(\in\mathcal{A}) = \mathrm{REL}(\in\mathcal{A})$

３．５．３　つぎに，与えられた言語を用いて，$\mathcal{A}$で定義可能な第一階関係を定義する。$\mathcal{A}$を第二階構造，$X \subseteq A^n$を個体間のn項関係とする。このとき，**Xが$\lambda - L_2$を用いて$\mathcal{A}$で定義可能な第一階関係であるの**は，$\mathrm{FREE}(\lambda x_1 \cdots x_n \phi) = \varnothing$（すなわち述語$\lambda x_1 \cdots x_n \phi$に含まれる自由変項が存在しない）であるような$\lambda - L_2$の式$\phi$と，どの二つも互いに異なる個体変項が存在し，

$$X = \mathcal{I}(\lambda x_1 \cdots x_n \phi)$$

であるような$\mathcal{A}$上の解釈$\mathcal{I}$が存在するとき，かつそのときにかぎる。λ抽象化子を持たない第二階論理の言語L_2においては，L_2を用いて構造$\mathcal{A}$でXを定義できるのは，

$$X = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle : \langle \mathcal{A}, M^{x1\cdots xn}\, x_1 \cdots x_n\rangle\ \mathrm{SAT}\ \phi\}$$

のとき，かつそのときにかぎる。ここでMは割り当てであり，$\mathrm{FREE}(\phi) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$。$\mathrm{DEF}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}, L_2)$を，$L_2$を用いて$\mathcal{A}$で定義可能なすべての第一階関係を含む最小クラスとする。(以後，$\langle \mathcal{A}, M^{x1\cdots xn}\, x_1 \cdots x_n\rangle$を$\mathcal{A}\,[^{x1\cdots xn}\, x_1 \cdots x_n]$または$\mathcal{A}\,[x_1, \cdots, x_n]$と略記することがある。)

３．５．４　与えられた言語を用いて，$\mathcal{A}$で定義可能な第二階関係を定義する。**Xが言語$\lambda - L_2$（またはL_2）を用いて$\mathcal{A}$で定義可能な第二階関係であるの**は，Xが$\mathcal{A}$における第二階関係であり，かつ$\lambda - L_2$（またはL_2）の式ϕが存在して，

$$X = \{\langle v_1, \cdots, v_n\rangle \in Ai_1 \times \cdots \times Ai_n : \mathcal{A}\,[\,[^{x1\cdots xn}\, x_1 \cdots x_n]\ \mathrm{SAT}\ \phi\}$$

であるとき，かつそのときにかぎる。(ここで，$\mathrm{FREE}(\phi) \subseteq \{v_1, \cdots, v_n\}$，各j（$1 \leqq j \leqq n$）に対して変項vjはタイプ$ij \in \mathrm{VAR}$。）対応する集合を，$\mathrm{DEF}(\mathcal{A}, \lambda - L_2)$，$\mathrm{DEF}(\mathcal{A}, L_2)$とする。

われわれの第二階論理の言語は可算であるから，変項の有限列の集合も可算である。よって，言語で定義可能な関係の集合も可算であり，$\aleph_0$以下の基数を持つ。

３．５．４．１　**命題**：以下の事柄が標準構造に対して当てはまる：

（1）$\mathrm{DEF}(\mathcal{A}, L_2) = \mathrm{DEF}(\mathcal{A}, \lambda - L_2)$

（2）$\mathrm{DEF}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}, L_2) = \mathrm{DEF}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}, \lambda - L_2)$

（3）$\mathrm{DEF}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}, L_2) \subseteq \mathrm{DEF}(\mathcal{A}, L_2)$，しかし$\mathrm{DEF}^{\mathrm{1ST}}(\mathcal{A}, L_2) \neq \mathrm{DEF}(\mathcal{A}, L_2)$

《証明》定義に基づいて実行できる[23]。

３．５．５　続いて，与えられた言語を用いて，かつパラメータ（すでに構造において当初に与えられている個体および個体間の関係をこう呼ぶ）によって$\mathcal{A}$で定義可能な第一階および第二階関係を定義する。**Xが$\lambda - L_2$（またはL_2）を用いてパラメータにより$\mathcal{A}$で定義可能な第一階関係であるの**は，つぎの場合である：個体変項$x_1, \cdots, x_n$と，タイプが各々$i_1, \cdots, i_m \in \mathrm{VAR}$の変項$v_1, \cdots, v_m$と，$\mathrm{FREE}(\phi) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n, v_1, \cdots, v_m\}$であるような式$\phi$が存在して，

$$X = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \in A^n : \mathcal{A}\,[^{x1\cdots xn\ v1\cdots vm}\, x_1 \cdots x_n\, v_1 \cdots v_m]\ \mathrm{SAT}\ \phi\}。$$

ここで，パラメータ$v_1, \cdots, v_m$は各々タイプ$i_1, \cdots, i_m$を持ち，各々宇宙$Ai_1, \cdots, Ai_m$（各j（$1 \leqq j \leqq m$）につき，$Aij = A_h$でhは正整数）に属する。また，**Xが$\lambda - L_2$（またはL_2）を用いてパラメータによって定義可能な第二階関係であるの**は，つぎの場合である：（一般の）変項$u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m$（各々のタイプは$k_1, \cdots, k_n, i_1, \cdots, i_m \in \mathrm{VAR}$）と，$\mathrm{FREE}(\phi) \subseteq \{u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m\}$であるような式$\phi$が存在して，

$$X = \{ \langle u_1, \cdots, u_n \rangle \in A_{k1} \times \cdots \times A_{kn} : \mathcal{A} [^{u1 \cdots un\ v1 \cdots vm} u_1 \cdots u_n\ v_1 \cdots v_m] \text{ SAT } \phi \}。$$

ここで，パラメータ $v_1, \cdots, v_m$ は各々タイプ $i_1, \cdots, i_m$ を持ち，各々宇宙 $Ai_1, \cdots, Ai_m$（各宇宙は個体間の関係宇宙）に属する。

任意の構造$\mathcal{A}$において，A_n におけるすべての n 項第一階関係はパラメータによって定義される。というのは，式 $Xx_1 \cdots x_n$ と解釈 I——I（X^n）が望ましい関係となるような解釈——を取ることにより，標準構造の関係宇宙に含まれる第一階集合と第一階関係を，先の式を充足する個体の順序 n 組の集合として定義できる（それがパラメータによる関係の定義であった）からである。パラメータによる関係の定義可能性は，一見トリヴィアルなものと思われるが，この概念は非標準構造を扱う文脈で有用となる。（本論文ではもっぱら標準構造を扱うので，この概念については定義のみに止める。）

