

急勾配水路における常流・射流の混在する  
流れと河床変動に関する研究

平成 9 年 1 月

日 下 部 重 幸

## 目 次

第1章	序論	1
1.1	緒言	1
1.2	常流・射流の混在する流れと河床変動解析の現状	2
1.3	本研究の目的と論文の構成	3
第2章	射流から常流に変化する流れの一次元計算法に関する研究	7
2.1	概説	7
2.2	マッコーマック法による跳水を伴う流れの計算法	8
2.2.1	基礎方程式	8
2.2.2	基礎方程式の定式化	9
2.2.3	境界条件および初期条件	17
2.2.4	計算の手順	19
2.3	跳水を伴う流れの実験	24
2.3.1	実験装置	24
2.3.2	実験方法	25
2.3.3	実験結果	26
2.4	実験結果への適用	28
2.4.1	逐次計算法による計算の適用性	28
2.4.2	マッコーマック法による計算の適用性	29
2.4.3	跳水を伴う流れに対する計算の安定性	29
2.4.4	人工粘性項の効果	32
2.5	跳水を伴う流れに対する最適な人工粘性係数	33

2. 5. 1	最適な人工粘性係数の求め方	33
2. 5. 2	種々の水面形への適用	36
2. 6	結語	38
第3章	常流・射流の混在する領域における河床変動の一次元計算法に関する研究	40
3. 1	概説	40
3. 2	マッコーマック法による常流・射流の混在する領域における河床変動計算法	40
3. 2. 1	基礎方程式	40
3. 2. 2	基礎方程式の定式化	42
3. 2. 3	境界条件および初期条件	43
3. 2. 4	計算の手順	44
3. 3	常流・射流の混在する領域における河床変動の実験	46
3. 3. 1	実験装置	46
3. 3. 2	実験方法	47
3. 3. 3	実験結果	48
3. 4	実験結果への適用	50
3. 4. 1	人工粘性項の効果	50
3. 4. 2	河床変動計算の安定性	58
3. 4. 3	段落ち流れによる堆砂計算の安定性の検討	59
3. 4. 4	デルタ先端付近の河床変動	60
3. 5	結語	65
第4章	急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元特性に関する実験的研究	67

4. 1	概説	67
4. 2	急勾配水路の拡幅部における固定床の実験	67
4. 2. 1	実験装置	67
4. 2. 2	実験方法	69
4. 2. 3	実験結果	70
4. 2. 4	急勾配拡幅部における流れの平面二次元特性	78
4. 3	急勾配水路の拡幅部における移動床の実験	83
4. 3. 1	実験装置	83
4. 3. 2	実験方法	83
4. 3. 3	実験結果	84
4. 3. 4	急勾配拡幅部における河床変動の平面二次元特性	89
4. 4	結語	90
第5章	急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元計算法に関する研究	92
5. 1	概説	92
5. 2	マッコーマック法による常流・射流の混在する流れと河床変動の平面二次元計算法	92
5. 2. 1	基礎方程式	92
5. 2. 2	基礎方程式の定式化	94
5. 2. 3	境界条件、初期条件および安定条件	97
5. 2. 4	計算の手順	99
5. 3	実験結果への適用	101
5. 3. 1	急勾配拡幅部における固定床上の流れへの適用	101
5. 3. 2	急勾配拡幅部における河床変動への適用	109

5. 4 結語

115

第6章 結論

117

## 第1章 序論

### 1. 1 緒言

河川は、上流部・中流部・下流部に大別されるが、河床土砂の動きをみると上流部では侵食、中流部では運搬、下流部では堆積作用がさかんで、絶えず河床が変化し続けている。特に洪水時には変化が著しく、個々の河川形状は、長年月の間に変化発達し、現在の形に落ち着いてきたものである。古来、利水・治水の両面から河川についてさまざまな研究が行われてきた。特に周辺の土地利用頻度が高い中下流の緩勾配の流れは、よく研究されてきている。流れと河床変動に限ってみても、計算手法がほとんど開発され、さまざまな河川の平面形状、流量、勾配の変化に対応して流れと流砂の解析ができ、河床変動の予測も可能である。それに比べ上流部すなわち山地部の流れに対しては、研究が若干遅れてきた感がある。

河川の機能上も景観上も欠かすことのできない河床砂も、元をたどれば山地の山腹崩壊により流出した土砂がふるい分けられ、下流へ移動中のものである。山腹からの流出土砂量は、必ずしも降雨に比例するものではなく、山腹の履歴など別の要因によることが多い。そのため山地河川では、流量が大きく流砂量も大きい場合と流量は大きいが流砂量は小さい場合がある。山腹崩壊によって多くの土砂が流出した場合、一洪水で全ての土砂が下流へ運ばれることはなく、大半の土砂は河道に堆積する。そしてその後の中小洪水によって徐々に土砂が下流へと運ばれていく。そのため中下流部の流砂量および河床変動を正確に予測するためには、上流部での河床変動を正確に把握することが必要である。特に河川上流部の河道計画、砂防ダムを含めた上流部での土砂収支は、そのまま中下流部への土砂供給量に関係し、水系全体の河道計画上でも重要な位置を占める。したがって、複雑な平面形状や勾配変化の激しい河川上流部での流れと河床変動の解析が重要視されてきている。

一方、河川の役割をみると、水道水、工業用水、農業用水の水源として利用され、また魚類をはじめ種々の生物の生息する場としても欠かせないものである。そして河川の存在そのものが上流部・中流部・下流部それぞれの地域で利水、景観、親水とさまざまな役割を演じて我々の生活になくてはならないものである。しかし、一旦洪水となると河川の様相が一変する。人間の生活に無限の恵みを与えてくれていた水は、巨大なエネルギーを伴って流下し大被害をもたらすこともある。

近年、河川に対する認識や感覚も変化してきており、いまや利水・治水という面のみで河川を計画・維持管理するわけには行かない。特に自然・環境・やすらぎ・景観などそれぞれの地域で、多自然型川づくりなどが検討され河川が人々の生活に密着した形でその役割を期待される度合いが大きくなってきている。そこでは複雑な平面形状や縦断形状、あるいは植生を含む中州や堤防の保存など、ときには治水上厳しい条件となることも考えら

れる。河川に対する認識や感覚が変わった現在と言えども、洪水を安全に流下させる機能は、河川の備えるべき重要な要件であることには変わりはない。したがって、多自然型の川づくりでも洪水を安全に流下させうるか否かは、計画段階から十分検討しておかなければならない。ここでも複雑な平面形状や縦断形状を有する個所での流れと河床変動の解析が必要とされてきている。

複雑な平面形状や縦断形状を有する河川の安全性は模型実験で検討するのが理想的であるが、時間や経費の面で実験が困難なことも多いと思われる。そこで信頼性があり手軽に扱える数値計算法の確立が望まれるところである。しかし、複雑な平面形状や縦断形状を有する個所では常流・射流の混在する流れとなる。常流と射流とでは、波の伝播方向が異なるため、物理的にその遷移部で計算方向を分けざるを得ない。また差分法による河床変動計算でも常流部と射流部とで、それぞれ後退・前進差分としなければ安定した計算ができないことが指摘されている<sup>1)</sup>。計算を分けずに行える手法の研究も行われていて、良好な成果も得られているが<sup>2)</sup>、適用に当たっては面倒な手順を必要とする。

これに対し、近年衝撃波獲得法とよばれる計算手法が開発され常流と射流が混在する流れの計算が可能になってきている。中でも取扱が比較的容易で計算結果の再現性が良いとされるマッコーマック法 (MacCormack's Scheme) が注目されている。本研究においても計算手法としてマッコーマック法を用いて解析した。

## 1. 2 常流・射流の混在する流れと河床変動解析の現状

常流・射流の混在する流れの解析では、水面形方程式を逐次計算で解析する従来の方法による場合、常流から射流あるいは射流から常流へと遷移する点を特異点として、その存在と位置を計算に先だてて確かめておき支配断面あるいは跳水の条件として与える必要がある<sup>3)</sup>。しかし、前述のように常流・射流の混在する流れの解析にマッコーマック法などが用いられるようになり、常流と射流の遷移点が計算によって自動的に求まることから計算対象が大幅に拡大した。さらに二次元流れや移動床の計算に適用すると急勾配での複雑な流れや河床変動の計算が可能になる。

マッコーマック法は、2段階ラックスウエンドルフ法 (Two-Step Lax-Wendoroff's Scheme) の一つと考えられている。2段階ラックスウエンドルフ法は、一次精度のラックス法 (Lax's Scheme) の人工粘性項を小さくして打切り誤差を2次精度とし演算回数を少なくすむよう改良したものである。2段階ラックスウエンドルフ法では第1段階で一次精度の中間的予測値を求め、第2段階で2次精度の解を求めるいわゆる予測子修正子法の一つである。しかし、2段階ラックスウエンドルフ法は計算格子中間点の記述を必要とするので、境界条件の設定が複雑となる。これに比べマッコーマック法は、格子中間点の記述を必要としないので境界条件の設定が容易で分かり易い。

計算手法としての適用性、特に解の数値振動について検討するため、解の安定性が重要となる初期値問題の一つであるバーガーズ方程式 (Burgers equation) に 2 段階ラックスウエンドロフ法やマッコーマック法を適用して計算し、適当な人工粘性項を付加することで十分な精度で解の安定性が得られることが報告されている<sup>4)・5)</sup>。また、せきを越える流れ<sup>6)~8)</sup>や跳水を伴う一次元流れと河床変動についての研究が進められてきた<sup>9)~15)</sup>。さらに、二次元流れ<sup>16)・17)</sup>や二次元河床変動の計算も行われている<sup>18)</sup>。

常流・射流の混在する流れや河床変動の計算にマッコーマック法を用いると、計算方向や前進・後退など差分の取り方を気にすることなく適用でき大変便利である。しかし、常流と射流の遷移点は跳水など不連続となるため、計算の安定上厳しい条件となり計算を行った場合数値振動が発生する。そして場合によっては数値振動が増幅して、ついには計算が発散することもある。そのため、この数値振動を制御する目的で一般に人工粘性項が付加される。人工粘性項についても拡散型<sup>19)・20)</sup>や TVD (Total Variation Diminishing) 型<sup>21)~25)</sup>などが提案され、それぞれ数値振動の抑制に効果を発揮している。しかし、実際の計算に適用する場合、人工粘性項をどう扱うべきか不明な点が多く、跳水を伴う流れに対して拡散型の最適な人工粘性係数の求め方が報告されている<sup>26)~28)</sup>程度で、全ての範囲に渡って計算の不安定性を制御する手法が十分確立されるまでには至っていない。

### 1. 3 本研究の目的と論文の構成

本研究は、急勾配水路における常流・射流の混在する流れと河床変動に関して実験を行い、それらを再現する数値計算の手法について検討したものである。実験については常流・射流の混在する固定床一次元流れとして、急勾配水路の下流端をせき上げた場合の跳水を伴う流れの水面形をとりあげた。一次元河床変動では、初期河床勾配が急勾配となる一様砂のダム堆砂を対象とした。二次元固定床流れでは、急勾配水路に拡幅部を設置し、下流端をせき上げた形で、水面形などが平面的に二次元になるものにした。二次元移動床流れでは、二次元固定床に用いた急勾配拡幅部の底面に一様砂を入れ実験に用いた。実験は流量が小さく拡幅部を過ぎると流れが蛇行するものと、ある程度流量が大きく拡幅部近傍で洗掘や堆積が起こるものとに分けて行った。

計算は、打ち切り誤差が二次精度となりスキームが比較的簡単で常流・射流の混在する流れの解析に適するマッコーマック法を用いて、実験を行った条件で再現計算を試みた。跳水を伴う流れの計算では、安定して計算するための人工粘性項に関してその効果と適当な値について検討した。ダム堆砂の計算では、デルタ先端部で数値振動が大きくなるが、その要因を明らかにし、安定した計算のための手法について検討した。二次元の計算では固定床実験で得られた結果の再現に重点をおいた。特に、同一の水力条件で実験しても僅かな初期条件の違いで左右非対称など複数の水面形ができたものについて、計算で再現す

ることを試みた。また、これらは移動床で実験すると河床と水面形が左右対称なものとなるが、これも二次元移動床の数値計算で再現してみた。

山地河川や多自然型川づくりにおいて、今後模型実験の代わりに数値計算を解析に活用する機会を増やしてゆくためには、複雑な流れの解析が可能となることが必要である。その意味で、同一の水理条件で複数の水面形が実験で得られた場合、計算でも同様の手順でそれぞれの水面形が得られることは、必要不可欠なことと思われる。これら計算結果の再現性の向上が実験に代わる実用的な数値解析手法の確立につながるものとする。

本論文でとりあげた項目を各章別にあげるとつぎのようである。

第2章では、固定床上で射流から常流に変化する流れの実験と一次元計算法について検討した。実験では一次元流れとして扱える程度の断面縮小部を設け、下流端をせき上げ断面漸縮部、縮小部、漸拡部で跳水が発生するように、水路勾配とせき上げ高さを変化させた。マッコーマック法を用いた場合の跳水点付近の数値振動について詳細に調べ実験値と比較して、人工粘性項による解の鈍りが少なく、数値振動もある程度抑制できるように、最適な人工粘性係数の求め方を提案した。また、これを用いて断面縮小部を有し跳水を伴う流れの計算を行った場合、実験結果が十分再現できるかどうか検討した。

第3章では、常流・射流の混在する領域での河床変動の実験と一次元計算法について検討した。実験は、中央部に若干の断面縮小部を有する開水路に一様砂を敷き詰め、初期河床勾配が急勾配となるようにした。上流端で平衡流砂量を与えたものについて、下流端のせき上げ高さを種々変化させて実験を行った。河床と水面形を一定時間毎に計測したが、河床の実験結果から堆砂デルタの形状はほとんど横断方向に変化がないため、計算ではマッコーマック法の一次元河床変動計算を適用した。計算では、差分化した河床変動の式に大きな人工粘性項を付加すると、計算は安定するが堆砂デルタの形状は鈍ってくる。しかし、人工粘性項を付加しないと数値振動が大きくなり、場合によっては計算が発散することがある。そこでこの章では、堆砂デルタ先端部の流れが一種の段落ち流れであるとして、発散に向かう要因を探るとともに、安定した計算を継続するための条件と発散を防ぐ計算手法について検討した。

第4章では、急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元特性に関して実験的に検討した。固定床実験として急勾配拡幅部を通過する流れについて、流量と河床勾配、下流側のせき上げ高さなどを変化させて水面形状や流速、流向を計測した。同一の水理条件でも僅かな初期条件の違いによって、異なった水面形態を示す場合があり、これらの形成状態についても詳しく調べた。

移動床については、固定床で用いた水路に一様砂を敷き詰め、流量が小さく水みちが形成される場合と、流量がある程度大きく洗掘と堆積が生じる場合に分けて、河床形などを計測した。

第5章では、第4章で行った平面二次元の固定床と移動床の実験結果について、マッコ

ーマック法を二次元に拡張したものをを用いて、再現計算を行った。特に固定床の同一水理条件の元で左右非対称など複数の水面形が形成され、これらが移動床になると左右対称な河床と水面形のみになるものについて、それぞれの再現計算が可能かどうか検討した。

最後に、各章から得られた結果を第6章にまとめて結論とする。

#### 参考文献

- 1) 芦田和男・高橋保・道上正規：河川の土砂災害と対策、防災シリーズ5、森北出版 pp. 210-217, 1983.
- 2) 道上正規・藤田正治・前田真吾：非平衡浮遊砂を考慮した急勾配水路における貯水池堆砂の計算法、水工学論文集、第34巻、pp. 367-372, 1990.
- 3) 例えば土木学会編、水理公式集、pp. 198-201, 1985.
- 4) 潮田智道・河村三郎・中谷剛：保存則系差分法のスキームの特性に関する考察、土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、pp. 438-439, 1990.
- 5) 潮田智道・河村三郎：一次元保存則系差分法による数値解析の際に生ずる数値振動の除去法について、水工学論文集、第36巻、pp. 349-354, 1992.
- 6) 崇田徳彦・清水康行・北条紘次：MacCormack法を用いた不定流計算、土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、pp. 432-433, 1990.
- 7) 名合宏之・前野詩朗・瀬口俊明・尾播佳徳：常流・射流の混在する流れの数値シミュレーション、土木学会中国四国支部研究発表会講演概要集、pp. 158-159, 1995.
- 8) 名合宏之・前野詩朗・尾播佳徳・飯田明典：常流と射流が混在する流れの数値解析法に関する研究、土木学会中国支部研究発表会講演概要集、pp. 205-206, 1996.
- 9) 岡部健士・天羽誠二・石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について、水工学論文集、第36巻、pp. 337-342, 1992.
- 10) 河村三郎・中谷剛・前田哲史・澤田良二：TVD-MacCormack法による河床変動計算、土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、pp. 518-519, 1993.
- 11) 岡部健士・高橋邦治・穴瀬康雄：MC法を用いた1次元開水路流れの数値計算法、徳大工学部研究報告、pp. 25-33, 1993.
- 12) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：跳水を含む流れと河床変動の数値計算、土木学会第50回年次学術講演会講演概要集、pp. 442-443, 1995.
- 13) Shigeyuki KUSAKABE, Masanori MICHIUE, Masaharu FUJITA and Osamu HINOKIDANI, Bed Variation Model in Steep Channels with Transition of Flow Using MacCormack Scheme, Management of Sediment Philosophy, Aims, and Techniques, Sixth International Symposium River Sedimentation, pp. 649-658, 1995.

- 1 4) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究、水工学論文集、第40巻、pp. 977-982, 1996.
- 1 5) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：堆砂前面付近の流れと河床変動計算の安定性、土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、pp. 590-591, 1996.
- 1 6) 河村三郎・中谷剛：TVD-MacCormack 法による常・射流混在の数値計算法、水工学論文集、第37巻、pp. 763-768, 1993.
- 1 7) 岡部健士・山下秀基・天野裕仁：常流・射流の混在する2次元浅水流の数値計算法、水工学論文集、第39巻、pp. 403-410, 1995.
- 1 8) 永瀬恭一・道上正規・檜谷治：狭窄部を持つ山地河川の河床変動、水工学論文集、第40巻、pp. 887-892, 1996.
- 1 9) 日本機械学会：流れの数値シミュレーション、コロナ社、pp. 106-108, 1988.
- 2 0) 前出論文 9)
- 2 1) 大宮司久明：圧縮性流れの数値スキームの基礎的考え、日本機械学会論文集(B編)、57巻540号、pp. 29-35, 1991.
- 2 2) 前出論文 5)
- 2 3) 前出論文 1 0)
- 2 4) 前出論文 1 1)
- 2 5) 前出論文 1 6)
- 2 6) 前出論文 1 2)
- 2 7) 前出論文 1 3)
- 2 8) 前出論文 1 4)

## 第2章 射流から常流に変化する流れの一次元計算法に関する研究

### 2.1 概説

山地河川は、一般に急勾配水路と見なすことができるが、局所的に見ると図-2.1に示すように勾配は一定でなく河道形状は複雑に変化するのが常である。そのため常流と射流の混在する流れが形成され、さらに河床変動を伴う場合は随所に堆積と洗掘の個所が現れる。ここでは、これらの流れの中で最もシンプルな例として、固定床で射流から常流に変化する流れの一次元計算法について検討する。

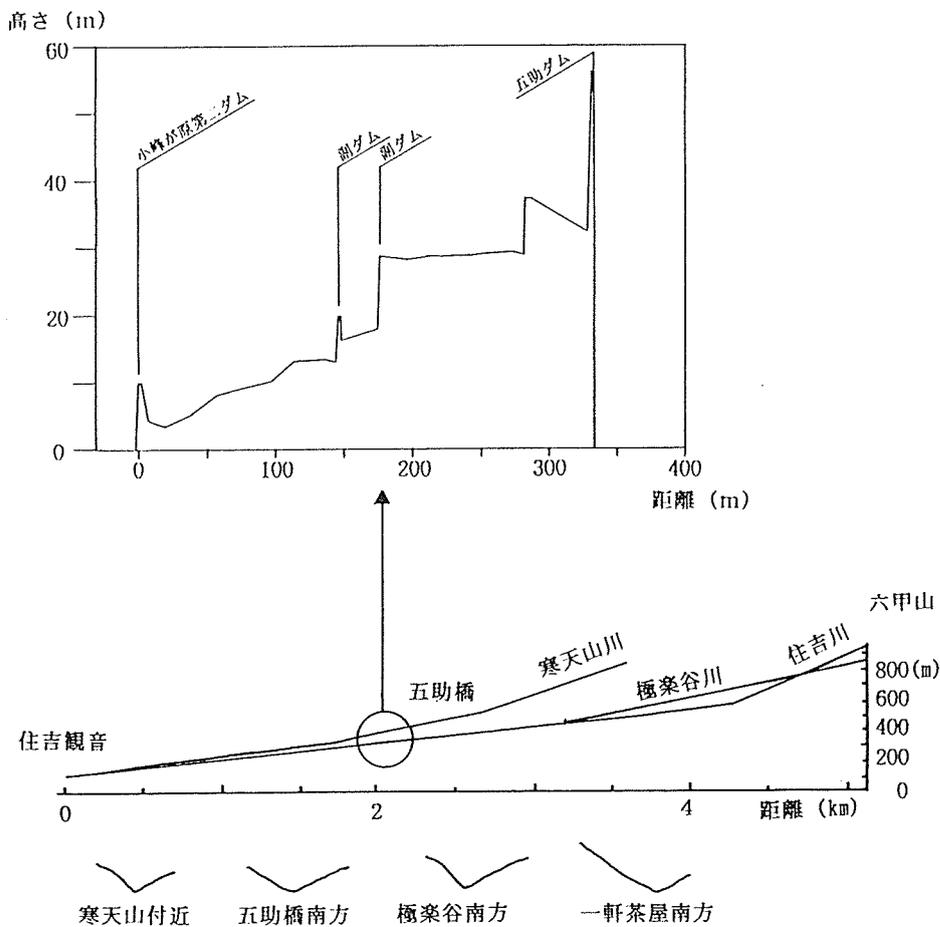


図-2.1 山地河川の河道形状の例

(六甲山系住吉川および小峰ヶ原第二ダム～五助ダム間拡大図)

射流から常流に変化する流れ、すなわち跳水前後の流れの水面形の計算については、従来からの水面形方程式を逐次計算で解析する方法でも、適当な跳水条件の設定を行えば、比較的精度よく計算することが可能である。しかし、常流部では下流から上流方向へ、射流部では上流から下流方向へと水面形の計算をしなければならず、跳水点の位置を見つけるのに複雑なプログラムを要する。また、流量の変化や河床変動に伴って、変化する跳水点

はその都度計算し直さなければならない。したがって逐次計算法は山地河川などに適用する方法としては実用的であるとは言えない。

常流・射流の混在する流れの計算法としてマッコーマック法が有力とされ注目されてきている<sup>1)~11)</sup>。この方法は、(1)常流・射流の区別なく計算できる、(2)跳水など流れの遷移点が自動的に決定されるなどの利点がある。計算の適用例については、勾配の変化、河幅の変化、せきを越える流れなど良好な結果が報告されている<sup>2)~10)</sup>。しかし、計算式には数値振動を制御するための人工粘性項が必要である。人工粘性項には拡散型やTVD (Total Variation Diminishing)型など種々の形のものがすでに提案されているが<sup>2)~7)</sup>、急勾配水路などにおいて常流・射流の混在するような流れに対して、人工粘性項に含まれる人工粘性係数を一般的に与える方法が提案されていない。岡部らによって定義された拡散型の人工粘性項は無次元の人工粘性係数を含むもので、常流・射流の混在する流れに適用するのに適当なものの一つと思われるが、その値は経験的に決められるべきものとされている<sup>7)</sup>。

本研究では、射流から常流に変化する流れにマッコーマック法を適用した場合の計算精度について詳細に検討し、人工粘性係数を一般的に与える方法を提案する。

## 2. 2 マッコーマック法による跳水を伴う流れの計算法

### 2. 2. 1 基礎方程式

一次元非定常・漸変流の連続式および運動方程式は、図-2. 2のような座標系および記号を用いて、次のように表すことができる。

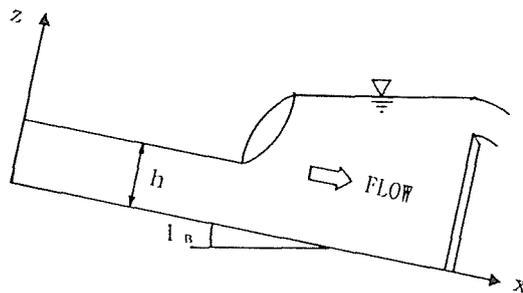


図-2. 2 座標系

連続式：

$$\frac{\partial (Bh)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2. 1)$$

運動方程式：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gBh^2}{2} + \frac{Q^2}{Bh} \right) = gBh(i_B - i_F) \quad (2.2)$$

ここに、Bは水路幅、hは水深、Qは流量、gは重力の加速度、 $i_B$ は河床勾配、 $i_F$ はエネルギー勾配、t、xおよびzは時間、流れ方向の距離および鉛直方向の距離である。

## 2. 2. 2 基礎方程式の定式化

### (1) マッコーマックスキームによる差分式

2. 2. 1で示した基礎方程式を、一種の不連続区間である跳水区間も連続的に取り扱える保存形でベクトルの式に書き改めるとつぎのようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = C \quad (2.3)$$

ただし、

$$U = \begin{bmatrix} Bh \\ Q \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$E = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{gBh^2}{2} + \frac{Q^2}{Bh} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ gBh(i_B - i_F) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

である。

上式に対してマッコーマックススキームのスキームは、図-2.3のように予測子段階と修正子段階に分けて差分化する。すなわち前進差分の予測子段階で一旦 $\Delta t$ 時間後の値 $\bar{U}_i$ を求めておき、後退差分の修正子段階で $\Delta t$ 時間後の $U_i^{n+1}$ を求め、 $U_i^{n+1}$ と $\bar{U}_i$ との平均値を改めて $\Delta t$ 時間後の値 $U_i^{n+1}$ とする。したがって計算格子としては中間点を必要としないが、図-2.3に示すように、修正子段階で平均値を使うことによって、あたかも格子中間点を用いた場合のような計算結果を得ることができる。

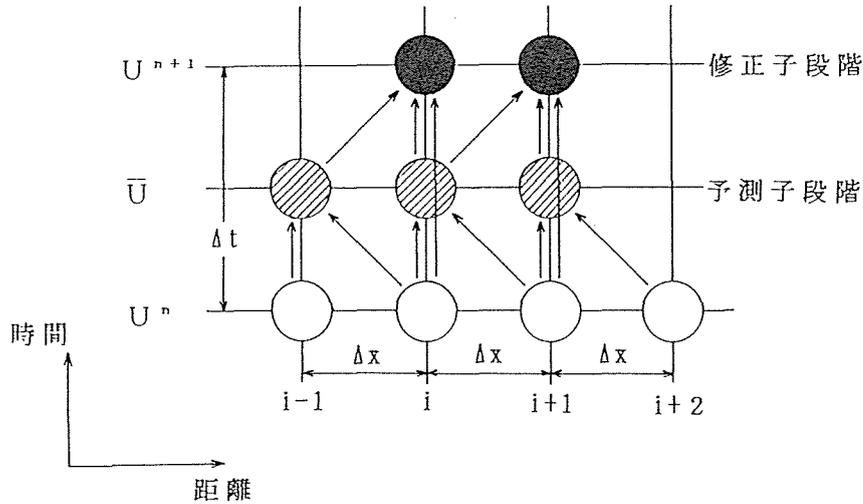


図-2. 3 マッコーマックスキーム

マッコーマック法によって式(2.3)を差分化すると、つぎのようになる。

$$\text{予測子段階: } \bar{U}_i = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n) + \Delta t C_i^n \quad (2.7)$$

$$\text{修正子段階: } U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + \bar{U}_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}) + \frac{1}{2} \Delta t \bar{C}_i \quad (2.8)$$

$$\text{精度: } O(\Delta x^2, \Delta t^2)$$

ここに、 $\bar{E}_i = E(\bar{U}_i)$ 、 $\bar{C}_i = C(\bar{U}_i)$ であり、 $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ は空間および時間に関して2次精度であることを意味する。また $\Delta x$ は格子点の計算間隔、 $\Delta t$ は計算の時間間隔、下付き添字 $i$ は $x$ 軸上の計算点、上付き添字 $n$ は時間軸上の計算点、 $\bar{\quad}$ は予測子による結果である。

マッコーマック法では、流速0のよどみ点や限界流のとき中立安定となり、不安定化する恐れがあるとされている。実際に、跳水を伴う流れに対し式(2.7)、(2.8)を適用して水面形を計算すると、跳水点付近で数値振動が発生し水面形が乱れる。これを防止するためには、高次の人工粘性項を陽的に付加することが有効とされている。上の予測子および修正子段階の式に人工粘性項 $D$ を付加したものを、式(2.9)、(2.10)に示す<sup>12)</sup>。

$$\text{予測子段階: } \bar{U}_i = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{E_{i+1}^n - E_i^n + (D_{i+1}^n - D_i^n)\} + \Delta t C_i^n \quad (2.9)$$

$$\text{修正子段階: } U_{i,n+1} = \frac{1}{2}(U_{i,n} + \bar{U}_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ \bar{E}_i - \bar{E}_{i-1} - (\bar{D}_i - \bar{D}_{i-1}) \} + \frac{1}{2} \Delta t \bar{C}_i \quad (2.10)$$

$$D_i = \frac{K'}{8} (U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}) \quad (2.11)$$

ここに、 $K'$ は人工粘性係数である。

式(2.11)で表される人工粘性係数は、 $[LT^{-1}]$ という速度の次元を有しており実際の流れに適用する係数としては不便であると思われる。そこで、本研究では岡部らの定義による人工粘性係数を無次元化した拡散型と呼ばれる次式を用いることとした<sup>4),7)</sup>。

$$D_i = K_v \frac{u_{*i} h_i}{\Delta x} (U_{i+1,n} - 2U_{i,n} + U_{i-1,n}) \quad (2.12)$$

ここに、 $u_*$ は摩擦速度を表し、 $K_v$ は人工粘性係数で式(2.11)の $K'$ を  $8(h_i/\Delta x)u_*K_v$ とおいたもので $K_v$ は無次元である。本研究では、流れの連続式および運動方程式に対して同じ値を用いている。人工粘性項については、拡散型の他にTVD型<sup>5)~7)</sup>などいくつかのものが提案されている。

なお、式(2.7)~(2.12)では予測子段階で前進差分、修正子段階で後退差分を用いているが、この順序は逆にしても差し支えない。

## (2) マッコーマックススキームの精度

マッコーマック法は、2段階ラックスウエンドロフ法的一种と考えられ、2次精度の陽解法である。2段階ラックスウエンドロフ法は、格子中間点( $i+1/2, n+1/2$ )上において1次精度の予測値を求め、格子点( $i, n$ )上で2次精度の修正値を求める方法だが、マッコーマック法は、格子点( $i, n$ )上の値だけでスキームを記述できるので、境界条件を課するとき格子中間点( $i+1/2, n+1/2$ )では考える必要がなく容易である。また人工粘性項を付加しても2次精度は維持され、式(2.9)~(2.12)に付加した人工粘性項は、2次精度を変えない $O(\Delta x^3)$ の大きさである。

ここで、マッコーマックススキームおよび付加する人工粘性項の精度について考察する。まず、基礎式を式(2.3)とし、マッコーマックススキームによる差分式(2.7)、(2.8)が2次精度であることを示す。式(2.7)を式(2.8)に代入すると次式のようになる。

$$U_{i,n+1} = U_i - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{i+1,n} - E_{i,n} + \bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}) + \frac{1}{2} \Delta t (C_{i,n} + \bar{C}_i) \quad (2.13)$$

上式において、下付き添字*i*は格子点の位置すなわち空間を表し、予測子の $\bar{\phantom{x}}$ は時間を表している。そこで $E_{i+1}^n, \bar{E}_i, \bar{E}_{i-1}, \bar{C}_i$ をそれぞれつぎのようにテイラー展開する。 $E_{i+1}^n$ を空間方向に $E_i^n$ のまわりに、 $\bar{E}_i$ を時間方向に $E_i^n$ のまわりに、 $\bar{E}_{i-1}$ を時間および空間方向に $E_i^n$ のまわりに、 $\bar{C}_i$ を時間方向に $C_i^n$ のまわりに展開し、3次以降の項を $O(\Delta x^3, \Delta t^3)$ と表すとそれぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 E_{i+1}^n &= E_i^n + \frac{\partial E_i^n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_i^n}{\partial x^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \\
 \bar{E}_i &= E_i^n + \frac{\partial E_i^n}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_i^n}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \\
 \bar{E}_{i-1} &= E_i^n - \frac{\partial E_i^n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_i^n}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial E_i^n}{\partial t} \Delta t \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_i^n}{\partial t^2} \Delta t^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_i^n}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + O(\Delta t^3, \Delta t^3) \\
 \bar{C}_i &= C_i^n + \frac{\partial C_i^n}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_i^n}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

式(2.14)を式(2.13)に代入して整理すると、式(2.13)の右辺は、

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= U_i^n - \frac{\partial E_i^n}{\partial x} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_i^n}{\partial x \partial t} \Delta t^2 + \Delta t C_i^n + \frac{1}{2} \frac{\partial C_i^n}{\partial t} \Delta t^2 \\
 &\quad + O(\Delta t^3)
 \end{aligned}$$

となる。さらに上式第3項の空間微分を式(2.3)を用いて、時間微分に置き換えるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= U_i^n - \frac{\partial E_i^n}{\partial x} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_i^n}{\partial t^2} \Delta t^2 + \Delta t C_i^n + O(\Delta t^3) \\
 &\quad (2.15)
 \end{aligned}$$

一方、式(2.13)の左辺 $U_{i+1}^{n+1}$ を時間方向に $U_i^n$ のまわりにテイラー展開するとつ

ぎのようになる。

$$\text{左辺 } U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\partial U_i^n}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_i^n}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (2.16)$$

左辺 = 右辺とおくとつぎのように式 (2.17) が得られることになり、式 (2.3) と比較してマッコーマックスキームが2次精度であることが分かる。

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial t} + \frac{\partial E_i^n}{\partial x} = C_i^n + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (2.17)$$

つぎに、人工粘性項を付加した場合の精度について考察する。式 (2.9) を式 (2.10) に代入して、

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = & U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n + \overline{E}_i - \overline{E}_{i-1}) + \frac{1}{2} \Delta t (C_i^n + \overline{C}_i) \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (D_{i+1}^n - D_i^n - \overline{D}_i + \overline{D}_{i-1}) \end{aligned}$$

上式に式 (2.11) を代入して整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = & U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n + \overline{E}_i - \overline{E}_{i-1}) + \frac{1}{2} \Delta t (C_i^n + \overline{C}_i) \\ & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ (U_{i+2}^n - 3U_{i+1}^n + 3U_i^n - U_{i-1}^n) \\ & - (\overline{U}_{i+1} - 3\overline{U}_i + 3\overline{U}_{i-1} - \overline{U}_{i-2}) \} \quad (2.18) \end{aligned}$$

式 (2.18) の右辺第3項までは、人工粘性項を付加しない場合の式であり、先に2次精度であることを示した。ここでは、右辺第4項の大きさについて考えるものとし、右辺第4項中の各項をつぎのようにテイラー展開する。 $U_{i+2}^n$ 、 $U_{i+1}^n$ 、 $U_{i-1}^n$ を空間方向に $U_i^n$ のまわりに、 $\overline{U}_i$ を時間方向に $U_i^n$ のまわりに $\overline{U}_{i+1}$ 、 $\overline{U}_{i-1}$ 、 $\overline{U}_{i-2}$ を時間および空間方向に $U_i^n$ のまわりに展開する。これらの項を代入して整理すると式 (2.18) の右辺第4項は、

$$\begin{aligned}
 \text{右辺第4項} &= -\frac{\Delta t K'}{16\Delta x} \left\{ \left\{ \frac{\partial^3 U_1^n}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 U_1^n}{\partial x^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{\partial^4 U_1^n}{\partial x^3} \Delta x^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^4 U_1^n}{\partial x^4} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \right\} \right\} \\
 &= -\frac{\Delta t K'}{16} \frac{\partial^4 U_1^n}{\partial x^4} \Delta x^3 - O(\Delta x^4) \qquad (2.19)
 \end{aligned}$$

となり  $O(\Delta x^3)$  の大きさである。したがって、式 (2.11) や式 (2.12) の拡散型と呼ばれる人工粘性項を付加したマッコーマック法の式 (2.9)、(2.10) は2次精度を有し、人工粘性項の付加によっても精度の低下が起こらないことが分かる。

### (3) 人工粘性項の働き

拡散型的人工粘性項の働きについて若干の考察を行う。ここでは、連続式と運動方程式の双方に同じ形で人工粘性項を付加している。運動方程式への付加は、水面形が不連続となる跳水を伴う流れの数値振動を制御しようとするものとして理解されるが、連続式への付加は、局部的に流れの連続性を崩すものである。しかし、マッコーマック法では、連続式と運動方程式の双方に人工粘性項を付加して計算の安定性を得ている。事実、運動方程式のみに人工粘性項を用いて計算を実行すると非常に大きな数値振動を発生する。人工粘性項は、解の数値振動を平均化して滑らかにする働きがあり、人工粘性項の付加によって連続式と運動方程式の局部的なずれを互いに補っているものと思われる。

拡散型的人工粘性項はいわゆる二次の項で、予測子段階と修正子段階での基本的な働きを単純な水面形を例にあげモデル化して示すとつぎのようである。離散化した計算点  $i-1, i, i+1$  において式 (2.11) や式 (2.12) で表される  $D_1$  は、水面形が図-2.4のように凸型の場合はマイナスとなり、図-2.5のように凹型の場合はプラス、図-2.6のように直線状を成す場合はゼロとなる。

$$D_1 \propto (h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}) < 0$$

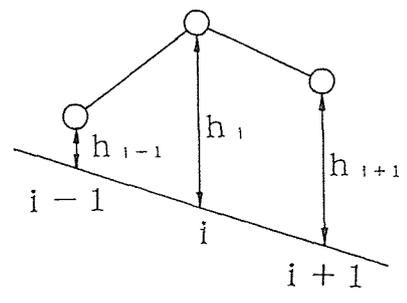


図-2.4 凸型の水面形

$$D_1 \propto (h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}) > 0$$

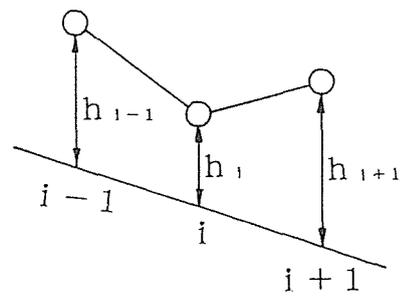


図-2.5 凹型の水面形

$$D_i \propto (h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}) = 0$$

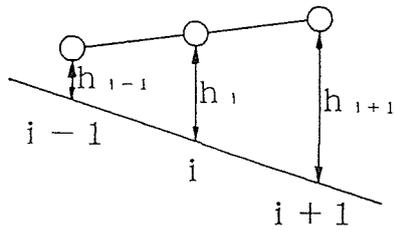
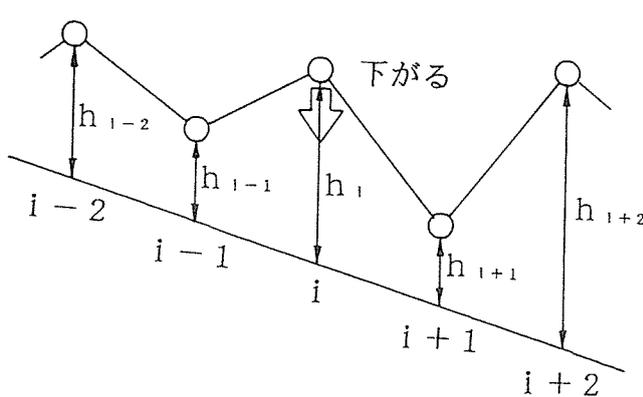


図-2.6 直線状の水面形

離散化した計算点  $i-2 \sim i+2$  の5点で、水面形の計算結果が図-2.7のように振動している場合、計算点  $i$  における予測子段階および修正子段階の人工粘性項  $-(D_{i+1} - D_i)$  および  $(D_i - D_{i-1})$  は絶対値の大きなマイナスの値となり計算点  $i$  の水深  $h_i$  は人工粘性項の働きで減少し、振動が抑制されることになる。同様に水面形の計算結果が図-2.8のように振動している場合、計算点  $i$  における人工粘性項  $-(D_{i+1} - D_i)$  と  $(D_i - D_{i-1})$  は絶対値の大きなプラスの値となり、水深  $h_i$  は人工粘性項の働きで増加して振動が抑制される。また図-2.9、2.10のように全体が凸型や凹型の場合、計算点  $i$  と前後の点  $i-1, i+1$  の曲率によって異なるが、いずれも人工粘性項はあまり絶対値の大きな値とはならない。