4．第二階論理の表現力

最後に，本節では，第二階論理の表現力について再考し，いくつかの否定的結果を導く。第二階論理の表現力の強さは，意味論を記述するメタ理論として集合論を受け入れる形で理論構成がなされている点に求められる。そのような背景集合論として，一般にはツェルメロとフレンケルによる集合論が前提される。そこでは，矛盾ないし悪循環を避けるために，すでに手元にある集合から一歩一歩新しい集合を作っていく，という仕方で集合の階層構造が導入される。すなわち，順序数上の帰納法によって，空集合から出発して，階層の下のレベルの集合の巾集合を構成することにより，つぎのレベルの集合が作られる：

$$V(0) = \varnothing;$$
$$V(n+1) = \mathcal{P}V(n)。$$

さらに，$V(\omega) = V(0) \cup V(1) \cup \cdots = \bigcup_{i \geqq 0} V(i)$ とし，続けて，$V(\omega+1) = \mathcal{P}V(\omega)$ とする。一般に，後者であるような（$\beta = \alpha + 1$）任意の順序数 β に対して，

$$V(\beta) = \mathcal{P}V(\alpha)$$

と言う仕方で高次の集合を作り，すべての極限順序数 λ に対して，

$$V(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} V(\alpha)$$

とする。この集合の構成過程は終わることなく続き，すべての順序数の集合 Ω によって，集合の全宇宙 V は，

$$V = \bigcup_{\beta \in \Omega} V(\beta)$$

と表せることになる。こうして，空集合から出発して，（ⅰ）後者レベルでは，先行する集合の可能なすべての部分集合の集合を新しい集合と認め，（ⅱ）極限レベルでは，すでに存在しているすべての集合を一つの新しい集合として合併する，という仕方でわれわれは集合の宇宙を構成する。これが，ツェルメロとフレンケルによる集合論の集合構成の大雑把な描写である。この集合論そのものは，第一階の論理をベースにした第一階の理論として構成されるが，経験上，数学の広範囲の理論がこの集合論によって記述されることが認められている。われわれの論理体系である第二階論理は第二階言語により記述されるが，われわれの論理の強さは，このような，広範囲の数学的宇宙（＝集合）を背景とすることに由来している。

ところで，すでに見てきたように，われわれの第二階論理を記述する形式言語は，このような数学的宇宙から成る構造の中で解釈されることにより，意味を得た。各構造が，それ自身の限定され

た量化の宇宙を持つとき，その宇宙を**領域**（domain）と呼ぶことにする。以後，構造の領域に関連する特性の定義を与え，特性の具体例を通して，第二階論理（ＳＯＬ）の表現力を考察する。

４．１　特性の表現可能性

４．１．１　まず，領域の公理化可能な特性を定義する。個体領域の特性Ｐが**公理化可能である**（axiomatizable）のは，つぎの場合である：純粋ＳＯＬの文の帰納的集合Γが存在して，

$(\forall \mathcal{A})$ $[\mathcal{A} \vDash \Gamma \Longleftrightarrow$ Ａが特性Ｐを持つ$]$。

また，個体領域の特性Ｐが**有限に公理化可能である**（finitely axiomatizable）のは，つぎの場合である：純粋ＳＯＬの文ϕが存在して，

$(\forall \mathcal{A})$ $[\mathcal{A} \vDash \phi \Longleftrightarrow$ Ａが特性Ｐを持つ$]$。

４．１．２　つぎに，広域関係を定義する。（特定された）数学的宇宙の広域ｎ項関係Ｒが**第一階でかつ広域的に定義可能である**（globally definable）のは，つぎの場合である：ＦＲＥＥ（ϕ）$\subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$ であるようなＳＯＬの式ϕが存在して，

$(\forall \mathcal{A})$ $[\{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle : \mathcal{A}\ [^{x1 \cdots xn}\ x_1 \cdots x_n]\ \mathrm{SAT}\ \phi\} = R \cap A^n]$。

λ－ＳＯＬの言語では，この条件は，$\mathcal{A}$（$\lambda x_1 \cdots x_n \phi$）$= R \cap A^n$と表現される。また，数学的宇宙の広域ｎ項関係Ｒが**第二階でありかつ広域的に定義可能である**のは，つぎの場合である：各タイプが$i_1, \cdots, i_n$である変項$v_1, \cdots, v_n$に対してＦＲＥＥ（ϕ）$\subseteq \{v_1, \cdots, v_n\}$ であるようなＳＯＬの式ϕが存在して，

$(\forall \mathcal{A})$ $[\{\langle v_1, \cdots, v_n \rangle \in Ai_1 \times \cdots \times Ai_n : \mathcal{A}\ [^{v1 \cdots vn}\ v_1 \cdots v_n]\ \mathrm{SAT}\ \phi\} = R \cap (Ai_1 \times \cdots \times Ai_n)]$。

４．１．３　さらに，構造のクラスが文（のクラス）によって表現できる，ということを表す公理化可能クラスの概念を定義する。構造のクラスＫが**公理化可能である**（axiomztizable）のは，つぎの場合である：ＳＯＬの文の帰納的集合Γが存在して，

$(\forall \mathcal{A})$ $[\mathcal{A} \in K \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \Gamma]$。

また，構造のクラスＫが**有限に公理化可能である**（finitely axiomatizable）のは，つぎの場合である：ＳＯＬの文ϕが存在して，

$(\forall \mathcal{A})$ $[\mathcal{A} \in K \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \phi]$。

４．１．４　与えられた構造$\mathcal{B}$が構造$\mathcal{A}$に対して**範疇的に公理化可能である**（categorically axiomatizable）のは，つぎの場合である：文の帰納的集合Γが存在して，

$[\mathcal{A} \vDash \Gamma \Longleftrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A}]$。

与えられた構造$\mathcal{B}$が構造$\mathcal{A}$に対して**範疇的に有限に公理化可能である**のは，つぎの場合である：文ϕが存在して，

$[\mathcal{A} \vDash \phi \Longleftrightarrow \mathcal{B} \cong A]$。

４．１．５　数学的宇宙の特性Ｐが**公理化可能である**のは，つぎの場合である：純粋ＳＯＬの文ϕが存在して，

$[\vDash \phi \Longleftrightarrow$ Ｐが数学的宇宙で成り立つ$]$。

４．２　これから，表現可能な特性の具体例を考察する。

４．２．１　**無限公理**（axioms of infinity）

「はじめに」において見たように，有限性と無限性という領域の特性は第二階言語で公理化可能である。事実，無限公理として用いられる多くの第二階の式が存在する。例えば，式（ϕinf）：

$$\exists X\ [\forall xyz\ (Xxy \wedge Xyz \Rightarrow Xxz) \wedge \forall x \neg Xxx \wedge \forall x \exists y Xxy]$$

は，その領域を全宇宙とするような，反反射的・推移的・連続的関係が存在する，と主張するが，これは実際上，無限領域で，かつそのような領域でのみ成り立つので，無限公理と見なしうる[24]。

第一階の公理の中には，一つの構造において真となるために，個体の無限領域を要求するような式が存在する。しかし，それらの公理は，構造がある特別の記号系から成ることを要求し，いくつかの無限構造では成り立たないものである。よって，無限公理とは，

$$(\forall \mathcal{A})\ [\mathcal{A} \vDash \phi \Longleftrightarrow \mathcal{A}\text{の個体宇宙}A\text{が無限である}]$$

が成り立つような，純粋ＳＯＬの式ϕのことである。しかし，第一階の式で無限公理と見なしてよいものが存在するように思われるかもしれない。例えば，第一階の式で表現しうる稠密全順序（dense order：異なる二要素間に必ず第三の要素が存在するような全順序）の諸公理の連言をα_{DO}とすると，構造$\mathcal{A}$がα_{DO}のモデルならば，確かに$\mathcal{A}$の個体宇宙Aは無限である。しかし，逆は成り立たない。実際，構造$\langle \mathbb{N}, \leqq \rangle$は無限である（個体宇宙$\mathbb{N}$は自然数の集合だから）が稠密全順序ではない。また算術の公理の集合：

$\forall x\ (Sx \neq 0)$　　（ゼロはどんな数の後者でもない）

$\forall x \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$　　（後者関数は一対一である）

$\forall y\ (y \neq 0 \rightarrow \exists z\ (Sz = y))$　　（ゼロでない数は前者を持つ）

も無限性の公理化ではない。なぜなら，これらの公理を真とするには無限構造が必要である[25]が，無限構造のすべての関数がこれらの公理に従う必要はないからだ。例えば，構造$\langle \mathbb{N}, 0, I \rangle$（ここでＩは同一性関数：$I(x) = x$）において，関数Ｓを同一性関数Ｉで解釈すれば，これらの公理がすべて真となる訳ではない（第一の公理が偽となる[26]）。

こうして，われわれは，第一階論理においては，領域の有限性も無限性も一つの式で表現することはできない，ということが分かる。

4．2．2　同一性（identity）

「はじめに」においても見たように，**個体間の同一性**はライプニッツに由来する不可識別者同一原理によって，第二階論理で表現しうる。すなわち，二つの個体ｘとｙについて，それらを区別する性質がない，すなわち

$$(\#)\quad \forall X\ (Xx \longleftrightarrow Xy)$$

という場合，かつその場合にかぎり，同一である：

$$(\#\#)\quad \forall x \forall y\ [x = y \longleftrightarrow \forall X\ (Xx \longleftrightarrow Xy)]。$$

同一性は，最小の反射的関係であるから，ｘとｙがすべての反射的関係にあることを表す式：

$$\forall Z^2\ (\forall z Z^2 zz \rightarrow Z^2 xy)$$

によっても表現される。

なぜ，第一階論理では同一性を原始的関係とみなすのか？その理由は，同一性を定義しうる第一階の式が存在しないことによる。考察の対象である第一階言語が有限個の関係定項しか持たないとき，同一性を模倣する式を作ることができる。例えば，唯一の１項関係定項がＲで，唯一の２項関係定項がＴであるような言語を取る。そのとき，式：

$$(\bigstar)\ (Rx \longleftrightarrow Ry) \wedge \forall z\ (Txz \longleftrightarrow Tyz) \wedge \forall z\ (Tzx \longleftrightarrow Tzy)$$

は，ｘとｙがわれわれの形式言語で区別できない，ということを主張している。この式（★）をＨｘｙとすると，Ｈは反射的かつ対称的かつ推移的である。しかし，この定義は完全ではない。実際，$I(x) \neq I(y)$となるような，（★）の第一階のモデルを与えることができるからである。こ

こに，それの簡単な例がある。$\mathcal{I}=\langle\mathcal{A},\ M\rangle$ において，$\mathcal{A}=\langle\{1,\ 2,\ 3\},\ R^{\mathcal{A}},\ T^{\mathcal{A}}\rangle$，$R^{\mathcal{A}}=\{1,\ 2,\ 3\}$，$T^{\mathcal{A}}=\varnothing$，$M(x)=1$，$M(y)=2$ とする。このとき，$\langle\mathcal{A},\ M\rangle\models(\bigstar)$，しかし $\mathcal{I}(x)=1\neq2=\mathcal{I}(y)$。それに対して，第二階論理は**個体間の同一性**を定義できた。この点が第二階論理の著しい特性の一つである。

では，**関係の同一性**の場合はどうか？通常，第二階論理では，関係の同一性を表す（対象言語としての）記号は**原始的論理記号**とされることも，定義されることもない。なぜなら，関係間の同一性は固有な第二階関係であり，ライプニッツの原理が使えるためには第三階の変項を必要とするからである。しかし，われわれのＳＯＬの言語では，**同等性**（equality）を原始関係と見なすことにして外延性の公理を計算に加えたとき，望ましい効果を得ることができる。いま，外延性の公理を，

$$(*)\ \forall X^n\ \forall Y^n\ [X^n=Y^n\longleftrightarrow\forall x_1\cdots x_n\ (X^n x_1\ \cdots x_n\longleftrightarrow Y^n x_1\ \cdots x_n)]$$

の形で持つとする。この外延性の公理から包括公理：

$$\exists!X^n\ \forall x_1\cdots x_n\ (X^n x_1\ \cdots x_n\longleftrightarrow\phi)\qquad\text{ただし}X^n\not\in FREE\ (\phi)$$

（各式 ϕ と一階の変項 x_1，…，x_n によって定義される唯一の関係が存在する）

をＳＯＬで証明できる[27]。外延性の公理と包括公理を結合することの利点は，ＳＯＬで抽象による定義が許される，ということである。しかし，外延性公理により導入された関係の**同等性**（equality）と**同一性**（identity）は区別すべきものである。

４．２．３　可算と否可算

「はじめに」においては，個体の宇宙そのものが有限であることがどう表現されるかを考えたが，ここでは，１項関係（性質）の宇宙において与えられた集合が有限であることの定義を考える。

“ϕfin（Z）”を「集合Ｚは有限である」と読むとすると，これは以下のように定義できる：

$$\begin{aligned}\phi\mathrm{fin}\,(Z)\Leftrightarrow\forall X^2\ [&\forall x\ (Zx\longleftrightarrow\exists y X^2xy)\wedge\forall x\ (\exists y X^2\ yx\rightarrow Zx)\wedge\\&\forall xyz\ (X^2xy\wedge X^2zy\rightarrow x=z)\wedge\forall xyz\ (X^2xy\wedge X^2xz\rightarrow y=z)\\&\rightarrow\forall x\ (Zx\rightarrow\exists y X^2\ yx)]\end{aligned}$$