単純な水面形を例にあげての人工粘性項の働きは以上のようなものであるが、跳水付近の流れでは複雑な水面形となり、人工粘性項の働きは離散化した計算点の位置との関係によっても異なる。このことについては2.4および2.5で詳しく述べる。



$$D_{i-1} > 0 \quad (\text{凹型})$$

$$D_i < 0 \quad (\text{凸型})$$

$$D_{i+1} > 0 \quad (\text{凹型})$$

$$-(D_{i+1} - D_i) < 0$$

$$(D_i - D_{i-1}) < 0$$

図-2.7 計算点  $i$  で凸型に振動した水面形

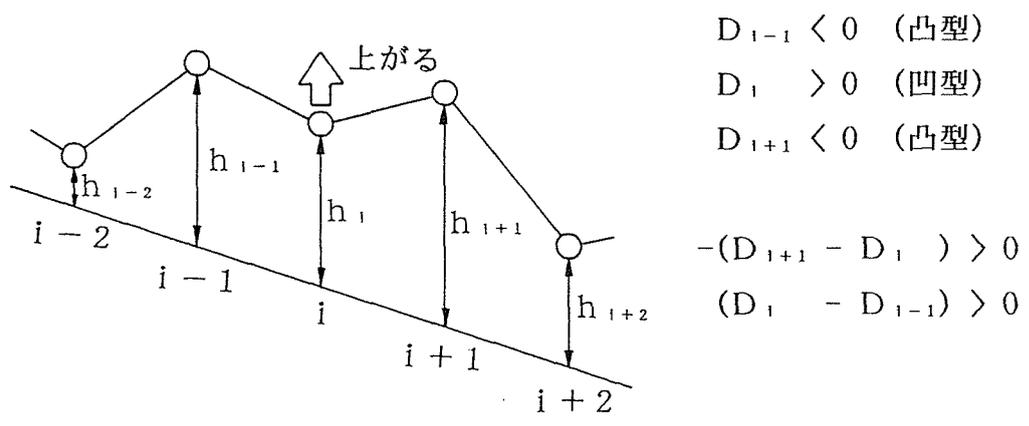


図-2. 8 計算点*i*で凹型に振動した水面形

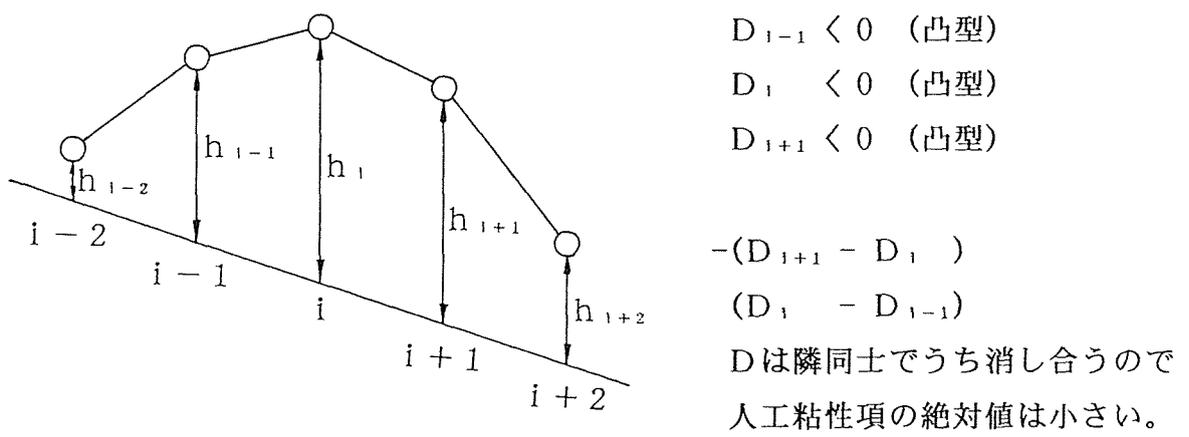


図-2. 9 全体が凸型の水面形

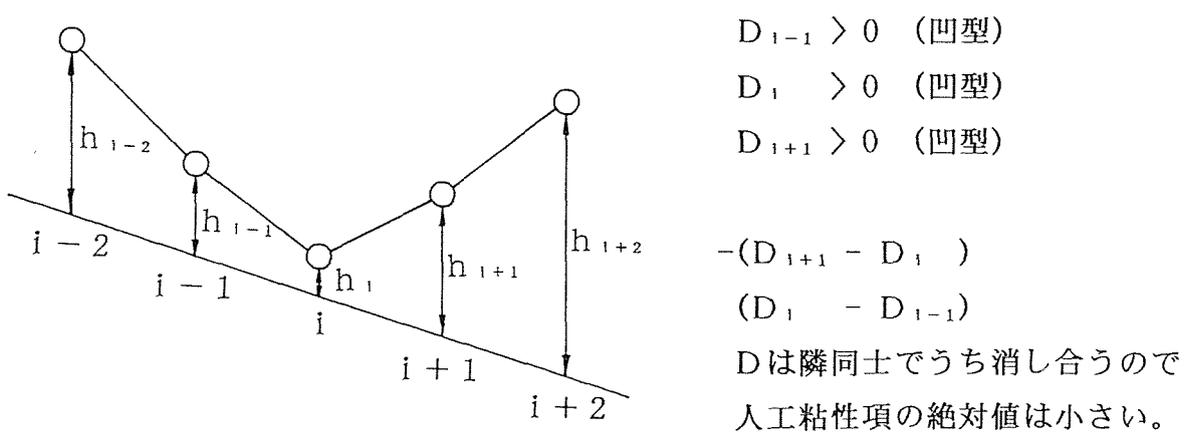


図-2. 10 全体が凹型の水面形

## 2. 2. 3 境界条件および初期条件

跳水や常流から射流への遷移点を計算の対象区間に含む場合でも、マッコーマック法では跳水や遷移点の位置は自動的に決定されるので、これらの点で境界条件を与える必要はない。したがって、上流端と下流端の水理量のみを境界条件として与えればよい。与える水理量は、上流端と下流端それぞれでの流量と流積で合計4個になる。しかし、一般に上下流端で各1個を条件として与え、残りの2個は現象の物理的性質を考慮しつつ構成した適当な差分スキームにより算定されるべきものである。まず、本研究で実験対象とした跳水を伴う定常流に対する計算の境界条件を上流端と下流端に分けて示し、計算上の初期値の設定法について述べ、つぎに非定常流の境界条件と初期条件の設定法について述べる。

### (1) 定常流の境界条件と初期値の設定

上流端条件：上流端の境界条件は、後退差分を用いた場合に必要となるもので2. 2. 2に示した式では修正子段階に対するものである。ただし、人工粘性項には前進差分の予測子段階でも上流端の条件を必要とする。この場合図-2. 11に示すように、まず上流端の条件として流量を与える。流積は、上流端付近で近似的に流れが等流になるものとして1つ下流側の流積をそのまま用いる。

さらに、人工粘性項の計算には、境界外の条件が必要となる。この境界外の条件としては式(2. 20)に示す非保存変数の直線外挿を用いて設定する。

$$\begin{aligned} E_0 &= E(f_0) \\ f_0 &= 2f_1 - f_2 \end{aligned} \quad (2. 20)$$

ここに、添字0は境界外の点、1は上流端、2は上流端から1つ下流側の計算点を示し、 $f$ は水深 $h$  および流速 $u$  を表す。

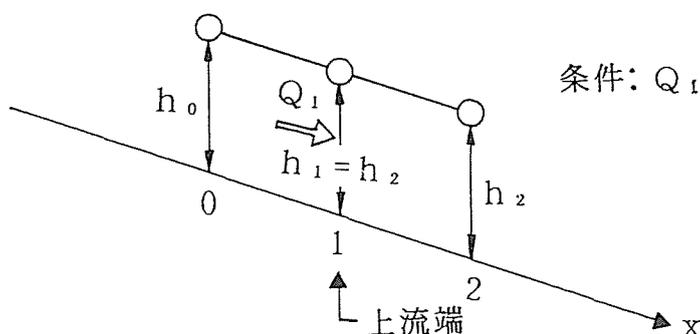


図-2. 11 上流端の境界条件



を計算する。下流端にせきなどがあり常流で比エネルギーと流量の関係が一義的に決まる場合は、流積の変化は既知の流量の場所的变化に支配されると見なし、連続式にボックス型スキームなどを適用して計算する。そしてこの結果を用いて、与えられた水位-流量曲線式より流量を求める。つぎに下流端が段落ちやダムなどで射流になっている場合、一種の自由端と考えられ、上流側の流れの条件のみに影響される。したがって、流量と流積の双方を、連続式と運動方程式をボックス型スキームなどで離散化したものより求める必要がある。

非定常流の初期条件は、定常流として求めた解を用いる。たとえば下流端がせき上げられ跳水を伴う流れの場合、初期値として十分下流端をせき上げておき、下流端水深を設定値まで徐々に低下させた後、繰り返し計算による誤差が許容誤差以下になったものを定常解とする。こうして得られた定常解を非定常流の初期条件として用いる。

#### 2. 2. 4 計算の手順

まず、実験で対象としたような定常流に対する計算の手順について述べる。計算に用いる初期値は、図-2. 13、14のように下流端を十分せき上げた状態あるいは下流端にせきがなく全体が等流で流れる状態とする。前者は流速が比較的小さな値から、後者は水深がほぼ一様な値から計算を開始することができる。初期値としていくつかのケースで前者と後者を比較したが、相当時間経過後の計算結果に差は見られなかったが、本研究ではすべて図-2. 13のように十分せき上げた状態の流れに対して水深、流速などの水理量を計算する初期値の設定法を採用した。

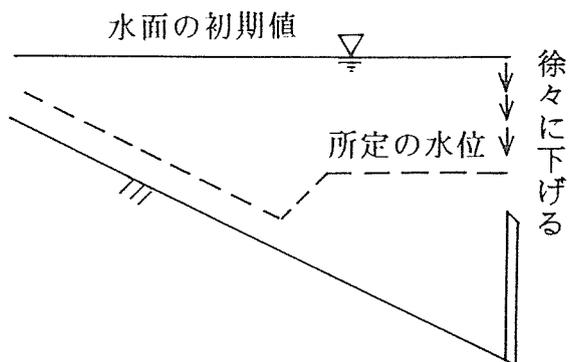


図-2. 13 下流端を十分せき上げた初期値の設定

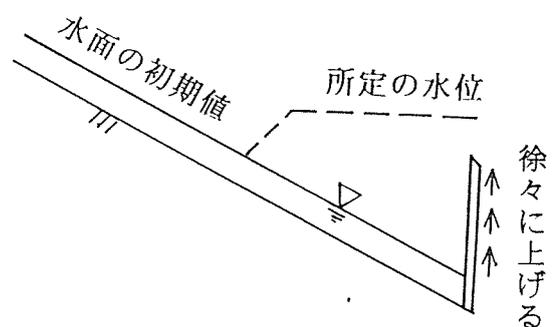


図-2. 14 せきのない状態での初期値の設定

計算は、下流端を十分せき上げた状態から下流端のせきを所定の高さまで徐々に低下させて行う。あるいは下流端にせきがなく全体が等流で流れる状態から、下流端のせきを所定の高さまで徐々に増加させて行う。基礎式は非定常流に対するものであり、跳水を伴う流れのような不等流の水面形を求めるには、上下流の境界条件に合う収束解を求めればよい。厳密な意味での収束解の定義は難しいが、本研究では、予備計算において少なくとも全ての計算点で繰り返しによる誤差が水深で1/100以下になる時間を求めておき、計算はこれを十分越える時間まで実行した。水深と流量の繰り返しによる収束の状況を示すと図-2.15、16のようである。この例は、本章2.5.2で後述する河床勾配 $i_B=1/32.5$ 、流量 $Q=391/s$ 、下流端のせき上げ水深=14cmおよび22cmの場合で、縦軸には水深あるいは流量の繰り返しによる最大の誤差、横軸には計算の繰り返し回数をとっている。図を見ると、この例では計算回数5000回を過ぎるとほぼ繰り返しによる誤差がなくなることが分かる。本研究では、これらの収束解として10000回の繰り返し計算を行っている。

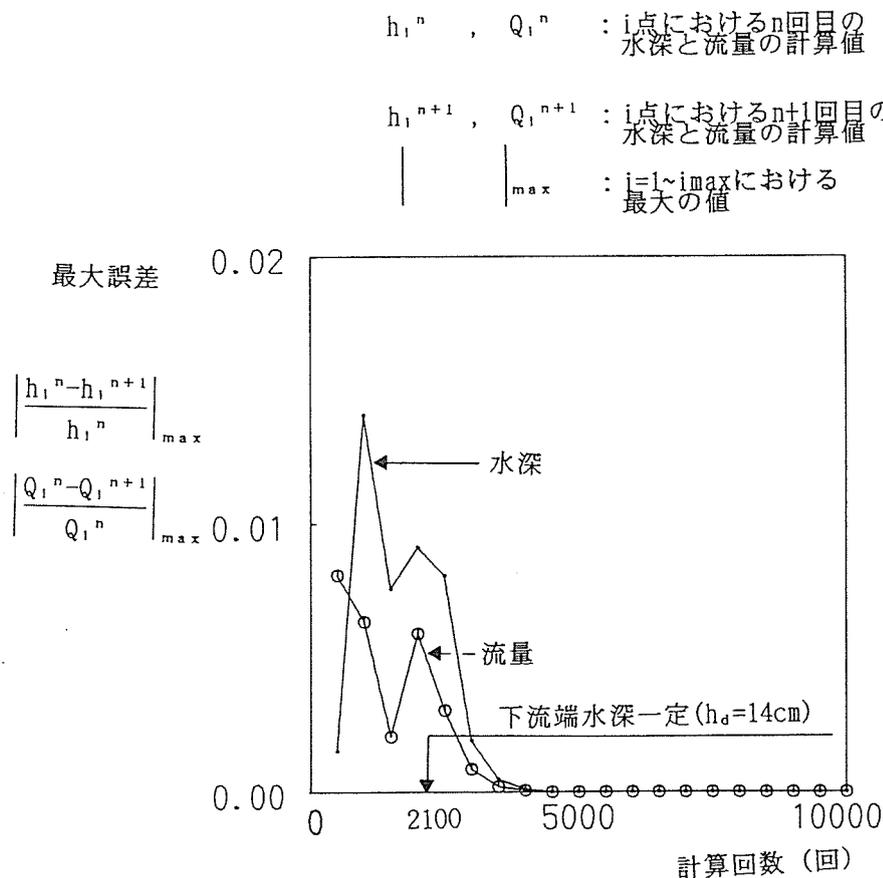


図-2.15 計算の繰り返しによる誤差の変化 (下流端水深14cmの場合)

$h_i^n, Q_i^n$  :  $i$ 点における $n$ 回目の水深と流量の計算値

$h_i^{n+1}, Q_i^{n+1}$  :  $i$ 点における $n+1$ 回目の水深と流量の計算値

$\left| \right|_{\max}$  :  $i=1 \sim i_{\max}$ における最大の値

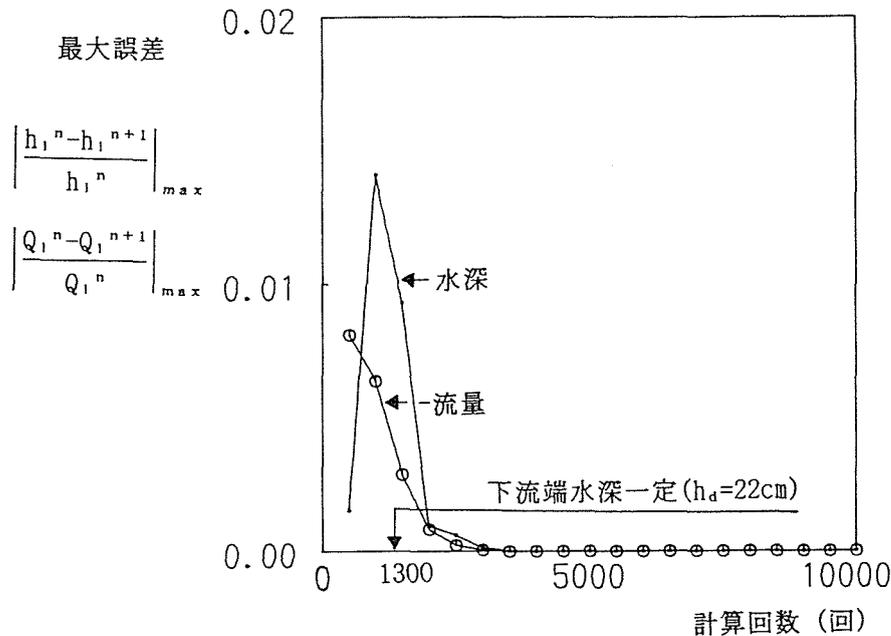


図-2.16 計算の繰り返しによる誤差の変化 (下流端水深22cmの場合)

非定常流の場合は、先に定常解を求めておきこれを初期条件として、上下流端の境界条件を用い、上流端に流量時系列を与え必要な時間だけの計算を実行する。

計算の実行に当たっては、定常解・非定常解を問わず距離間隔 $\Delta x$ および時間間隔 $\Delta t$ を定めなければならない。 $\Delta x$ を小さくすれば一般的に計算精度はよくなるが実用的には限度がある。また $\Delta t$ は式(2.22)で表されるCFL条件(Courant-Friedrichs-Lewy Condition)を満足するものでなければならない。CFL条件では1以下になっているが、実際に計算を安定して行うため本研究では0.3程度にした。また最大流速は計算過程で変化するので、繰り返し計算の中で計算間隔 $\Delta t$ を決め直して用いた。

$$\frac{|u + c|_{\max} \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2.22)$$

ここに、 $|u + c|_{\max}$ は $u+c$ の最大値を表す。一般に $u$ は流速、 $c$ は長波の伝播速度 $\sqrt{gh}$ を用いる。

計算の手順を、実験で対象としたような定常解を求める場合と非定常の場合に分けて、簡単なフローチャートで表すと図-2.17、18のようになる。

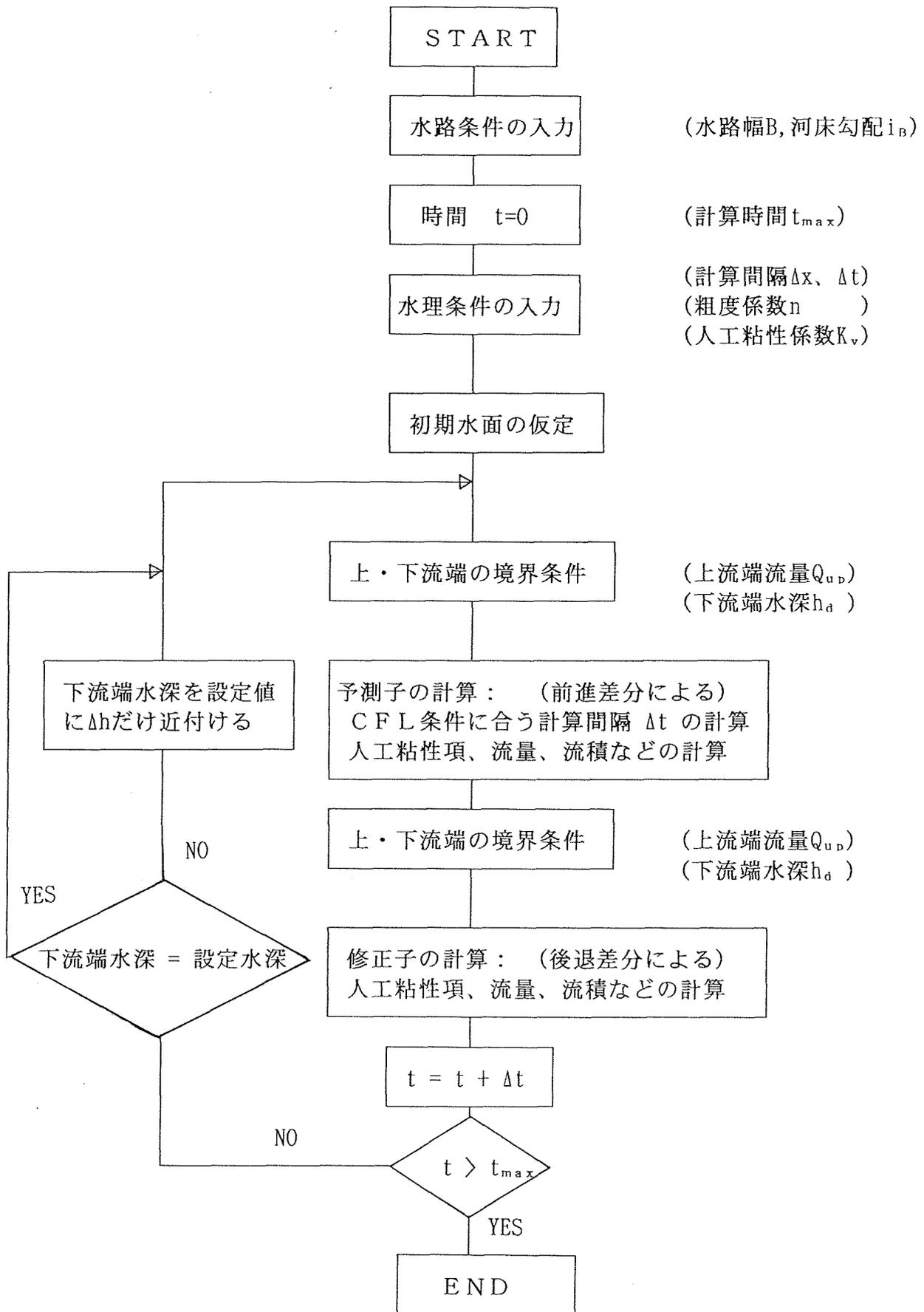


図-2. 17 定常解を求める計算のフローチャート

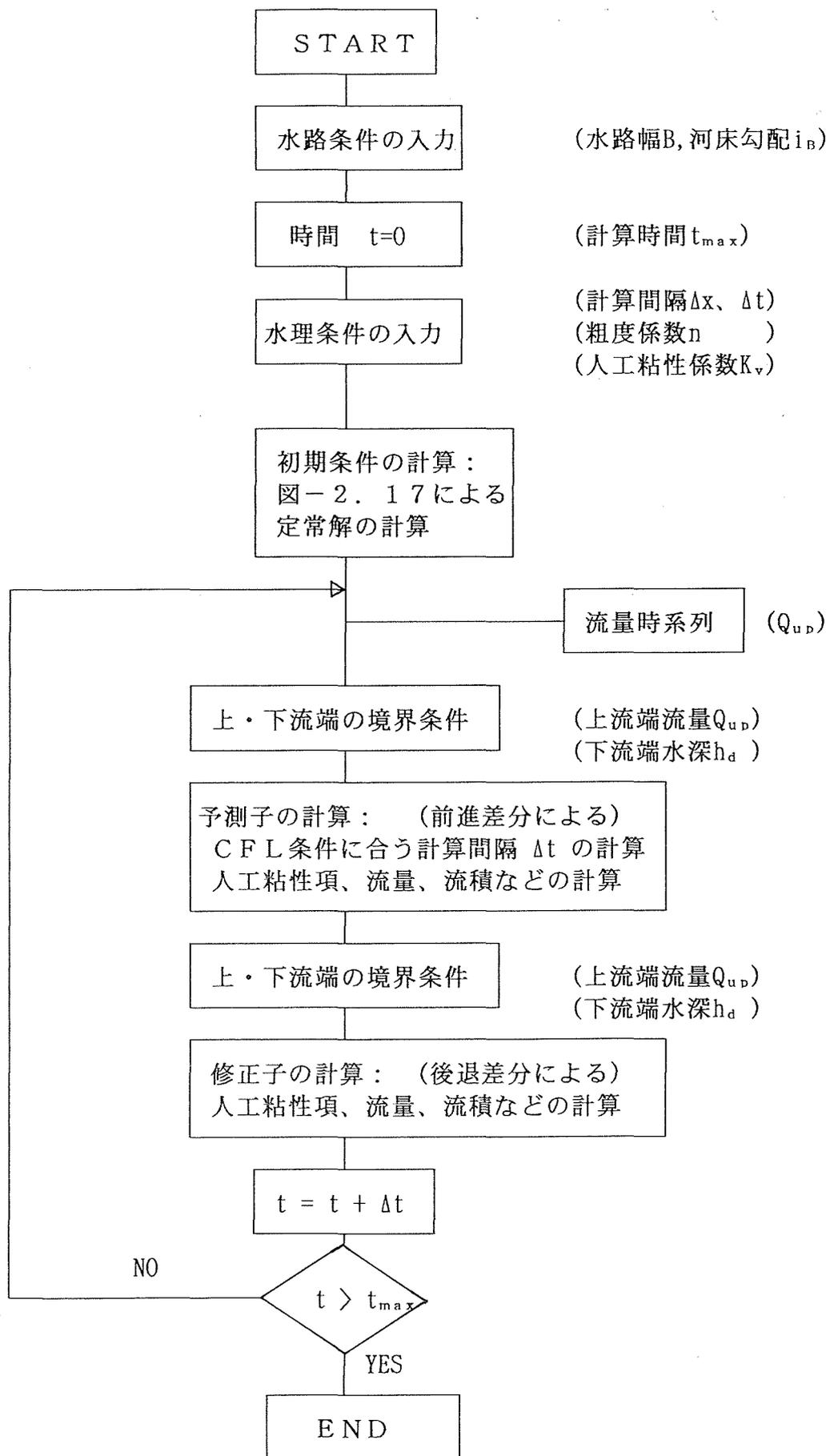


図-2. 18 非定常流の計算のフローチャート

## 2. 3 跳水を伴う流れの実験

固定床において跳水を伴う流れの実験を行い、跳水位置や跳水長、跳水前後の共役水深などを計測した。実験結果が、従来から用いられている跳水前後の関係式などに合致することを確かめた上で、次節の計算結果との照合に用いることとした。

### 2. 3. 1 実験装置

実験装置は長さ12m、幅0.4m、深さ0.4mの勾配可変開水路である。水路上流端から1mの区間を整流域とし、上流端から1mの地点を基点とした。図-2. 19に示すように水路中央部の幅を0.2mに縮小して下流端にせきを設けている。水路拡幅部における片側開き角度は、漸拡水路で流れの対称性が確保される限界角 $4^\circ$ より小さい約 $3^\circ$ である<sup>7)</sup>。水路中央部を縮小断面としたのは、本研究で行っている一次元計算法が一様水路以外の若干水路幅の変化するものにも適用できることを検討するためである。

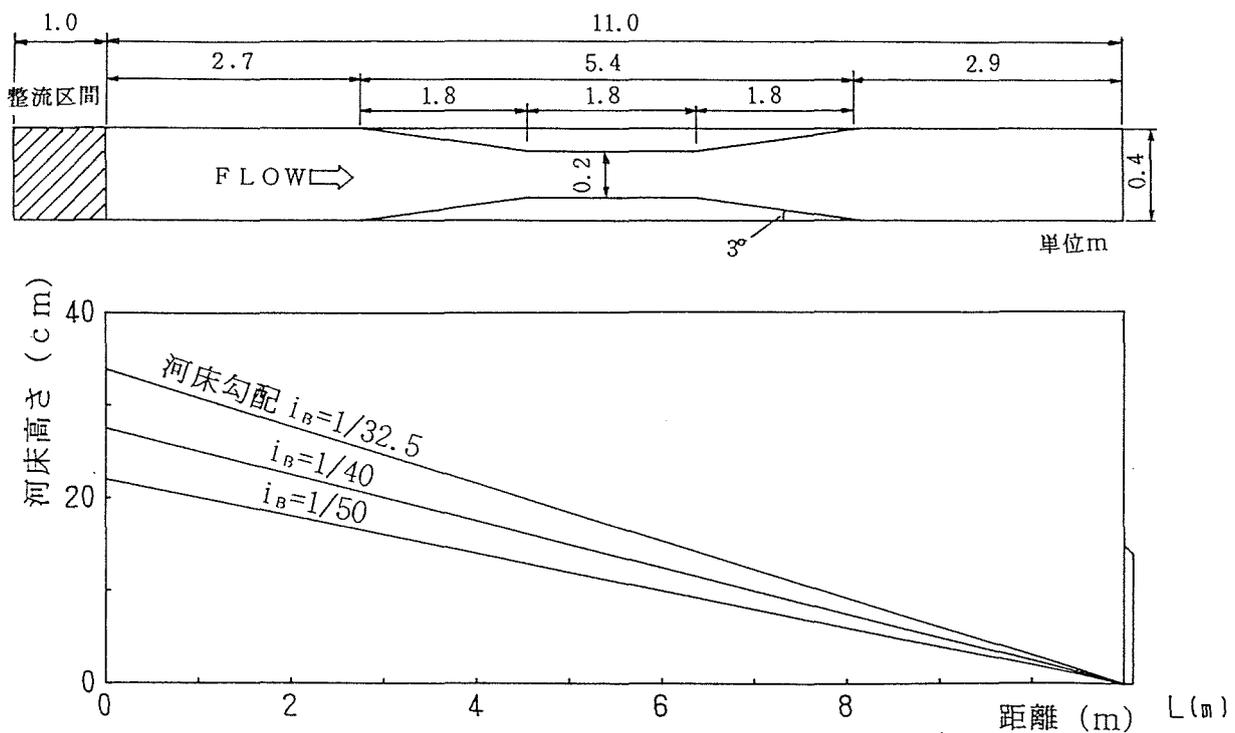


図-2. 19 実験用水路

## 2. 3. 2 実験方法

水路を急勾配に設定して一定流量  $Q = 3.9 \text{ l/s}$  の水を流し、下流端をせき上げて跳水を発生させた。跳水は、下流端に設けたせきの高さを変化させることで、水路幅の漸縮部、縮小部および漸拡部で起こるようにした。水面形はサーボ式水位計を用いて水路中央部の水深を連続計測した。実験条件は、表-2. 1 に示すとおりで河床勾配は1/32.5, 1/40, 1/50の3種類、下流端のせき上げ水深（せき直上流の水深）は 7.5 ~ 27cm の間で種々変化させた。水路幅40cm区間および20cm区間における等流水深 $h_0$ は、表に示す通りでこれからマンニングの粗度係数 $n$ を求めると0.01であった。また限界水深 $h_c$ も示しているが、上流端ではすべて射流である。

表-2. 1 実験条件

(\* 2A-1, 2 は断面縮小部を設けず下流端より5.4mの区間を用いた)

Exp. No	河床勾配	流量 (l/s)	下流端せき 上げ水深(cm)	幅40cm区間		幅20cm区間	
				$h_0$ (cm)	$h_c$ (cm)	$h_0$ (cm)	$h_c$ (cm)
2A-1*	1/50	3.9	7.27	1.29	2.15		
2A-2*	1/50	3.9	7.54	1.29	2.15		
2B-1	1/32.5	3.9	7.5	1.13	2.15	1.79	3.41
2B-2	1/32.5	3.9	14.0	1.13	2.15	1.79	3.41
2B-3	1/32.5	3.9	22.0	1.13	2.15	1.79	3.41
2B-4	1/32.5	3.9	27.0	1.13	2.15	1.79	3.41
2C-1	1/40	3.9	7.5	1.21	2.15	1.91	3.41
2C-2	1/40	3.9	12.0	1.21	2.15	1.91	3.41
2C-3	1/40	3.9	19.0	1.21	2.15	1.91	3.41
2C-4	1/40	3.9	22.0	1.21	2.15	1.91	3.41
2D-1	1/50	3.9	10.5	1.29	2.15	2.06	3.41
2D-2	1/50	3.9	13.0	1.29	2.15	2.06	3.41
2D-3	1/50	3.9	16.0	1.29	2.15	2.06	3.41
2D-4	1/50	3.9	19.0	1.29	2.15	2.06	3.41

### 2. 3. 3 実験結果

水路中央の水面、特に断面縮小部や跳水後の水面は表面波が目立っているが、実験結果 Exp. No. 2B-1~4の例を示すと図-2. 20 のようである

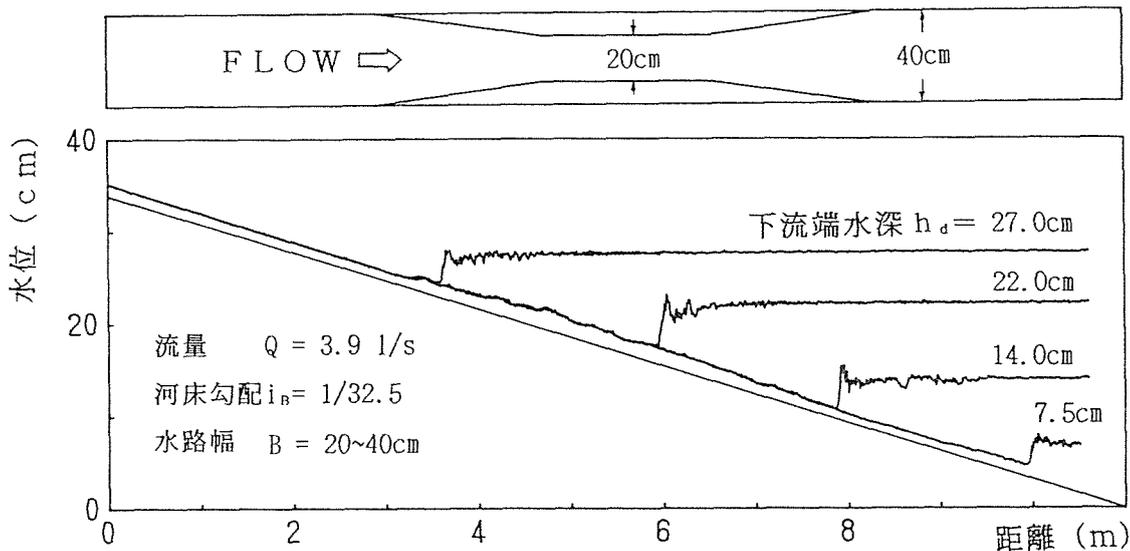


図-2. 20 跳水を伴う流れの実験結果の例 ( $i_B = 1/32.5$ , Exp. No. 2B-1~4)

跳水前後の水深、いわゆる共役水深 $d_1$ および $d_2$ は、河床が水平でない場合次式で表される<sup>13)</sup>。

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1+8G^2} - 1)$$

(2. 23)

$$G = \frac{Fr_1}{\sqrt{\cos i_B - \frac{K_j L \sin i_B}{d_2 - d_1}}}$$

ここに、 $d_1$ は跳水前の河床から直角に測った水深、 $d_2$ は跳水後の水深、 $Fr_1$ は跳水前のフルード数、 $i_B$ は河床勾配、 $K_j$ は補正係数、 $L$ は跳水長である。

図-2. 21に上式の関係を実線で、実験結果より $d_2/d_1$ の値を読み取り描点で示す。ただし、跳水長 $L$ および補正係数 $K_j$ の値を定めることが容易ではないので、ここではChow

の示した実験的な関係図<sup>13)</sup>から河床勾配1/32.5および1/50に対して $Fr_1$ と  $d_2/d_1$ の関係を  
読み取り図示した。図より、実験値はいわゆる共役水深の関係をほぼ満たしていることが  
分かる。

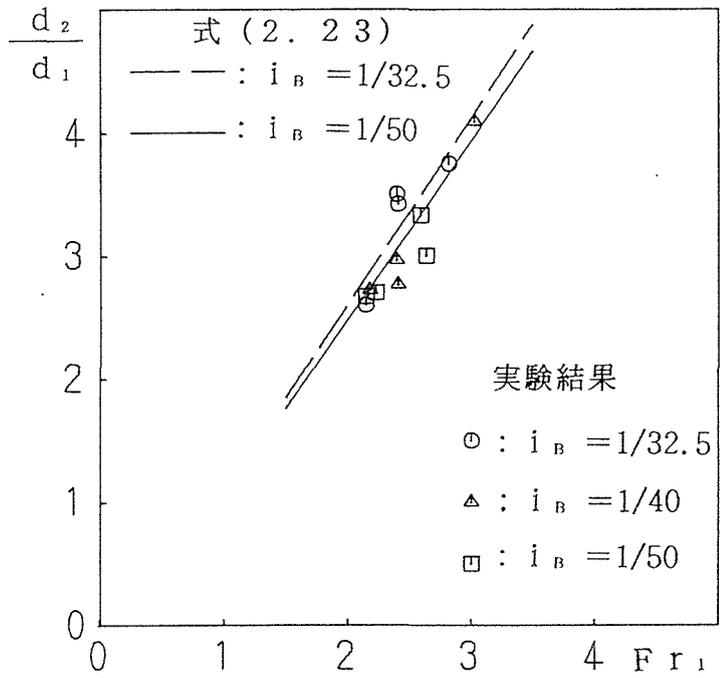


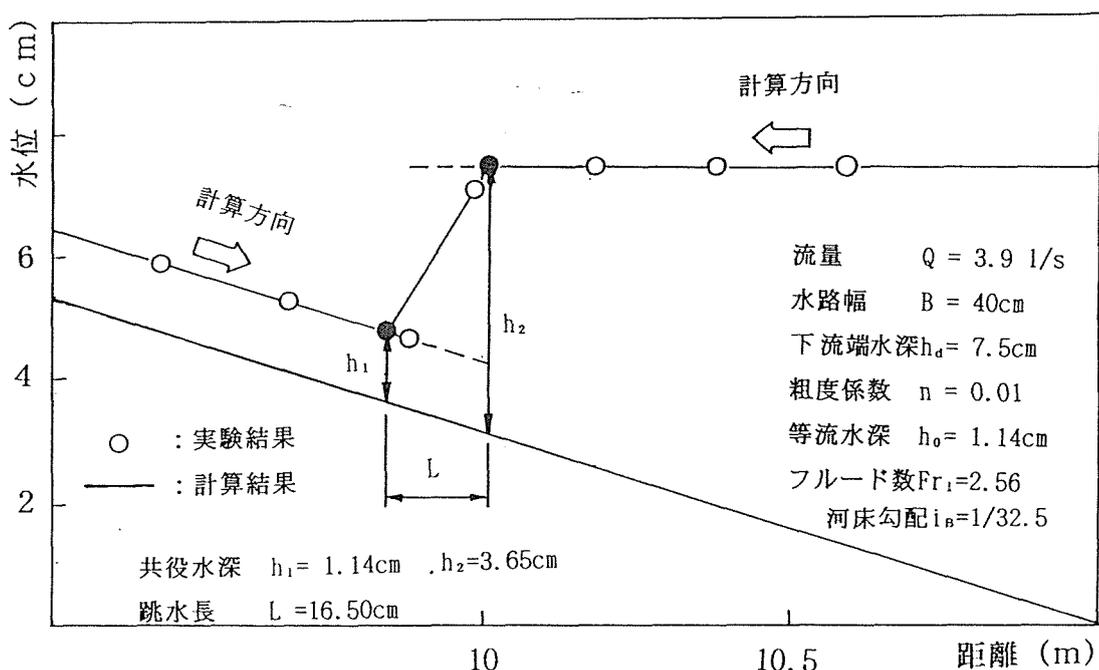
図-2. 2 1 実験結果による跳水前後の水深 $h_2/h_1$ と $Fr_1$ の関係

## 2. 4 実験結果への適用

ここでは、計算による実験結果の再現性を試みるとともに、2. 2で述べたマッコーマック法による計算法の妥当性、特に跳水付近における計算の安定性と人工粘性項の効果について検討する。

### 2. 4. 1 逐次計算法による計算の適用性

従来からの計算法である逐次計算法をExp. No. 2B-1に適用すると、図-2. 22に示すように、計算結果は実験結果をよく再現している。しかし、跳水位置を決定するには跳水前後の水深 $h_1, h_2$ と跳水長 $L$ との関係を満足させるため、図上あるいは計算プログラムにより試行的に求めなければならず、実用的であるとは言い難い。



●の位置は、 $h_1, h_2, L$  の関係を満足するよう決定する。

図-2. 22 実験結果と逐次計算法による計算結果

## 2. 4. 2 マッコーマック法による計算の適用性

跳水を伴う流れにマッコーマック法を適用すると、跳水位置も含めて計算できる。Exp. No. 2B-1~2D-4に対して、実験と同様の水理条件で計算を行った。ただし、計算の距離間隔  $\Delta x$  は22.5cm、人工粘性係数  $K_v$  は次節で提案する最適な人工粘性係数の値 ( $K_v=3\sim 5$ ) を用いた。この結果から跳水前後の水深の関係を示すと図-2. 23のようになり、ほぼ共役水深の関係を満たしていることが分かる。

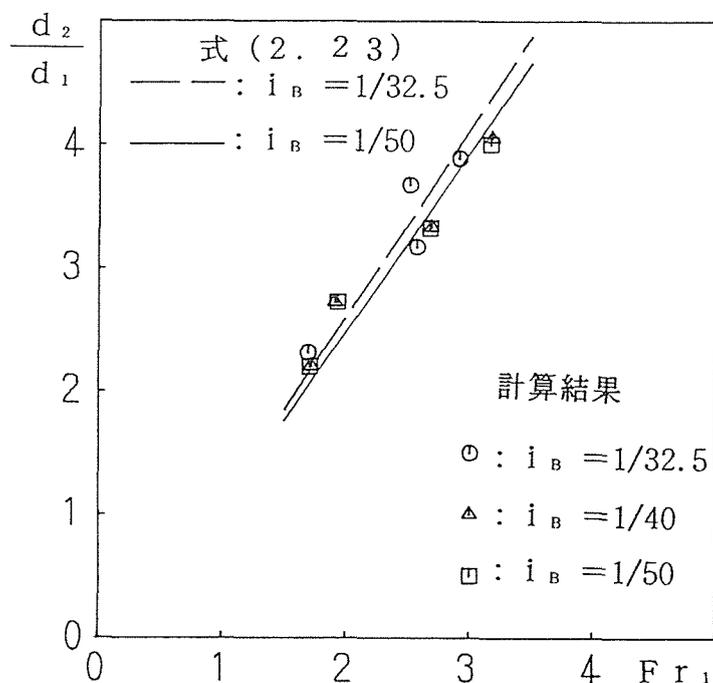


図-2. 23 計算結果による跳水前後の水深  $h_2/h_1$  と  $Fr_1$  の関係

## 2. 4. 3 跳水を伴う流れに対する計算の安定性

跳水を伴う流れにマッコーマック法を適用した場合の計算の安定性について見てみる。Exp. No. 2A-2に対して、人工粘性係数を付加しない場合 ( $K_v=0$ ) と  $K_v=50$  の場合について計算した。後者の  $K_v=50$  は人工粘性係数付加時の特徴を顕著に表すため従来経験的に適当とされてきた値<sup>7)</sup> より1桁大きいものである。これらを実験結果と比較して示すと図-2. 24のようになる。図を見ると従来から指摘されているように、大きい値の人工粘性係数を付加した場合、跳水部の水面形が鈍っていることが分かる。

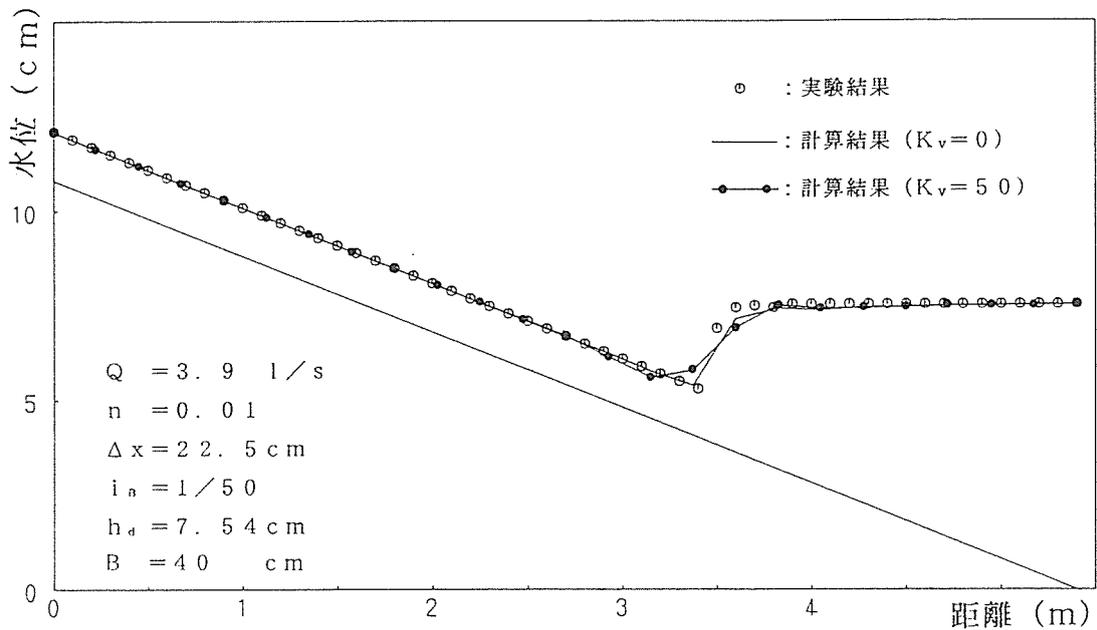


図-2.24 人工粘性係数を付加しない場合 ( $K_v=0$ ) と  
大きな人工粘性係数を付加した場合 ( $K_v=50$ ) の計算結果の違い

図-2.24の計算例では、人工粘性係数 $K_v=0$ であまり数値振動は見られないが、一般的には跳水前後で数値振動の起こることが多い。この数値振動に及ぼす要因としては一般に計算間隔 $\Delta x$ 、人工粘性係数 $K_v$ があげられ、跳水の程度( $h_2/h_1$ )は上流側のフルード数 $Fr$ の関数となるので $Fr$ も要因の一つと考えられる。計算の安定性が以上3つの要因すなわち $\Delta x$ 、 $K_v$ 、 $Fr$ のみによって表されるものかどうか確かめるため、下流端のせき上げ高さのみが異なる水路の流れに対して計算間隔 $\Delta x=22.5\text{cm}$ 、人工粘性係数 $K_v=0$ を固定して計算してみた。フルード数 $Fr$ は射流部の等流水深が同じで両ケースとも $Fr=2.17$ であった。計算結果は図-2.25のようであり、両ケースとも跳水位置や跳水前後の水深はほぼ同程度に計算できている。