（ＺからＺの中への一対一対応関係 X^2 はすべて，Ｚの上への関係である。）

さて，このとき，「すべての要素がただ有限個の先行者しか持っていないような，宇宙内での強い線形順序が存在する」ということにより**可算性**（countability）を表現できる。“ϕctbl”を「(個体領域は）可算である」と読むとすると，可算性の定義は以下のようになる：

$$\begin{aligned}\phi\mathrm{ctbl}\Leftrightarrow\exists Y^2\ [&\forall x\neg Yxx\wedge\forall xyz\ (Yxy\wedge Yyz\rightarrow Yxz)\wedge\forall xy\\&(Yxy\vee Yyx\vee x=y)\wedge\forall x\exists X\ \{\phi\mathrm{fin}\,(X)\wedge\forall y\,(Xy\longleftrightarrow Yyx)\}]\end{aligned}$$

（反反射的かつ推移的かつ連結的であるような，つまり強い線形順序であるような２項関係で，任意の要素に対して，その要素のすべての先行者を，かつそれらのみを含む有限集合が存在するような，そういう関係が存在する。）

非可算であることは，可算性の否定によって表現できる：$\phi\mathrm{unc}\Leftrightarrow\neg\phi\mathrm{ctbl}$.

４．３　否定的結果

第二階論理（ＳＯＬ）の強い表現力のゆえに，第一階論理で成り立つ古典的結果が第二階論理では成り立たなくなる。最後に，このことを考察して本論を閉じる。

４．３．１　ＳＯＬに対して**コンパクト性定理**は成り立たない。

《証明》

コンパクト性定理はつぎのように主張する：文の任意の集合 Φ と任意の式 ψ に対して，

$$\Phi\models\psi\ \Rightarrow\ (\exists\Delta)\,[\Delta\subseteq\Phi\wedge\Delta\text{は有限である}\wedge\Delta\models\psi]。$$

Γを，$n \geqq 2$に対する式：

$$\phi_n \Leftrightarrow \exists x_1 \cdots x_n \ (\neg x_1 = x_2 \wedge \cdots \wedge \neg x_1 = x_n \wedge \cdots \wedge \neg x_{n-1} = x_n)$$

の集合とし（Γ＝｛ϕ_2，ϕ_3，…｝），領域の無限性を表現している式ϕinf（4.2.1 節参照）を取る。Γは全体として無限個の要素の存在を主張しているので，$\Gamma \vDash \phi$inf であるが，$\Delta \vDash \phi$inf であるような，Γの有限部分集合Δは存在しない。いまΓの任意の有限部分集合Δを取れ。Δの要素はすべてΓの式で，しかも有限個であるから，Δの中に最大の添字を持つ式が存在する。mを$\phi_n \in \Delta$であるnの最大数とせよ。Δに対するモデルとして，m個の個体領域Aを持つ構造$\mathcal{A} = \langle A, \langle A_2 \rangle \rangle$を取ることができる（Δ内の式は変項を含まないので割り当ての無いモデル，つまり構造そのものがモデルとなる：$\mathcal{A} \vDash \Delta$）。明らかに，有限構造$\mathcal{A}$は$\phi$inf のモデルではない（$\mathcal{A} \nvDash \phi$inf)。従って，$\Delta \nvDash \phi$inf である。（実際，もし$\Delta \vDash \phi$inf ならば，$\mathcal{A} \vDash \Delta \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \phi$inf であるから，これと$\mathcal{A} \vDash \Delta$により，$\mathcal{A} \vDash \phi$inf が導かれて，$\mathcal{A} \nvDash \phi$inf と矛盾する。）（Q．E．D.）

4．3．2　健全な計算体系を持つＳＯＬに対して，**強い完全性定理**は成り立たない。われわれはまだＳＯＬに対する計算体系（演繹体系）を与えていないので，このことの厳密な証明はできないが，証明の概略はつぎのようになる。強い完全性定理は，式の集合Γと式ϕに対して，

$\Gamma \vDash \phi \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash \phi$　　　　（ここで“$\vdash$”は計算体系での証明可能性を示す）

と主張する。しかし，コンパクト性定理がＳＯＬで成り立たないから，ある文の集合Γ_0とある式ϕ_0が存在して，$\Gamma_0 \vDash \phi_0$であるが，$\Delta \vDash \phi_0$であるような，Γ_0の有限部分集合Δは存在しない。この状況下では，証明の有限個の規則のみを受け入れるような健全な計算体系において，Γ_0からのϕ_0の演繹を得ることはできない。（もしΓ_0からのϕ_0の演繹が得られたとすると，$\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$なる有限集合$\Delta_0$が存在して，$\Delta_0$をその演繹の全前提の集合とする，計算体系での証明があって，$\Delta_0 \vdash \phi_0$である。しかし，計算体系は健全であるから，$\Delta_0 \vDash \phi_0$である。他方，$\Delta \vDash \phi_0$であるΓ_0の有限部分集合Δは存在しないから，$\Delta_0 \nvDash \phi_0$でなければならない。こうして，矛盾が生じる。）（Q．E．D.）

4．3．3　**レーヴェンハイム＝スコーレムの定理**はＳＯＬに対して成り立たない。

《証明》

われわれの可算言語に対して，レーヴェンハイム＝スコーレムの定理はこう主張する：

「文の可算集合Γが（何らかの）モデルを持つならば，そのときΓは，その個体宇宙が可算であるようなモデルを持つ」。

さて，われわれはすでに，宇宙が非可算であるということを主張する式：ϕunc を得ている（4．2．3節参照）。しかし，ϕunc は個体宇宙の可算性を示す2項関係の存在の否定を明示的に主張するから，これが成り立つ構造の宇宙は非可算でなければならない。一般に，任意の構造$\mathcal{A}$に対して，

$\mathcal{A} \vDash \phi$unc $\Longleftrightarrow$ Aは非可算である

が成り立つ。よって，式ϕunc は非可算モデルは持つが，個体宇宙が可算であるモデルは持たない。（もしϕunc が可算なモデル$\mathcal{B}$を持つ（$\mathcal{B} \vDash \phi$unc）とすると，$\mathcal{B}$の個体宇宙Bは可算である。しかし，$\mathcal{B} \vDash \phi$unc $\Longleftrightarrow$ Bは非可算，であるから，Bは非可算である。こうして，矛盾が生じる。）こうして，Γ＝{ϕunc} に対する，レーヴェンハイム＝スコーレムの定理の反例が存在する。
（Q．E．D.）