しかし、図を詳細に見るとせき上げ高さの若干低い方が跳水前後で不安定な計算結果を与えている。当然せき上げ高さを変化させると跳水位置も変化する。そこで跳水が一つの $\Delta x$ 区間内(この場合上流端から $3.15\text{m}\sim 3.375\text{m}$ の間)で起こると考えられる範囲でせき上げ高さを種々変化させてみると計算結果は図-2.26に示すようになる。図から分かるように配置された格子点の位置と跳水位置の関係によっても数値振動の大きさに差が生じる。すなわち、計算の安定性は計算間隔 $\Delta x$ 、人工粘性係数 $K_v$ 、フルード数 $Fr$ および配置された格子点に対する跳水の生じる位置の4つの要因が関係することが分かった。

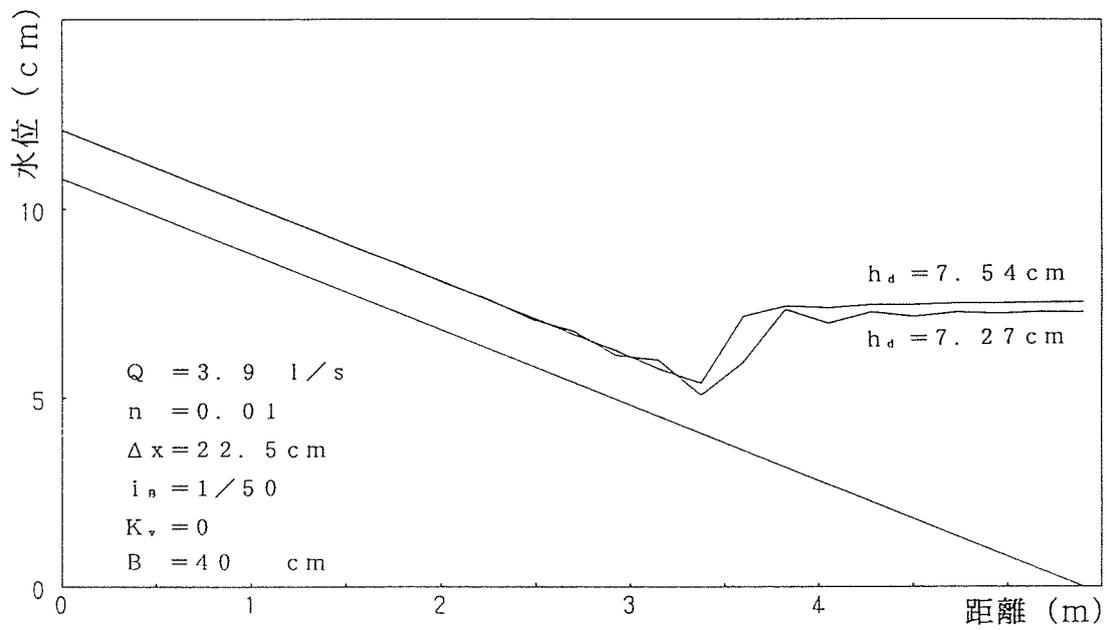


図-2.25 せき上げ高さの違いによる計算結果の差

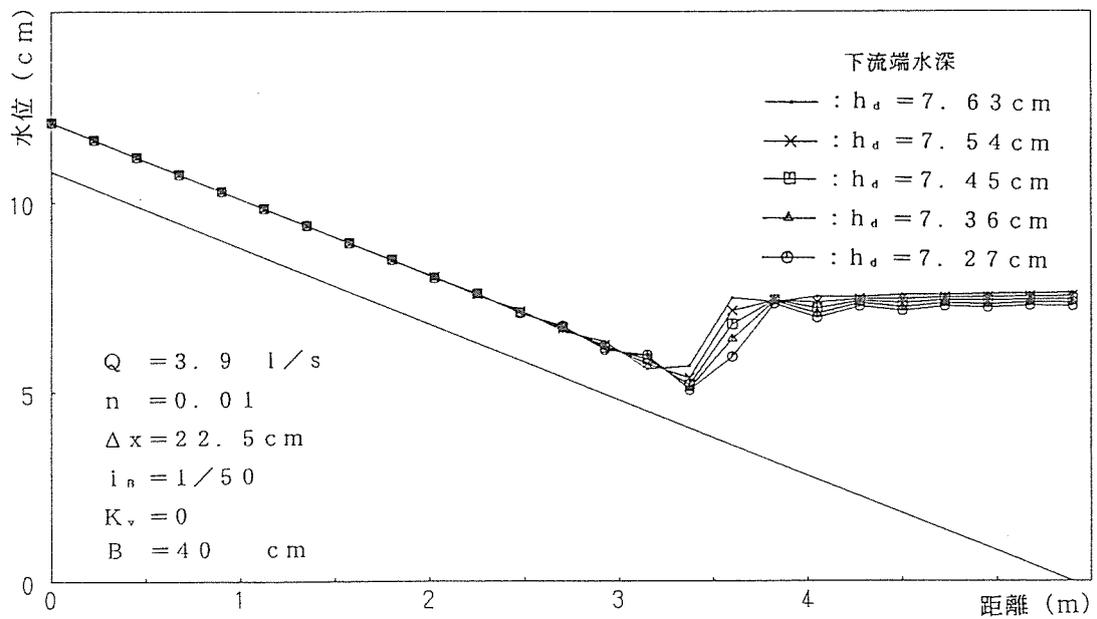


図-2.26 せき上げ高さを僅かに変化した場合の水面形の計算結果

## 2. 4. 4 人工粘性項の効果

計算の安定性は前述のように計算間隔 $\Delta x$ 、人工粘性係数 $K_v$ 、フルード数 $Fr$ および配置された格子点に対する跳水の生じる位置によって変わることが分かったが、人工粘性項の効果についてさらに詳細に検討してみる。

Exp. No. 2A-1, 2に対して人工粘性係数 $K_v=0, 5, 15$ として計算する。Exp. No. 2A-1, 2は、勾配 $1/50$ 、マンニングの粗度係数 $0.01$ の水路に単位幅流量 $97.5\text{cm}^2/\text{s}$ の通水を行い、下流端の水深 $H_d$ を $7.27\text{cm}$ と $7.54\text{cm}$ にしたものである。この流れを同一の計算格子上で計算すると、水面形は図-2. 27、28のようになる。ここに、図中の描点は計算値、実線は実験値であり、上流側のフルード数は $2.17$ 、跳水長は $0.1\text{m}$ であった。計算値は、跳水を含む水面形の実験値をほぼ再現しているが、配置された格子点の中の跳水点位置の違いと人工粘性係数により計算精度の傾向が異なっていることが分かる。

実験と計算の条件：

用いた水路の長さ  $l = 5.4 \text{ m}$   
 水路幅  $B = 0.4 \text{ m}$   
 水路勾配  $i_B = 1/50$   
 下流端水深  $h_d = 7.27, 7.54\text{cm}$

流量  $Q = 3.9 \text{ l/s}$   
 上流側流水深  $h_0 = 1.3 \text{ cm}$   
 上流側フルード数  $Fr = 2.17$   
 粗度係数  $n = 0.01$

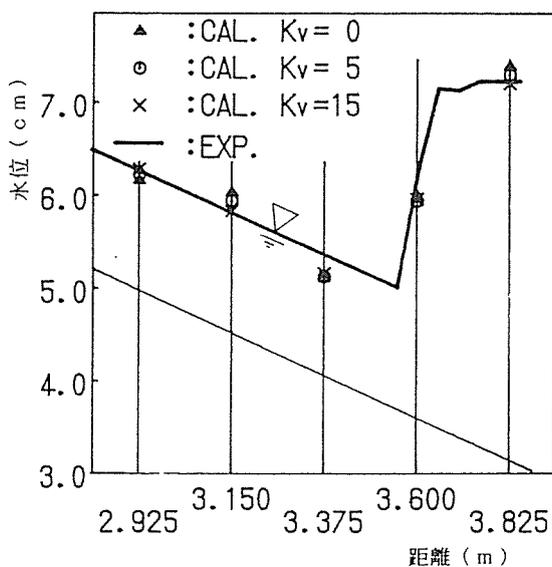


図-2. 27  $H_d=7.27\text{cm}$ の水面形

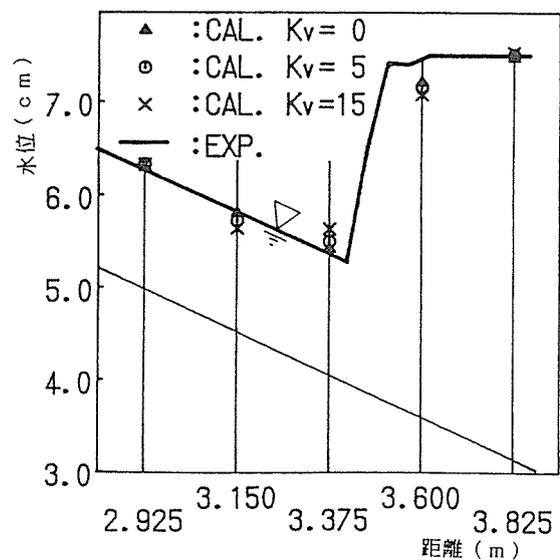


図-2. 28  $H_d=7.54\text{cm}$ の水面形

すなわち、図-2.27では、跳水上流側で $K_v$ が大きいほど計算値の数値振動が小さいのに対し、図-2.28では逆に $K_v$ が小さいほど数値振動が小さい。以上の結果により、人工粘性係数は一般に値が大きいほど数値振動を抑える効果があると考えられているが、場合によっては反対の傾向になることが分かった。

## 2.5 跳水を伴う流れに対する最適な人工粘性係数

跳水付近の水深は、変動が激しくマッコーマック法を適用する場合にも数値振動が大きくなる場所である。ここでは、跳水を伴う流れの計算を行うのに最も適当な人工粘性係数の求め方を提案し、その値を実験結果に適用して妥当性を検討する。

### 2.5.1 最適な人工粘性係数の求め方

2.4で述べたように跳水の形状の点では、 $K_v$ を大きくすると一般に跳水の形が鈍ってくるのでなるべく小さいほうが良い。また数値振動を小さくする点では $K_v$ が大きい方が良いとされてきたが、前節の結果のように配置された格子点の中の跳水点の位置によって $K_v$ が大きい程良い場合と反対の場合がある。そこで跳水点がどこにあっても平均的に数値振動がおさえられ、しかも跳水の形の鈍りが少ない計算結果を与える $K_v$ を最適な人工粘性係数として以下のように求める。

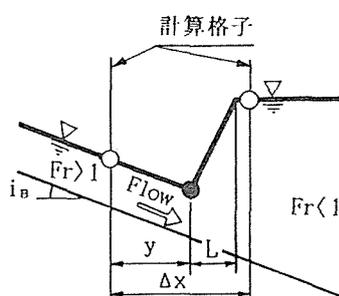


図-2.29 跳水点の位置

跳水点の位置を図-2.29の $y$ で定義し、上流側のフルード数 $Fr$ および格子点間隔 $\Delta x$ と跳水長 $L$ との比 $\Delta x/L$ を一定にしたとき、 $K_v, y/\Delta x$ によっていかに変化するかを調べた。ここに、 $L$ は跳水長である。数値振動は、移動床の計算に適用したとき流砂量に大きな影響力を持つと思われる射流部に注目し、図-2.30に示すような、跳水上流側の顕著な数値振動が見られる部分の水面形の実験値に対する計算値の分散 $\sigma^2$ で表した。

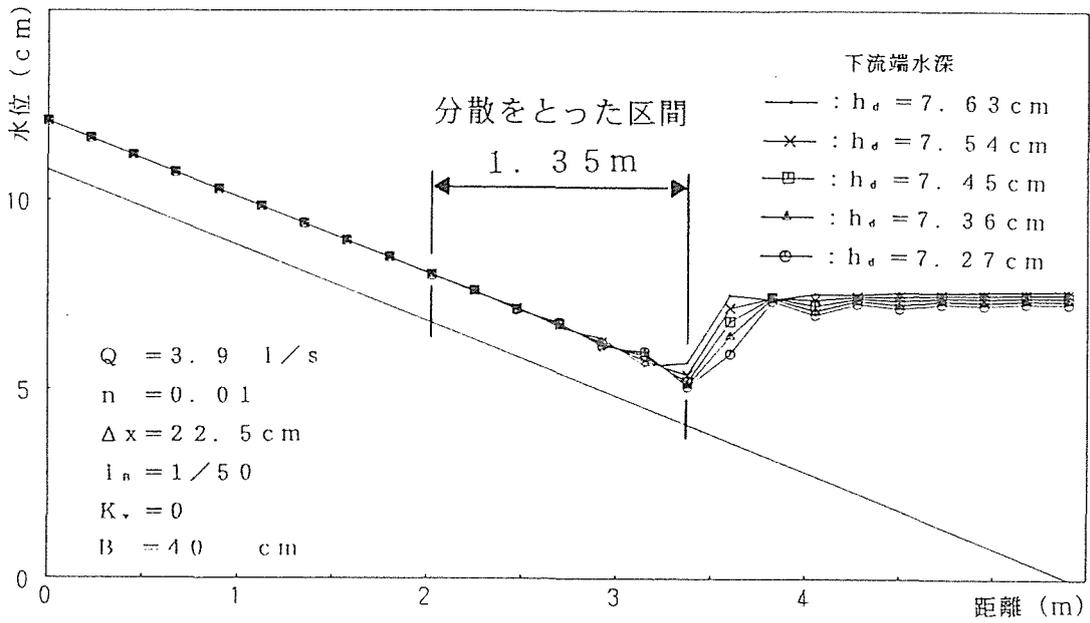


図-2. 30 水面形の実験値に対する計算値の分散 $\sigma^2$ をとった区間

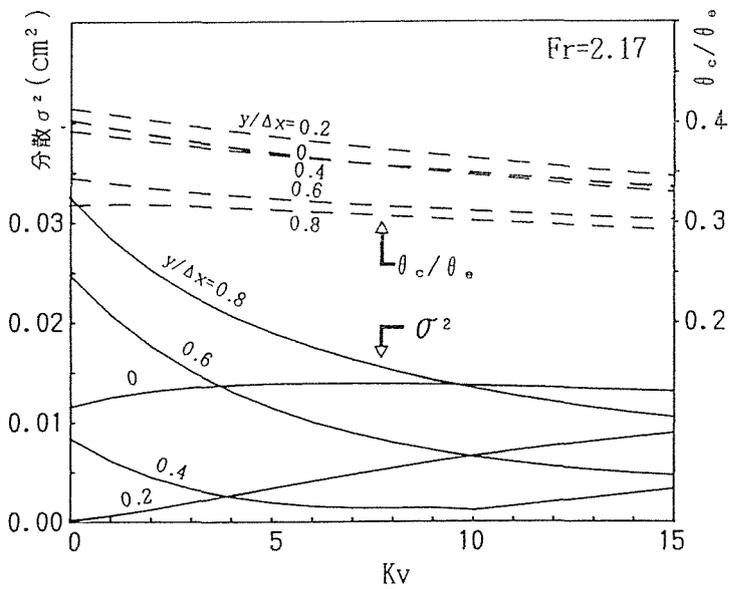


図-2. 31  $K_v$ による $\sigma^2$ と $\theta_c/\theta_0$ の変化 ( $\Delta x/L=2.25$ )

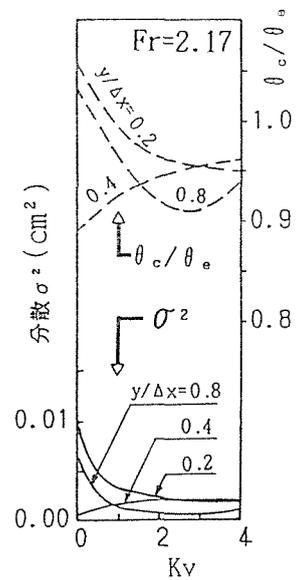


図-2. 32 ( $\Delta x/L=0.28$ )

図-2. 31の実線は $\Delta x/L=2.25$ 、 $Fr=2.17$ の場合の $K_v$ 、 $y/\Delta x$ による $\sigma^2$ の変化を表したものである。 $y/\Delta x=0.8$ のときは、 $K_v$ を大きくすると $\sigma^2$ が小さくなり、人工粘性の効果が見られるが、 $y/\Delta x=0.2$ のときは、逆に $K_v$ が不要であることが分かる。一般に跳水はどこで起こるか分からないので、跳水がどこで起こってもある程度の精度を保証するためには $K_v > 5$ 程度が必要である。一方、計算による跳水部の水面勾配 $\theta_c$ とChow<sup>12)</sup>による跳水部の水面勾配 $\theta_0$ との比 $\theta_c/\theta_0$ を求めると、図-2. 31の破線に示すように $K_v$ を大きくすると小さくなる。ただし、 $\theta_0$ は跳水部における1格子当りの最大水深差を $\Delta x$ で除したものである。そのため $\Delta x/L=2.25$ の場合、跳水前後の水深差が実験値と同じとしても最大で $\theta_c/\theta_0$ の値は0.44である。したがって、跳水の形をよりよく評価するためには $\theta_c/\theta_0$ が大きくなるようにする、すなわち $K_v$ をできるだけ小さくしたほうがよい。以上の2点からこの流れに対する最適な $K_v$ は $\Delta x/L=2.25$ の場合 $K_v=5$ とする。図-2. 32は、 $\Delta x/L=0.28$ 、 $Fr=2.17$ の結果で、同様の考察により $K_v=1$ 程度が最適であると見なせる。

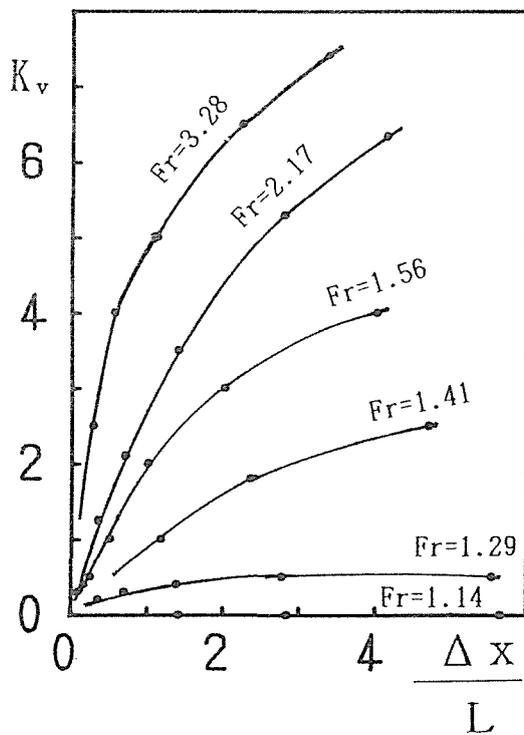


図-2. 33 最適な人工粘性係数

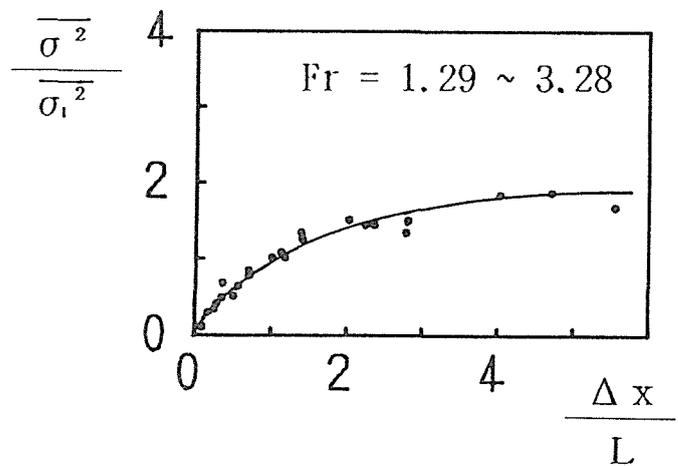


図-2. 34  $\Delta x/L$ による $\sigma^2$ の平均的な値

$\Delta x/L$ および $Fr$ を変化させて最適な $K_v$ を求め、それらの関係を示すと図-2. 33のようになる。この図より跳水上流側の $Fr$ が大きく、跳水前後の水位差が大きいほど人工粘性係数 $K_v$ を大きくしなければならないことが分かる。また、 $\sigma^2$ の平均値 $\overline{\sigma^2}$ と $\Delta x/L=1$ における平均値 $\overline{\sigma_1^2}$ との比 $\overline{\sigma^2}/\overline{\sigma_1^2}$ を示すと図-2. 34のようである。格子間隔を小さくすると $K_v$ も小さい値でよく、 $\sigma^2$ の平均的な値も小さくなる。すなわち精度よく計算することが

できる。しかし、実用上は $\Delta x$ の大きさに限度があると考えられるので、 $\Delta x/L$ に応じた最適な $K_v$ の値を図-2. 33 から求めるのがよいであろう。

### 2. 5. 2 種々の水面形への適用

Exp. No. 2B-1~4, 2C-1~4, 2D-1~4 に対して、 $\Delta x=0.225\text{m}$ とし、人工粘性係数については前節で求めた図-2. 33 を用いて各条件で最適な人工粘性係数を読みとり ( $K_v=3\sim 5$ ) 計算した。ここで読み取った最適な人工粘性係数 $K_v=3\sim 5$ は、従来経験的に適当とされている値に近いものである<sup>14)</sup>。

計算結果は、図-2. 35 ~ 37 に示すように跳水位置および跳水前後の水深など比較的正確に再現できていると思われる。

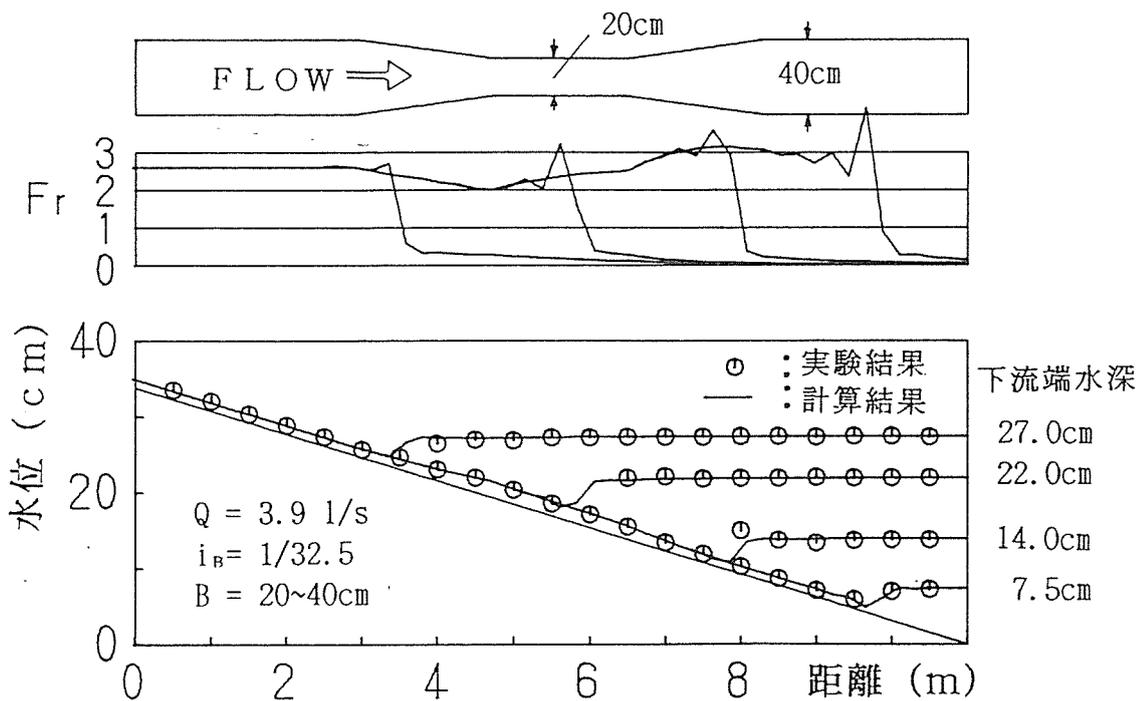


図-2. 35 跳水を伴う流れの計算結果と実験結果 ( $i_B = 1/32.5$ )  
(Exp. No. 2B-1~4)

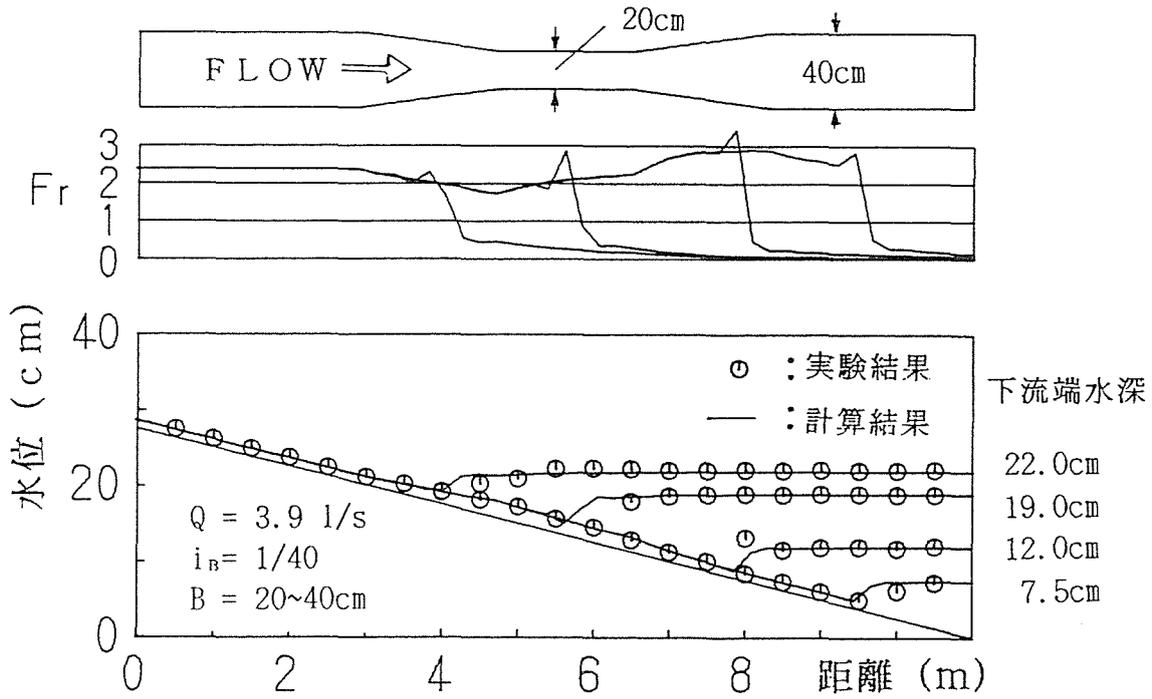


図-2. 36 跳水を伴う流れの計算結果と実験結果 ( $i_B = 1/40$ )  
(Exp. No. 2C-1~4)

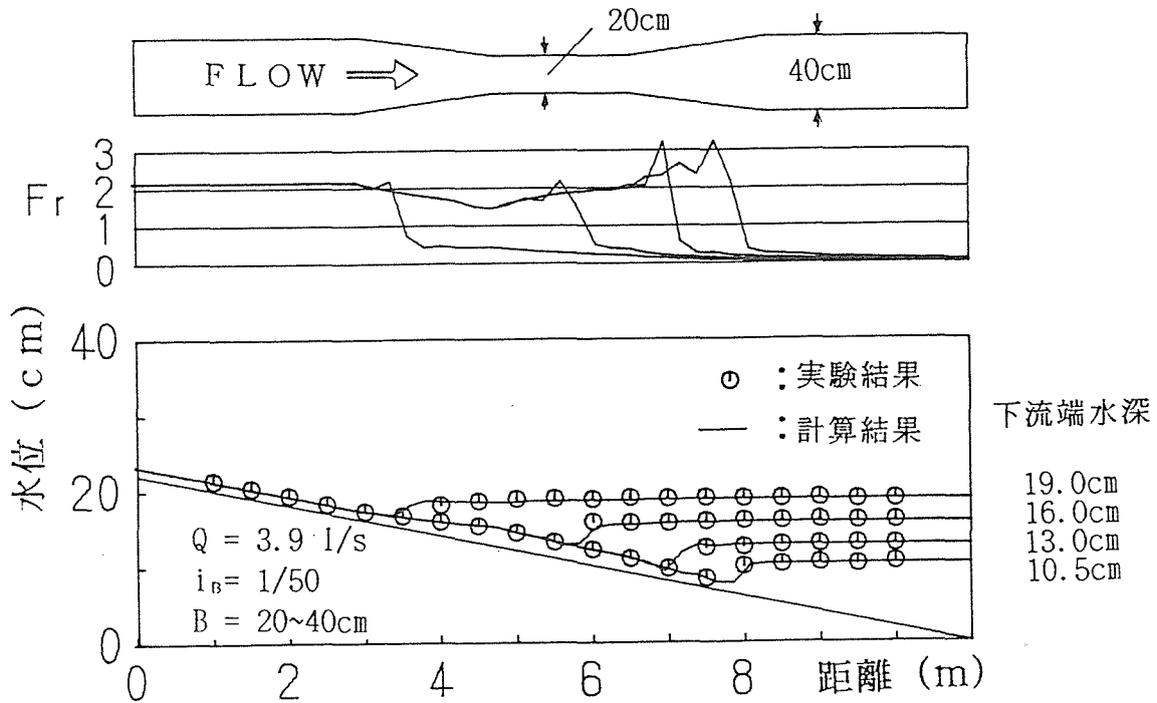


図-2. 37 跳水を伴う流れの計算結果と実験結果 ( $i_B = 1/50$ )  
(Exp. No. 2D-1~4)

## 2. 6 結語

本章では、射流から常流に変化する流れの一次元計算法に関して、マッコーマック法を用いた場合の適用性について検討した。特に跳水点付近の計算の安定性に及ぼす要因について調べ、最適な人工粘性係数の求め方について提案した。主な結果は次の通りである。

(1) 適当な人工粘性係数 $K_v$ を用いて、マッコーマック法を射流から常流に遷移する流れに適用すると、跳水位置や跳水前後の共役水深を含め十分な精度で実験結果を再現することができる。

(2) マッコーマック法を跳水を伴う流れに適用する場合、跳水上流で発生する数値振動は跳水の起こる位置と配置された格子点との位置関係、フルード数および $\Delta x/L$ によって異なる。

(3) 流れに対する拡散型の人工粘性係数 $K_v$ を、跳水点がどこにあっても平均的に数値振動が抑えられ、しかも跳水の形の鈍りの少ない計算結果となるように求めた。その結果、最適な人工粘性係数は計算間隔と跳水長の比 $\Delta x/L$ およびフルード数をパラメータとして図-2.33から求められることが分かった。また、これらは従来経験的に求められている値にほぼ近いものである。

## 参考文献

- 1) Garcia R. and Kahawita R.: Numerical Solution of the St. Venant Equations with the MacCormack Finite-difference Scheme, International Journal for Numerical Method in Fluids, Vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- 2) 潮田智道・河村三郎・中谷剛：保存則系差分法のスキームの特性に関する考察、土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、pp. 438-439, 1990.
- 3) 崇田徳彦・清水康行・北条紘次：MacCormack法を用いた不定流計算、土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、pp. 432-433, 1990.
- 4) 岡部健士・天羽誠二・石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について、水工学論文集、第36巻、pp. 337-342, 1992.
- 5) 潮田智道・河村三郎：一次元保存則系差分法による数値解析の際に生ずる数値振動の除去法について、水工学論文集、第36巻、pp. 349-354, 1992.
- 6) 河村三郎・中谷剛：TVD-MacCormack法による常・射流混在流の数値計算法、水工学論文集、第37巻、pp. 763-768, 1993.
- 7) 岡部健士・高橋邦治・穴瀬康雄：MC法を用いた1次元開水路流れの数値計算法、徳大工学部研究報告、pp. 25-33, 1993.
- 8) 名合宏之・前野詩朗・瀬口俊明・尾播佳徳：常流・射流の混在する流れの数値シミュレーション、土木学会中国四国支部研究発表会講演概要集、pp. 158-159, 1995.
- 9) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：跳水を含む流れと河床変動の数値計算、土木学会第50回年次学術講演会講演概要集、pp. 442-443, 1995.
- 10) Shigeyuki KUSAKABE, Masanori MICHIE, Masaharu FUJITA and Osamu HINOKIDANI, Bed Variation Model in Steep Channels with Transition of Flow Using MacCormack Scheme, Management of Sediment Philosophy, Aims, and Techniques, Sixth International Symposium River Sedimentation, pp. 649-658, 1995.
- 11) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究、水工学論文集、第40巻、pp. 977-982, 1996.
- 12) 日本機械学会：流れの数値シミュレーション、コロナ社、pp. 106-108, 1988.
- 13) V. T. Chow・石原藤次郎訳：開水路の水理学Ⅱ、丸善、pp. 395-396, 1962.
- 14) 前出論文7)

### 3. 1 概説

河道形状の複雑な変化を伴う山地河川などでは、常流・射流の混在する流れとなるが、これらの河川で河床変動計算を行うには、いくつかの問題がある。まず跳水を伴う流れや常流から射流へと遷移する流れに対して、従来からの水面形方程式を逐次計算で解析する方法を用いる場合、跳水位置や流れの遷移点において全ての境界条件を設定しなければならない。しかし、移動床では跳水位置や流れの遷移点変動するので境界条件を与えることは非常に難しい。たとえ境界条件を正確に与えたとしても、計算は射流部では下流方向へ常流部では上流方向へ進めなければならない。さらに、差分法によって安定した河床変動計算を行うためには射流部で前進差分、常流部で後退差分を用いなければならない<sup>1)</sup>。道上らはこれらの問題を解決する計算法について検討し、一定の成果を得ているが<sup>2)</sup>、相当複雑な計算手法が必要となる。

一方、常流・射流の混在する流れの計算に有効とされるマッコーマック法は、常流・射流の混在する領域の河床変動計算にも有力な方法として注目されている<sup>3)~8)</sup>。すなわち、マッコーマック法の流れに対する2つの利点、(1)常流・射流の区別なく計算できる。(2)跳水など流れの遷移点が自動的に決定される。ということに加え(3)河床変動計算で前進・後退差分を分けなくてもよいなどの利点がある。

本章では、常流・射流の混在する領域での河床変動計算として、マッコーマック法を用いた場合の計算の安定性について検討している。計算値との比較をするため砂防ダム上流部を想定して、水路下流端をせき上げた形で一様砂の堆砂実験を行った。また砂防ダム上流部の堆砂前面における流れは、一種の段落ち流れと見ることができるので、段落ち流れにおける計算の不安定要因を明らかにし、一次元の河床変動計算で改良を加えることを試みた<sup>8) 9)</sup>。

### 3. 2 マッコーマック法による常流・射流の混在する領域における河床変動計算法

#### 3. 2. 1 基礎方程式

一次元非定常・漸変流の連続式、運動方程式および河床土砂の連続式は、図-3.1のような座標系および記号を用いて、つぎのように表すことができる。

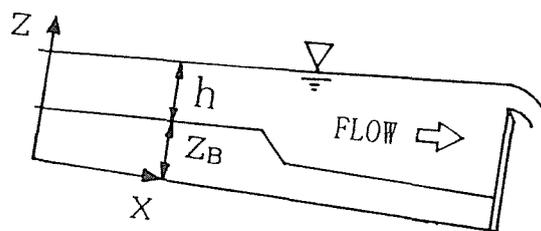


図-3.1 座標系

連続式：

$$\frac{\partial (Bh)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

運動方程式：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gBh^2}{2} + \frac{Q^2}{Bh} \right) = gBh(i_B - i_F) \quad (3.2)$$

河床土砂の連続式：

$$\frac{\partial z_B}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial}{\partial x} (B q_B) = 0 \quad (3.3)$$

ここに、 $B$ は水路幅、 $h$ は水深、 $Q$ は流量、 $g$ は重力の加速度、 $i_B$ は河床勾配、 $i_F$ はエネルギー勾配、 $t$ 、 $x$  および  $z$  は時間、流れ方向の距離および高さ、 $z_B$ は河床高さ、 $\lambda$ は河床土砂の空隙率、 $q_B$ は単位幅当りの流砂量である。

本研究では一様砂を扱うものとし、流砂量の式としてつぎの芦田・道上の式<sup>10)</sup>を用いた。

芦田・道上の式：

$$\frac{q_B}{\sqrt{sgd^3}} = 17 \tau_{*c}^{3/2} \left( 1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} \right) \left( 1 - \frac{u_{*c}}{u_*} \right) \quad (3.4)$$

ここに、 $s$ は河床材料の水中比重 ( $=\sigma/\rho-1$ )、 $d$ は河床材料の粒径、 $\tau_{*c}$ は無次元有効掃流力 ( $=u_{*c}^2/sgd$ )、 $\tau_*$ は無次元掃流力 ( $=u_*^2/sgd$ )、 $\tau_{*c}$ は無次元限界掃流力 ( $=u_{*c}^2/sgd$ )、 $u_{*c}$ は砂の移動限界摩擦速度、 $u_*$ は摩擦速度、 $u_{*c}$ は有効摩擦速度である。

### 3. 2. 2 基礎方程式の定式化

3. 2. 1で示した基礎方程式を、保存形でベクトルの式に書き改めるとつぎのようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = C \quad (3. 5)$$

ただし,

$$U = \begin{bmatrix} Bh \\ Q \\ z_B \end{bmatrix} \quad (3. 6)$$

$$E = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{gBh^2}{2} + \frac{Q^2}{Bh} \\ \frac{q_B}{1-\lambda} \end{bmatrix} \quad (3. 5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & i_F \\ gBh(i_B - i_F) & 0 \end{bmatrix} \quad (3. 6)$$

である。

上式に対してマッコーマック法のスキームは、予測子段階と修正子段階に分けて差分化する。

$$\text{予測子段階: } \bar{U}_i = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1}^n - E_i^n) + \Delta t C_i^n \quad (3. 7)$$

$$\text{修正子段階: } U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + \bar{U}_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}) + \frac{1}{2} \Delta t \bar{C}_i \quad (3. 8)$$

$$\text{精度} \quad : \quad O(\Delta x^2, \Delta t^2)$$

ここに、 $\bar{E}_i = E(\bar{U}_i)$ 、 $\bar{C}_i = C(\bar{U}_i)$ であり  $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ は時間および距離に関して2次精度であることを意味する。また、 $\Delta x$ は格子点の計算間隔、 $\Delta t$ は計算の時間間隔、下付き添字*i*はx軸上の計算点、上付き添字*n*は時間軸上の計算点、 $\bar{\quad}$ は予測子による結果である。

上式によって計算を行うと数値振動が発生するので、これを抑制するため人工粘性項を付加する必要がある。人工粘性項としてはすでにいくつかのものが提案されているが<sup>11)~15)</sup>、ここでは前章と同様、岡部ら<sup>13)</sup>によって定義されている拡散型と呼ばれるものを用い、つぎの式のように表した。

$$\text{予測子段階: } \bar{U}_i = U_{i-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{E_{i+1}^n - E_i^n + (D_{i+1}^n - D_i^n)\} + \Delta x C_i^n \quad (3.9)$$

$$\text{修正子段階: } U_{i-1}^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1}^n + \bar{U}_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1} - (\bar{D}_i - \bar{D}_{i-1})\} + \frac{1}{2}\Delta x \bar{C}_i \quad (3.10)$$

$$D_i = K \frac{u_* h_i}{\Delta x} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) \quad (3.11)$$

ここに、 $u_*$ は摩擦速度、 $K$ は人工粘性係数を表す。人工粘性係数は流れの連続式および運動方程式に対して $K_v$ 、河床土砂の連続式に対して $K_z$ としてつぎの式で表される。

$$K = \begin{bmatrix} K_v & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3. 2. 3 境界条件および初期条件

境界条件としては上流端で流量と流砂量、下流端で水深を与えている。初期条件は、固定床の定常解としてあらかじめ求めておいた水面形、流速および流量を用いる。固定床の定常解は前章で示したものと同様に、上流端で流量を下流端で水深を与え、下流端水深を十分せき上げた状態から所定の水深になるまで徐々に低下させて求めたものである。

上流端の河床高は、図-3.2に示すように上流端条件の給砂量を用いて河床砂の連続式を差分化した式(3.13)で計算する。

$$\Delta z = \frac{1}{(1-\lambda)} \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{BUD} - q_{B2}) \quad (3.13)$$

ここに、 $\Delta z$  は上流端における $\Delta t$  時間後の河床の変動量、 $q_{BUD}$ は給砂量、 $q_{B2}$ は上流端から1つ下流側2断面の流砂量である。

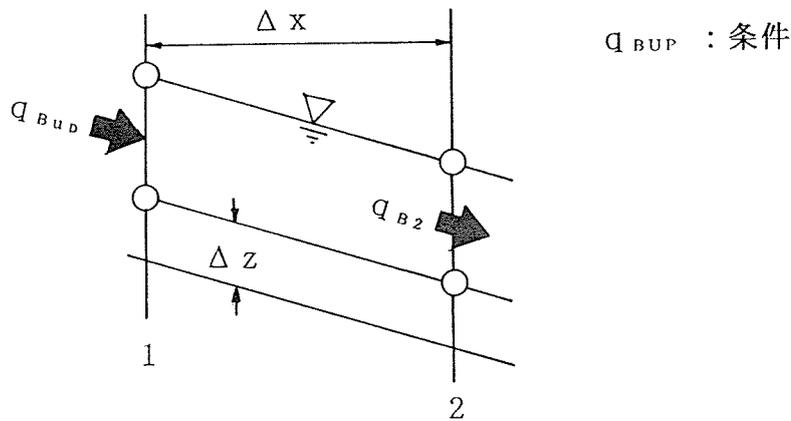


図-3.2 河床の上流端条件

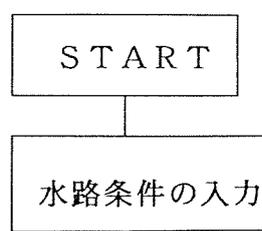
### 3.2.4 計算の手順

計算は、固定床の定常解を初期条件としてマッコーマック法により、予測子段階と修正子段階を交互に繰り返す。すなわち予測子段階で前進差分を用いて流れの連続式より流積を、運動方程式より流量を、砂の連続式より河床高をそれぞれ計算する。次に修正子段階で後退差分を用いて同様に流積、流量、河床高を計算する。これを前章に示した固定床流れの計算のフローチャート図-2.18に書き加える形で示すと、図-3.3のようになる。前章にも記したがこの場合の前進差分と後退差分の順序は逆にもできる。

計算の実行に当たっては、時間間隔 $\Delta t$ は距離間隔 $\Delta x$ との関係で表わされるつぎのCFL条件 (Courant-Friedrichs-Lewy condition)を満足するものでなければならない。

$$\frac{|u + c|_{\max} \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.14)$$

ここに、 $|u + c|_{\max}$  は $u+c$  の最大値であり、 $u$ は流速、 $c$  は一般に長波の伝播速度 $\sqrt{gh}$ が用いられる。本研究では、安定した計算を行うため上式の左辺が0.3~0.2以下となるよう $\Delta t$ を設定した。流砂の移動速度は流れの流速に比べて相当小さいので、河床変動計算についても流れに対する条件式(3.14)を満足すれば十分であると考えられる。



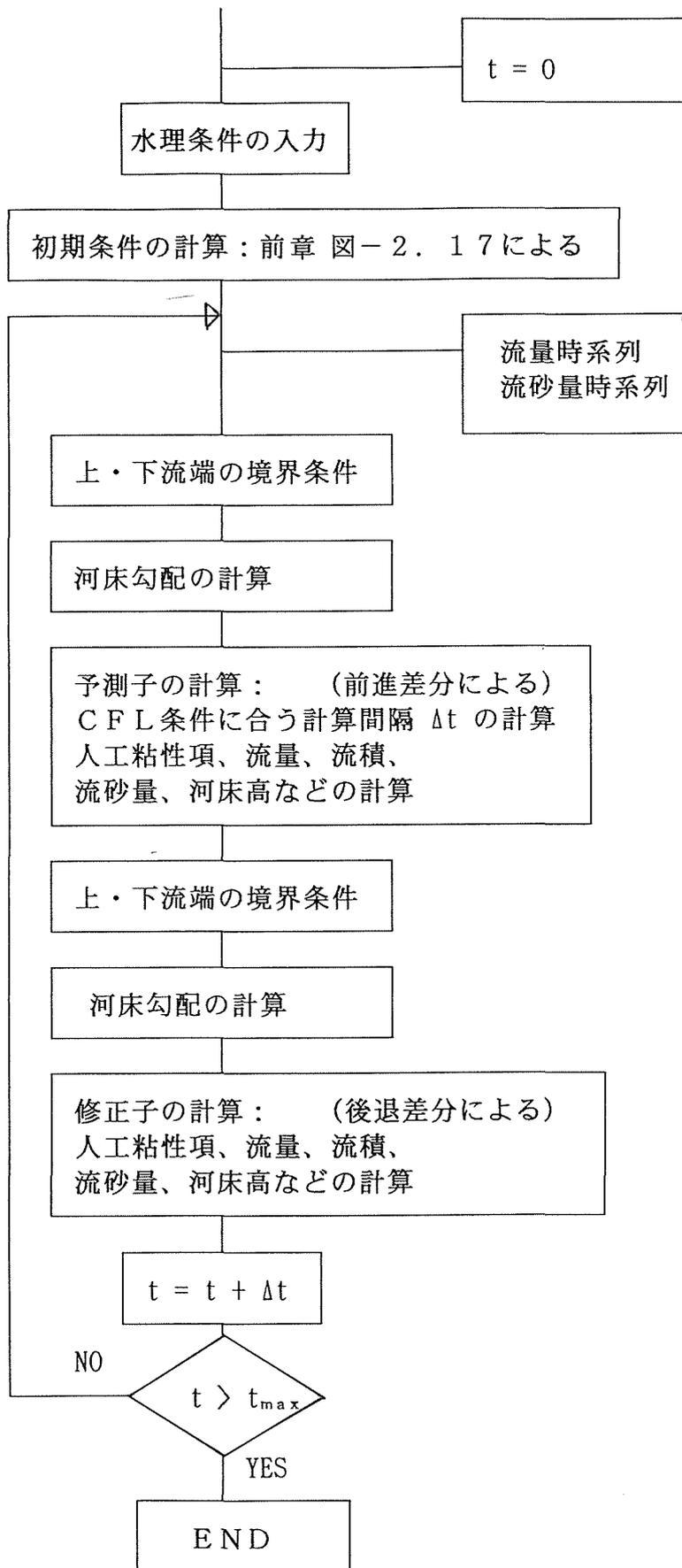


図-3.3 河床変動の計算のフローチャート

### 3. 3 常流・射流の混在する領域における河床変動の実験

急勾配水路における河床変動計算法を検証するため、ダム上流部の堆砂過程を想定して実験を行った。

#### 3. 3. 1 実験装置

実験装置は、第2章の固定床実験に用いたものと同じ長さ12m、幅0.4m、深さ0.4mの勾配可変の開水路を用いた。上流部に1mの整流区間を設け、整流区間終了地点で給砂できるように給砂装置を設置した。水路中央部は前章図-2.19に示すように幅を0.2mに縮小し下流端にはせきを設けている。水面と砂面高の測定については、図-3.4のように定速走行が可能な測定台車にサーボ式水位計と砂面計を搭載して、データをAD変換器を通してパソコンに直接取り込み、同時測定ができるようにした。砂面計は、非接触型の発光プローブを有する精密連続水底測定器である。また、給砂装置は、図-3.5に示すように漏斗状の給砂器2つを並列に並べ、一定量の乾燥砂を継続して給砂できるようにしてある。

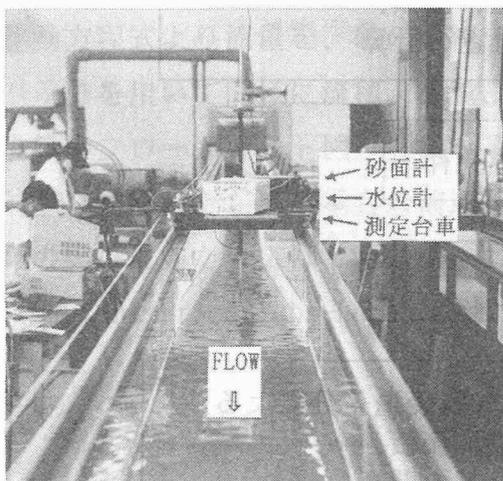


図-3.4 実験水路および測定器

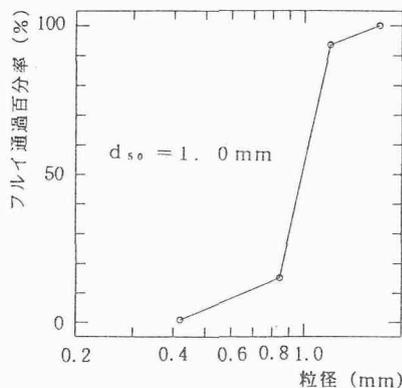


図-3.6 砂の粒度分布

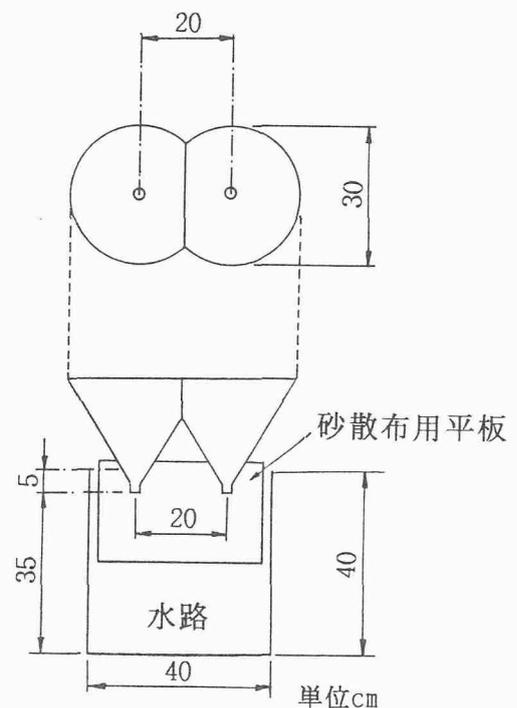


図-3.5 給砂器

### 3. 3. 2 実験方法

水路床に5cmの厚さで均等に砂を敷き、下流端をせき上げた状態で給水と給砂を継続して堆砂の進行状況を計測した。実験に用いた砂は、図-3.6に示すような粒度分布で中央粒径 $d_{50}=1.0\text{mm}$ 、比重 $\rho=2.65$ 、空隙率 $\lambda=0.4$ の珪砂である。

水路勾配は1/50、流量は $3.75\text{ l/s}$ （単位幅当り $93.8\text{cm}^2/\text{s}$ ）、給砂量は上流端における平衡流砂量に近い $14.3\text{cm}^3/\text{s}$ （単位幅当り $0.4\text{cm}^2/\text{s}$ ）である。変化させた下流端の水深と測定時間およびデルタ先端の到達位置は、表-3.1の通りである。

表-3.1 実験条件

(\* 断面縮小部なし)

Exp. No	下流端水深 (cm)	測定した時間 (min)	せきからデルタフロント までの距離(m)
3A-1	1.7	3, 10, 60, 70	
3A-2	7.5	3, 5, 10, 30, 40	0 (満砂)
3A-3	10.5	2, 6, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 90, 100, 110	0 (満砂)
3A-4	13.0	3, 8, 15, 23, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100	1.8
3A-5	16.0	3, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 110, 120	2.1
3A-6	19.0	3, 6, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190 220, 270, 280, 290, 300, 310, 320, 330, 340 360, 380, 390, 400	0 (満砂)
*3B-1	16.0	15, 30, 45, 60, 75, 90, 150, 210	0 (満砂)

### 3. 3. 3 実験結果

予備実験も含めて水路の粗度を求めると、マンニングの粗度係数で $n=0.016$ であった。堆砂デルタの先端部を平面的にみると図-3.7のように、水路中央部と側壁部との差はわずかであり、しかもこの差が堆砂の進行に伴って大きく拡大されることはない。したがって、本実験条件程度ならば一次元の現象として十分扱えるものと考えられる。堆砂デルタ先端の堆積角は、図-3.8の写真に示すように砂の水中安息角となり、本実験の場合約 $35^\circ$ であった。河床高さと水面の測定結果の例を示すと図-3.9~11のようである。

射流部における砂面は、水路中央部で大きく波立っており水面波との位相のずれはあまり見られない。この河床波は、流れの水理条件から分類すると $untidune$ に相当する。

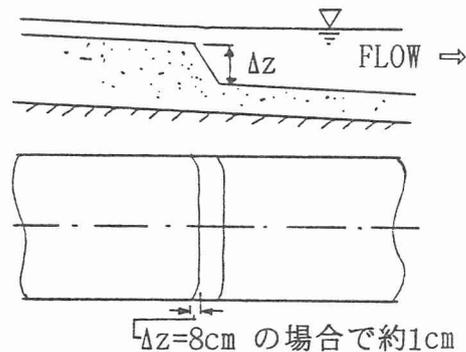


図-3.7 堆砂デルタ先端部の平面形状

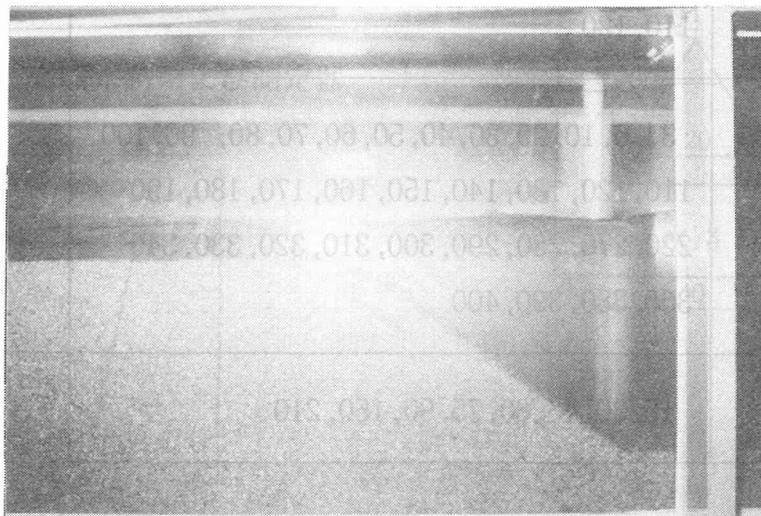


図-3.8 堆砂デルタ先端部の写真 (Exp. No. 3A-5, 90分経過時8.5m付近)

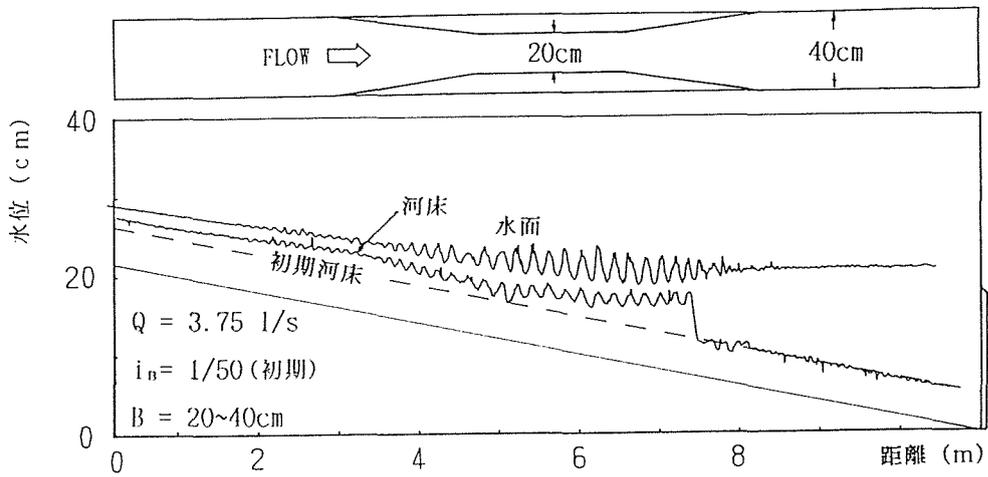


図-3. 9 河床と水面形 (Exp. No. 3A-5、40分経過時)

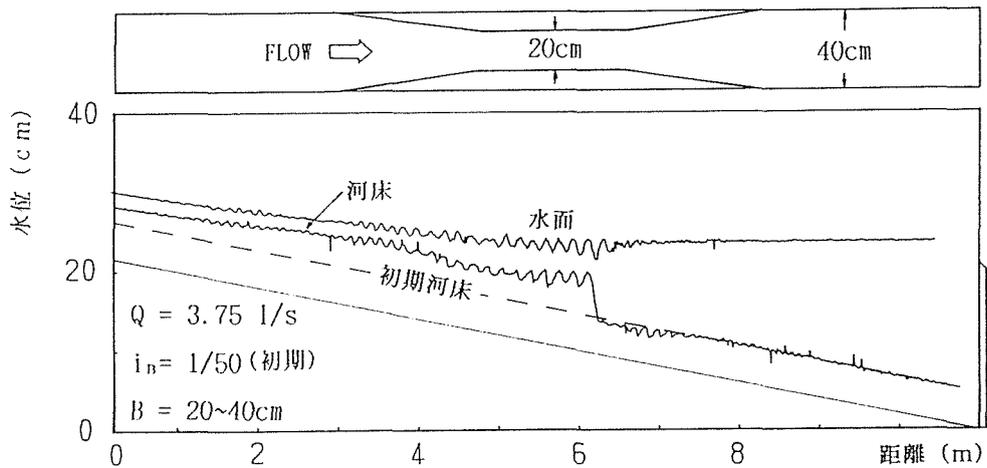


図-3. 10 河床と水面形 (Exp. No. 3A-6、50分経過時)

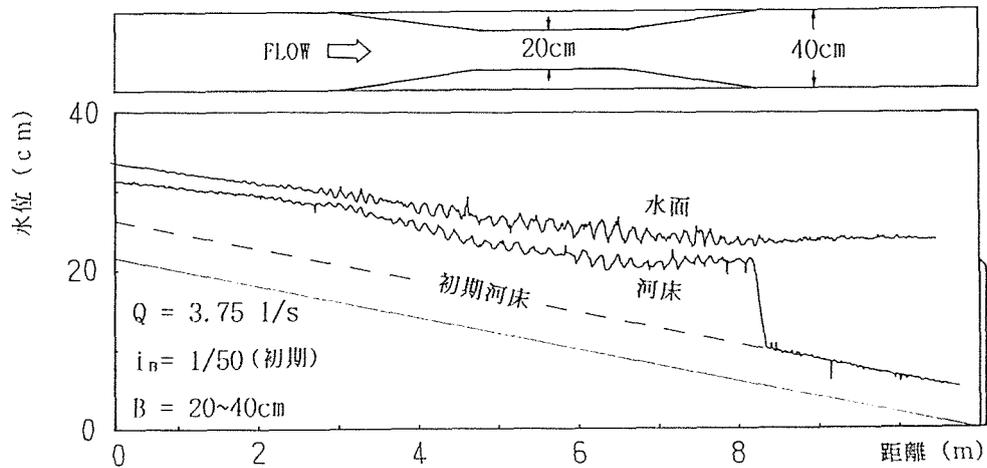


図-3. 1.1 河床と水面形 (Exp.No.3A-6、140分経過時)

### 3. 4 実験結果への適用

3. 2で述べたマッコーマック法による常流・射流の混在する領域における河床変動計算法の妥当性を検討するため、実験結果への適用を試みる。

#### 3. 4. 1 人工粘性項の効果

狭さく部を有する水路の流れと河床変動の実験に対応して、マッコーマック法による計算を行った。初期河床勾配1/50、流量3.75 l/s、給砂量は上流端での平衡流砂量に近い14.3 cm<sup>3</sup>/s、砂の粒径1.0mm、下流端水深16cmとし、計算の距離間隔 $\Delta x=22.5$ cm、時間間隔 $\Delta t=0.63$ s、人工粘性係数は流れについて前章2. 5. 1から得られる値を参考に5を用い、河床変動については流れと同じ5.0、1桁小さい0.1および0を用いて計算した。経過時間120分の例を図-3. 1.2に示す。

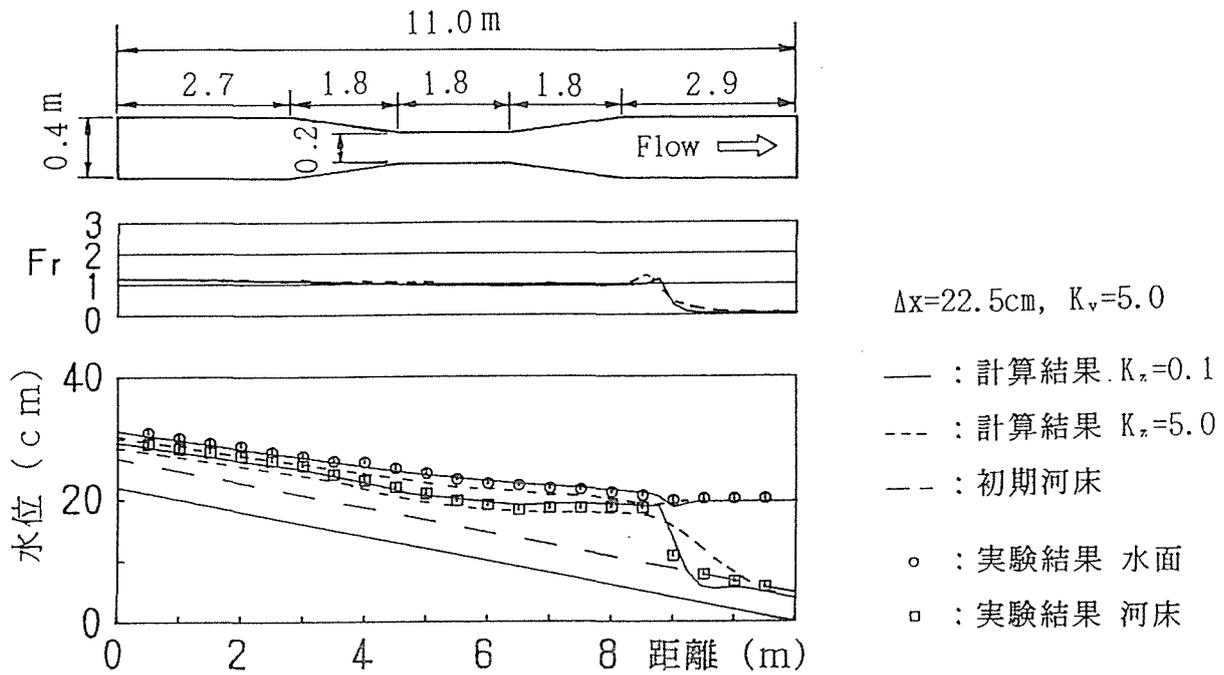


図-3. 1 2 堆砂の計算結果と実験結果 (Exp. No. 3A-5 120分経過時の例)

図を見ると $K_z=5.0$ の計算結果では、デルタ先端部の堆砂勾配が緩くなっている。 $K_z=0.1$ ではほぼ実験結果に近いものが得られている。 $K_z=0$ では25分で発散し計算できなくなった。人工粘性係数が適した値であれば、計算結果は狭さく部での水面形や河床形を含め堆砂デルタの時間進行など比較的良好に実験結果を再現することができると思われる。しかし、河床変動の計算に人工粘性項を付加すると全体の土砂収支に狂いが生じるとの指摘もあるので<sup>16)</sup>、付加する人工粘性はできるだけ小さい方がよいと思われる。本研究で対象とした実験と計算からは、河床変動に対する人工粘性係数は流れに対するものより1桁程度小さい値が適当と思われる。

さらに、計算の不安定性について検討をするため、マッコーマック法を初期河床勾配の異なる2つの場合の堆砂計算に適用した。計算はデルタの先端付近で緩勾配になるCaseT-1と急勾配になるCaseT-2の2種類について行った。計算条件は、長さ $L=11\text{m}$ 、単位幅流量 $q=93.8\text{cm}^2/\text{s}$ 、砂の粒径 $d_m=0.1\text{cm}$ 、粗度係数 $n=0.016$ で、初期河床勾配 $i_B$ 、単位幅給砂量 $q_B$ 、下流端水深 $h_d$ は、CaseT-1でそれぞれ $1/50$ 、 $0.5\text{cm}^2/\text{s}$ 、 $16\text{cm}$ 、CaseT-2でそれぞれ $1/20$ 、 $2.0\text{cm}^2/\text{s}$ 、 $28\text{cm}$ である。この場合、水路幅は全長に渡って一定で、狭さく部は設けていない。給砂量は上流端における平衡流砂量としている。差分間隔 $\Delta x$ を $22.5\text{cm}$ 、流れと河床変動に対する人工粘性係数 $K_v$ 、 $K_z$ を $5.0$ として河床変動を計算するとそれぞれ通水時間 $t_0=44.0$ 分と $4.4$ 分で計算が発散した。そこで発散直前の水面形、河床形を調べると図-3. 13、14のようでありデルタ前面付近において水面と河床形状に振動が見られた。

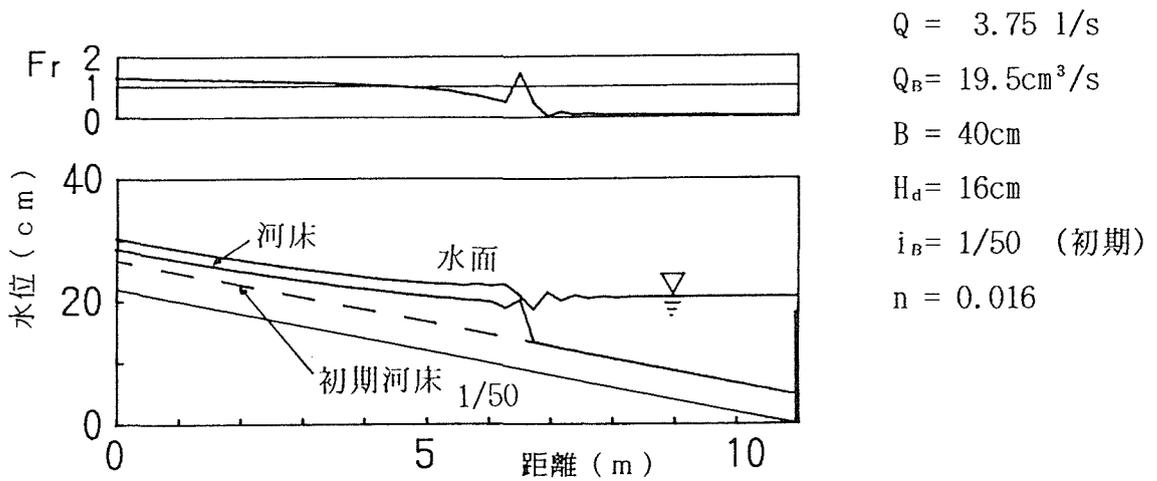


図-3. 13 CaseT-1の発散に近い水面形と堆砂形 (44分経過時)

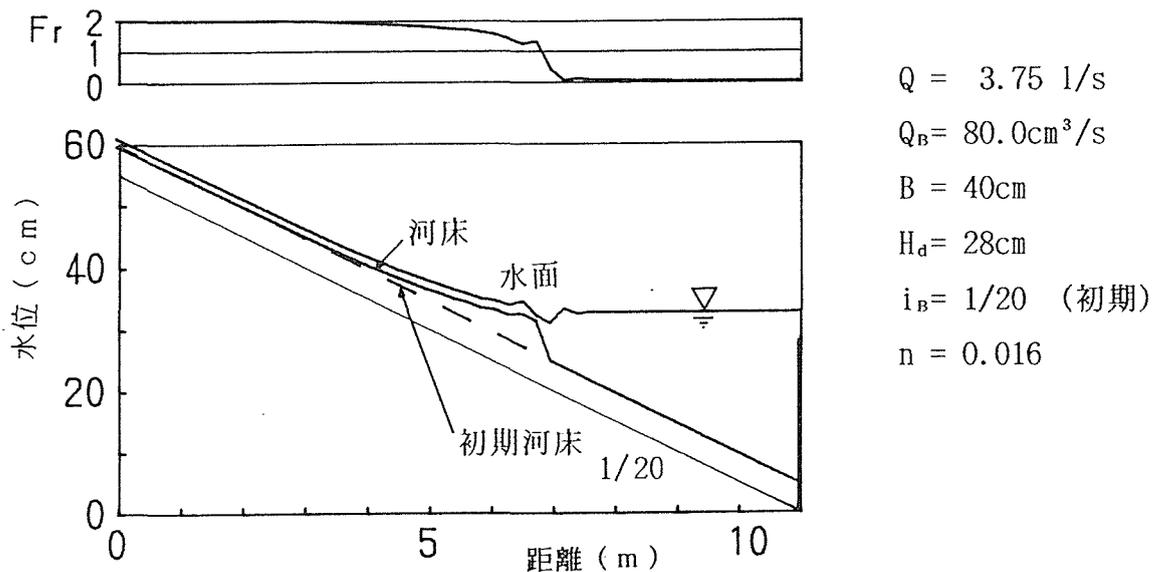


図-3. 14 CaseT-2の発散に近い水面形と堆砂形 (4分経過時)

図-3. 13、14のような堆砂過程では、デルタ前面近くの流れの計算精度がわるく、そのため堆砂計算の途中で発散に至る。これを防ぐためには $\Delta x$ を小さくすることと流れに対する人工粘性係数 $K_v$ だけでなく河床変動の計算にも人工粘性係数 $K_z$ を加えることが考えられる。そこで先のCaseT-1、T-2について、表-2のように $\Delta x$ を0.225mと0.113m、 $K_z$ を0と0.1の2種類設定して堆砂計算を行った。 $K_v$ は前章2.5.1の図-2.33を参考に5を用いた。表-3.2はそれぞれの場合において、計算が発散したときのせきからデルタのフロントまでの距離を示したもので、0mは満砂を表す。CaseT-1はデルタ前面付近で緩勾配になっており、 $\Delta x$ を小さくすることによって計算の安定性が増すとともに、 $K_z$ を考慮することで満砂まで計算が実行されている。この場合、 $K_z$ は $K_v$ より1オーダー小さい値でよく、これより大きくすると堆砂形状が鈍ってくる。CaseT-2は、デルタ前面が急勾配であ

り、 $\Delta x$ を小さくし $K_z$ を考慮することで解の改善は見られるがまだ十分安定な計算になっておらず満砂までに発散した。CaseT-1では満砂まで計算できたが、デルタの高さがさらに高くなるときにはこの計算条件で計算が安定するかは保証されていない。

表-3. 2  $\Delta x, K_z$ によるCaseT-1, T-2のせきからデルタフロントまでの距離

Kz	0	0	0.1	0.1
$\Delta x$ (m)	0.225	0.113	0.225	0.113
CaseT-1	4.50m	4.16m	0.90m	0 m
CaseT-2	4.28m	4.28m	3.83m	3.60m

CaseT-2に対して、 $K_v=5, K_z=0.5$ としてマッコーマック法を用いて計算を行った場合の、河床土砂の連続式、運動方程式の各項の値をしてみる。計算の安定状態により通常（4.2分経過時）、発散に向かう（29.18分経過時）、発散直前（29.19分経過時）の3つについて示すと図-3. 15~26のようになる。図-3. 15~18は通常の流れて、各式の人工粘性項は堆砂先端付近でのみ小さな値を示している。図-3. 19~22は発散に向かう場合で、人工粘性項も大きくなるがそれ以上に振動し始める項が出てくる。図-3. 23~26は発散直前の状態であるが河床土砂の連続式が大きく変動している様子が読み取れる。

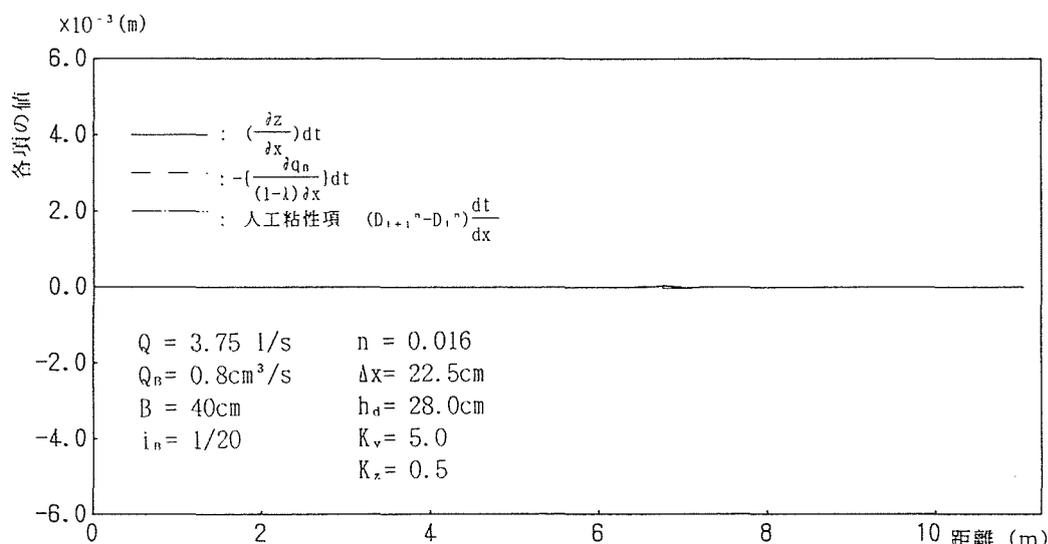


図-3. 15 河床砂の連続式における各項の値（通常の流れ）

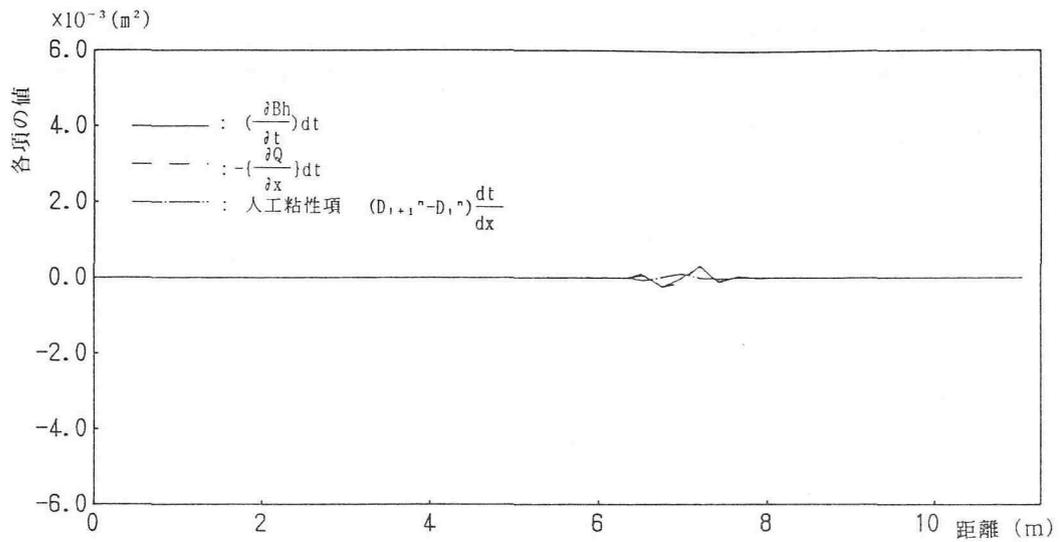


図-3. 16 流れの連続式における各項の値 (通常の流れ)

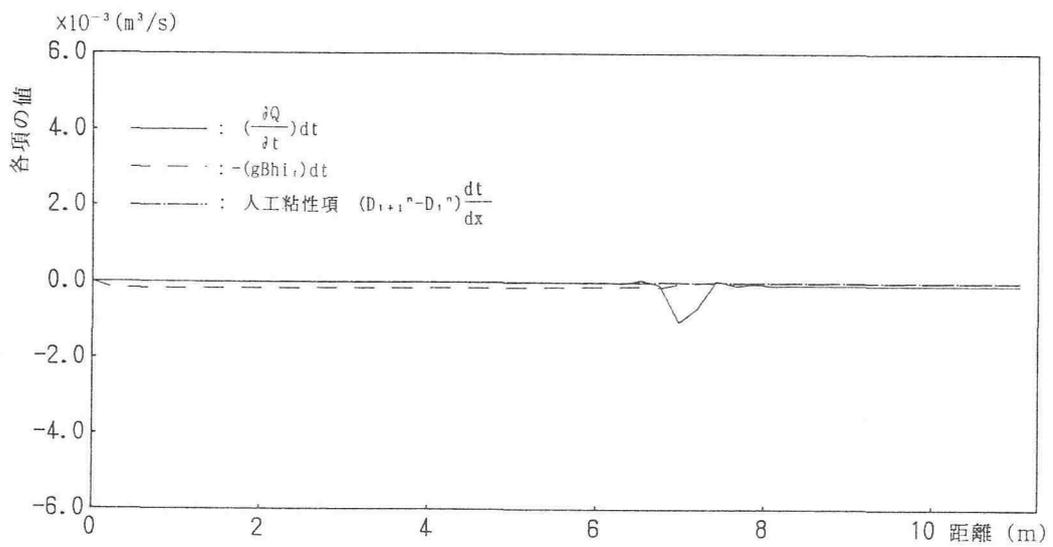


図-3. 17 運動方程式における各項の値 (通常の流れ)

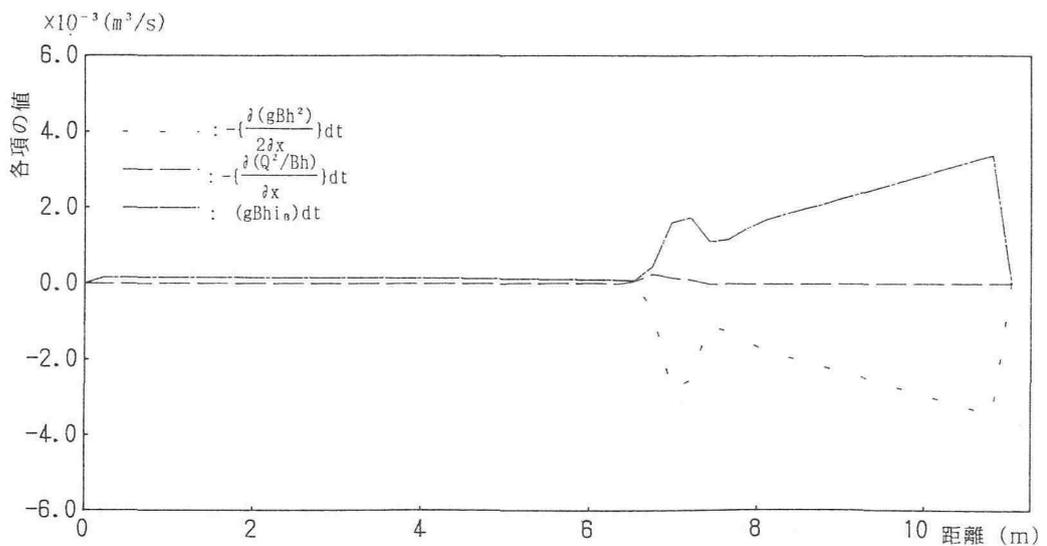


図-3. 18 運動方程式における各項の値 (通常の流れ)

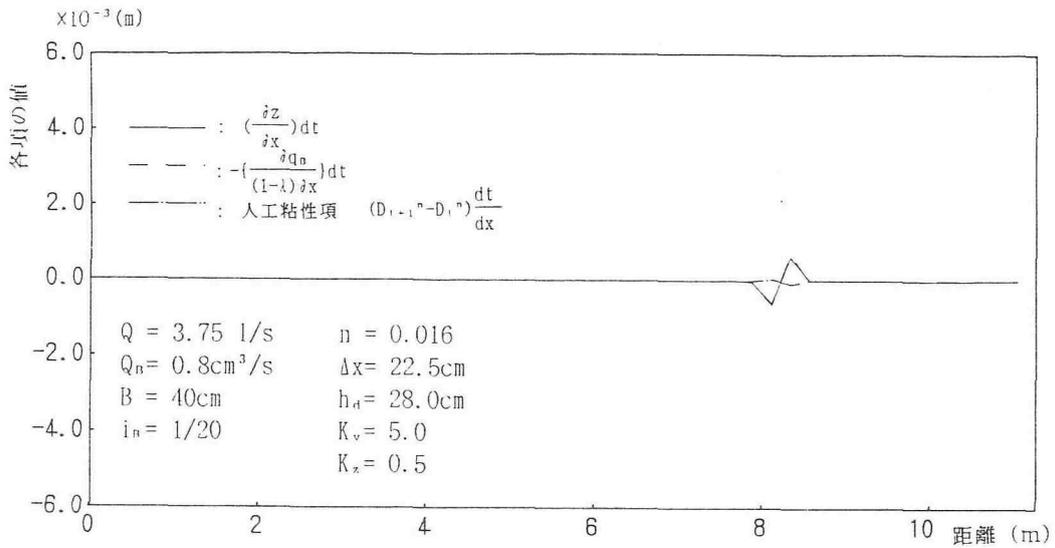


図-3.19 河床砂の連続式における各項の値 (発散に向かう流れ)

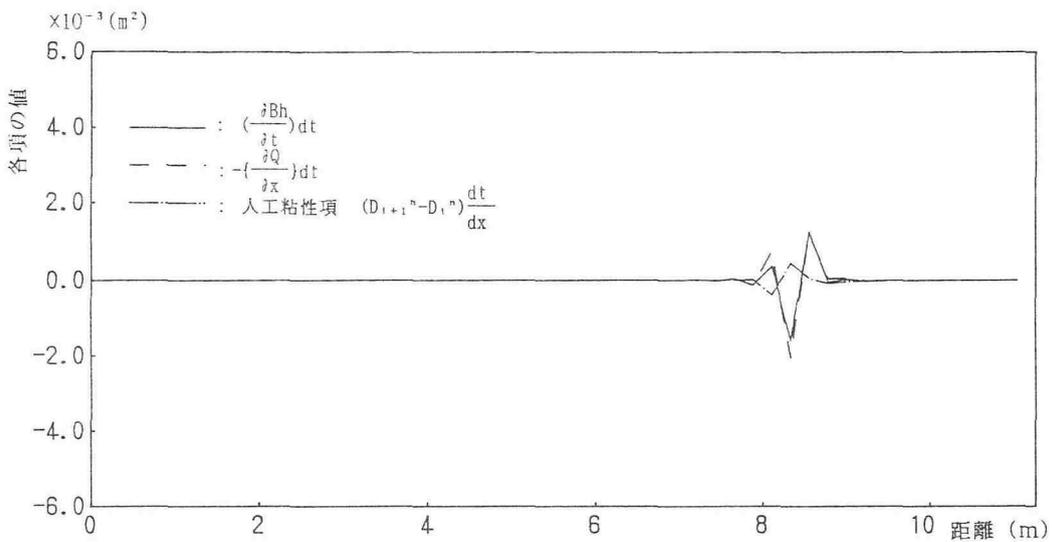


図-3.20 流れの連続式における各項の値 (発散に向かう流れ)

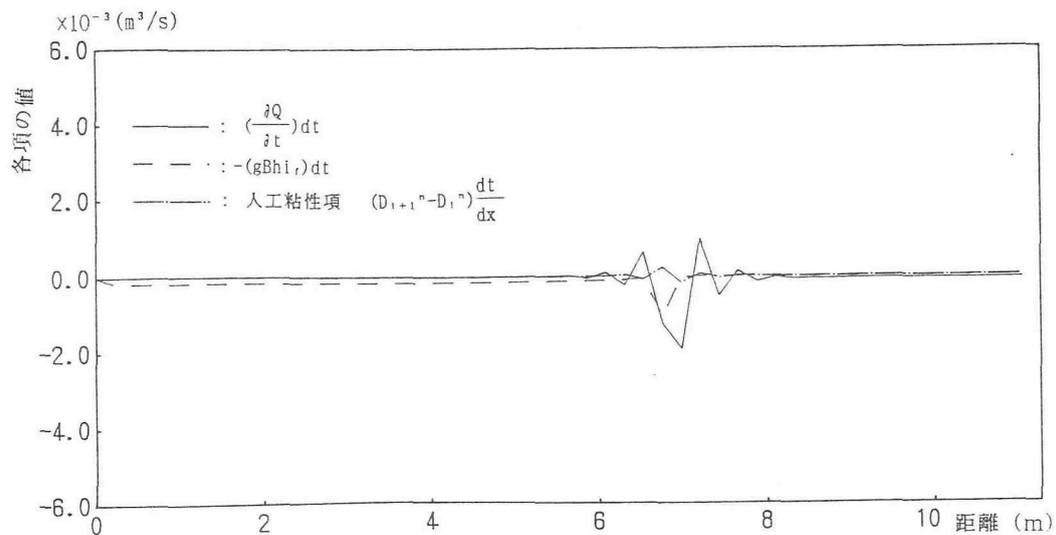


図-3.21 運動方程式における各項の値 (発散に向かう流れ)

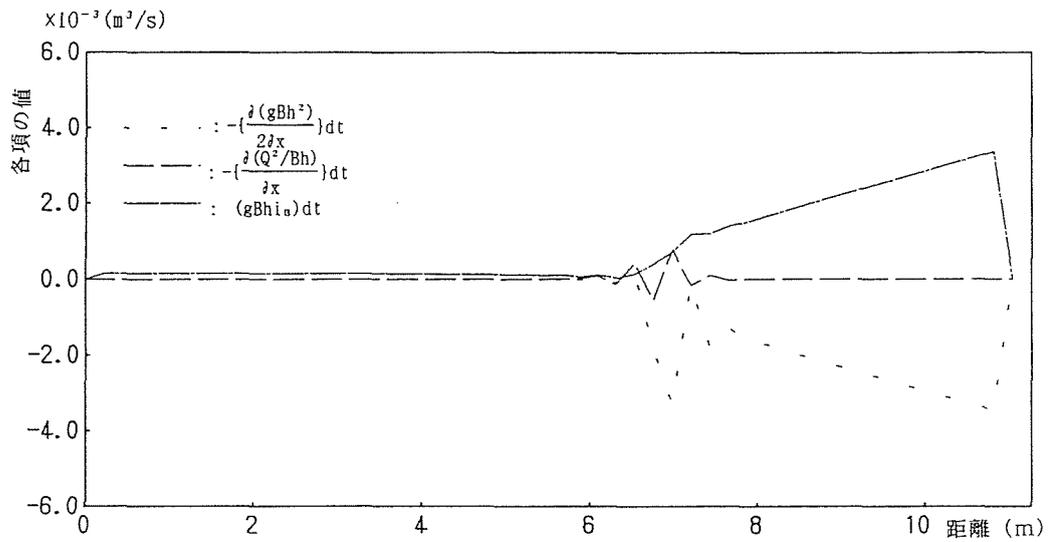


図-3. 22 運動方程式における各項の値 (発散に向かう流れ)