註

（1）　第二階論理で表現可能な概念や命題の実例はManzano［1996］の第１章第１節から採った。本研究の多くの部分を本書に負っている。

（2）　詳しくはこうである。$\forall x\ (\exists y X^2 xy \longleftrightarrow Rx \wedge Sx)$ は「２項関係X^2の定義域（d-main）が集合$R \cap S$と一致する」ということを意味し，$\forall x\ (\exists y X^2 yx \rightarrow Rx \wedge \neg Sx)$ は「関係X^2の値域（range）が集合$R - S$の部分集合である」ということを意味する。また，$\forall x \forall y \forall z\ (X^2 xy \wedge X^2 xz \rightarrow y = z)$ が「関係X^2は多対一である」を，$\forall x \forall y \forall z\ (X^2 xy \wedge X^2 zy \rightarrow x = z)$ が「関係X^2は一対多である」を，各々意味するから，これら二つの式の連言により，「関係X^2は一対一対応関係である」を意味する。こうして，元の全体の式は，ＳでもあるＲ全体から，ＳでないＲ全体またはその一部分への一対一写像が存在しない，ということを主張する。言い換えると，集合としてのＳであるＲは集合としてのＳでないＲよりも，はるかに多いメンバーを持つ，と主張している。具体例として，「ほとんどの素数が奇数である」（集合〈奇数の素数〉の濃度は$\aleph_0$だが集合〈偶数の奇数〉の濃度は１である）や，「大抵の実数は無理数である」（集合〈無理数の実数〉の濃度は$2^{\aleph_0}$（$=\aleph$）で集合〈有理数の実数〉の濃度$\aleph_0$より大きい）が挙げられる。

（3）　無限性はこれを否定して，「（狭義の）中への一対一関数$f : A \rightarrow A$が存在する」を意味する式を作ることで表現できる。この無限性のデデキント的定義の具体例として，ゼロを含む自然数全体の集合｛０，１，２，３，…｝から，その真部分集合である（正の）奇数の集合｛１，３，５，…｝への一対一の関数：$fn = 2n + 1\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ の存在により，自然数全体の集合が無限集合であること，が挙げられる。

（4）　一般に，２項関係Ｒが順序（または半順序）であるとは，Ｒが反射的であり（$\forall x Rxx$），反対称的であり（$\forall x \forall y\ (Rxy \wedge Ryx \rightarrow x = y)$），推移的である（$\forall x \forall y \forall z\ (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$）とき，かつそのときにかぎる。

（5）　２項関係Ｒが線形順序（または全順序である）のは，$\forall x \neg Rxx$（反反射性），$\forall x \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$，$\forall x \forall y \forall z\ (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$（推移性），$\forall x \forall y\ (Rxy \vee x = y \vee Ryx)$（連結性）がすべて成り立つとき，かつそのときにかぎる。

（6）　この式の後半部：「集合 $\{z : Rzx\}$ は有限である」は，先の(４)に倣って表現できる：$\forall f\ [\forall z_1 \forall z_2\ \{Rz_1 x \wedge Rz_2 x \wedge fz_1 = fz_2 \rightarrow z_1 = z_2\} \rightarrow \forall y\ \{Ryx \rightarrow \exists z\ (Rzx \wedge fz = y)\}]$。

（7）　第二階論理の持つ哲学的な意味については，本論文で詳しく追究する余裕はないが，Shapiro［1991］，Boolos［1998］などに，興味深い考察が見られる。

（8）　ここで定義される集合ＶＡＲは，第二階論理で扱われ得るあらゆる対象，すなわち，個体，関係，関数の種類，およびそれらを表示する記号の種類，としてのタイプをすべて集めた集合である：ＶＡＲ＝$\{1 = \langle 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1, 1 \rangle, \cdots, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1, 1 \rangle, \cdots\}$。

（9）　タイプ $\langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1 \rangle$ と違って，タイプ $\langle 0, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle \rangle$ やタイプ $\langle 0, \langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1 \rangle, \langle 0, 1, \overset{n}{\cdots}, 1 \rangle \rangle$ は，（個体間の）関係どうしの間の関係，つまり第二階関係が持つタイプである。以下で見るように，われわれは第二階関係をメタレベルで考察する機会がある。しかし，対象言語としての第二階論理の言語では，そのような高階の関係の変項が量化可能な変項として現れることはないので，問題のタイプはＶＡＲやＶＡＲ（ＳＯＬ）には含まれない。第二階論理が扱う関係は，基本的には第一階の関係，つまり個体間の関係だからである。

(10)　項（term）の正式な定義は以下のようになる：

（Ｔ１）任意の個体変項ｘは項である。

（Ｔ２）任意の個体定項ａは項である。

（Ｔ３）ｆが項数$n \geqq 1$を持つｎ項関数定項で，$\tau_1, \cdots, \tau_n$が項のとき，$f \tau_1 \cdots \tau_n$も項である。

以上の三条件のいずれかを満たす記号列の最小集合を$TERM(\lambda - L_2)$と表示し，これのメンバー

を項と呼ぶ。

(11)　述語の正式な定義は以下のようになる：

(P 1) n項関係変項X^nは度数（degree） nの述語である。

(P 2) n項関係定項P^nは度数nの述語である。

(P 3) E, E_1, E_2, … は度数2の述語である。

(P 4) ψが$\lambda-L_2$の任意の式であり，x_1, …, x_nのどの二つも互いに異なる個体変項であるとき，$\lambda x_1 \cdots x_n \psi$はn項述語である。

以上の四条件のいずれかを満たす記号列の最小集合をPRED（$\lambda-L_2$）と表示し，これのメンバーを述語と呼ぶ。

(12)　式の正式な定義は以下のようになる：

(F 1) Πがn項述語であり，τ_1, …, τ_nが項のとき，$\Pi\tau_1\cdots\tau_n$は式である。特に，τ_1とτ_2が項のとき，$E\tau_1\tau_2$は式である。⊥も式である。

(F 2) Π^nとΨ^nがn項述語のとき，$E_n\Pi^n\Psi^n$（または$\Pi^n=\Psi^n$）は式である。

(F 3) ϕとψが式のとき，$\neg\phi$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$, $(\phi\longleftrightarrow\psi)$ は式である。