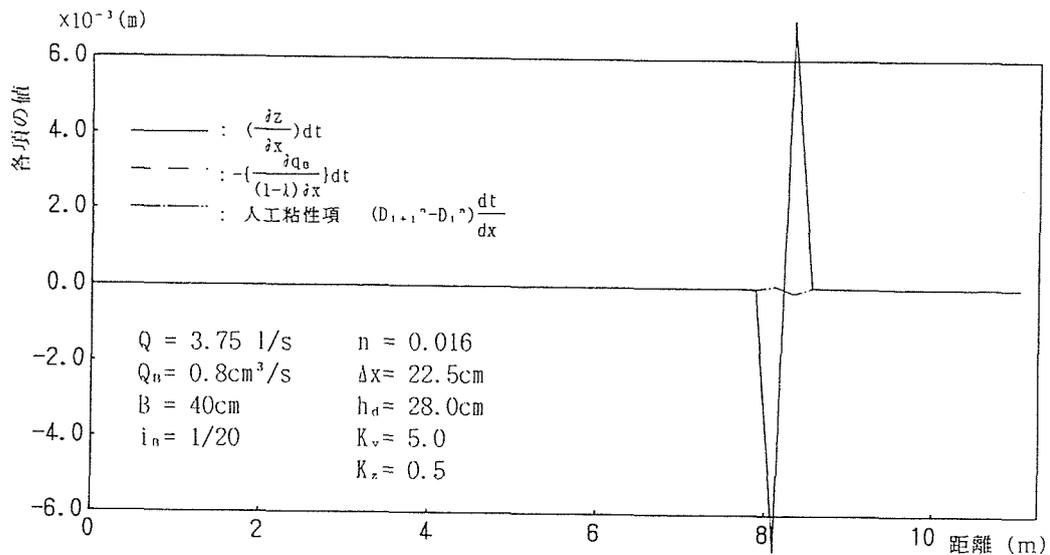


図-3. 23 河床砂の連続式における各項の値 (発散直前の流れ)

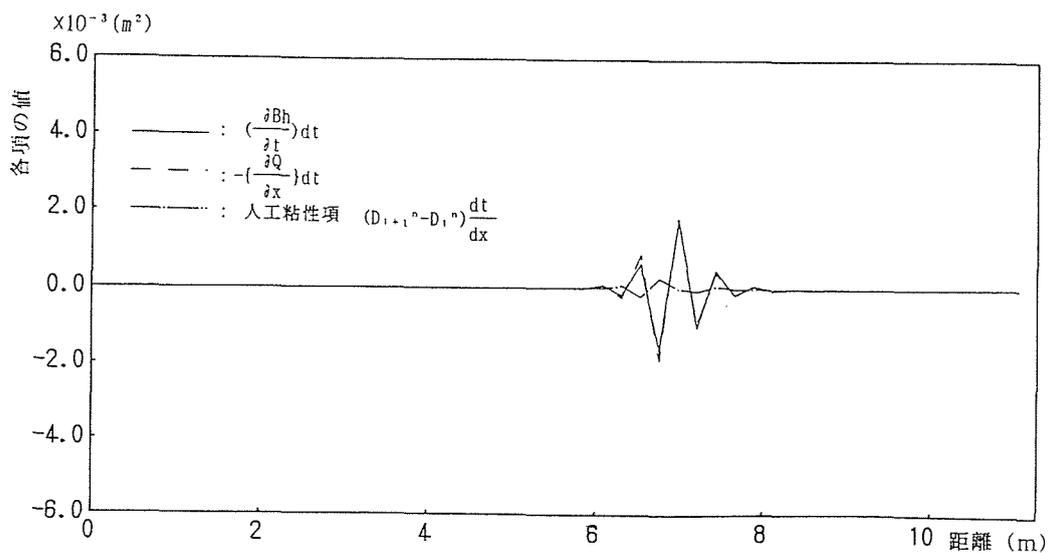


図-3. 24 流れの連続式における各項の値 (発散直前の流れ)

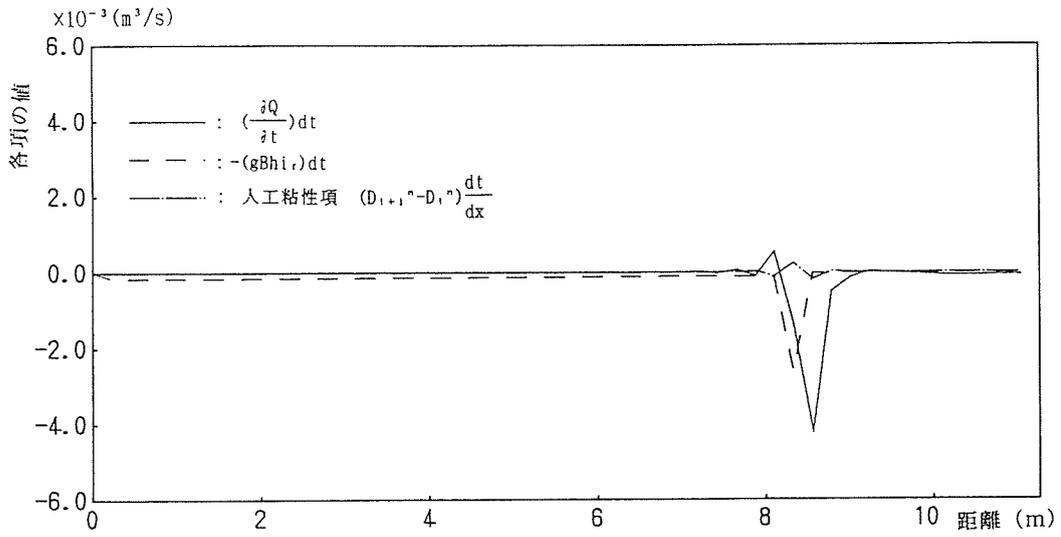


図-3. 25 運動方程式における各項の値 (発散直前の流れ)

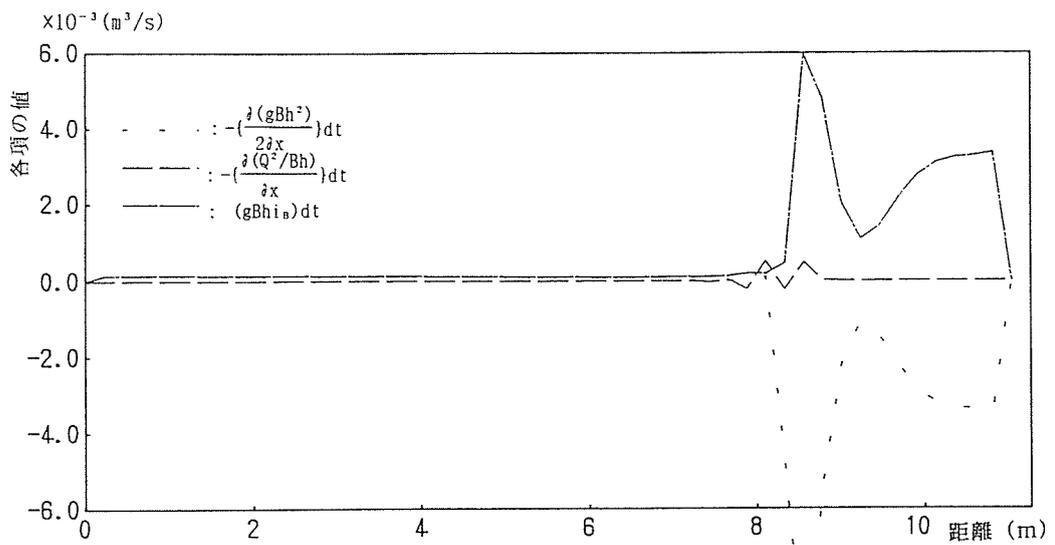


図-3. 26 運動方程式における各項の値 (発散直前の流れ)

### 3. 4. 2 河床変動計算の安定性

急勾配水路で跳水を伴うような流れにおいて堆砂計算をマッコーマック法を用いて行うと、ある程度の時間までは精度よく計算することはできるが、デルタの高さが高くなるとデルタ前面付近で急に計算が不安定になることがある。そこでデルタ先端付近における水位と下流端水位の関係に着目して不安定性の要因を探る。

発散に至るまでの下流側水深の変化を  $H_{d1}/(\Delta z_1 + E_1)$  と  $t/t_0$  の関係で表すと図-3. 28 のようになる。またCase T-1に対する実験値も示した。ここで  $H_{d1}$  および  $(\Delta z_1 + E_1)$  は、図-3. 27 のようにデルタ先端脚部を基準高さとしたときの下流端の水深およびデルタ先端から1つ上流側の全エネルギーの高さである。  $t$  は通水時間を、  $t_0$  は計算値では発散までの時間を実験値では満砂までの時間を示している。  $H_{d1}/(\Delta z_1 + E_1)$  の値を見ると、通水初期には実験値と計算値が近似している。しかし堆砂の進行に伴って、実験値は若干増加するのに対し、計算値は次第に低下し両Caseとも0.7付近で計算が発散している。したがって、デルタが時間の経過とともに高くなりすぎて、段落ち部の越流のような流れの状態になり、不安定性が生じているものと考えられる。そこで次節で段落ち部の水面形について検討する。

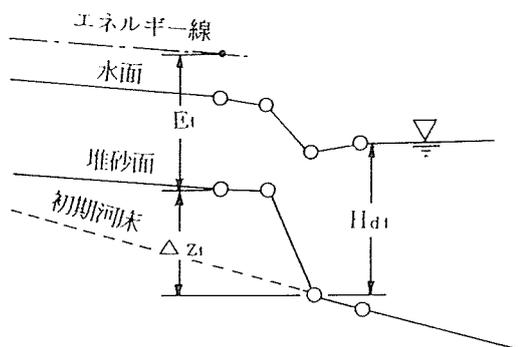


図-3. 27 デルタ前面付近の河床高と水位

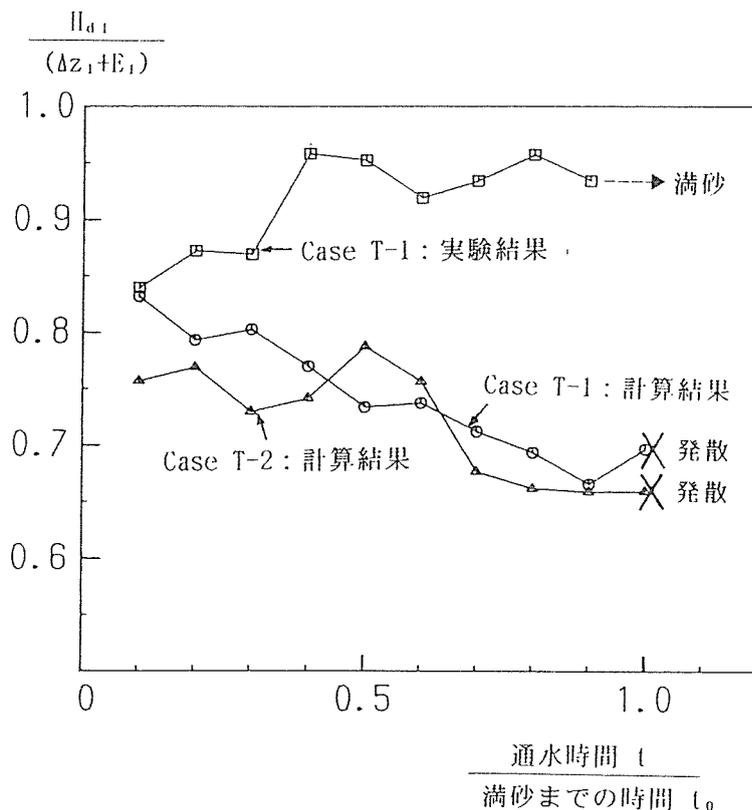


図-3. 28 発散までの  $H_{d1}/(\Delta z_1 + E_1)$  の変化

### 3. 4. 3 段落ち流れによる堆砂計算の安定性の検討

図-3. 29、30のような段落ち流れCaseS-1、CaseS-2について計算を行った。計算条件は $L=540\text{cm}$ 、 $q=98.5\text{cm}^2/\text{s}$ 、段落ち高さ $\Delta z=4\text{cm}$ 、下流部勾配0、 $n=0.01$ 、 $\Delta x=22.5\text{cm}$ 、 $K_v=6$ とした。上流部の勾配は堆砂デルタ先端で緩勾配および急勾配になる場合に対応させCaseS-1で1/500、CaseS-2で1/50とした。下流端の水深 $H_d$ は、CaseS-1の場合のもぐりせき、不完全越流および完全越流に相当するよう $H_d/(\Delta z+E)$ の値を1.0、0.8および0.6とした。

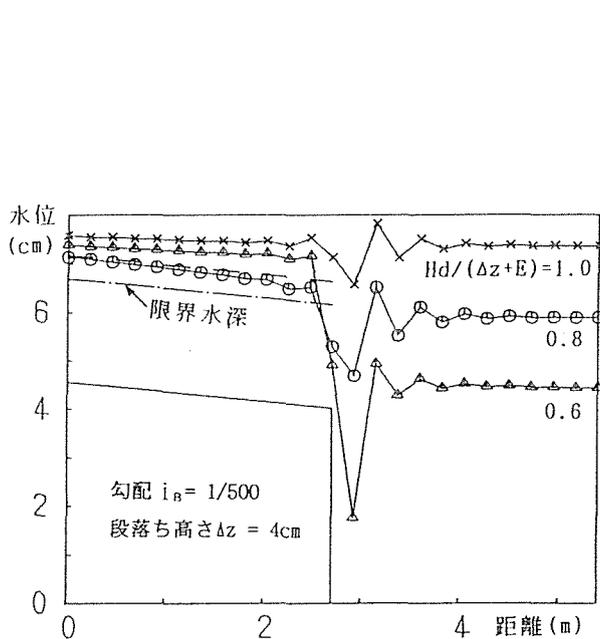


図-3. 29 CaseS-1 の段落ち流れ

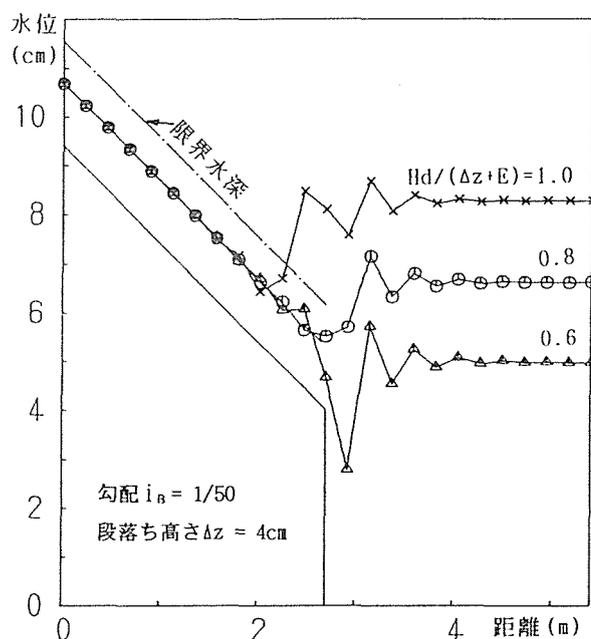


図-3. 30 CaseS-2 の段落ち流れ

段落ち上流が緩勾配の図-3. 29を見ると、完全越流の場合段落ち先端部で水深が限界水深以下になり、段落ち上流部で低下背水になるべき水面形がせき上げ背水になっている。段落ち上流部が急勾配の図-3. 30についても下流端水深が下がるに段落ち先端部で水深が等流水深以下となり一つ上流側の水深が大ききな値を示している。これらはいずれも下流側の水深が下がるに段落ち先端部での水深が小さくなり一つ上流側の水深が大きくなることを示している。このように下流側の水深が低くなると段落ち先端部の水深が過小に評価され段落ち部が緩勾配のときは限界水深以下に急勾配のときは等流水深以下となる。そこでCaseS-1、S-2に対し段落ち高さ $\Delta z$ および下流端の水深 $H_d$ を種々変化させ  $\Delta z/h_0$  と  $H_d/(\Delta z+E)$  をパラメーターとして段落ち先端部の  $Fr$  を示すと図-3. 31、32のようになる。図をみると  $H_d/(\Delta z+E)$  の値が 0.7~0.8 以下で段落ち先端部の  $Fr$  が発生し得ない値を示し、この値がさらに低下して0.6 付近になると上流側の水深が大きくなり水面形が前述のような起こり得ない形状になることが分かる。

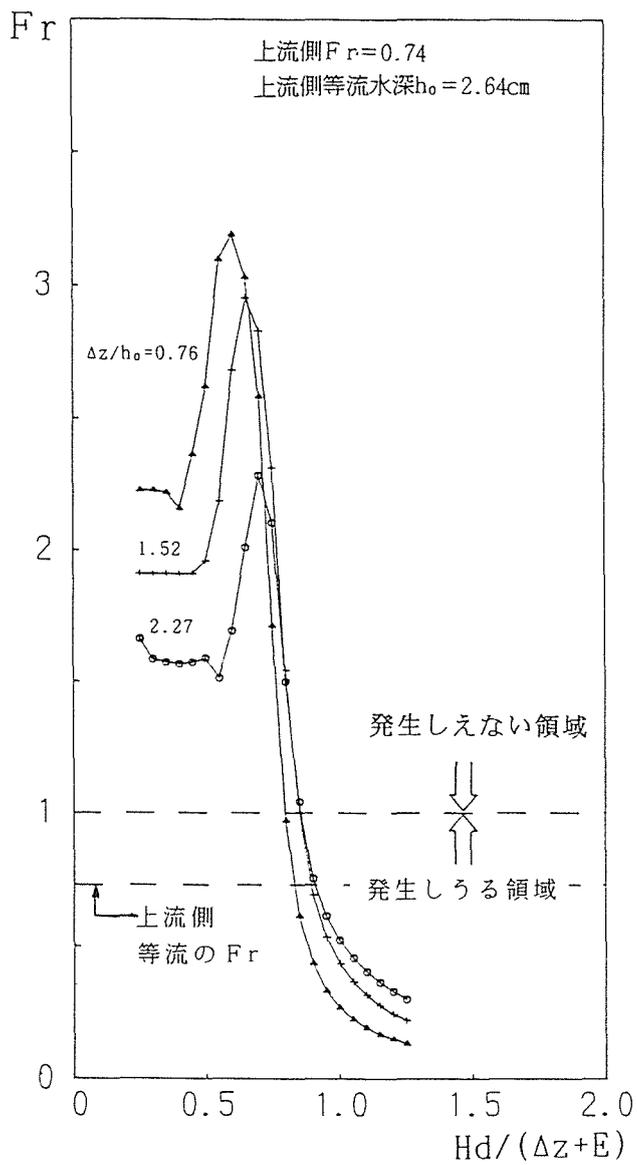


図-3. 3 1 段落ち先端部のFr  
(CaseS-1)

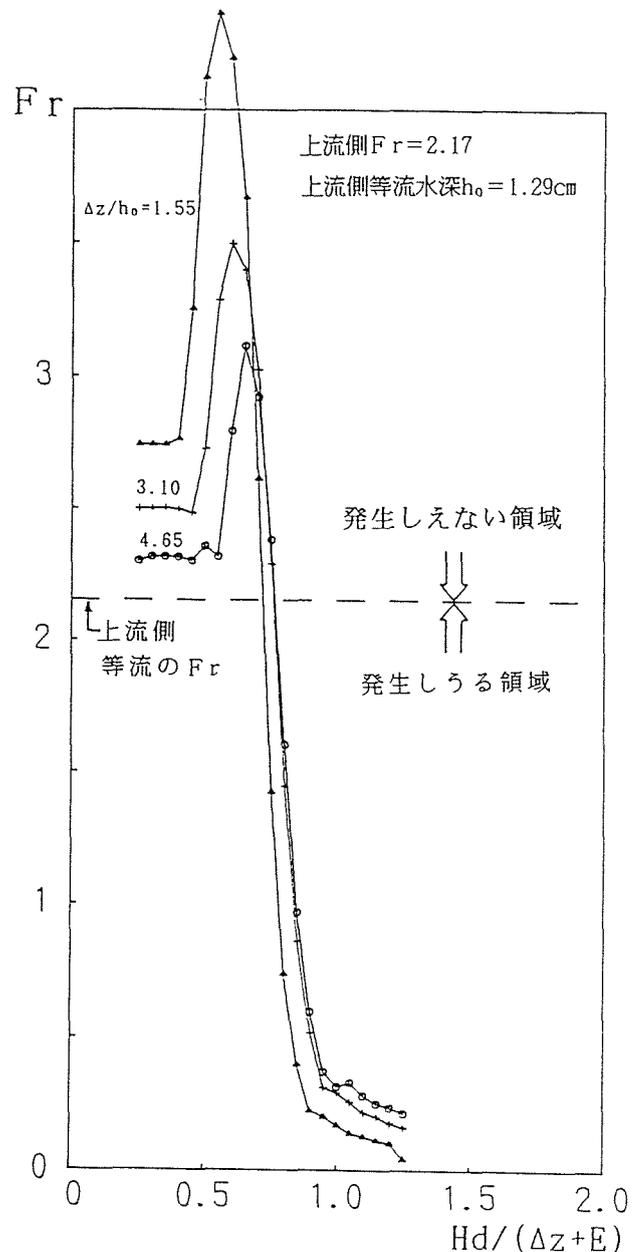


図-3. 3 2 段落ち先端部のFr  
(CaseS-2)

### 3. 4. 4 デルタ先端付近の河床変動

前述の考察から推測すると  $H_a/(\Delta z+E)$  が 0.7~0.8以下さらに0.6位まで低下するとデルタ前面付近の計算による水面形が図-3. 3 3のような状況になると考えられる。A断面で水深が小さく、一つ上流側のB断面で水深が大きくなる。そのためB断面で流速が遅くなり掃流力が低下してB断面より上流で砂が堆積する。砂が堆積するとますます  $H_a/(\Delta z+E)$  が小さくなりA断面の水深は過小に、B断面の水深は過大に評価され不安定性が強くなる。これが堆砂計算時の大きな不安定要因の一つと考えられる。そこで図-3. 2 8についても

う一度考察してみると、最初 $H_a/(\Delta z+E)$ の値が0.8付近にあり問題なく計算できている。堆砂の進行とともに $\Delta z$ が大きくなり $H_a/(\Delta z+E)$ が次第に小さくなってくるが0.7~0.8付近の値ではまだ計算できている。しかし0.7を切るとデルタ前面に砂が堆積してやがて発散する。これは図-3.29からも分かるように $H_a/(\Delta z+E)$ が0.8では上流部の水面形が低下背水であるのに対し0.6に近付くとせき上げ背水となりデルタ先端付近に砂が堆積し始めるために起こると考えられる。もしこれらの状況が、デルタ先端部での水深が緩勾配の場合限界水深 $h_c$ 以下、あるいは急勾配の場合等流水深 $h_0$ 以下になることが原因とすれば、安定した計算を行うためにはデルタ先端部の水深を $h_c$ あるいは $h_0$ にできるだけ近付けることが必要である。

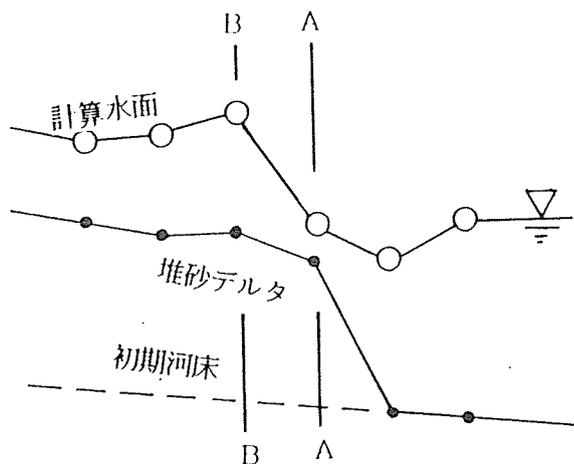


図-3.33 デルタ前面付近の河床

安定した計算を継続するための具体的な方法として、差分間隔 $\Delta x$ を小さくすることや河床変動に対する人工粘性係数 $K_v$ を用いること、あるいは形成される堆砂角を砂の水中安息角以下にすることや、堆砂デルタ下流部の後流を考慮することなどが考えられる。 $\Delta x$ 、 $K_v$ を考慮した安定性の向上については3.4.1でも述べた。しかし、基本的な改善策としてはデルタフロントの水深をできるだけ実際の水深に近付けること、すなわちデルタ前面が緩勾配の場合は限界水深に、急勾配の場合は上流側の等流水深に近付けることが必要である。

改善策の一つとして、計算格子の間隔を小さくしデルタ先端の堆積角度を水中安息角で安定な形に崩落させる方法を試みた。図-3.34のように計算で得られた堆砂角度が水中安息角より大きい場合、水中安息角になるまで2断面( $i, i+1$ )の河床高を変えるよう計算に組み込んだ。

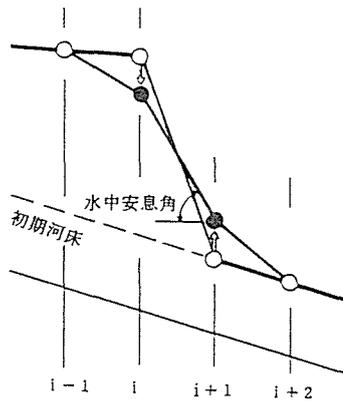


図-3. 34 計算による堆砂角と水中安息角

Case T-1, T-2 について、計算間隔 $\Delta x=0.056\text{m}$ 、水中安息角 $\phi=35^\circ$ とし、人工粘性係数は流れに対して $K_v=5$ 、河床変動に対して $K_z=0$ として計算するといずれも満砂まで計算できた。それぞれの計算結果を示すと図-3. 35、36のようである。また、これらの結果より堆砂前面の比エネルギーを求め図-3. 28に加えると図-3. 37のようになる。図を見ると $H_d/(\Delta z+E)$ の値が0.8より大きく安定した計算が実行できていることが分かる。さらに、先に示した狭さく部を有する水路の流れと河床変動(Exp. No. 3A-5, 120分経過時)の実験に同様の計算条件で適用すると、図-3. 38のようになる。この場合堆砂先端の斜面勾配は水中安息角となり、水面形および河床形は比較的よく再現できている。しかし、安定した計算を継続するためには、計算間隔 $\Delta x$ を少なくともこの堆砂先端斜面の水平距離より短くする必要がある。そのためこの方法は、実用上 $\Delta x$ を十分小さくできるか否かの問題が残る。その他の改善策としてはデルタ直下流で、後流を考慮し流れの計算にはこの部分の水深を浅くすることも考えられる。

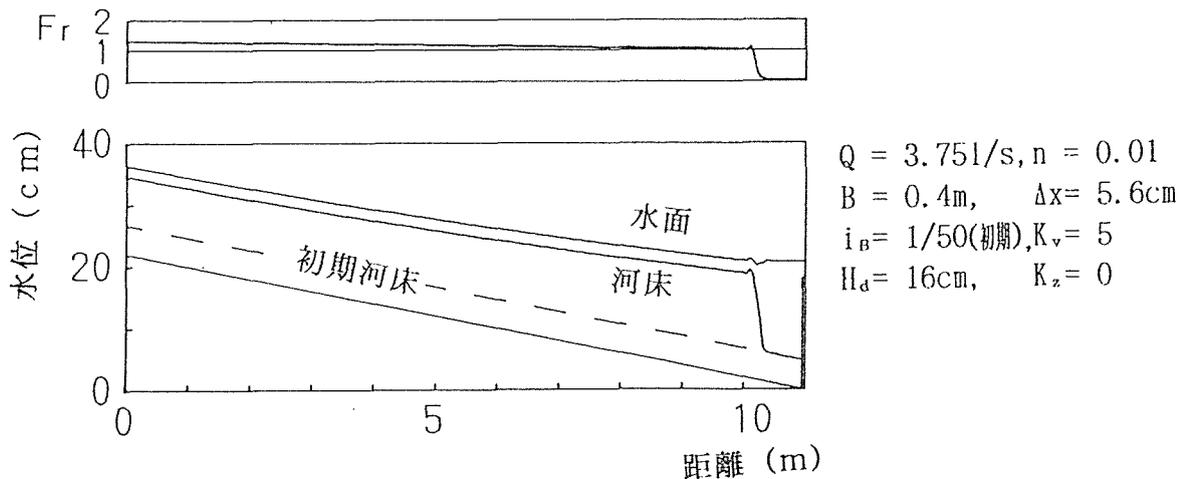


図-3. 35 堆砂角度を水中安息角以下とした場合の計算結果 (200分経過時)

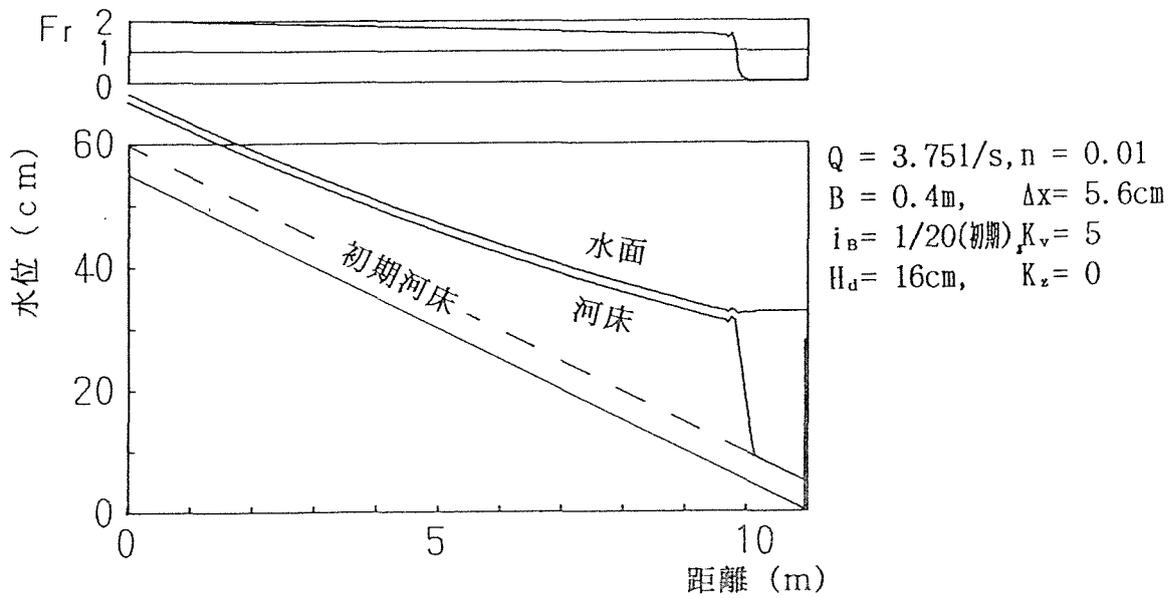


図-3. 36 堆砂角度を水中安息角以下とした場合の計算結果 (60分経過時)

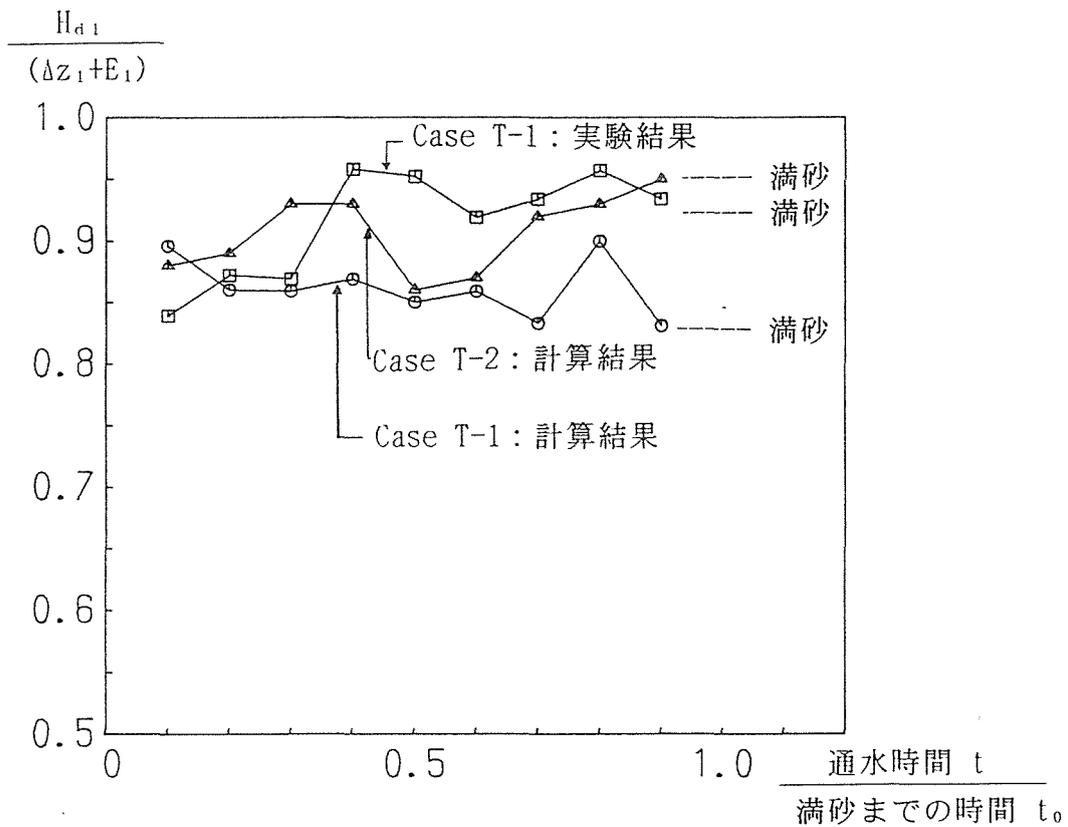


図-3. 37 堆砂角度を水中安息角以下とした計算結果の  $H_d / (\Delta z + E)$  の値

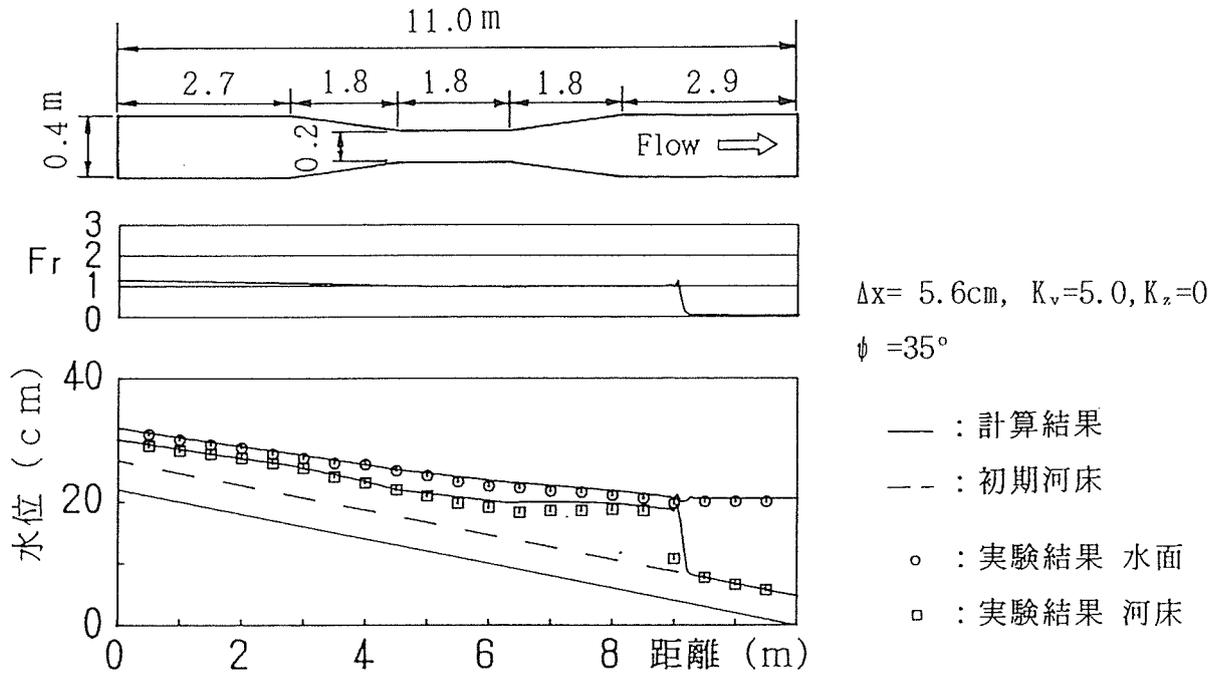


図-3.38 堆砂角度を水中安息角以下とした計算結果と実験結果

(Exp. No. 3A-5 120分経過時の例)

以上は下流端水深が保たれていて堆砂が進行する場合であるが、流量減少など何らかの理由で下流端水深が低下する場合も考えられる。下流端水深が著しく低下すると当然計算が不安定になり計算できなくなると思われるが、その時の下流端水深の目安は、図-3.31、32に示した $H_d/(\Delta z + E) = 0.7 \sim 0.8$ 程度以下であると考えられる。

### 3. 5 結語

マッコーマック法によって砂防ダム上流部の流れと堆砂の計算をする場合の人工粘性係数やデルタ前面の流れや河床変動計算の安定性について検討した。主な結果は次の通りである。

(1)砂防ダム上流部などの常流・射流の混在する流れと河床変動に対して、適当な人工粘性係数を用いてマッコーマック法による一次元計算法を適用すると、実験結果を十分再現することができる。

(2)堆砂の計算においてデルタ先端の上流側水位が高くなり過ぎ段落ち状態になると計算が不安定になる。デルタ先端の上流側が緩勾配となる場合、不完全越流または完全越流の条件下のとき上流側水深の再現性が悪くなり、このため堆砂計算の不安定性を引き起こすものと考えられる。デルタ先端の上流側が急勾配の場合についても下流側的水深が低くなると、上流側水深の再現性が悪くなり、やはり堆砂計算の不安定性を引き起こされると考えられる。

(3)この計算の不安定性は水深に比べデルタの高さが高いほど顕著であるが、計算の距離間隔 $\Delta x$ を小さくしたり、適当な $K_v$ 、 $K_z$ を用いることで不安定性を小さくすることができる。この場合 $K_z$ は、 $K_v$ より1オーダー小さい値が適当であると思われる。

また、流量減少など別の理由で下流端水深が低下する場合は、デルタ先端部で段落ち状態となり計算できなくなる。この時の下流側的水深の目安は、デルタ先端の下流側水深と上流側のエネルギー線の高さとの比 $H_d/(\Delta z+E)$ が0.7~0.8程度以下の値である。

(4)ダム堆砂の計算では不安定性を解消するため、デルタ先端の堆砂角度を水中安息角になるよう崩落させることが考えられる。この場合、デルタ先端の堆砂斜面全長の水平距離より計算間隔を小さくする必要があり、実用上の問題は残るが、デルタが高い場合にも満砂まで計算をすることができる。

## 参考文献

- 1) 芦田和男・高橋保・道上正規：河川の土砂災害と対策、防災シリーズ5、森北出版、pp.210-217, 1983.
- 2) 道上正規・藤田正治・前田真吾：非平衡浮遊砂を考慮した急勾配水路における貯水池堆砂の計算法、水工学論文集、第34巻、pp.367-372, 1990.
- 3) 岡部健士・天羽誠二・石垣昌邦：常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について、水工学論文集、第36巻、pp.337-342, 1992.
- 4) 岡部健士・高橋邦治・穴瀬康雄：MC法を用いた1次元開水路流れの数値計算法、徳大工学部研究報告、pp.25-33, 1993.
- 5) 河村三郎・中谷剛・前田哲史・澤田良治：TVD-MacCormack法による河床変動計算、土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、pp.518-519, 1993.
- 6) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：跳水を含む流れと河床変動の数値計算、土木学会第50回年次学術講演会講演概要集、pp.442-443, 1995.
- 7) Shigeyuki KUSAKABE, Masanori MICHIEUE, Masaharu FUJITA and Osamu HINOKIDANI, Bed Variation Model in Steep Channels with Transition of Flow Using MacCormack Scheme, Management of Sediment Philosophy, Aims, and Techniques, Sixth International Symposium River Sedimentation, pp.649-658, 1995.
- 8) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究、水工学論文集、第40巻、pp.977-982, 1996.
- 9) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明：堆砂前面付近の流れと河床変動計算の安定性、土木学会第51回年次学術講演会講演概要集、pp.590-591, 1996.
- 10) 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する研究、土木学会論文報告集、第206号、pp.59-69, 1972.
- 11) 日本機械学会編：流れの数値シミュレーション、コロナ社、pp.106-110, 1988.
- 12) 前出論文3)
- 13) 前出論文4)
- 14) 前出論文5)
- 15) 山下恭正・清水康行・荒井信行・三谷紀一：1次元保存則差分法による常流射流混在流れの計算法、都市域急流河川の流れと河床変動の数値解析に関するシンポジウム、土木学会他、pp.27-31, 1994.
- 16) 前出論文3)

## 第4章 急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元特性に関する実験的研究

### 4. 1 概説

山地河川などの急勾配水路では、勾配の変化だけでなく河幅も複雑に変化することが多い。そのため平面的にも常流・射流の混在する流れとなる。洪水時の流況を把握し河床変動を考慮した河道計画を進める上では平面二次元の扱いが必要となる。

また、近年注目され始めている多自然型河川などでは、河幅の変化や緩急の勾配を配した複雑な河道を計画したり、治水上若干の障害となる恐れのある樹木を含む中州なども残す方向で検討する場合が出てきている。これらの個所でも洪水時に安全か否か、流れの状況を予測することは大切なことである。中でも流れのエネルギー減少に関係の深い跳水などの遷移部の発生位置や形状、さらに流砂が加わった場合の洗掘・堆積などを正確に把握し、対策が検討できる手法の確立は重要な課題である。

本章では、急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元特性を、下流側のせき上げと関連付けて実験的に取り上げた。

拡幅部の流れは、縮小部に比較して取扱が困難であることが古くからChowによっても指摘されている<sup>1)</sup>。拡幅部の流れに関する研究では、芦田らによる固定床と移動床とに対するものがあり、固定床の場合水路に不均衡がなくても主流が右または左に片寄るが、移動床の場合は流れと流砂が自ら安定した水路を形成するという興味深い結果が報告されている<sup>2)、3)</sup>。

本研究では、固定床と移動床に分けて実験を行った。固定床では拡幅部下流でのせき上げによる二次元的な跳水の発生位置およびそれらの安定性について実験的に検討した。移動床では、まず流量の少ない流れについて実験を行い、急拡部を過ぎると流路が蛇行する場合について調べた。つぎに流量を大きくして、拡幅部近傍で河床の洗掘と堆積が起こる状態を調べ実験的に固定床の流れと比較検討した。河床変動の実験でも下流端をせき上げ射流から常流へ遷移する流れを対象としたが、常流に対する拡幅部での流路の安定性<sup>4)</sup>や河幅変化部の埋め戻し現象<sup>5)</sup>などと同様の現象が観察された。

### 4. 2 急勾配水路の拡幅部における固定床の実験

#### 4. 2. 1 実験装置

実験装置は長さ12m、幅0.4m、深さ0.4mの勾配可変開水路である。水路上流端から4.6m

の位置より水路幅を狭くし、図-4.1に示すように水路中央部の幅を0.1mに縮小している。拡幅部には、図-4.2のような半径0.3mの円の1/6を左右両岸に挿入している。

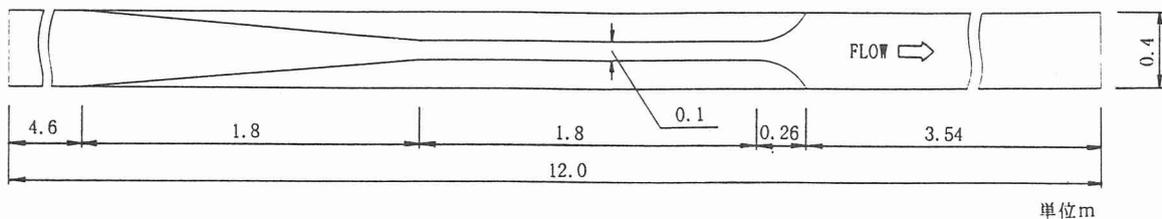


図-4.1 実験用水路

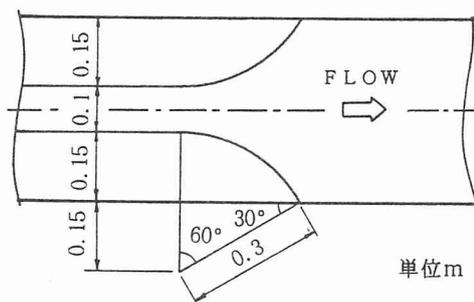


図-4.2 拡幅部の形状

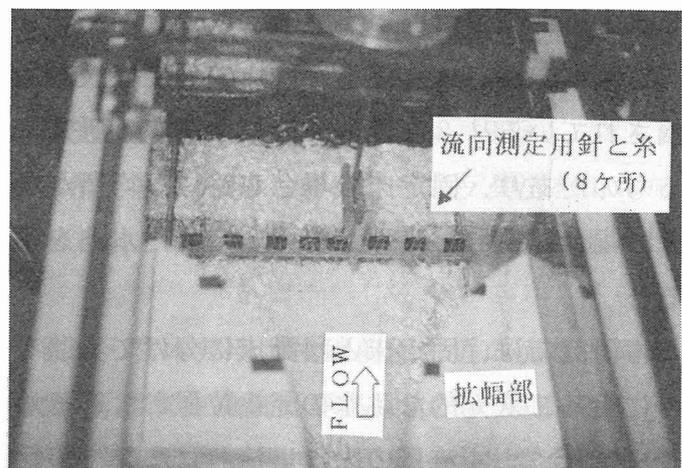


図-4.3 流向測定用の針と糸

水深の測定にはサーボ式水位計とポイントゲージを用いた。サーボ式水位計のセンサー部は、通常先端が針状になっていて針先が若干水中に入っている。水深がある程度確保できる場合は問題はなく計測できるが、水深が浅く流れが速いと針先が底面に接触して測定困難になる。そこで本実験では、先端をL字型に曲げセンサー部の導電率を増加させて、水深が数mmで流速が数10cmのものまで安定して測定できるようにした。流速は、プロペラの直径が5mmの超小型プロペラ流速計を用いた。流向は、図-4.3の写真のように針の先に糸を付けて流れに挿入して方向を読み取った。

流速計の使えない水深の浅い個所では、直径数mmの浮子を流下させてビデオ撮影し、コマ送りして流向と流速を計測した。

#### 4. 2. 2 実験方法

水路幅の縮小部から拡幅部を射流で通過する流れの状態を作り出し、拡幅部近傍における水深、流速、流向、跳水位置、跳水位置の安定性などの測定を行った。

固定床における実験条件は、表-4. 1に示すように河床勾配、流量、下流部でのせき上げ高さを種々変化させた。

表-4. 1 実験条件 (\*: 流向流速を4cm間隔で測定)

Exp. No.	河床勾配 $i_B$	流量 $Q(l/s)$	せき位置 $L_d(cm)$	せき高さ (cm)	下流端 平均水深(cm)	上流端 等流水深(cm)	上流端 $u_*$ (cm/s)
4A-1.1	1/50	3.9	40	2.3	5	3.7	6.4
4A-1.2	1/50	3.9	40	3.3	6	3.7	6.4
4A-1.3	1/50	3.9	40	4.3	7	3.7	6.4
4A-2.1	1/50	3.9	65	2.3	5	3.7	6.4
4A-2.2	1/50	3.9	65	3.3	6	3.7	6.4
4A-2.3	1/50	3.9	65	4.3	7	3.7	6.4
4A-3.1	1/50	3.9	70	2.3	5	3.7	6.4
4A-3.2	1/50	3.9	70	3.3	6	3.7	6.4
4A-3.3	1/50	3.9	70	4.3	7	3.7	6.4
* 4A-4	1/50	3.9	58	2.3	5	3.7	6.4
* 4A-5	1/50	3.9	せきなし		1.3	3.7	6.4
4B-1	1/50	6.0	40	3.3	6.2	5.0	7.0
4B-2	1/50	6.0	65	3.3	6.2	5.0	7.0
4B-3	1/50	6.0	70	3.3	6.2	5.0	7.0
4C-1	1/35	3.9	40	3.3	6	3.2	7.4
4C-2	1/35	3.9	65	3.3	6	3.2	7.4
4C-3	1/35	3.9	70	3.3	6	3.2	7.4
4D-1	1/80	3.9	40	3.3	6.3	5.3	4.3
4D-2	1/80	3.9	65	3.3	6.3	5.3	4.3
4D-3	1/80	3.9	せきなし		1.5	5.3	4.3

水深と河床の測定メッシュは、図-4.4に示すように縦断方向および横断方向に2.5cm間隔で設定し、拡幅部を含む約2.6m区間を測定対象とした。流向および流速の測定メッシュは、図-4.5に示すように縦横とも5cm間隔に設定した。

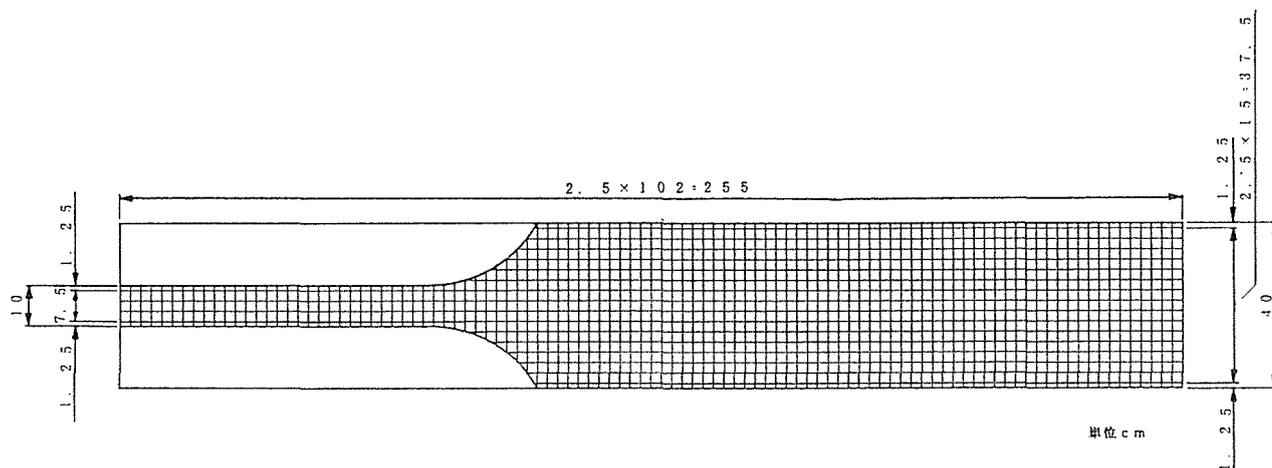


図-4.4 水深と河床の測定メッシュ

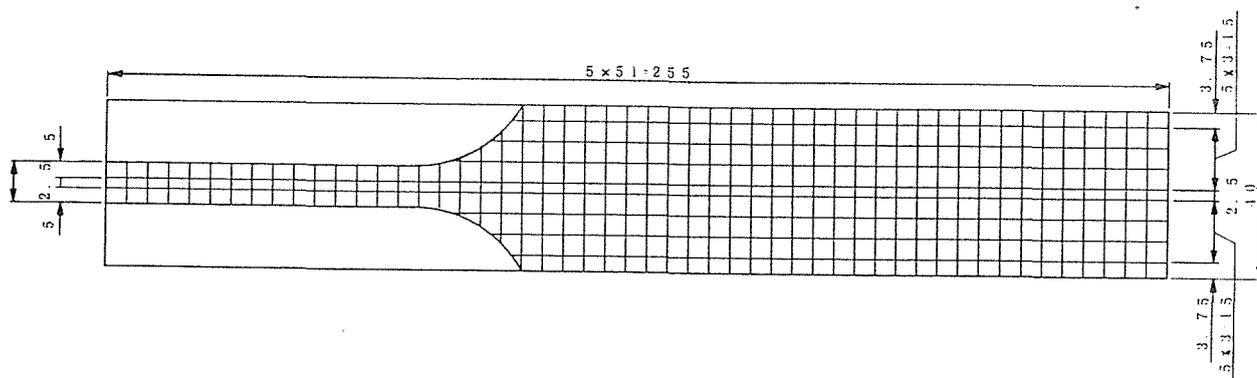


図-4.5 流向流速の測定メッシュ

#### 4.2.3 実験結果

##### (1) せき上げのない場合

せき上げのない流れでは、拡幅部でしだいに水深が浅くなり、流速が増加して流向は左右に拡がっているが、Exp. No. 4A-5 の流れでは拡幅部での剥離は顕著には見られない。予備実験で勾配を増してみても、勾配1/35の場合でも全断面で流れがあり剥離は明確に見られない。流速ベクトル図、水深コンター図と水面形を図-4.6~4.8に示す。

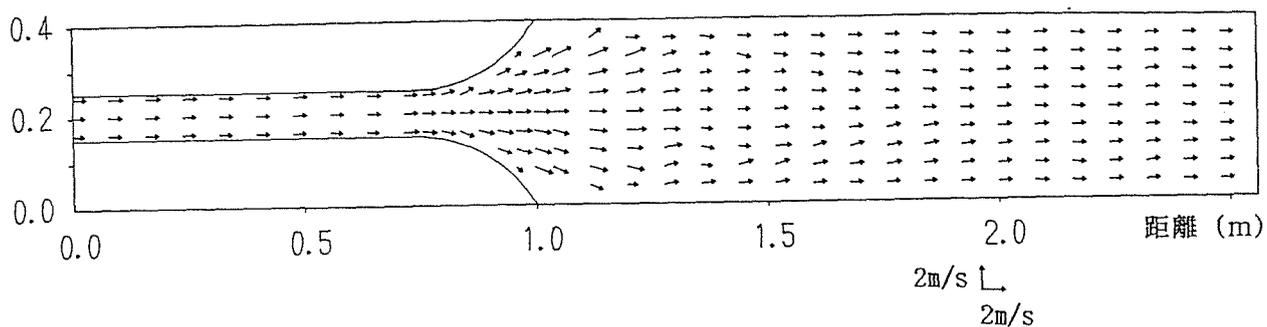


図-4. 6 せきのない流れ (Exp.No.4A-5) の流速ベクトル図

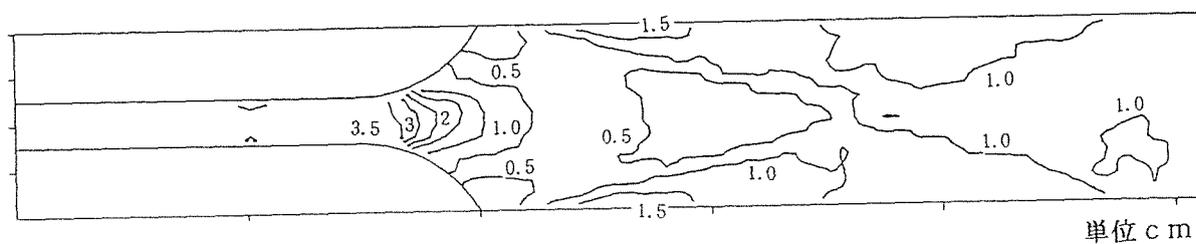


図-4. 7 せきのない流れ (Exp.No.4A-5) の水深コンター図

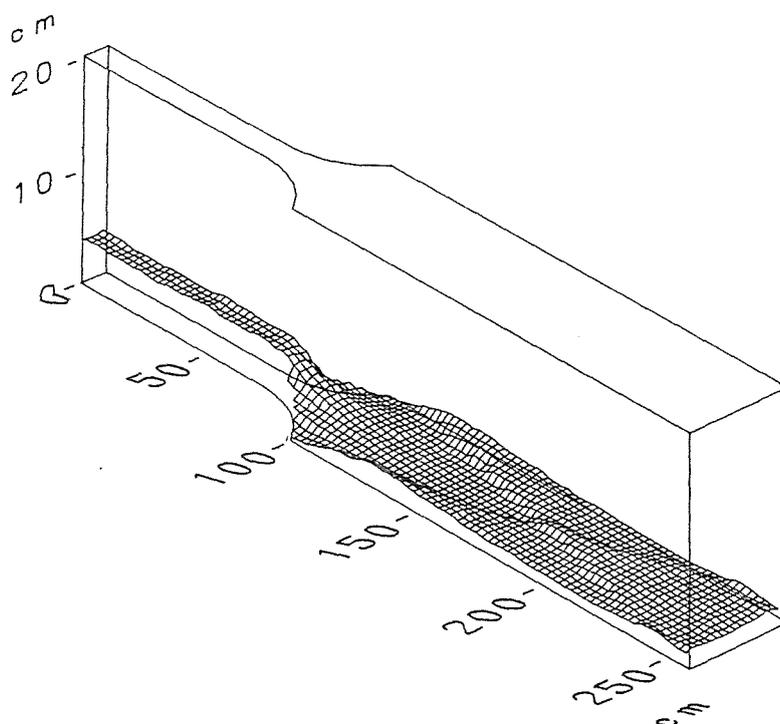


図-4. 8 せきのない流れ (Exp.No.4A-5) の水面形

水路中心線上のエネルギー線を等流水深に対するエネルギー線と比較してみると、図-4.9のように拡幅部を過ぎてもエネルギー線は比較的高い位置にあり、若干流下してから下流部のエネルギー線につながっている。この流れは、跳水を発生させていないので顕著なエネルギーの損失はないが、側壁近くでは一旦エネルギー線が低下し、流下に伴って回復している。図-4.6~4.8からも読み取れるが、水面には長さ約1mの菱形の波形が形成されている。また、この菱形の波形はさらに下流側にもほぼ同じ形で形成されている。

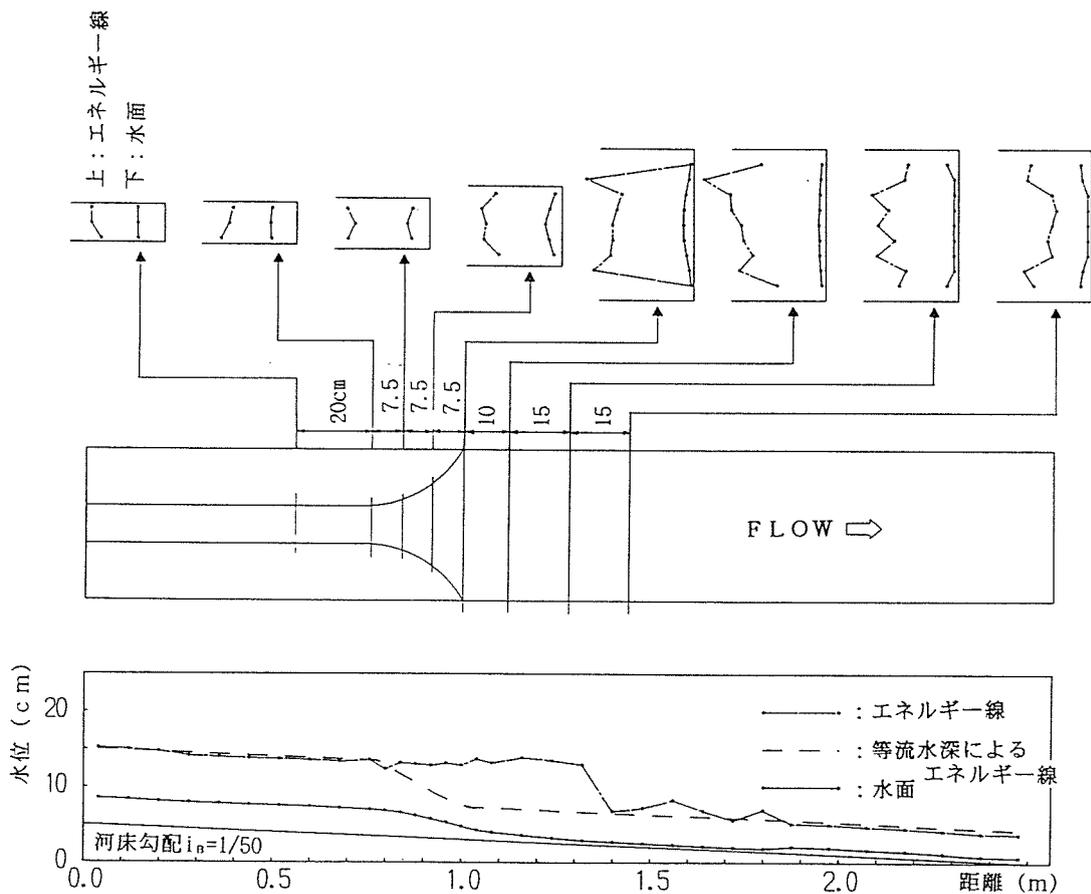


図-4.9 水路中心線上および各横断面上のエネルギー線  
(Exp. No. 4A-5)

(2) 拡幅部の近くでせき上げた場合 ( $L_d = 40 \text{ cm}$ )

拡幅部の近くでせき上げた場合、せき高さが低くても比較的安定した二次元的な跳水が見られる。せき高さが高いときは、拡幅部でもぐり流出の状態となり水面形はやはり安定している。Exp. No. 4C-1のせき高さ3.3cmの流速ベクトル図を図4-10に示す。また、同じせき上げ高さで勾配や流量を変化させた場合の水面形を図4-11~14に示す。

これらの図では、流れは安定して左右対称形をしており、いずれも側壁付近では逆流が見られる。拡幅部ではくさび型の跳水が発生するが、くさび型が下流方向へ延びるのは水路勾配や流量が大きい場合、せき上げ高さが低いかせき上げ位置を下流方向へ移した場合である。

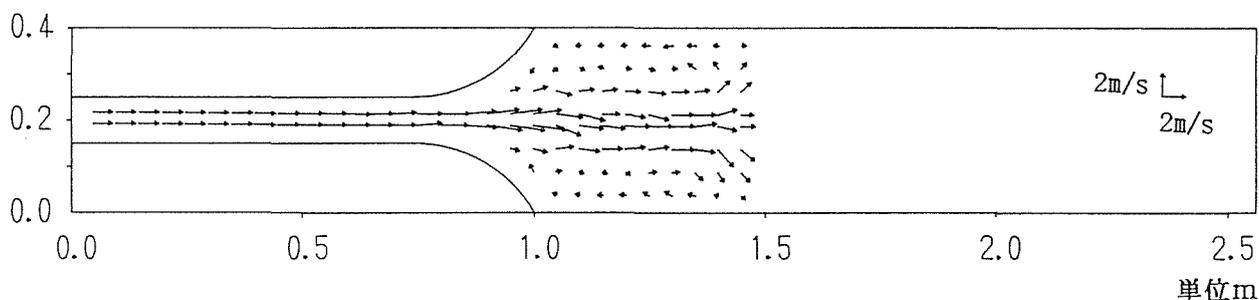


図-4. 10 流速ベクトル図 (Exp.No. 4C-1)

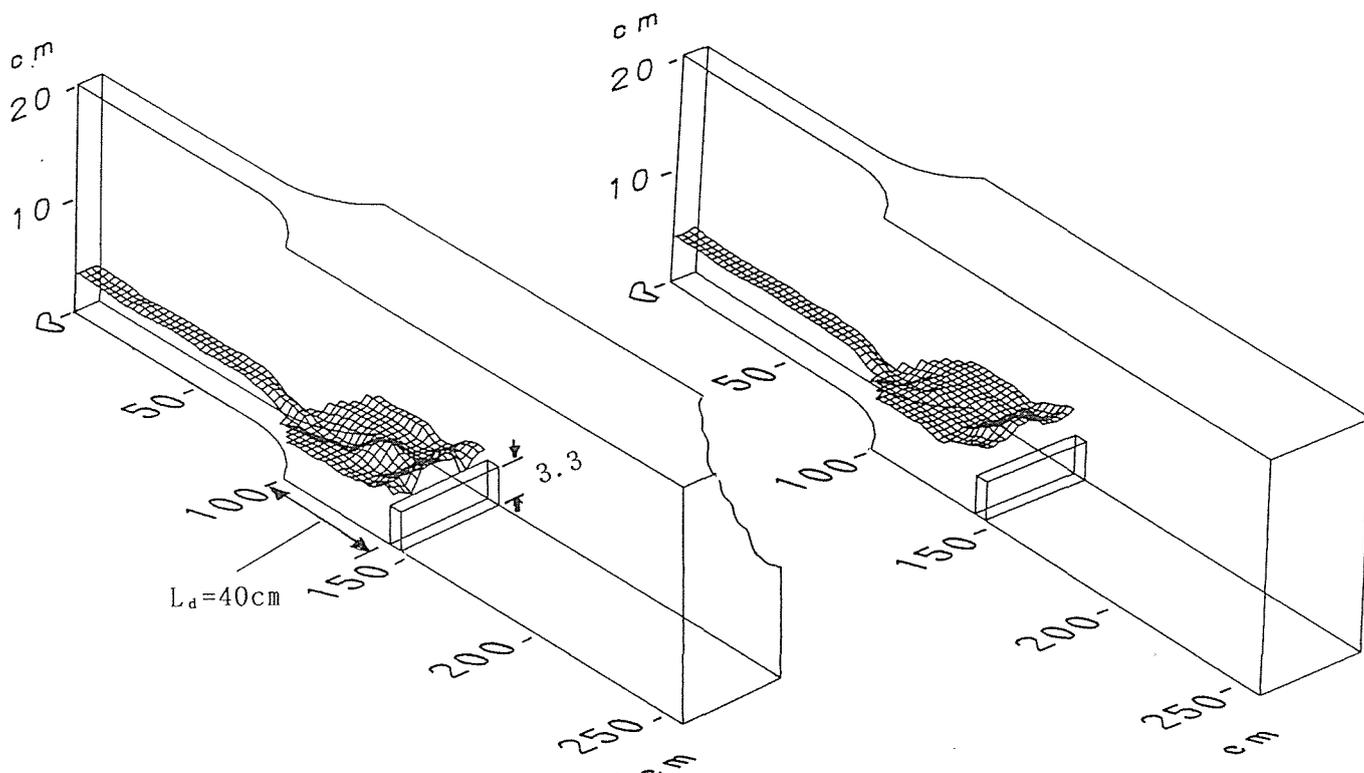


図-4. 11 水面形 (Exp.No. 4C-1)  
( $Q = 3.9 \text{ l/s}$  ,  $i_B = 1/35$ )

図-4. 12 水面形 (Exp.No. 4A-1.2)  
( $Q = 3.9 \text{ l/s}$  ,  $i_B = 1/50$ )

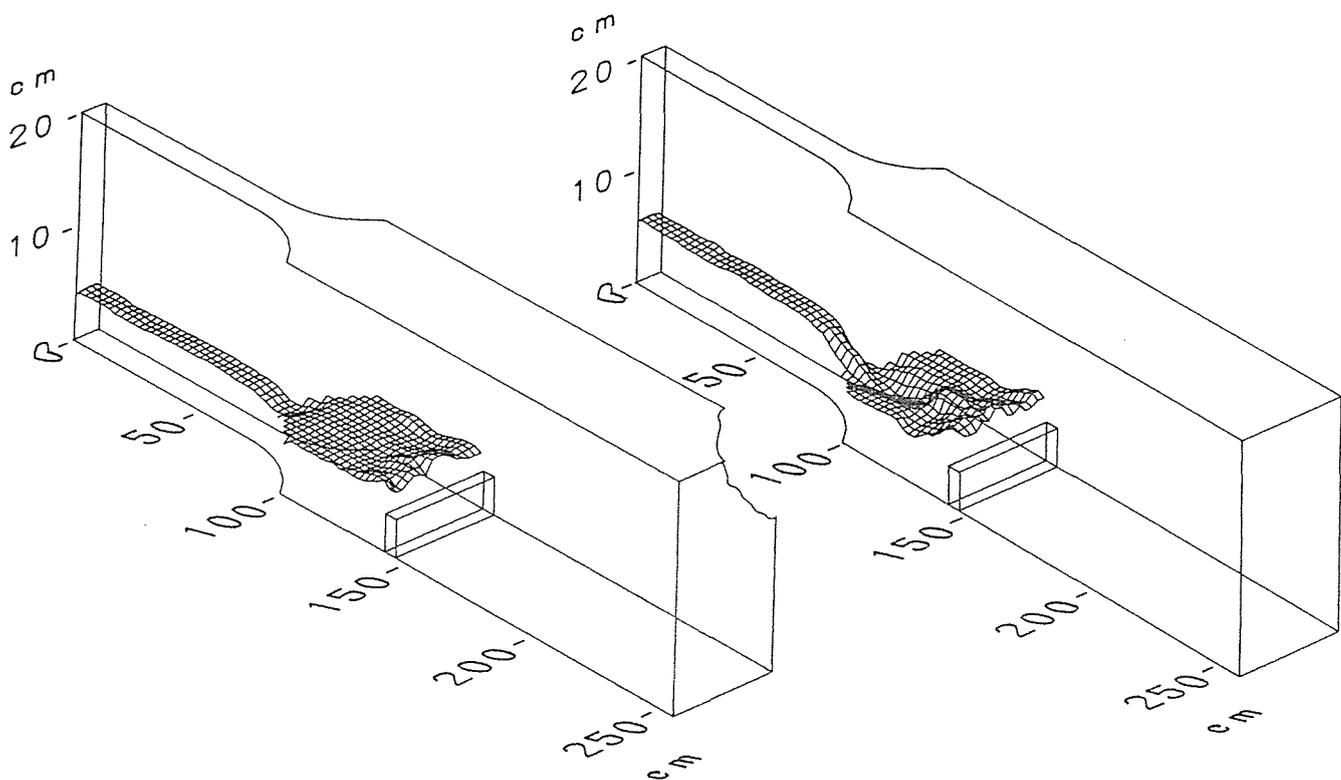


図-4. 13 水面形 (Exp. No. 4D-1)  
 ( $Q = 3.9 \text{ l/s}$  ,  $i_B = 1/80$ )

図-4. 14 水面形 (Exp. No. 4B-1)  
 ( $Q = 6.0 \text{ l/s}$  ,  $i_B = 1/50$ )

$Q=3.9 \text{ l/s}$  ,  $i_B=1/50$ の場合、せき位置を下げてても $L_d=58\text{cm}$ まで左右対称な水面形が形成される。この流れの流速ベクトル図、水深コンター図および等フルード数図を図-4. 15~17に示す。また水路中心線上および各断面のエネルギー線を見ると、図-4. 18のようである。この図より縦横ともに跳水の発生で大きなエネルギー損失が起こることが分かる。

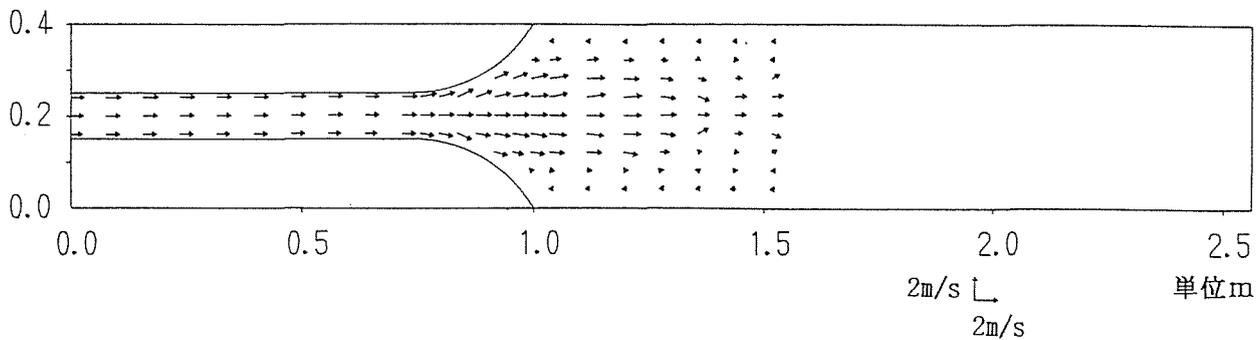


図-4. 15 流速ベクトル図 (Exp. No. 4A-4)

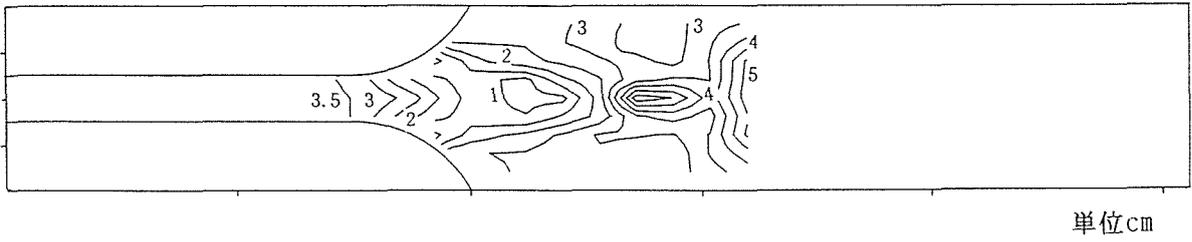


図-4. 16 水深コンター図 (Exp. No. 4A-4)

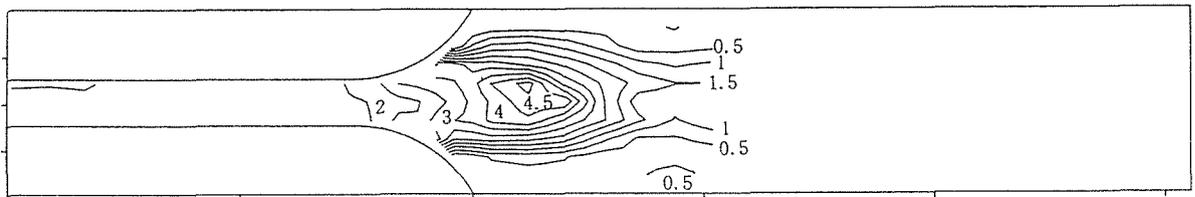


図-4. 17 等フルード数図 (Exp. No. 4A-4)

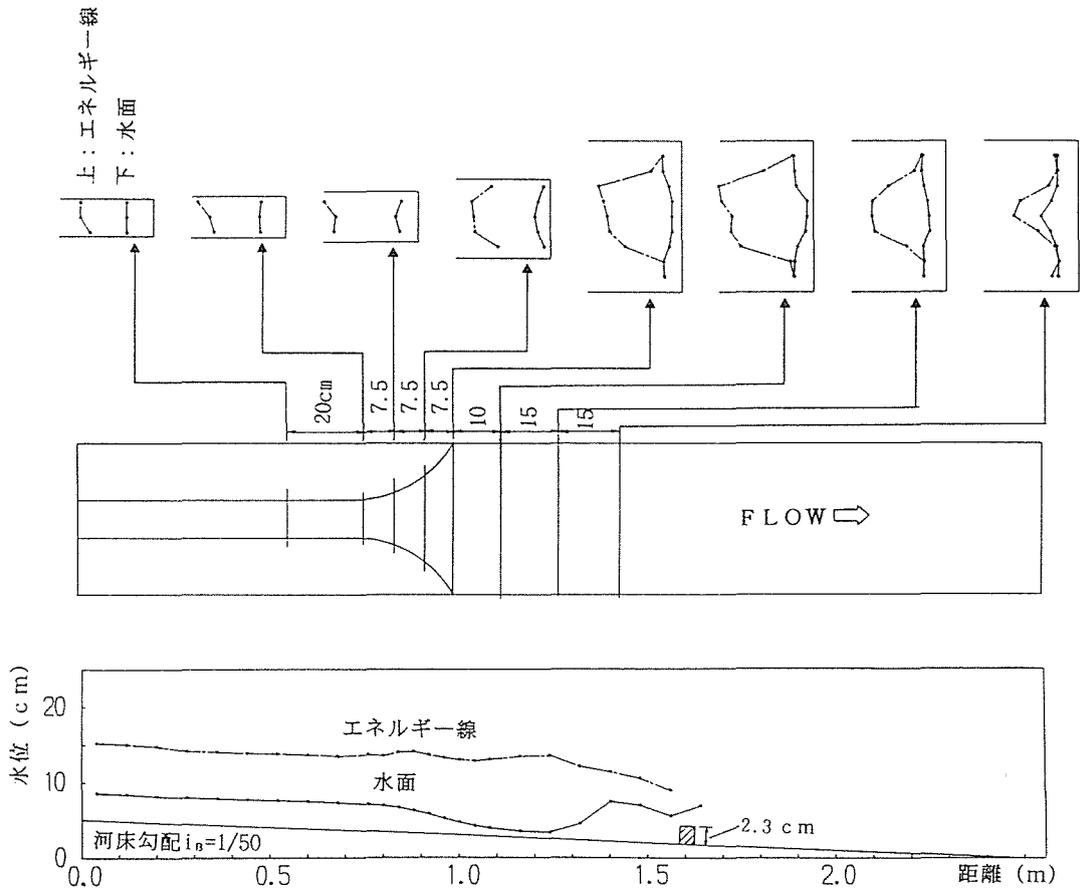


図-4. 18 エネルギー線図 (Exp. No. 4A-4)

(3) 拡幅部からせきを少し離れた場合 ( $L_a = 65\text{cm}$ )

この位置で2.3cmのせきを設置する(Exp.No.4A-2.1)と、水面形は4つの形態を示す。特に意識せず普通に水を流すと、流れは左右非対称となり第1、2の水面形ができる。このときの水深コンター図を、主流が右と左に向く場合に分けて、図4-19、20に示す。これは実験装置の不均衡によるものでなく、芦田ら<sup>6)</sup>によって常流について指摘されているような固定床特有の現象である。実際に板などを用いて主流方向を左または右に変えると、一応安定した形で主流が左または右に向いた形となり左右非対称な跳水が発生する。拡幅部の非対称性についての研究では、芦田らの他にRajahman<sup>7)</sup>、大津ら<sup>8)~10)</sup>の報告があり、跳水位置などの安定性について検討されている。これについては次節で述べることにする。

つぎに第3の水面の形態は、板などを用いて主流を慎重に中心に向けると左右対称な水面形ができる。跳水はくさび型に発生し両側壁に近いところでは逆流がみられる。しかし、この形態は長く続かず主流が左右どちらかに片寄った流れに移行する。きわめて不安定な状態で、水面形などの測定は困難であり、図-4.21に水面形の写真で示す。

さらに、第4の水面の形態は、横断方向に変化のない一次元的な跳水が起こる形である。実際にこの形態の水面形を作り出すには、始めに相当下流でせき上げて一次元的な跳水を発生させ、慎重にせきを上流へ移動させる。あるいは始めに相当低いせきで一次元的な跳水を発生させ、慎重にせき高を上げるなどの方法をとる必要がある。このときの水深コンター図を、図4-22に示す。

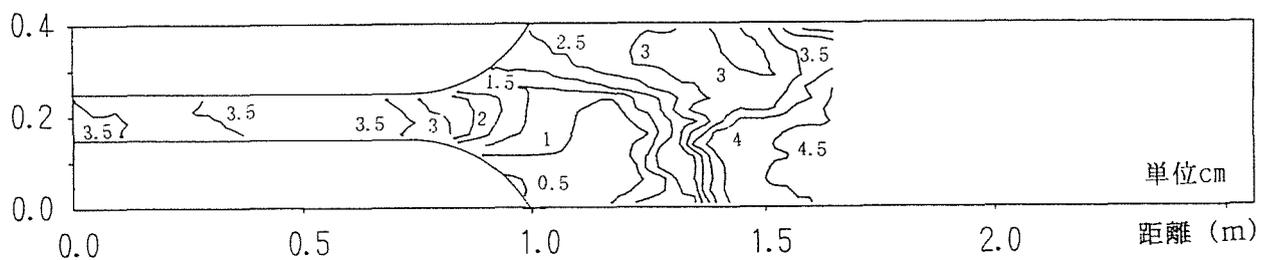
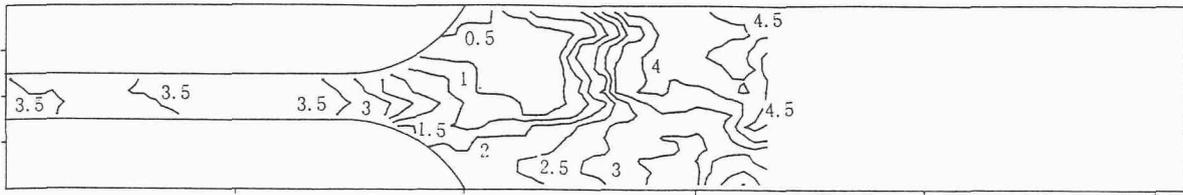


図-4.19 水深コンター図 (Exp.No.4A-2.1:主流右方向)



単位cm

図-4. 20 水深コンター図 (Exp. No. 4A-2.1 : 主流左方向)

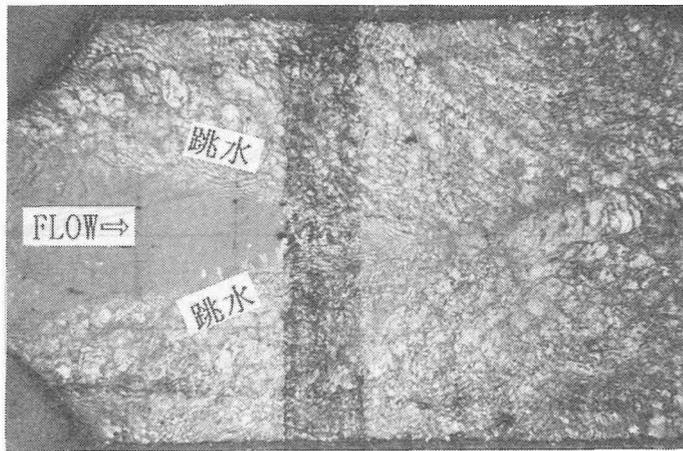
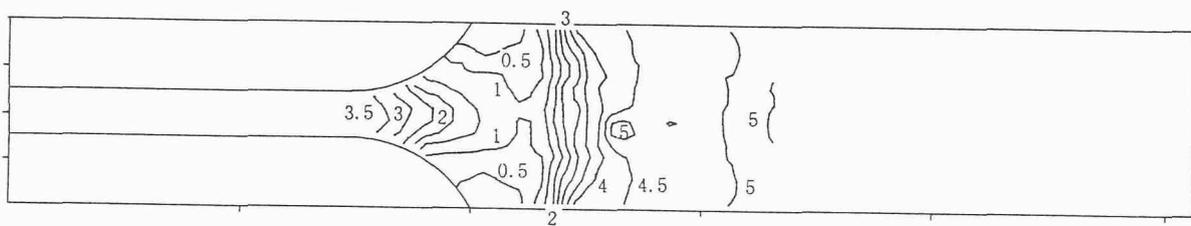


図-4. 21 水面形の写真 (Exp. No. 4A-2.1 : 主流左右対称)



単位cm

図-4. 22 水深コンター図 (Exp. No. 4A-2.1 : 一次元的な跳水)

(4) 拡幅部からせきを離した場合 ( $L_d = 70\text{cm}$ )

せき上げ高さが低いとき拡幅部からせきを離して設置すると、跳水位置が下流へ移り一次元的な跳水が発生する。しかし、せき上げ高さが高いときは、主流が左右に振れる跳水となる。図-4. 23に $Q=3.9 \text{ l/s}$ ,  $i_B=1/50$ の主流が右に向いた場合の水面形を示す。図-4. 24に流量を1.5倍として $Q=6 \text{ l/s}$ ,  $i_B=1/50$ の主流が右に向いた場合の水面形を示す。

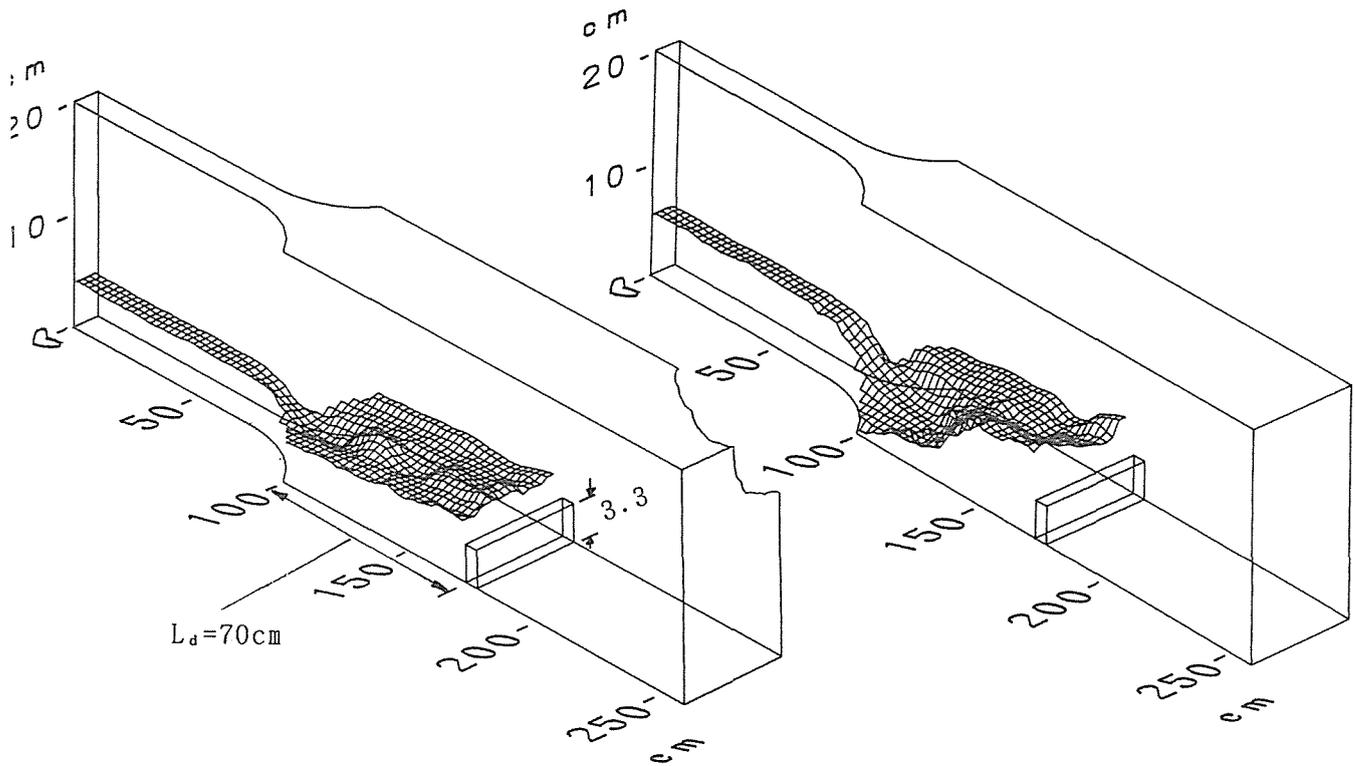


図-4. 23 水面形 (主流右方向)  
(Exp. No. 4A-3.2)