(F 4) ϕが式でxが個体変項のとき，$\forall x\phi$, $\exists x\phi$は式である。

(F 5) ϕが式でX^nがn項関係変項のとき，$\forall X^n\phi$, $\exists X^n\phi$は式である。

以上の五つの条件のいずれかを満たす記号列の最小集合をFORM（$\lambda-L_2$）と表示し，これのメンバーを式と呼ぶ。

(13)　準同型hは，元の個体の差異には留意せず（一対一関数である必要はないから），しかも，元の個体の間での関数のインプットとアウトプットとの関係は保持し，さらに元の個体間の関係は保持するが，対応する関係が対応する個体以外の間に成り立っていてもよい，という仕方で対応づける。例えば，$A=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$B=\{y_1, y_2, y_3\}$とする。Aの元とBの元をどう対応させ得るかは対応する構造$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$における対応する関数・関係に依存する。$\mathcal{A}$でA上の1項関数$f^{\mathcal{A}}$が，$f^{\mathcal{A}}(x_1)=x_2$，$f^{\mathcal{A}}(x_2)=x_3$，$f^{\mathcal{A}}(x_3)=x_4$，$f^{\mathcal{A}}(x_4)=x_1$，対応するB上の関数$f^{\mathcal{B}}$が，$f^{\mathcal{B}}(y_1)=y_2$，$f^{\mathcal{B}}(y_2)=y_3$，$f^{\mathcal{B}}(y_3)=y_1$とする。いま，hがAの元とBの元を，$h(x_1)=y_1=h(x_2)$，$h(x_3)=y_2$，$h(x_4)=y_3$と対応づけたとする。ところが，$h(f^{\mathcal{A}}(x_1))=h(x_2)=y_1$，$f^{\mathcal{B}}(h(x_1))=f^{\mathcal{B}}(y_1)=y_2$，しかも$y_1\neq y_2$，よって，$h(f^{\mathcal{A}}(x_1))\neq f^{\mathcal{B}}(h(x_1))$。これは，準同型の定義条件(ii)に反する。Aでの関数のインプットとアウトプットとの関係はループをなしているが，単純にこのループがBでも成り立つことはできない。AとBとではメンバーの個数が異なるからである。そこで，Aで$f^{\mathcal{A}}$に関してループを形作るのはx_2, x_3, x_4の間においてであり，x_1は付随的な元にすぎないと見ることにして，$f^{\mathcal{A}}(x_1)=x_3$，$f^{\mathcal{A}}(x_2)=x_3$，$f^{\mathcal{A}}(x_3)=x_4$，$f^{\mathcal{A}}(x_4)=x_2$とする。このとき，すべての$x\in A$に対して，$h(f^{\mathcal{A}}(x))=f^{\mathcal{B}}(h(x))$が成り立つ。実際には準同型hがAとBの間に存在するためには，あらゆる関数$f^{\mathcal{A}}$と$f^{\mathcal{B}}$において条件(ii)が成り立たなければならない。「ループの存在」といったような，関数のインプットとアウトプット間のあらゆる関係が$f^{\mathcal{A}}$と$f^{\mathcal{B}}$の間で共有されねばならない。つまり，AのメンバーとBのメンバーがそれらの果たす役割において類似したものでなければならない。hが同型になればその類似性はさらに増大することになる。

(14)　$\langle h[C^{\mathcal{A}}]\rangle_{C\in OPER.CONS}=\{D : \exists C\ (C\in OPER.CONS\wedge h(C^{\mathcal{A}})=D)\}$

(15)　以下のようにして，～hが同値関係であることは示せる：$x\in A$なる任意の個体xにつき，$h(x)=h(x)$しかも$\langle x, x\rangle\in A\times A$，∴ $\langle x, x\rangle\in\sim h$，よって～hは反射的である。任意のx, $y\in A$に対して，$\langle x, y\rangle\in\sim h$と仮定する。～hの定義より，$\langle x, y\rangle\in A\times A$かつ$h(x)=h(y)$。∴ $\langle y, x\rangle\in A\times A$かつ$h(y)=h(x)$。∴ $\langle y, x\rangle\in\sim h$。よって，～hは対称的である。任意のx, y, $z\in A$に対して，$\langle x, y\rangle\in\sim h$かつ$\langle y, z\rangle\in\sim h$と仮定する。～hの定義により，$h(x)=h(y)$，$h(y)=h(z)$。∴ $\langle x, z\rangle\in A\times A$かつ$h(x)=h(z)$ ∴ $\langle x, z\rangle\in\sim h$。よって，～hは推

移的である。こうして，反射的かつ対称的かつ推移的であることが示されたので，$\sim h$は同値関係である。

(16) 一般に，"≡"を同値関係，$[x]_{\equiv}$と$[y]_{\equiv}$を，それぞれxとyを代表元とする同値関係≡により生成された同値類とするとき，$x \equiv y \Leftrightarrow [x]_{\equiv} = [y]_{\equiv}$が成り立つ。

(17) 定義により，$H: A^{\sim h} \to B$だから，$H[A^{\sim h}] \subseteq B$。逆に，任意のyにつき$y \in B$とする。仮定により，hが上への関数だから，ある$x_0 \in A$が存在して，$h(x_0) = y$。Hの定義より$H([x_0]^{\sim h}) = y$。ここで，$A^{\sim h} = \{[x]^{\sim h} : x \in A\}$ だから，$[x_0]^{\sim h} \in A^{\sim h} \wedge H([x_0]^{\sim h}) = y$。$\therefore \exists z\ (z \in A^{\sim h} \wedge H(z) = y)$，$\therefore y \in \{y : \exists z\ (z \in A^{\sim h} \wedge H(z) = y)\} = H[A^{\sim h}]$。$\therefore B \subseteq H[A^{\sim h}]$。従って，$H[A^{\sim h}] = B$。こうして，Hは上への関数である。

(18) (⇒：) $\Gamma \models \phi$と仮定する。任意の解釈$\mathcal{I}$に対して（$\mathcal{I} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{I} \models \phi$）…①。いま，$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$がある解釈$\mathcal{I}_0$で充足可能とする：$\mathcal{I}_0 \models \Gamma \cup \{\neg\phi\}$。すると，$\mathcal{I}_0 \models \Gamma$，かつ$\mathcal{I}_0 \models \neg\phi$，∴3.2.1(F3) より，$\mathcal{I}_0 \not\models \phi$である。しかし，①より$\mathcal{I}_0 \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{I}_0\ \phi$であるから，$\mathcal{I}_0 \models \phi$，∴矛盾である。ゆえに，$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$は充足不可能でなければならない。(⇐：) いま，$\Gamma \not\models \phi$…②，と仮定する。"⊨"の定義より，ある解釈$\mathcal{I}_1$が存在して，$\mathcal{I}_1 \models \Gamma$しかし$\mathcal{I}_1 \not\models \phi$，つまり3.2.1(F3)より$\mathcal{I}_1 \models \neg\phi$，$\therefore \mathcal{I}_1 \models \Gamma \cup \{\neg\phi\}$，つまり$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$は充足可能である。こうして，$\Gamma \not\models \phi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\phi\}$が充足可能である，ということが示されたので，対偶により，$\Gamma \cup \{\neg\phi\}$が充足不可能$\Rightarrow \Gamma \models \phi$，である。(Q. E. D.)