図-4. 24 水面形 (主流右方向)  
(Exp. No. 4B-3)

#### 4. 2. 4 急勾配拡幅部における流れの平面二次元特性

急勾配急拡部の流れにおいては、一般に剥離が生じるが、Chowは急勾配の急拡部で流れのほぼ 90 % を包含する流線を次式で表している<sup>11)</sup>。

$$\frac{y_w}{B_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{B_1 Fr_1} \right)^{3/2} + \frac{1}{2} \quad (4. 1)$$

ここに、 $x$  は出口断面 (縮小部) からの縦断距離、 $y_w$  は  $x$  における水路中心から側壁までの距離、 $B_1$  は出口断面の水路幅、 $Fr_1$  は接近流のフルード数である。

山田らは、急勾配急拡部の流れが平面的に拡がる最大の角度として次式を理論的に求めている<sup>12)</sup>。

$$\psi_{max} = \sqrt{3} \left\{ \frac{\pi}{2} - \sqrt{1/3} \cos^{-1} \left( \frac{1}{Fr_1} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 + Fr_1^2}} \right) \right\} \quad (4. 2)$$

ここに、 $\psi_{max}$  は平面的に拡がることのできる横断方向からの最大の角度 (°) である。

実験を行った水理条件を式(4.1)、(4.2)に代入し、実験水路の拡幅部とともに示すと図-4.25のようになる。

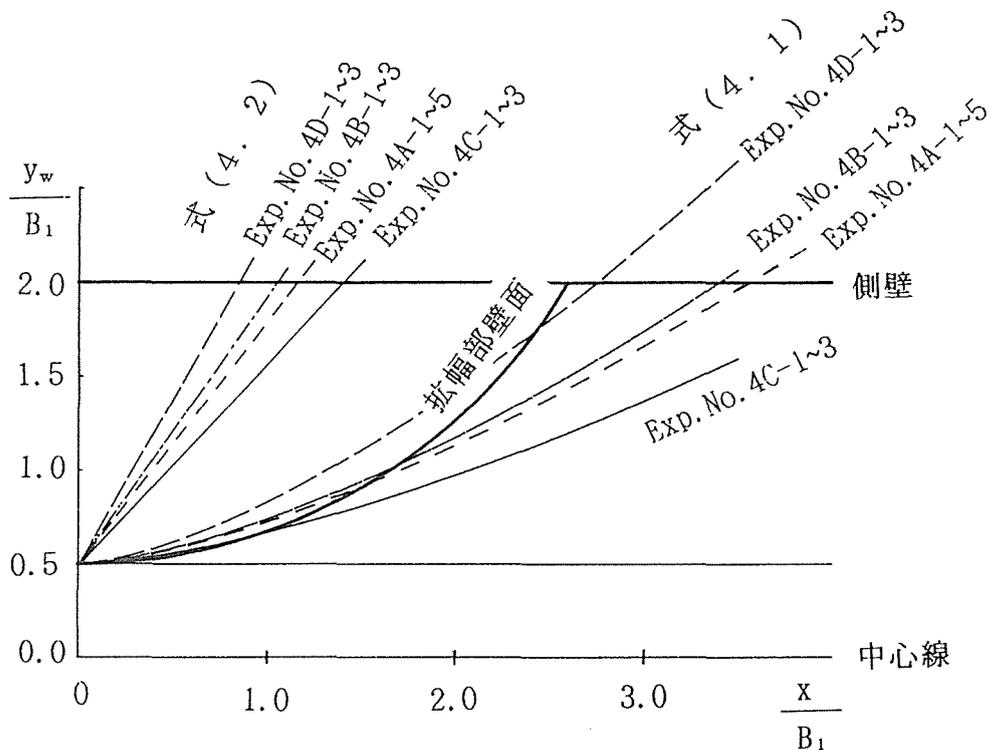


図-4.25 実験水路の拡大部と90%を包含する境界の流線  
および流れの最大拡幅域

実験に用いた拡幅部は、式(4.2)より内側にあり全断面に流水は拡がって流れることができる。剥離については、例えば $Q=3.9$  l/s、 $i_B=1/50$ の場合、式(4.1)による境界の流線は $x=16$ cm、 $y_w=10.3$ cmのところで拡幅部側壁と交わる。すなわち、この交点より下流では剥離が生じ易いことになる。しかし、実験を行った範囲ではこの付近の流速が遅く、剥離を確かめることはできなかった。

急勾配水路の拡幅部を通過しせき上げられた場合の流況は、大別してつぎの3つに分けることができる。

- ①せき上げが高いもぐり流況
- ②せき上げがあまり高くなく二次元的な跳水が発生する流況
- ③せき上げが低く跳水が起こらないか一次元的な跳水が発生する流況

さらに、形成される水面形を見ると、もぐり流況でもせき上げが若干低いと主流方向が左右に振れ左右非対称になるものがある。二次元的な跳水でも左右対称なもの、非対称なものがある。したがって、形成される水面形は表-4.2のように6つに分けることができる。

表-4. 2 形成される水面形の形態

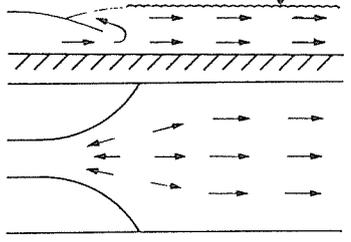
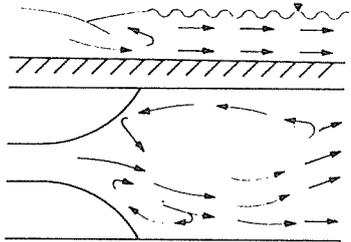
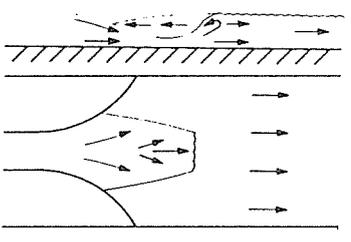
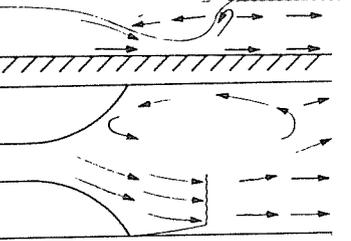
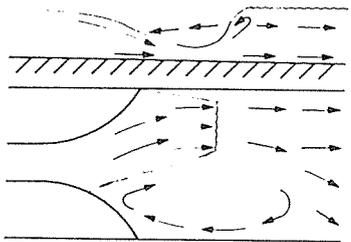
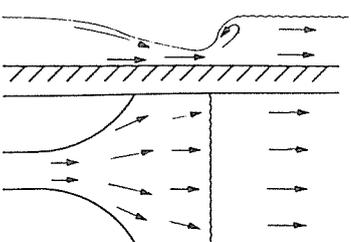
流況	水面形の形態および流向	形成される水面形の概形
① もぐり	左右対称な安定したもぐり流出 (1 Sとする)	
	左右非対称な交互偏向流 (1 Tとする)	
② 二次元的な跳水	左右対称な跳水 (2 Sとする)	
	主流が右向きに非対称な跳水 (2 Rとする)	
	主流が左向きに非対称な跳水 (2 Lとする)	
③ 一次元的な跳水	左右対称で直線状の跳水 (3 Sとする)	

表-4.3 実験を行った流れの水面形の形態

Exp. No.	せき高さ	形成される水面形の形態
4A-1.1	2.3 cm	2S**
4A-1.2	3.3	1S*
4A-1.3	4.3	1S*
4A-2.1	2.3	2S 2R** 2L* 3S*
4A-2.2	3.3	2R* 2L
4A-2.3	4.3	2R* 2L
4A-3.1	2.3	2R* 2L
4A-3.2	3.3	1T*
4A-3.3	4.3	1T*
4A-4	2.3	2S**
4A-5	0	3S*
4B-1	3.3	2S*
4B-2	3.3	2R* 2L*
4B-3	3.3	2R* 2L
4C-1	3.3	2S*
4C-2	3.3	2R* 2L*
4C-3	3.3	2R* 2L*
4D-1	3.3	1S*
4D-2	3.3	1T*
4D-3	0	3S**

\* : 水面形のみ計測

\*\* : 水面形および流向流速計測

放水路やダムのアウトレットなどからの流出について、Rajaratnamら<sup>13)</sup>は急拡部で露出射流のできる場合と跳水始端が出口に接してもぐり流出になる場合の水深の関係を、それぞれ式(4.3)、(4.4)で示している。また、石川ら<sup>14)</sup>は露出射流のできる跳水で左右非対称になることや、もぐり流出との間の遷移点で交互偏向流況が生じることを指摘している。

$$h_2/h_1 = (0.3325 + 0.075B_1/B) \{ \sqrt{(B_1/B)^2 + 8(B_1/B)Fr_1^2} - B_1/B \} \quad (4.3)$$

$$h_2/h_1 = 0.318(\sqrt{1+10.8Fr_1^2} - 1) \quad (4.4)$$

ここに、 $h_1, B_1$ は断面縮小部からの出口での水深と水路幅、 $h_2, B$ は下流側での水深と水路幅を表している。上式は急拡部に対するもので、実験を行った拡幅部とは若干条件が異なるが、実験値と比較してみると図-4.26のようである。

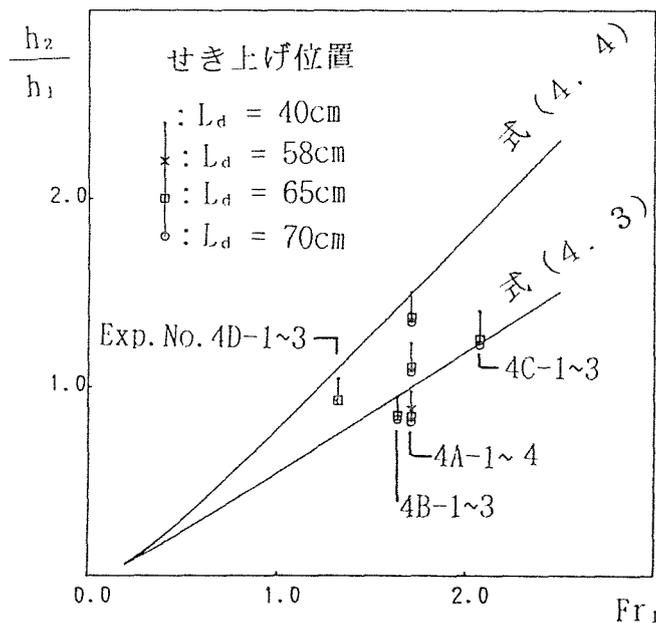


図-4.26 拡幅部での水面形

実験を行った範囲を見ると、せき上げ高さを変化させたExp.No.4A-1~4は、せきの高さによってもぐり流出になるものから露出射流ができて左右非対称になるものまでである。流量の多いExp.No.4B-1~3は露出射流ができて左右非対称な水面形ができる。勾配を変化させたExp.No.4C-1~3とExp.No.4D-1~3は、せき上げ高さとの関係でもぐり流出と露出射流のできるものとの間にある。これらは実験結果を水面形の形態で分けた表-4.2とほぼ合致している。ただし、せき上げ位置が近いと左右非対称や交互偏向流になるべきものが左右対称のまませきを通過する水面形になるものと思われる。

### 4. 3 急勾配水路の拡幅部における移動床の実験

移動床の実験については、流量が少なく急拡部より下流では水深が非常に浅くなり流路が蛇行を始めるものと、流量が大きく拡幅部近傍で洗掘と堆積が起こるものに分けて実験を行った。拡幅部で洗掘と堆積が起こるものについては、ある程度時間が経過して河床形が安定したものを対象とした。

#### 4. 3. 1 実験装置

実験装置は、固定床の実験に用いたものと同じ長さ12m、幅0.4m、深さ0.4mの勾配可変開水路である。砂は、前章の一次元解析に用いたものと同じ中央粒径1mmの一樣砂である。ただし、拡幅部を有しない水みちの実験<sup>15)</sup>では、中央粒径0.6mmの一樣砂を用いている。計測に用いた機器は、前章あるいは前節に述べたものと同様のものである。

#### 4. 3. 2 実験方法

まず、拡幅部より下流で流路の蛇行する小流量のものについて、流路の時間変化を調べた。さらに流路部分の水みちの生成・発達過程について、拡幅部を設けず長時間詳しく調べた<sup>15)</sup>。

つぎに、流量が大きく拡幅部近傍で洗掘堆積が起こる場合について、固定床における実験条件と対応させて、下流側にせきのないものとあるものについて実験を行った。これらの実験条件を表-4.4に示す。

水深の測定メッシュは、固定床と同様に、流れ方向および流れと直角方向に2.5cm間隔で設定し、拡幅部を含む約2.6m区間を測定対象とした。また、流向および流速の測定メッシュは、縦横とも4cm間隔に設定した。

水位および河床高は、台車に設置したサーボ式水位計および砂面測定器とポテンシオメーターをAD変換器を通してパソコンに接続し、連続計測した。水深が浅くサーボ式水位計で測定が困難な個所についてはポイントゲージを用いて測定した。拡幅部近傍では、流水を停止すると埋め戻しが起こるので、可能なかぎり通水中に河床と水面の測定を実施した。ただし、側壁近くで通水中と止水後とで変化のないことが確認されたものについては止水後の測定とした。流向と流速については、浮子をトレーサーとしてビデオ撮影し、表面流向、流速を測定した。

表-4.4 実験条件

Exp. No.	河床勾配	流量 (l/s)	測定区間 (m)	初期水深(cm)		給砂量 (cm <sup>3</sup> /s)
				上流端	上流端	
4E-0	1/50	0.4	2.54	0.9	0.4	0
4E-1	1/40	0.4	7.0	0.4	0.4	1.38
4E-2	1/40	0.4	7.0	0.5	0.5	0
			せき位置	下流端せき高さ		
4F-1	1/50	3.9	40(cm)	2.3(cm)		48.4
4F-2	1/50	3.9	65	2.3		48.4
4F-3	1/50	3.9	65	3.3		48.4
4F-4	1/50	3.9	154	2.3		18.6

#### 4.3.3 実験結果

まず、流量の少ないExp. No. 4E-0についてみると、通水初期には拡幅部を通過する流れは水路中心部から均等に流下するが、数分後からうろこ状砂州ができはじめ徐々に蛇行が始まる。15分経過後には数ヶ所で浮き州がみられ流れは蛇行し水みちが形成される。

拡幅部を設けていない蛇行による水みちの実験では、浮き州と水みちの形成消滅が繰り返される。図-4.27は、通水開始後15分および360分におけるExp. No. 4E-1, 2の洗掘深コンターと流況を表したもので、洗掘深は5段階に分けて表示している。平衡流砂量を与えたExp. No. 4E-1では、通水初期には流水は河床全体を覆い、うろこ状砂州が形成され流水がその影響で蛇行している。やがて、局所的な河床洗掘によって流水の集中が起こり、部分的に浮き州が生じ、浅い水みちが形成されている。一方、給砂のないExp. No. 4E-2では、横侵食を伴った上流側の局所的な河床低下により深い水みちが形成されている。水みちの不安定性を検討するため、水みちの位置の時間的変化をみてる。図-4.28は上流から4m地点における水みちの横断方向の位置の時間変化をExp. No. 4E-1, 2に対して示したものである。Exp. No. 4E-1では水みちが2つ形成されており、その位置が水路半幅程度の範囲で変動するのに対し、Exp. No. 4E-2では初め水みちが2つ生じていたが150分後には一つになり、また水みちの変動する範囲もExp. No. 4E-1に比べると小さいことが分かる。

このことから動的平衡河床状態では水みちが横断方向に移動し不安定であるのに対し、給砂がなく河床低下するときは水みちが安定化して行くことが分かる<sup>15)</sup>。

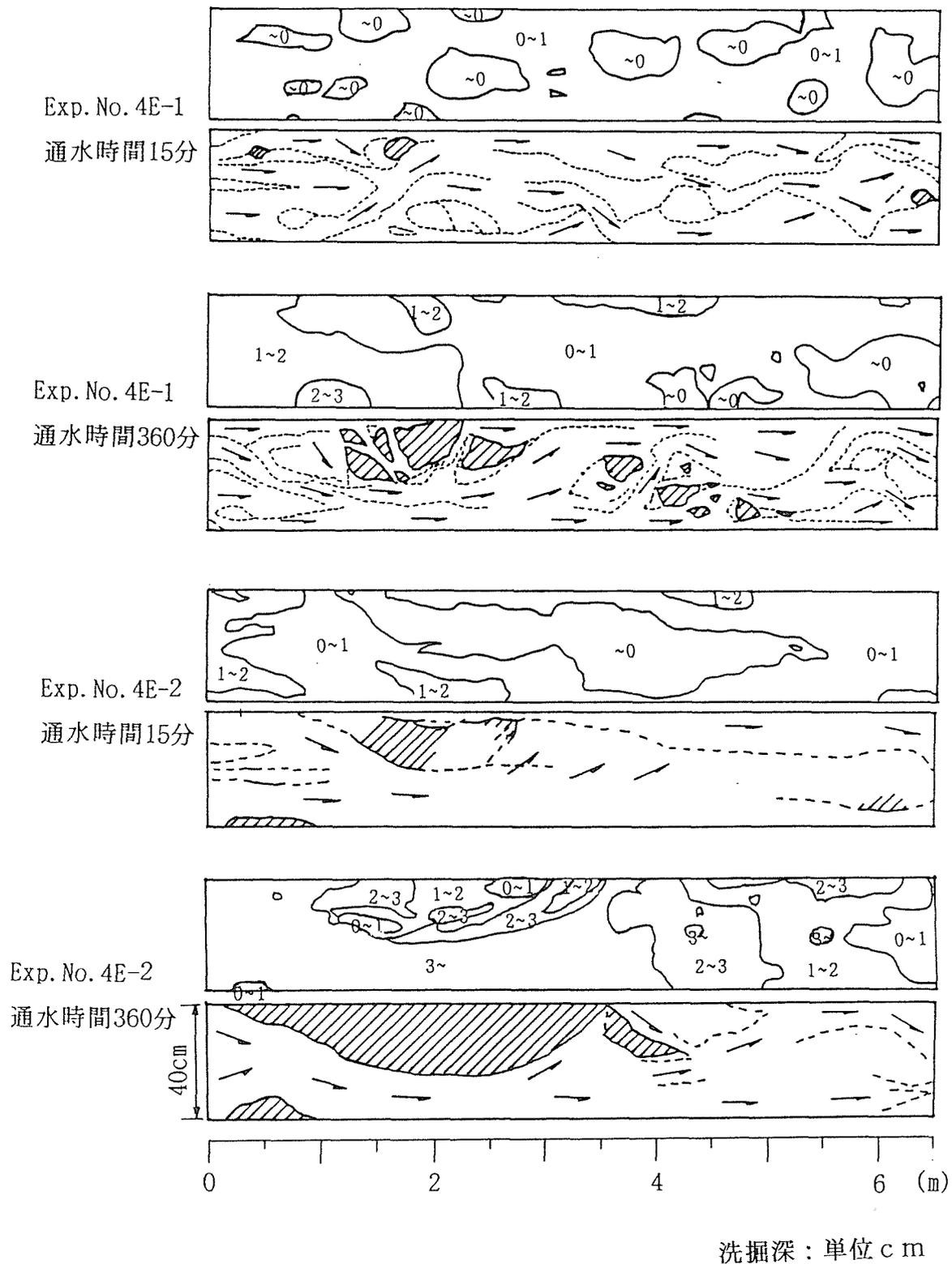


図-4. 27 洗掘深コンターと流況 (Exp. No. 4E-1, 2)

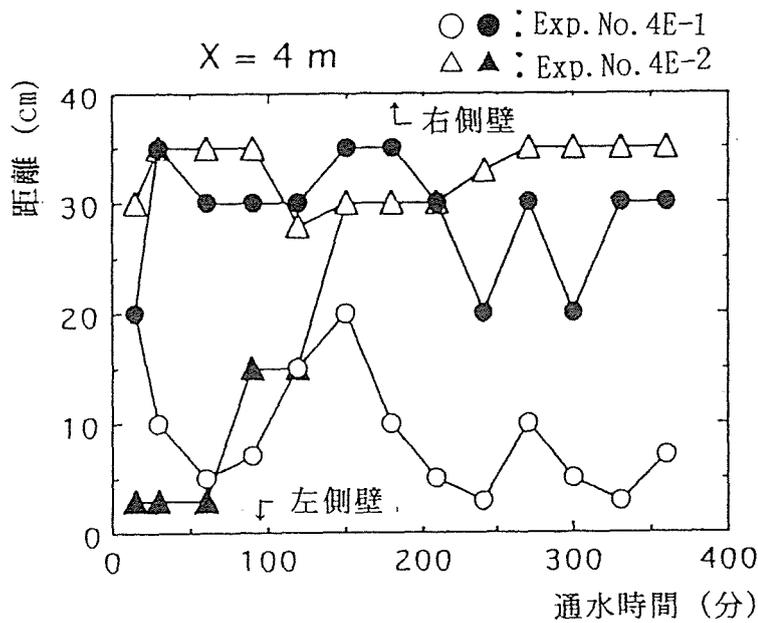


図-4. 28 水みちの位置の時間的变化

つぎに流量が多く拡幅部近傍で洗掘と推積が生じる場合、最大洗掘深の時間変化を表すとExp. No. 4F-4に対して図-4. 29 のようである。図を見ても分かるように、3分以降の比較的短い時間で水面形と河床形は安定する。Exp. No. 4F-1~3についてもほぼ同様な時間で河床形の変化は少なくなるので、洗掘深などをこの間で測定した。測定結果を図-4. 30~32に水位コンター、流速ベクトルおよび河床洗掘深コンター図で示す。図を見ると主に流れは水路中央部を流下するが、水路中央部の河床が洗掘され水面形の変化はほとんどないことが分かる。

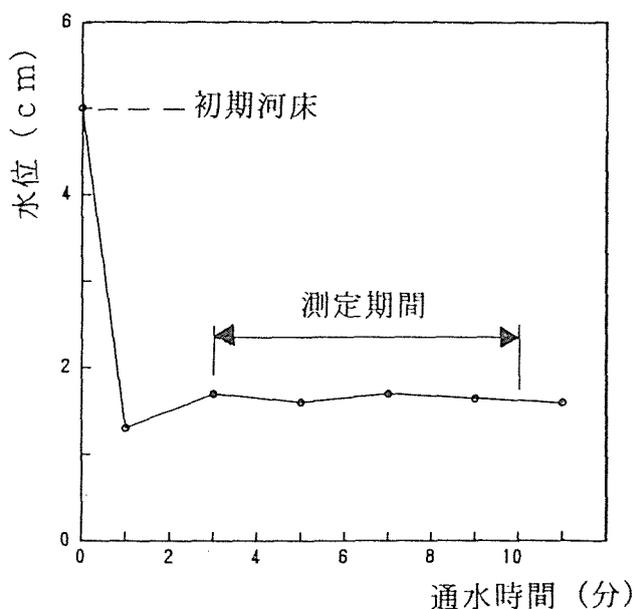


図-4. 29 最大洗掘深の時間変化

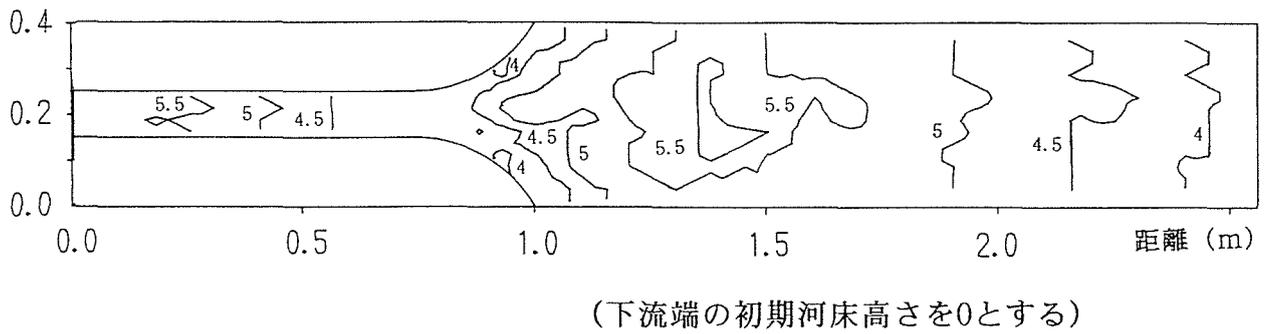


図-4.30 水位コンター図 (Exp. No. 4F-4)

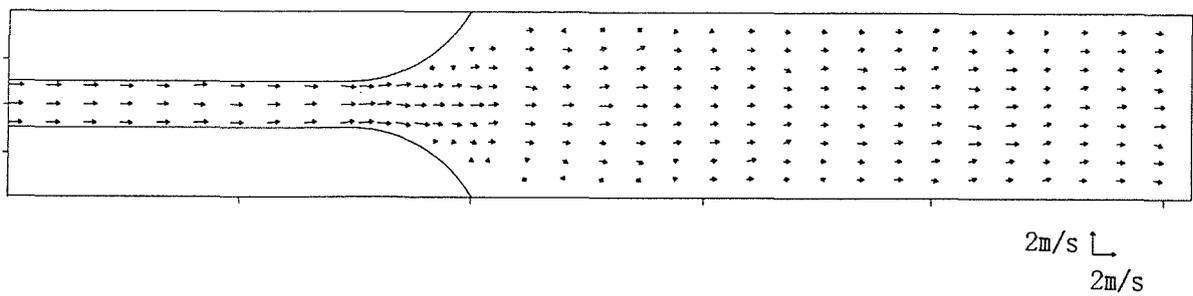


図-4.31 流速ベクトル図 (Exp. No. 4F-4)

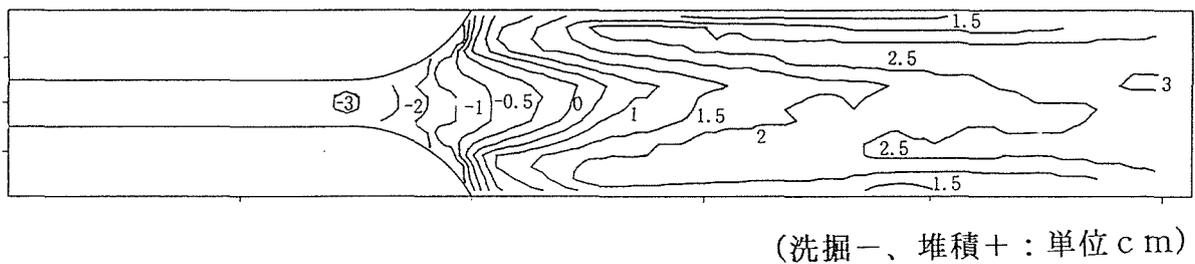


図-4.32 河床洗掘深コンター図 (Exp. No. 4F-4)

この流れのエネルギー線を求め図示すると、図-4.33のようである。拡幅部での損失は固定床に比べ相当小さくなっている。

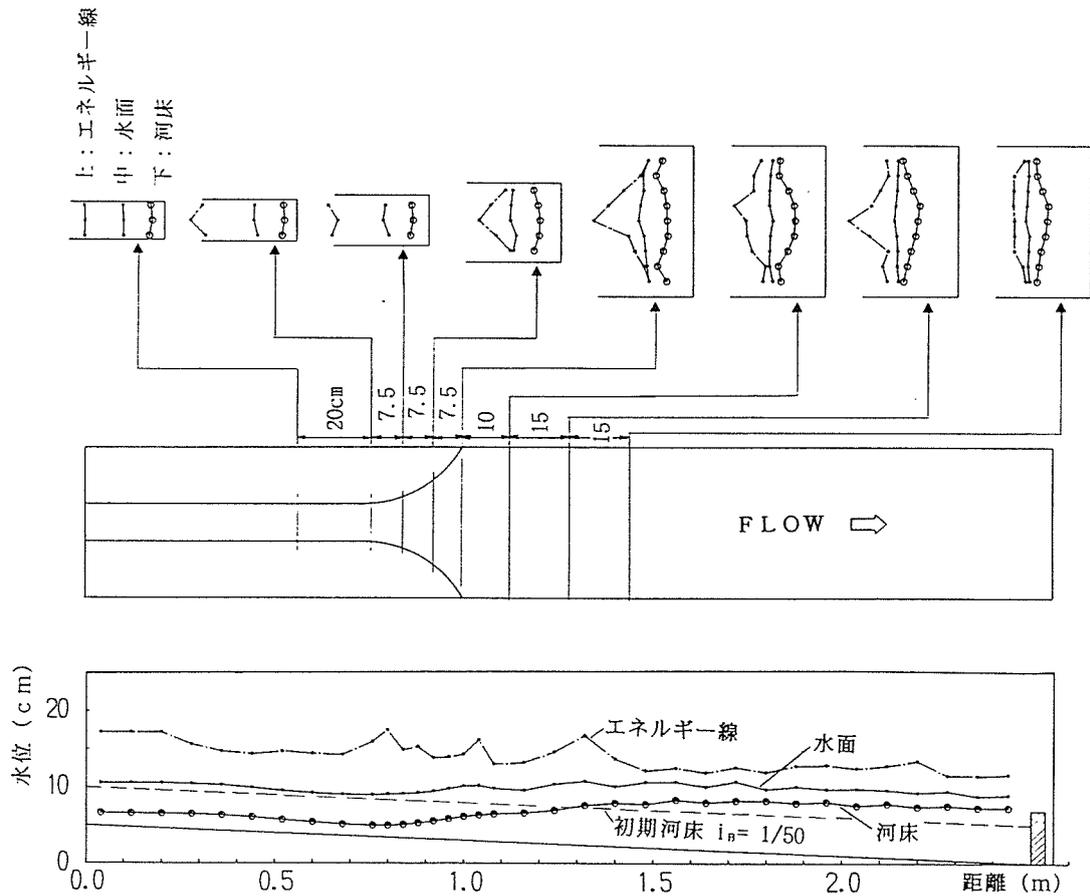


図-4. 3 3 移動床の拡幅部でのエネルギー線

固定床では水面形が種々変化する流れに対応する移動床実験 Exp. No. 4F-2の実験結果を図-4. 3 4 に示す。図のように河床の洗掘深は、ほぼ左右対称に形成される。したがって、この移動床の流れでは固定床と異なり左右非対称な水面形は形成されない。

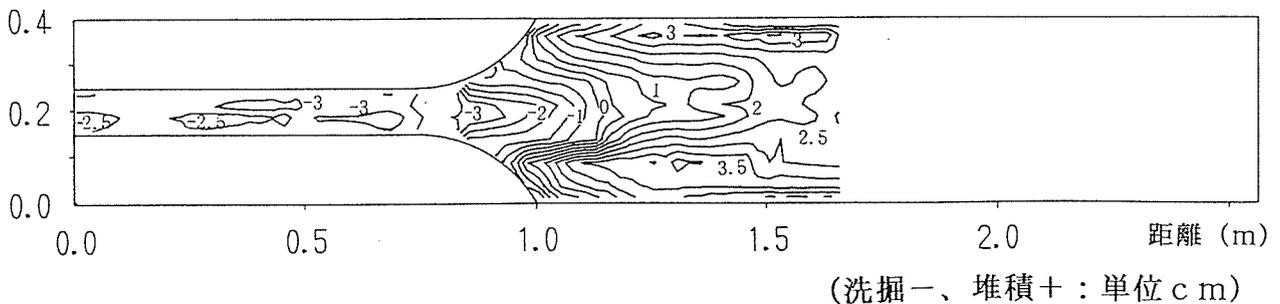


図-4. 3 4 河床洗掘深コンター図 (Exp. No. 4F-2)

#### 4. 3. 4 急勾配水路の拡幅部における河床変動の平面二次元特性

固定床では跳水位置を含む水面形が種々変化するものが見られた。しかし、移動床ではほとんど安定した河床が形成され主流が左右に振れる現象は見られない。これは固定床において跳水の微妙なバランスで水面形が形成されるのに対し、移動床では射流から常流への遷移点で跳水が起こらず河床そのものがエネルギー損失を最小にするように変形されるためと思われる。芦田<sup>16)</sup>が指摘するように自然の流れでは、流れによって河床が形成され河床の影響を受けて流れが作られる。実験対象とした水路では拡幅部と下流端のせき上げ条件によって水路中央部で速い流れが起こり、洗掘が進行すると同時に両側に砂を堆積させて最も流れ易い形に、あたかも堤防を築いたような河床面が形成される。実験で取り扱った拡幅部の流れでは、下流の近い位置にせきがあり、両側にも狭い位置で対称形に滑らかな壁面があるので、比較的単純な河床形が安定した形で形成されるものと思われる。

Chowによって、水路拡大部における曲率を反転させて擾乱を消滅させる水路形状が図-4. 35のように示されている<sup>17)</sup>。この曲線を実験結果の流速ベクトル図に重ねると図-4. 36のようになる。図をみると、移動床で形成される流れはほぼこの曲線内に収まっており、砂が自然に安定した流路形状を作り出していることが分かる。

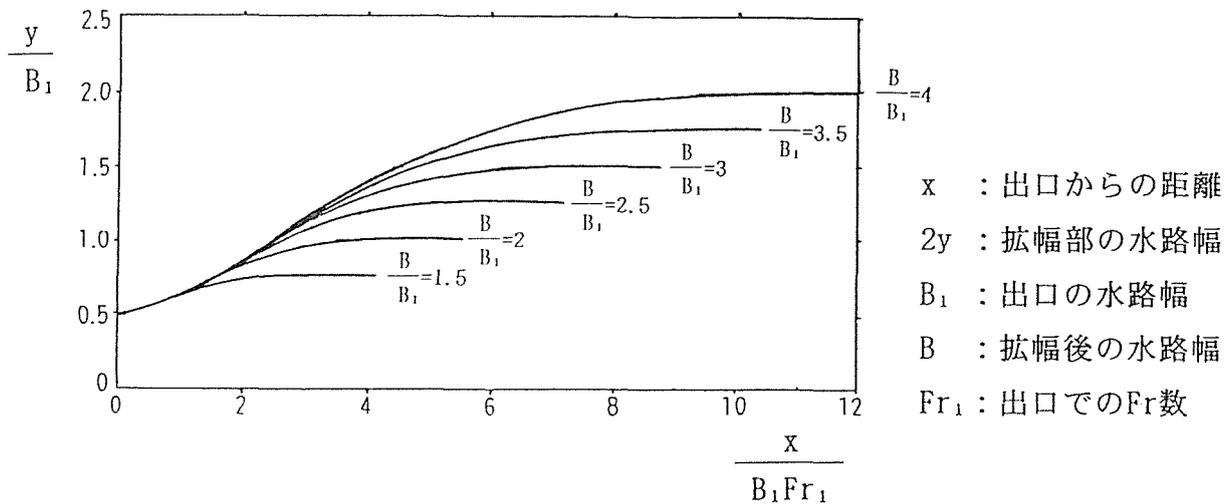


図-4. 35 擾乱を消滅させる水路拡大部形状 (Chowによる)

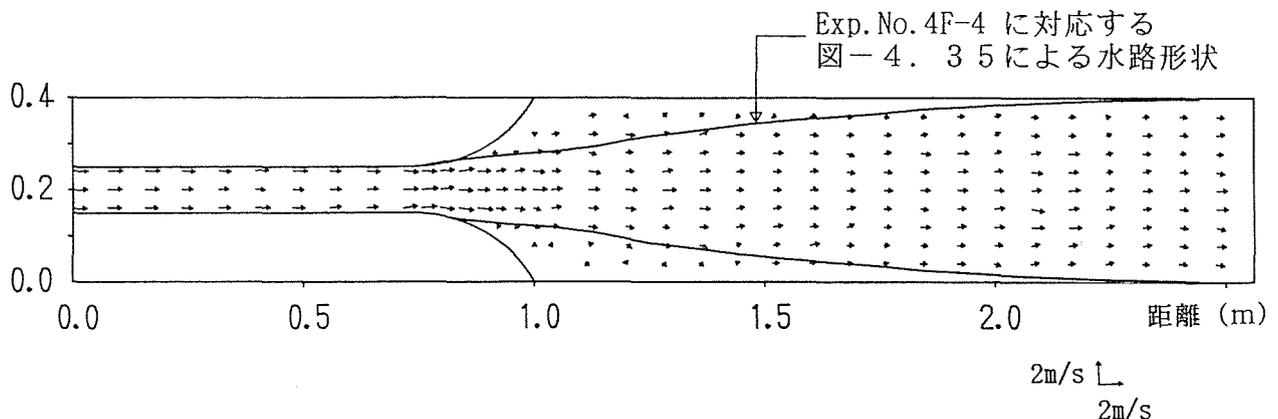


図-4. 36 擾乱を消滅させる水路形状と流速ベクトル図 (Exp. No. 4F-4)

#### 4. 4 結語

本章では、急勾配水路の拡幅部における固定床と、移動床の実験を行い、流れと河床変動の二次元特性について検討した。

固定床では跳水位置を含む水面形が種々変化し、特に主流が左右に振れるものが多く見られた。しかし、移動床では安定した河床が形成され、主流が左右に振れる現象は見られなかった。固定床では、勾配と流量、せき上げ位置と高さを変化させて形成される水面形を計測した。移動床では時間的な変動とある程度の時間経過後安定した河床形状について水面および河床を計測した。また固定床、移動床ともに次章の計算値と比較するため、いくつかのケースについては流向流速ベクトルも計測した。

本章で得られた結果をまとめると、以下のようである。

(1)急勾配拡幅部における固定床の流れでは、上流側のフルード数、水深、上下流の水路幅の拡大比、下流側の水深などの水理条件によって、もぐり流出・二次元的な跳水・一次的な跳水の3つの流況に大別され、さらに水面形は左右対称形や非対称形のものが形成されるので6つの形態に分けられる。

(2)3つの流況は、従来提唱されている急拡部に対する実験式に水理条件を適用してほぼ予測することができる。

(3)固定床の左右非対称な跳水では、水理条件が同じでも初期に与える条件により主流方向が右または左に向き、その後何らかの外力を加えない限り主流が右または左に向いて安定した水面形を示す。

(4)移動床では、固定床のような主流方向の非対称性はみられず、河床自らが左右対称な安定した流れを形成する。そのため固定床で種々の水面形を形成する水理条件でも、移動床では一種類の河床および水面形となる。

(5)移動床で流量の少ないとき、蛇行流路いわゆる水みちを形成するが、無給砂で河床低下の場合は安定した水みちとなり、平衡流砂量を与えた場合は不安定な水みちとなる。

## 参考文献

- 1) Chow, V. T. (石原藤次郎訳) : 開水路の水理学、丸善、pp. 436-442, 1962.
- 2) 芦田和男 : 断面変化部における河床変動に関する研究 ( I ) 京大防災研究所年報第6号、pp. 312-327, 1963.
- 3) 芦田和男・宮井宏 : 断面変化部における河床変動に関する研究 ( II ) - 断面急拡部の堆砂の運動 -、京大防災研究所年報第7号、pp. 329-339, 1964.
- 4) 前出論文 2)
- 5) 道上正規・檜谷治・南河亮 : 河川狭さく部における洪水時の河床変動特性、第33回水理講演会論文集、pp. 283-288, 1989.
- 6) 前出論文 2)
- 7) Rajaratnam, N.・Subramanya, K. : Hydraulic Jumps Below Abrupt Symmetrical Expansions, Proc. ASCE, vol. 94, No. HY2、pp. 481-503, 1968.
- 8) 栗津清蔵・大津岩夫 : 急拡水路の潜り跳水について、土木学会第30回年次学術講演会講演概要集、II - 122, 1975.
- 9) 石川元康・安田陽一・大津岩夫 : 急拡水路の跳水、土木学会第49回年次学術講演会講演概要集、pp. 318-319, 1994.
- 1 0) 石川元康・安田陽一・大津岩夫 : 急拡水路の潜り跳水の特性、土木学会第50回年次学術講演会講演概要集、pp. 632-633, 1995.
- 1 1) 前出文献 1)
- 1 2) 山田正・内島邦秀・日比野忠史・寺本康宏・田辺光一 : 山地部の急流河川における河床縦断形状、抵抗則及び水面形に関する基礎的研究、都市域急流河川の流れと河床変動の数値解析に関するシンポジウム、土木学会、pp. 159-169, 1994.
- 1 3) 前出論文 7)
- 1 4) 前出論文 9) 、 1 0)
- 1 5) 道上正規・藤田正治・日下部重幸 : 水みちの発生・発達過程の実験とシミュレーション、水工学論文集、第39巻、pp. 613-618, 1994.
- 1 6) 芦田和男 : 土砂移動現象の予測・制御概説、土砂移動現象に関するシンポジウム論文集、芦田和男先生退官記念事業会、pp. 1-8, 1992.
- 1 7) 前出文献 1)

## 第5章 急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元計算法に関する研究

### 5.1 概説

急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動について、前章では実験的に検討したが、急勾配水路の拡幅部では、下流の条件によって跳水位置や跳水の形状が二次元的に変化するものが見られた。山地河川のダム地点や多自然型河川の計画毎に、模型実験を実施することは時間的にも経費的にも困難であり、より確度の高い汎用性のある数値計算法の開発が望まれるところである。

平面二次元の水面形や河床変動の計算法については、すでに多くの計算法が開発されている。しかし、常流・射流の混在する流れや河床変動に適用するには、従来の方法では境界条件や計算方向の点で一次元の場合と同様の不便さが残っている。そのため常流・射流の区別なく計算できるマッコーマック法の適用が検討されてきている。まず固定床二次元計算へ適用され<sup>1)~6)</sup>、さらに移動床二次元計算への適用が試みられ<sup>7)</sup>、それぞれ良好な再現性が報告されている。しかし、計算の安定性や人工粘性項、境界条件、二次流の影響などの問題があり、十分汎用性のある計算法として確立されるまでには至っていない。

本章では、急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動について、前章で行った実験結果を再現するため、一次元計算法に用いたマッコーマック法を二次元計算法に拡張し、その適用性について検討した。実験結果への適用は、前章の扱いに準じて固定床と移動床に分けて行った。