(19) 証明はつぎのようになる。

$\phi \models\!\!\!\dashv \psi$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{I}\ (\mathcal{I} \models \phi \Rightarrow \mathcal{I} \models \psi)$ かつ $\forall \mathcal{I}\ (\mathcal{I} \models \psi \Rightarrow \mathcal{I} \models \phi)$　[定義3.4.1，3.3.1より]

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{I}\ (\mathcal{I} \models \phi \Leftarrow\Rightarrow \mathcal{I} \models \psi)$　[∀，⇒に関する論理法則]

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{I}\ (\mathcal{I} \models \phi \longleftrightarrow \psi)$　[定義3.2.1 (F3)]

$\Leftrightarrow \models \phi \longleftrightarrow \psi$　[妥当性の定義3.3.2より]

(20) いずれも容易であるので，(4)の証明のみを実行する。命題3.4.2より，$\models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \{\neg(\phi \vee \psi) \vee \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)\}$ を示せばよい。任意の解釈$\mathcal{I}$に対して，

$\mathcal{I} \models \phi \longleftrightarrow \psi$

$\Leftrightarrow (\mathcal{I} \models \phi \Leftarrow\Rightarrow \mathcal{I} \models \psi)$　[定義3.2.1 (F3) による]

$\Leftrightarrow (\mathcal{I} \models \phi\ \&\ \mathcal{I} \models \psi)$ または $(\mathcal{I} \not\models \phi\ \&\ \mathcal{I} \not\models \psi)$　[⇐⇒に関する論理法則]

$\Leftrightarrow (\mathcal{I} \not\models \phi\ \mathrm{or}\ \mathcal{I} \not\models \psi)$ でないか，または $(\mathcal{I} \models \phi\ \mathrm{or}\ \mathcal{I} \models \psi)$ でない　[ド・モルガン法則等]

$\Leftrightarrow (\mathcal{I} \models \neg\phi \vee \neg\psi)$ でないか，または $(\mathcal{I} \models \phi \vee \psi)$ でない　[定義3.2.1 (F3) による]

$\Leftrightarrow (\mathcal{I} \not\models \phi \vee \psi)$ または $(\mathcal{I} \not\models \neg\phi \vee \neg\psi)$　[選言の交換律]

$\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \neg(\phi \vee \psi) \vee \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$　[定義3.2.1 (F3) による]

$\therefore \models (\phi \longleftrightarrow \psi) \longleftrightarrow \neg(\phi \vee \psi) \vee \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$　[定義3.2.1，定義3.3.2]

(21) $|A| = \aleph_0$であるから，$|REL^{1ST}(\mathcal{A})| = |\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}A^n| = |\mathcal{P}A| + |\mathcal{P}A^2| + |\mathcal{P}A^3| + \cdots = |2^A| + |2^{A^2}| + |2^{A^3}| + \cdots = 2^{|A|} + 2^{|A^2|} + 2^{|A^3|} + \cdots = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} + \cdots = 2^{\aleph_0}$となる。

(22) nを固定する（一般にαを無限基数とするとき$n\alpha = \alpha$であるから)。$|Ai_j| = 2^{\aleph_0} = \aleph$とすると，$|Ai_1 \times \cdots \times Ai_n| = |Ai_1| \times \cdots \times |Ai_n| = \aleph \times \cdots \times \aleph = \aleph$である。よって，$|\bigcup_{i\geq 1} \mathcal{P}(Ai_1 \times \cdots \times Ai_n)| = |\mathcal{P}(A1_1 \times \cdots \times A1_n)| + |\mathcal{P}(A2_1 \times \cdots \times A2_n)| + \cdots = 2^{|A1_1 \times \cdots \times A1_n|} + 2^{|A2_1 \times \cdots \times A2_n|} + \cdots = 2^{\aleph} + 2^{\aleph} + \cdots = 2^{\aleph} = 2^{(2^{\aleph_0})}$。

(23) (1)の証明。定義より，$X \in DEF(\mathcal{A}, L_2) \Rightarrow X \in DEF(\mathcal{A}, \lambda - L_2)$であるから，$DEF(\mathcal{A}, L_2) \subseteq DEF(\mathcal{A}, \lambda - L_2)$は直ちに言える。逆の包含を示すために，$X \in DEF(\mathcal{A}, \lambda -$

L_2）と仮定する。定義により，（i）互いに異なる個体変項$x_1, \cdots, x_n$とFREE（$\lambda x_1 \cdots x_n \phi$）＝$\varnothing$であるような式$\phi$が存在して，$\mathcal{A}$上のある解釈$\mathcal{I}$に対して，$X = \mathcal{I}(\lambda x_1 \cdots x_n \phi)$となるか，または（ii）互いに異なる個体変項$x_1, \cdots, x_n$とFREE（$\phi$）$\subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$であるような式$\phi$が存在して，ある解釈に対して，$X = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle : \mathcal{A}\,[x_1, \cdots, x_n]\ \mathrm{SAT}\phi\}$（各$x_i \in A$）となるか，または（iii）異なる変項$v_1, \cdots, v_n$と式$\phi$が存在して，ある解釈に対して，$X = \{\langle v_1, \cdots, v_n\rangle \in Ai_1 \times \cdots \times Ai_n : \mathcal{A}\,[v_1, \cdots, v_n]\ \mathrm{SAT}\phi\}$（各jに対してタイプ$ij \in VAR$）となるか，のいずれかである。Xが（ii）または（iii）の場合は，定義により直ちに$X \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$である。そこで（i）の場合を考える。いま，FREE（$\lambda x_1 \cdots x_n \phi$）＝$\varnothing$であるから，式$\phi$の中の自由個体変項はたかだか$x_1, \cdots, x_n$にすぎない。すなわち，FREE（$\phi$）$\subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$である。よって，ある解釈に対して，$X = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle : \mathcal{A}\,[x_1, \cdots, x_n]\ \mathrm{SAT}\phi\}$と書ける。つまり，（ii）の場合に帰着できるので，$X \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$である。こうして，$X \in DEF(\mathcal{A}, \lambda - L_2) \Rightarrow X \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$が示せたので，逆の包含である$DEF(\mathcal{A}, \lambda - L_2) \subseteq DEF(\mathcal{A}, L_2)$が成り立つことが示せた。（Q. E. D.）

つぎに（2）の**証明**であるが，これも同様に実行できる。

最後に（3）の**証明**である。$X \in DEF^{1ST}(\mathcal{A}, L_2)$と仮定する。互いに異なる個体変項$x_1, \cdots, x_n$とFREE（$\phi$）$\subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$であるような式$\phi$が存在して，ある解釈に対して，$X = \{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle : \mathcal{A}\,[x_1, \cdots, x_n]\ \mathrm{SAT}\phi\}$である。ここで，各$xi \in A$（$1 \leqq i \leqq n$）であるから，$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$は，$Ai_1 \times \cdots \times Aij \times \cdots \times Ai_n$（$1 \leqq j \leqq n$）とおいたとき，$1 \leqq j \leqq n$であるすべてのjについて$Aij = A$となる（個体宇宙から成る）n項デカルト積のメンバーであり，各jについて変項vjのタイプijは1である。よって，$X = \{\langle v_1, \cdots, v_n\rangle \in A \times \overset{n}{\cdots} \times A : \mathcal{A}\,[v_1, \cdots, v_n]\ \mathrm{SAT}\phi\}$（$v_i = x_i \in A$）と書ける。よって，定義3．5．4により，$X \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$。こうして，$X \in DEF^{1ST}(\mathcal{A}, L_2) \Rightarrow X \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$が示されたから，$DEF^{1ST}(\mathcal{A}, L_2) \subseteq DEF(\mathcal{A}, L_2)$である。しかし，例えば，$X = \{\langle v_1, v_2\rangle \in A_2 \times A_3 : \mathcal{A}\,[v_1, v_2]\ \mathrm{SAT}\phi\}$とおくと$X \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$であるが，$X \notin DEF^{1SR}(\mathcal{A}, L_2)$であるから，$DEF^{1ST}(\mathcal{A}, L_2) \neq DEF(\mathcal{A}, L_2)$である。（Q. E. D.）

(24)　この式が無限領域を要求することは，つぎのようにして分かる。領域のある要素c_0を取るとXの連続性により，Xc_0c_1となる要素c_1が存在する。このとき，$c_0 \neq c_1$である（なぜなら，$c_0 = c_1$ならばXc_0c_0であるが，反反射性によりこれは禁じられているからである）。さらに，連続性により，Xc_1c_2となる要素c_2が存在する。反反射性によって，$c_1 \neq c_2$である。また$c_0 \neq c_2$でもある（なぜなら，もし$c_0 = c_2$ならば，Xc_0c_1とXc_1c_2と推移性によりXc_0c_2であるからXc_0c_0となって，反反射性と矛盾するからである）。さらに，Xc_2c_3である要素c_3が存在するが，このc_3は，反反射性と推移性により，c_0, c_1, c_2のいずれとも異なる。こうして，相異なる要素の無限系列：$c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots$が存在しなければならない。逆に，任意の無限領域を取るとき，ある要素から出発して，異なる要素の系列を終わることなく辿ることができなければならない。「異なり」が自分自身に適用できないためには反反射的でなければならず，「異なり」の連続が確保され，元に戻らないように反反射的で推移的でなければならず，かつ最後の要素（「異なり」の系列の終り）が無いために反反射的で連続的であるような，そのような関係（異なる要素同士の順序対の集合としての）が存在せねばならない。そのことは，反反射的・推移的・連続的な関係の存在を含意する。

(25)　0（ゼロ）から出発して0に関数Sを連続して適用したときの関数値：0，S0，SS0，SSS0，…は無限列になる。なぜなら，これらはすべて互いに異なるからである。実際，第一公理により，$S0 \neq 0$，$SS0 \neq 0$，$SSS0 \neq 0$，…であるから，0は$S0 \cdots 0$とは異なる。また，$m \neq n$のとき，$S0 \overset{m}{\cdots} 0 \neq S0 \overset{n}{\cdots} 0$である。なぜなら，もし$S0 \overset{m}{\cdots} 0 = S0 \overset{n}{\cdots} 0$ならば，（$n > m$として）第二公理により，$0 = S0 \overset{n\text{-}m}{\cdots} 0$が導かれるが，第一公理より$0 \neq S0 \overset{n\text{-}m}{\cdots} 0$が出て矛盾するからである。

(26) 実際，Ｉは同一性関数だから，Ｉ（0）＝0である。しかし，第一公理より，Ｓ0＝Ｉ（0）≠0，よって矛盾である。

(27) 包括公理：∃！X^n $\underline{\forall x_1\cdots x_n\ (X^n x_1\ \cdots x_n\longleftrightarrow\phi)}$ の下線部分を“$\Psi(X^n)$”と略記すると，証明すべきことは，$\exists X^n\ \Psi(X^n)\wedge\forall X^n\ Y^n(\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)\rightarrow X^n=Y^n)$ である。これは，第二階論理で外延性の公理から，以下のようにして導かれる。

$$\dfrac{\forall x_1\cdots x_n\ (\phi\longleftrightarrow\phi)}{\exists X^n\ \forall x_1\cdots x_n\ (X x_1\cdots x_n\longleftrightarrow\phi)}\ (\exists\text{導入})$$

ゆえに，$\exists X^n\Psi(X^n)$が導かれた。……①　つぎに，$\forall X^n Y^n(\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)\rightarrow X^n=Y^n)$ を示す。

$$\dfrac{\dfrac{(*)\text{：外延性の公理}}{X^n=Y^n\longleftrightarrow\forall x_1\cdots x_n\ (X^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow Y^n x_1\cdots x_n)}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)}{\Psi(X^n)}}{\forall x_1\cdots x_n\ (X^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow\phi)}}{(X^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow\phi)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)}{\Psi(Y^n)}}{\forall x_1\cdots x_n\ (Y^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow\phi)}}{(Y^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow\phi)}}{X^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow Y^n x_1\cdots x_n}}{\forall x_1\cdots x_n\ (X^n x_1\cdots x_n\longleftrightarrow Y^n x_1\cdots x_n)}}{X^n=Y^n}$$

こうして，$\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)$の仮定の下で，外延性の公理を援用して，$X^n=Y^n$が導かれたので，〈→導入〉によって，$\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)\rightarrow X^n=Y^n$が導かれ，これに〈∀導入〉を施すことで，$\forall X^n\ \forall Y^n(\Psi(X^n)\wedge\Psi(Y^n)\rightarrow X^n=Y^n)$ が導かれる。……②

こうして，①と②により，目的の式が外延性の公理から第二階論理で導かれる。

参　考　文　献

Boolos, G. [1998]：*Logic, Logic, and Logic,* Harvard U. P.

Manzano, M. [1996]：*Extensions of First Order Logic,* Cambridge U. P.

Shapiro, S. [1991]：*Foundations without Foundationalism, A Case for Second-order Logic,* Oxford U. P.

(2001年4月25日受理)