### 5.2 マッコーマック法による常流・射流の混在する流れと河床変動の平面二次元計算法

#### 5.2.1 基礎方程式

二次元非定常・漸変流の連続式および運動方程式は、図-5.1のような座標系および記号を用いて、つぎのように表すことができる。

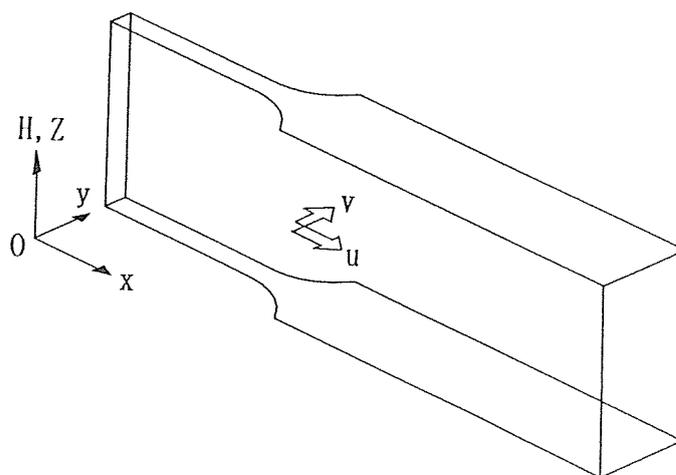


図-5.1 座標系

$$\text{連続式：} \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{運動方程式：} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = E_x \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = E_y \quad (5.3)$$

$$\text{流砂の連続式：} \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.4)$$

ただし、 $H = h(x, y)$ 、 $U = u(x, y) \cdot h(x, y)$ 、 $V = v(x, y) \cdot h(x, y)$ 、 $Z = z_B(x, y)$

$$G = uvh, \quad F = u^2h + \frac{1}{2} gh^2, \quad S = v^2h + \frac{1}{2} gh^2$$

$$E_x = gh(I_x - I_{rx}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial y} \right\}$$

$$E_y = gh(I_y - I_{ry}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (vh)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (vh)}{\partial y} \right\}$$

である。

ここに、 $h$  は水深、 $u$  は  $x$  方向の平均流速、 $v$  は  $y$  方向の平均流速、 $I_x$  は  $x$  方向の水路勾配、 $I_y$  は  $y$  方向の水路勾配、 $\varepsilon$  は水平方向の渦動粘性係数、 $q_{Bx}$  は  $x$  方向単位幅流砂量、 $q_{By}$  は  $y$  方向単位幅流砂量、 $z_B$  は河床高、 $\lambda$  は河床土砂の空隙率である。

流砂量の計算では、第3章の一次元河床変動計算でも用いた芦田・道上の一樣砂の式<sup>8)</sup>

によった。ただし、x方向とy方向の単位幅流砂量 $q_{Bx}$ 、 $q_{By}$ には、つぎに示す長谷川の式<sup>9)</sup>を用いた。

長谷川の式： $q_{Bx} = q_B \cos \delta$

$$q_{By} = q_B \left( \tan \delta - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \right) \frac{\partial z_B}{\partial y} \quad (5.5)$$

ここに、 $\delta = \tan^{-1}(v/u)$ で、 $\tau_{*c}$ は無次元限界掃流力、 $\mu_s$ は砂の静止摩擦係数 ( $\mu_s = \tan \psi = 1$ )、 $\psi$ は砂の摩擦角、 $\mu_k$ は砂の動摩擦係数 ( $\mu_k = 0.5$ )、 $\partial z_B / \partial y$ はy方向の河床勾配である。

### 5. 2. 2 基礎方程式の定式化

5. 2. 1で示した基礎方程式を、保存形でベクトルの式に書き改めるとつぎのようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = C \quad (5.6)$$

ここに、

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \\ z \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2} gh^2 \\ uvh \\ \frac{q_{Bx}}{1 - \lambda} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2} gh^2 \\ \frac{q_{By}}{1 - \lambda} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(I_x - I_{\tau_x}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (uh)}{\partial y} \right\} \\ gh(I_y - I_{\tau_y}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (vh)}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varepsilon \frac{\partial (vh)}{\partial y} \right\} \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。

上式に対してマッコーマック法のスキームは、予測子段階と修正子段階に分けて差分化する。\$U\_{i,j}^n\$ を格子点 (\$x = i \Delta x, y = j \Delta y, t = n \Delta t\$) 上の値とすると、予測子段階と修正子段階でそれぞれつぎのように離散化される。ここでは、予測子段階で後退差分、修正子段階で前進差分を用いているが、この差分の順序は逆にすることもできる。

$$\begin{aligned} \text{予測子段階： } \overline{U}_{i,j} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i,j}^n - E_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (F_{i,j}^n - F_{i,j-1}^n) \\ & + \Delta t C_{i,j}^n \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{修正子段階： } U_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} (U_{i,j}^n + \overline{U}_{i,j}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{E}_{i+1,j} - \overline{E}_{i,j}) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ (\overline{F}_{i,j+1} - \overline{F}_{i,j}) + \frac{1}{2} \Delta t \overline{C}_{i,j} \} \end{aligned} \quad (5.8)$$

ここに、\$\overline{E}\_{i,j} = E(\overline{U}\_{i,j})\$、\$\overline{F}\_{i,j} = F(\overline{U}\_{i,j})\$、\$\overline{C}\_{i,j} = C(\overline{U}\_{i,j})\$ である。また \$\overline{\quad}\$ は予測子による結果である。

上式をこのまま計算に適用すると数値振動を発生するので、これを抑制するため人工粘性項を付加する必要がある。人工粘性項を陽的に付加したものをつぎに示す。

$$\begin{aligned} \text{予測子段階： } \overline{U}_{i,j} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ E_{i,j}^n - E_{i-1,j}^n - (D_{x1,j}^n - D_{x1-1,j}^n) \} \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ F_{i,j}^n - F_{i,j-1}^n - (D_{y1,j}^n - D_{y1,j-1}^n) \} \\ & + \Delta t C_{i,j}^n \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
\text{修正子段階: } U_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_{i,j}^n + \overline{U_{i,j}}) \\
&- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \overline{E_{i+1,j}} - \overline{E_{i,j}} + (\overline{D_{x i+1,j}} - \overline{D_{x i,j}}) \} \\
&- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ \overline{F_{i,j+1}} - \overline{F_{i,j}} + (\overline{D_{y i+1,j}} - \overline{D_{y i,j}}) \} \\
&+ \frac{1}{2} \Delta t \overline{C_{i,j}} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

人工粘性項として第2章および第3章の一次元解析と同じ形のものを用いると、つぎの式(5.11) (5.12)のようになる。

$$D_{x i,j} = \frac{K'}{8}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) \tag{5.11}$$

$$D_{y i,j} = \frac{K'}{8}(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) \tag{5.12}$$

ここに、 $K'$ は人工粘性係数である。

本研究では、一次元の場合と同様に無次元の人工粘性係数 $K$ で表すつぎの拡散型の式も用いた。

$$D_{x i,j}^n = K \frac{u_{*i,j} h_{i,j}}{\Delta x} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) \tag{5.13}$$

$$D_{y i,j}^n = K \frac{u_{*i,j} h_{i,j}}{\Delta y} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) \tag{5.14}$$

ここに、 $u_*$ は摩擦速度を表し、 $K$ は人工粘性係数で流れの連続式および運動方程式に対して同じ値 $K_v$ を用い、河床変動に対しては、第3章と同様に別の値 $K_z$ を用いている。人工粘性係数 $K$ を式(5.6)に対応させて表すとつぎのようになる。

$$K = \begin{bmatrix} K_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

### 5.2.3 境界条件、初期条件および安定条件

#### (1) 境界条件

境界条件は、上流端、下流端および側壁についてつぎのように与えた。

上流端条件：上流端で流量、水深、給砂量を与えるが、予測子で後退差分を用いており、さらに上流の水理量が必要となる。この上流端境界外の条件として、第2章、2.2.3で述べたものと同様な非保存変数の直線外挿を行い計算を進める。

下流端条件：下流端で水深を与える。修正子で前進差分を用いており、下流端境界外の条件として、上流端と同様に非保存変数の直線外挿を行い計算を進める。

側壁条件：側壁での境界条件には、側壁の摩擦抵抗を無視した形で、次式で示されるスリップ条件と呼ばれるものを用いた。

$$u \cdot n = 0 \quad (5.16)$$

ここに、 $u$ ：流速ベクトル、 $n$ ：側壁境界の外向き法線ベクトルである。スリップ条件を縦断方向および横断方向の流速ベクトルで表すと、図-5.2のようになる。

人工粘性については、縦断( $x$ )方向の人工粘性 $D_x$ は $x + \Delta x$ 、 $x - \Delta x$ が境界であるとき0でない最小値とし、横断( $y$ )方向の人工粘性 $D_y$ は $y + \Delta y$ 、 $y - \Delta y$ が境界であるときも0でない最小値とした。また、干上がり個所についても0とせず最小値を与えた。

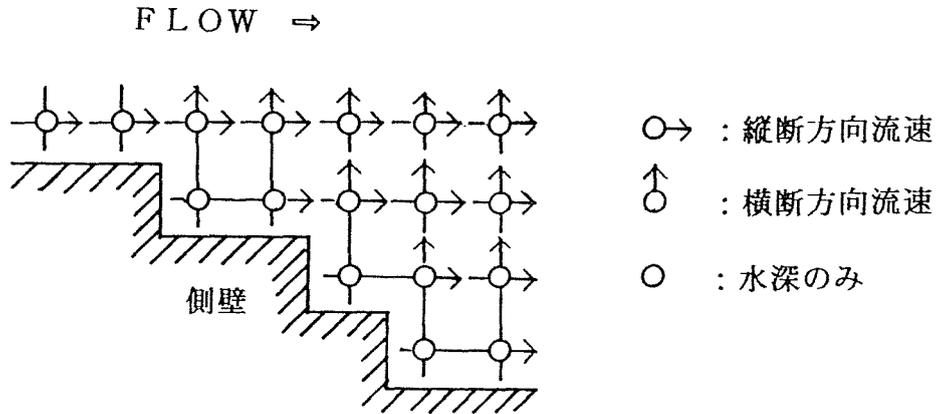


図-5. 2 計算境界条件

(2) 初期条件

初期条件は、一次元解析で用いた方法をそのまま二次元に拡張して適用した。すなわち、固定床については第2章で示したように、下流端を十分せき上げた状態を初期値として与えた。また移動床については、第3章で示したように固定床における定常解を初期条件として与えた。

(3) 安定条件

安定条件は、通常用いられる次式のCFL条件による。

$$\frac{|u + c|_{\max} \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5. 17)$$

ここに、 $|u+c|_{\max}$ は、 $u+c$ の最大値で、 $u$ は流速、 $c$ は長波の伝播速度 $\sqrt{gh}$ を用いる。 $\Delta t$ と $\Delta x$ は計算の時間間隔と距離間隔である。本研究では、安定した計算を行うため、上式のさらに1/10程度の $\Delta t$ とし計算の時間間隔を0.002secとした。

## 5. 2. 4 計算の手順

計算の手順は、一次元解析で用いた方法をそのまま二次元に拡張して行った。すなわち、固定床では十分せき上げた下流端の水位を所定の水位まで徐々に低下させて、定常解を求める方法である。本研究で対象とした流れについて、十分な定常解が得られる時間を予備計算で求め、通水時間20秒（繰り返し回数10000回）とした。繰り返しによる誤差は後述する計算結果図-5. 12の例について示すと図-5. 3のようである。この計算例は2000回まで流れを右に向けている場合であるが、5000回の繰り返しでほぼ解は安定していることが分かる。

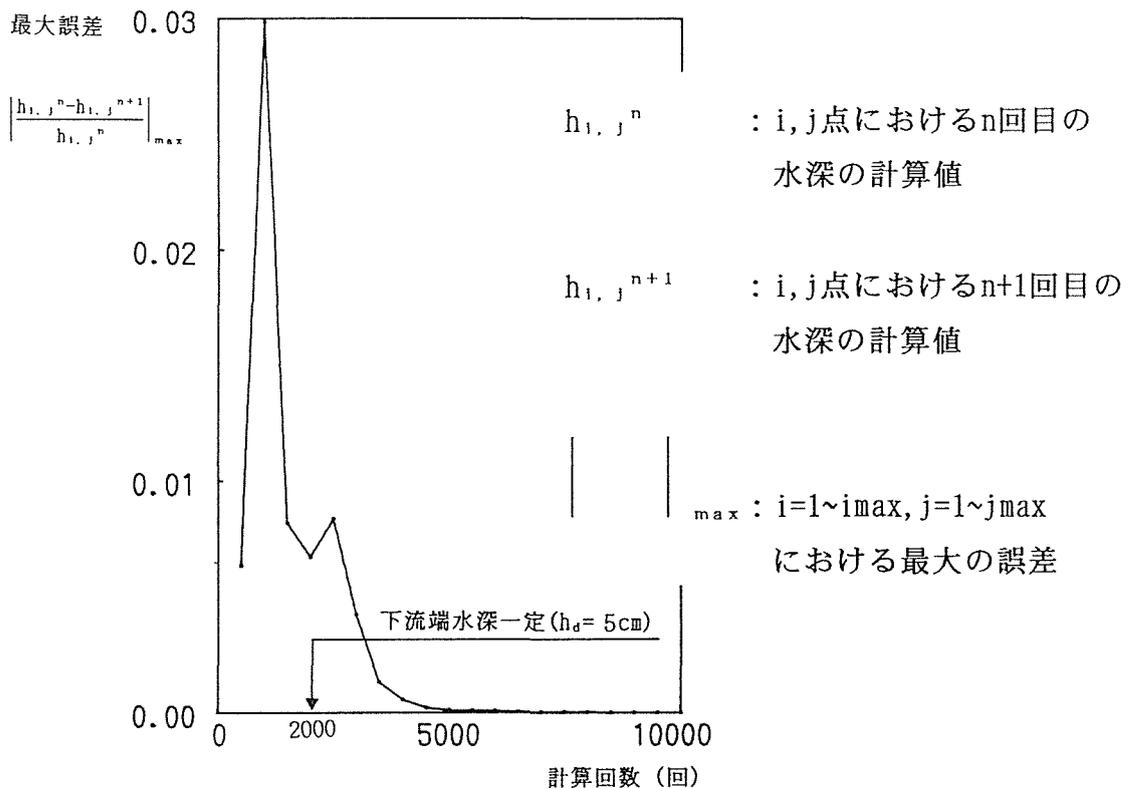


図-5. 3 計算の繰り返しによる誤差の変化

移動床では固定床における定常解を初期条件として与え、通水時間に応じて計算を繰り返した。固定床、移動床ともに水深が浅く流速が比較的大きいので、計算の発散を防ぐため河床の干上がりと回復をつぎのように定義して組み入れた。水深がある値(2.5mm)以下になると、その位置では河床の干上がりが起こる。また図-5. 4、式(5. 1. 8)のように回りの水深がある値(3mm)以上になると、その位置での水深は回復して水が流れ始め

るものとした。

$$h_{i,j+1} \text{ OR } h_{i+1,j} \text{ OR } h_{i,j-1} \text{ OR } h_{i-1,j} \geq h_{m2} \text{ のとき } h_{i,j} = h_{m2}$$

(5. 18)

ここに、 $h_{m2}$ は水深を回復させる最小の水深（本計算では3mmとした）である。

また、移動床においては、計算途中の河床勾配が砂の水中安息角 $\psi$ （本計算では $35^\circ$ ）以上になると、図-5. 5に示すように河床高さを $\psi$ になるまで崩落させて安定するよう計算に組み込んだ。

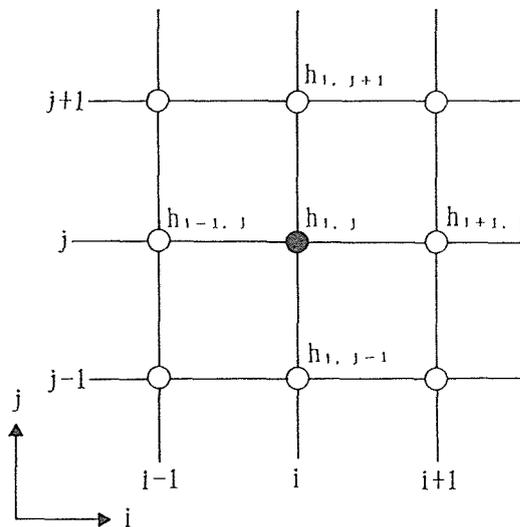


図-5. 4 水深の回復条件

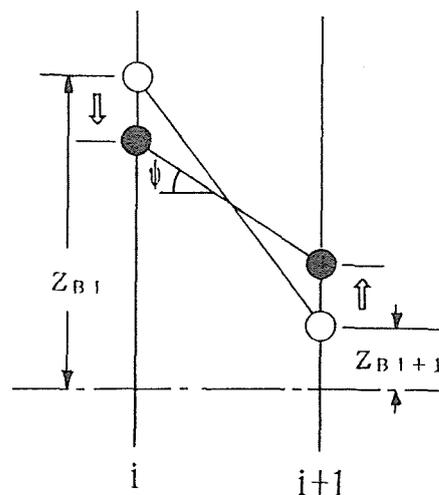


図-5. 5 水中安息角による安定条件

### 5. 3 実験結果への適用

二次元マッコーマック法を、急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の計算に適用した。計算メッシュは、前章の実験に用いたものと同じもので縦断方向と横断方向について $\Delta x = \Delta y = 0.025\text{m}$ である。計算の時間間隔は $\Delta t = 0.002\text{s}$ 、粗度係数は固定床で $n = 0.01$ 、移動床で $n = 0.016$ とした。人工粘性係数は流れに対して $K_v = 3.5$ 、河床変動に対して $K_b = 0.5$ を用いた。ただし、摩擦速度が0に近く人工粘性項が極端に小さくなる場合には、式(5. 11)、(5. 12)で表される流れに対する $K'$ が2.0以下にはならないようにした。

本節で計算結果を示したものを上げると表-5. 1のようである。

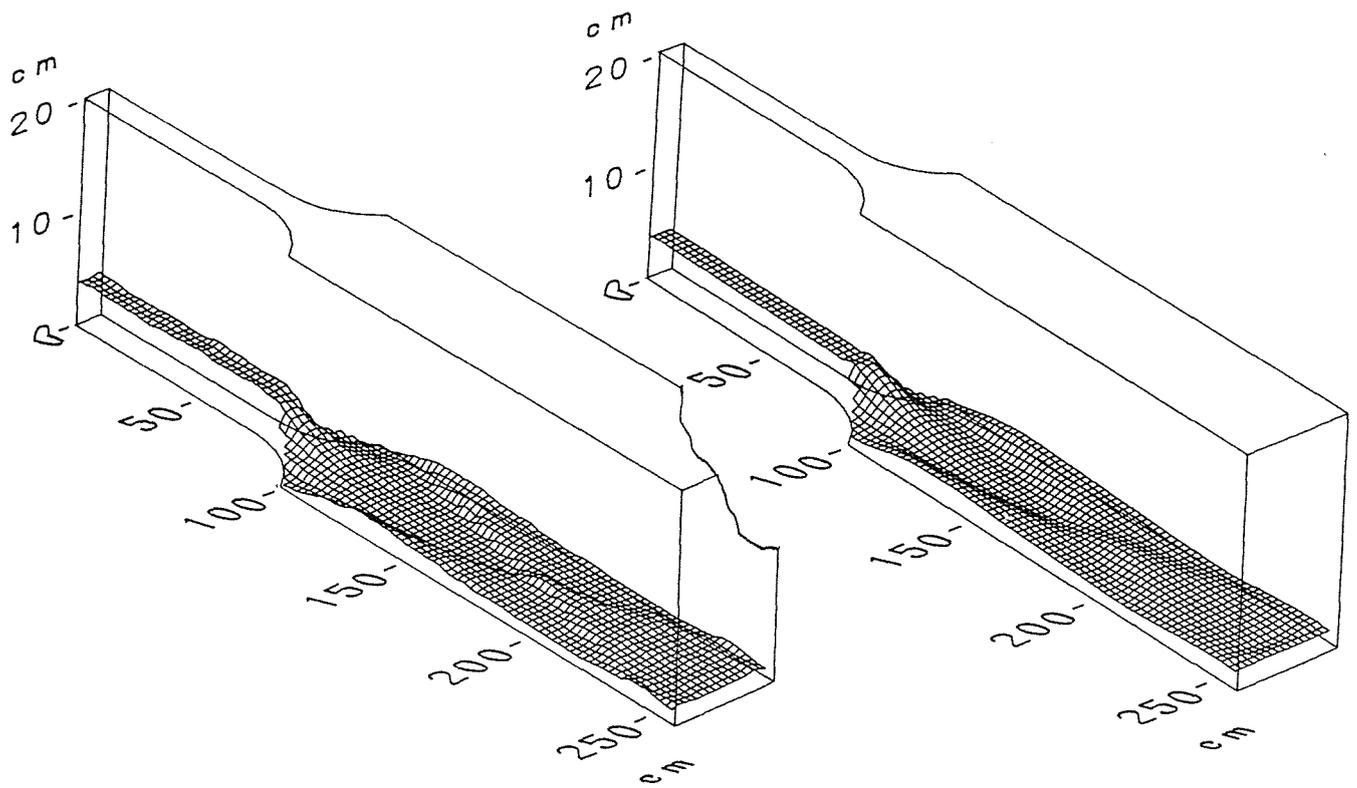
表-5. 1 実験に対応させて行った計算の条件

Cal.No.	対応する Exp.No.	河床勾配	流量 (l/s)	せき上げ 位置(cm)	せき上げ 高さ(cm)	上流端 水深(cm)	下流端 水深(cm)
5A-2.1	4A-2.1	1/50	3.9	65	2.3	3.7	5.0
5A-5	4A-5	1/50	3.9	せきなし	0	3.7	1.3
5B-1	4B-1	1/50	6.0	40	3.3	5.0	6.2
5B-3	4B-3	1/50	6.0	70	3.3	5.0	6.2
5F-2	4F-2	1/50	3.9	65	2.3	3.9	5.0
5F-4	4F-4	1/50	3.9	154	2.3	3.9	5.0

#### 5. 3. 1 急勾配拡幅部における固定床上の流れへの適用

急勾配水路の拡幅部における固定床上の流れは、前章でも述べたように下流側のせき上げ状況によって、跳水位置が安定する場合と不安定になる場合がある。ここでは跳水位置の安定性も含めて、マッコーマック法によりどの程度再現できるか検討した。

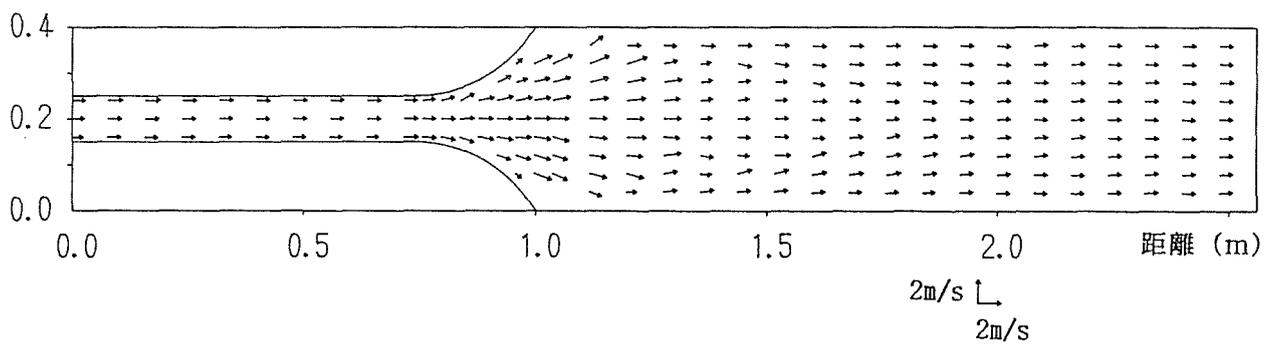
まず、せきのない流れ (Cal.No.5A-5) に適用すると、図-5. 6~5. 8のように比較的よく再現できることが分かる。



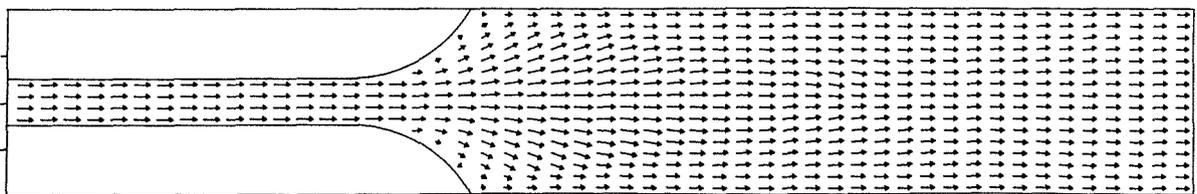
実験結果 (Exp. No. 4A-5)

計算結果 (Cal. No. 5A-5)

図-5.6 せきのない流れの水面形



実験結果 (Exp. No. 4A-5)



計算結果 (Cal. No. 5A-5)

2m/s ↓  
2m/s

図-5.7 流速ベクトル

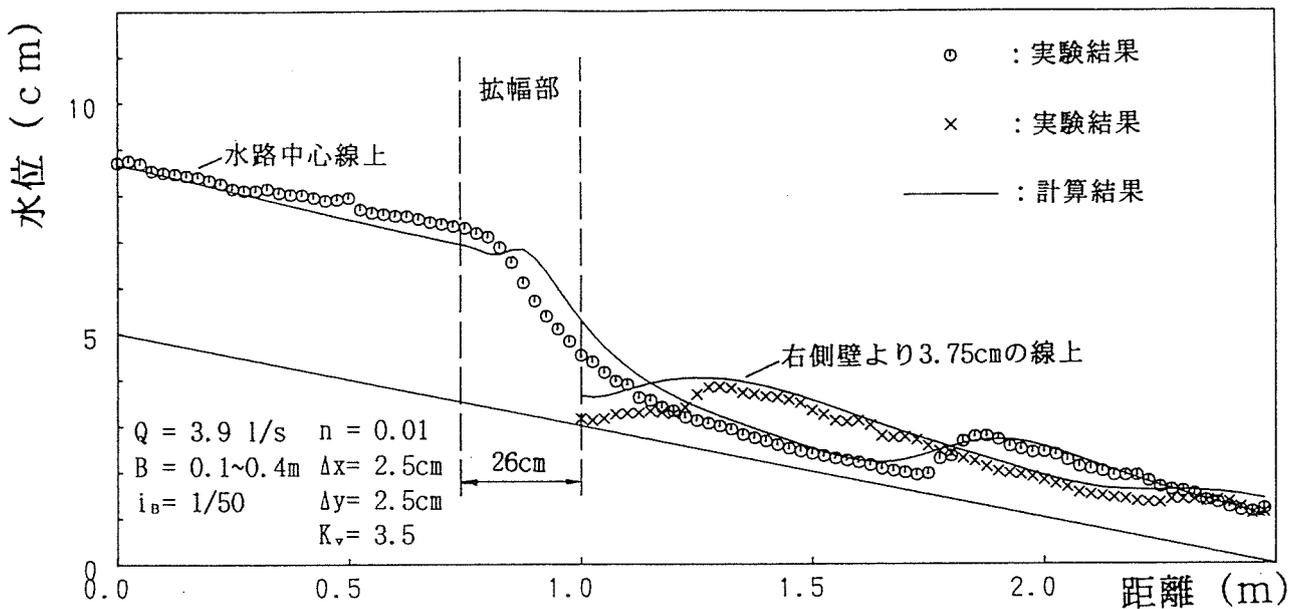


図-5.8 せきのない流れの実験結果と計算結果の水深

つぎに、拡幅部から近い位置でせき上げた場合 (Cal.No. 4B-1)、水面形は図-5.9 のようである。また、水路中心線上および右側壁から3.75cmの縦断線上の水深を示すと図-5.10のようになる。下流端の境界条件として、せき上で横断方向の流速を無視 ( $v=0$ ) し実験値の平均値を用いた。実際にはせき上で横断方向の流速があり、越流水深も横断方向で変化している。したがって、下流端の境界条件が十分であるとは言えないが、計算結果は拡幅部初期で若干ずれている程度で、全体的な水面形や跳水位置、側壁近くの水深なども比較的よく再現できていると思われる。

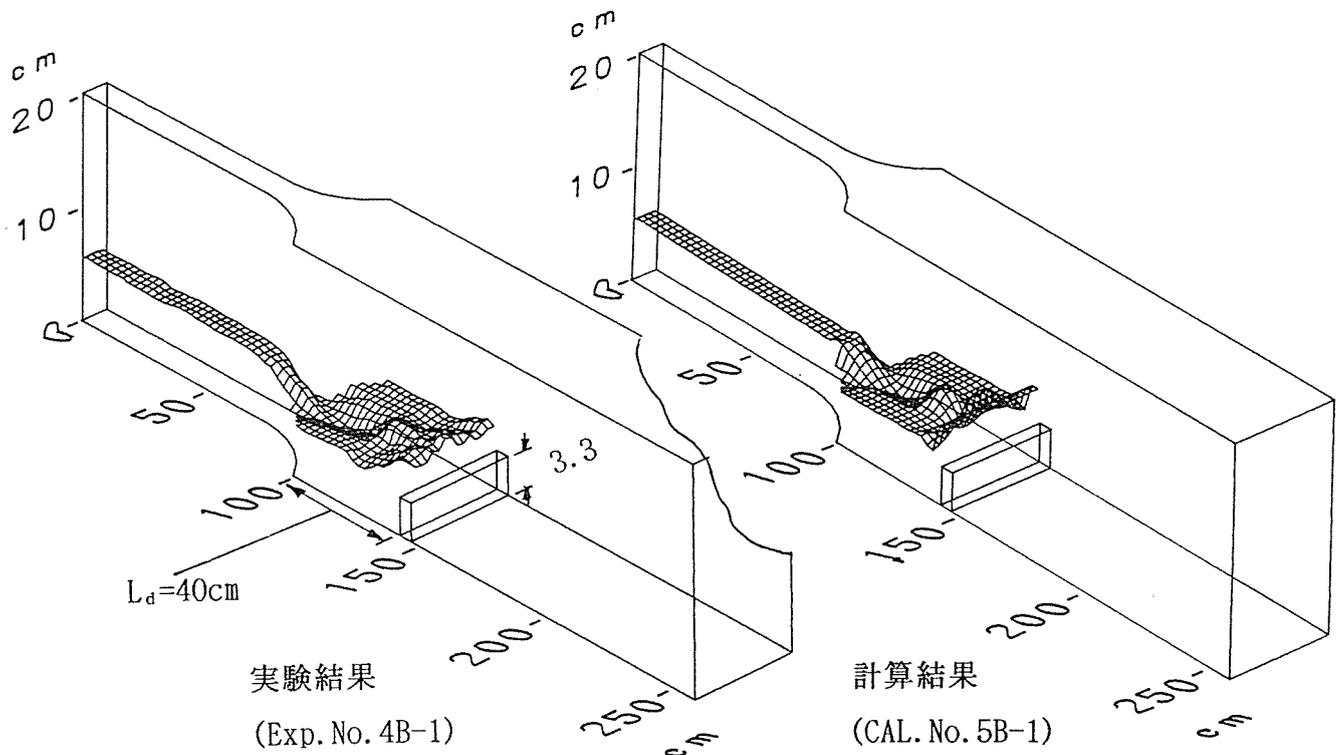


図-5.9 拡幅部近くでせき上げた場合の水面形

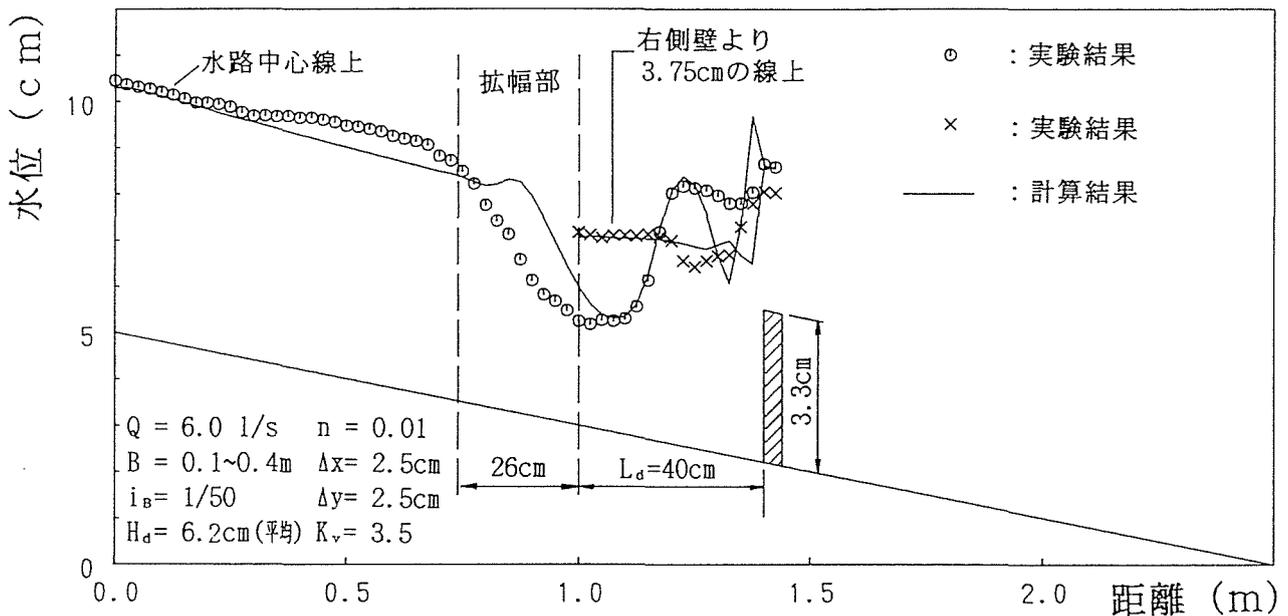


図-5. 10 実験結果(Exp.No.4B-1)と計算結果(Cal.No.5B-1)の水深

拡幅部から少し離してせきを設置し実験で4つの水面形態が得られた流れについて、再現計算を試みた。まず左右非対称になる場合、計算でも初期に主流が左右どちらかになるような条件を加えて見ると、主流方向が左右どちらかでも安定する。計算では、拡幅部で2000回(4秒)の間、横断方向の流速を左右どちらかへ最大0.1m/sまで徐々に増加させ、その後は特に条件を加えず10000回(20秒)まで計算した。右方向に流れを向けた場合の2000回計算後の例を図-5. 11に示す。右および左に流れを向けた場合の計算結果と実験結果をそれぞれ図-5. 12、13に示す。

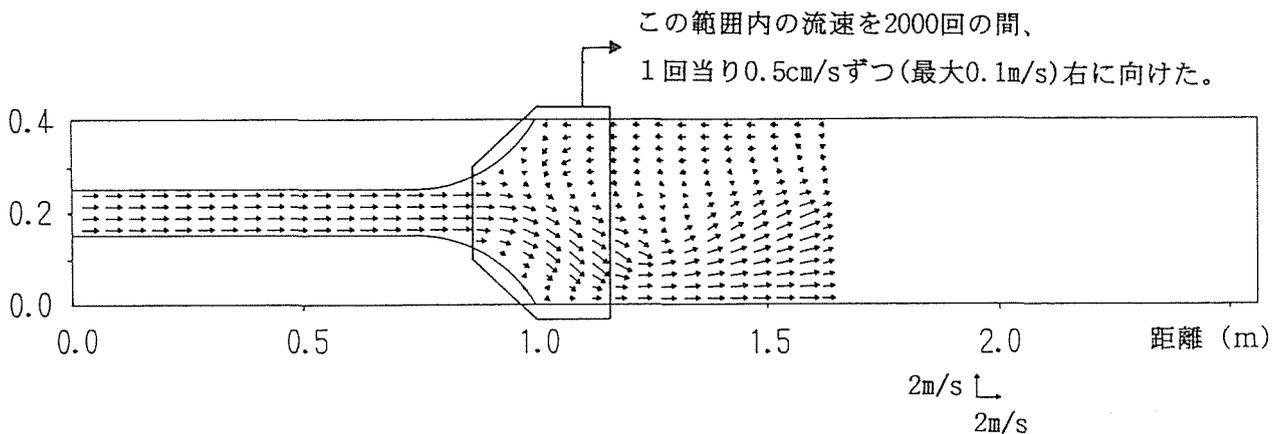
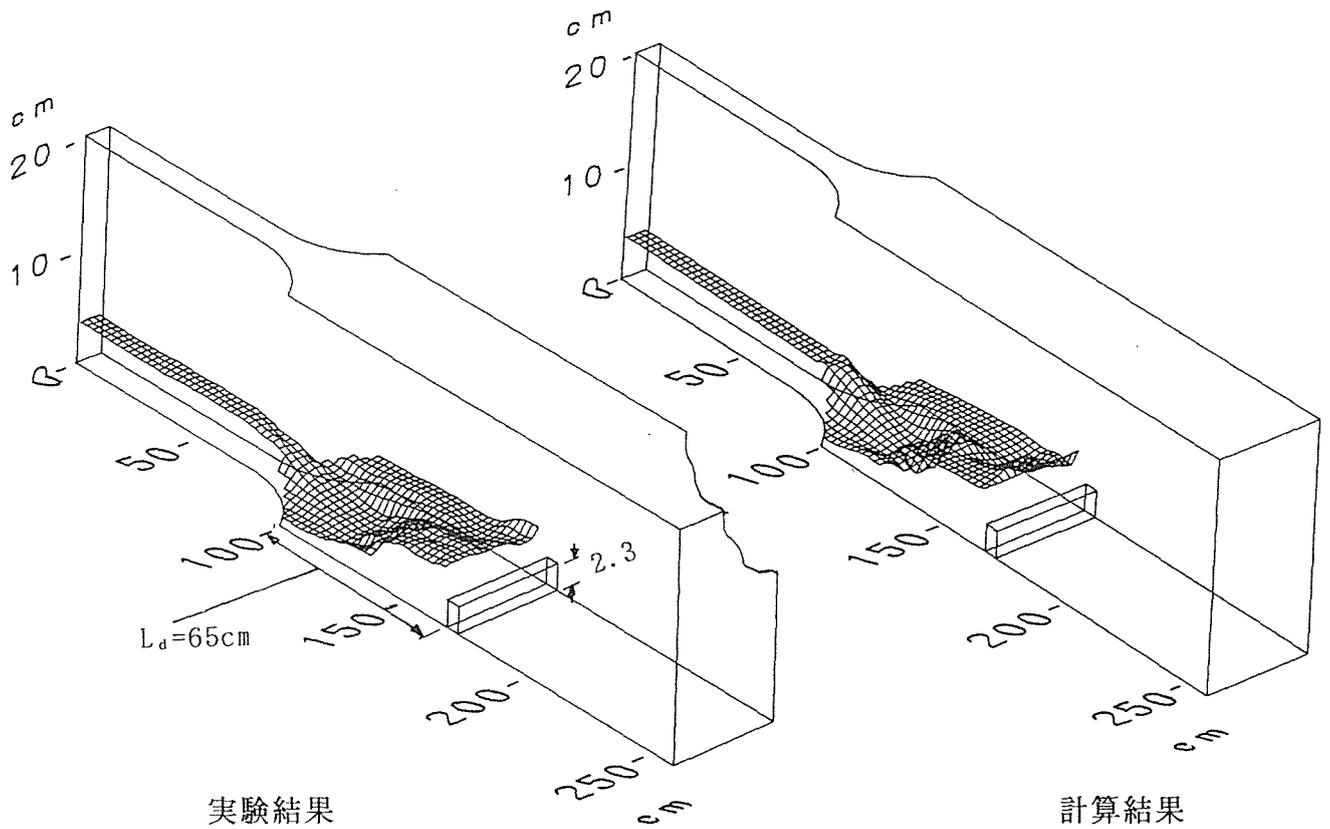


図-5. 11 流れを右に向けたとき(4sec)の流速ベクトル図



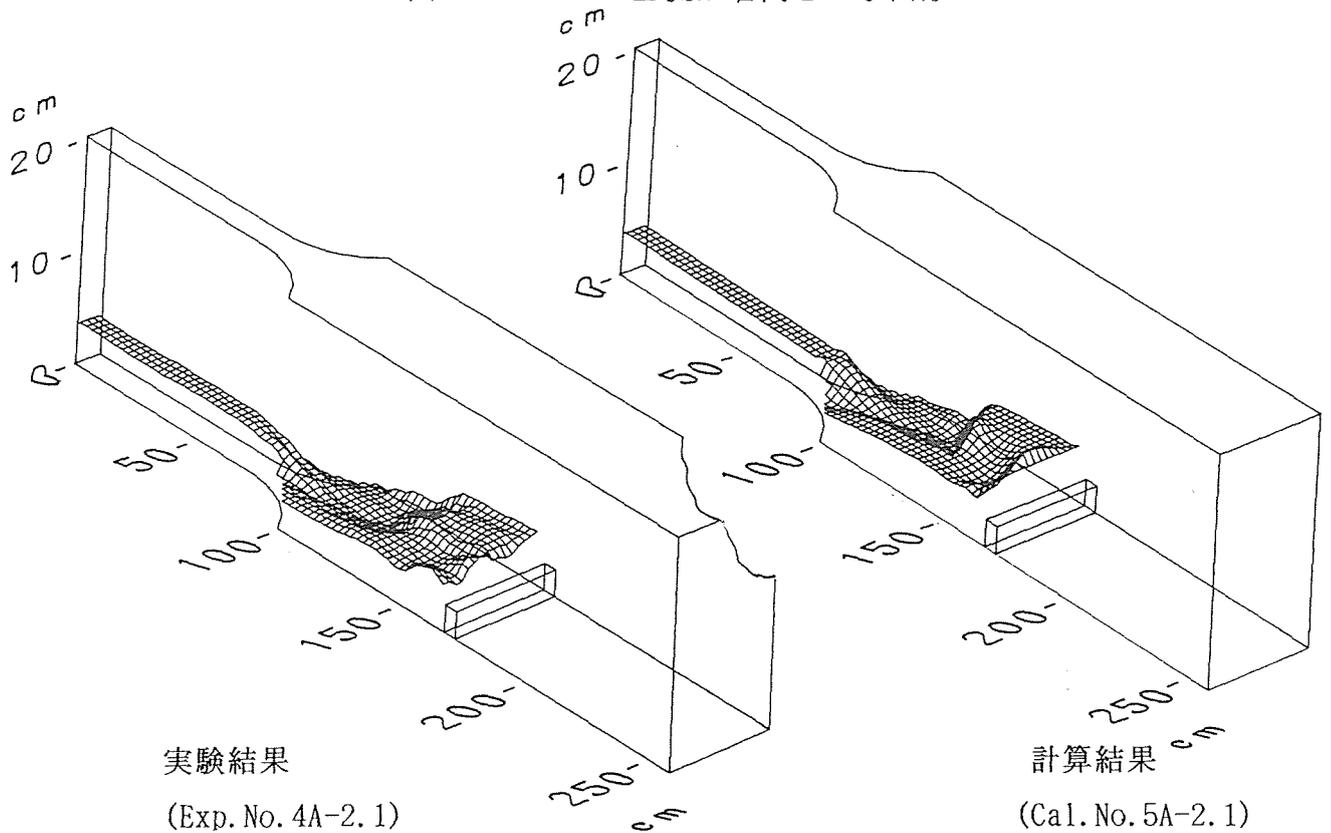
実験結果

(Exp. No. 4A-2.1)

計算結果

(Cal. No. 5A-2.1)

図-5. 12 主流が右向き of 水面形



実験結果

(Exp. No. 4A-2.1)

計算結果

(Cal. No. 5A-2.1)

図-5. 13 主流が左向き of 水面形

この計算例のように、初期あるいは計算途中で意識的に流れの方向を変えると、そのまま安定した流れとして計算を続けることができる。

第3の左右対称な水面形は、横断方向について計算を交互に実施している。これは断面の拡幅部が計算メッシュでは階段状になり、交互に計算することで左右の対称性を保たせるためである。計算結果の水面形および流速ベクトルを示すと図-5. 14、15のような左右対称で跳水がくさび型となる。実験値は不安定なため平面的なデータが得られていないが、中心線および側壁近く（右側壁から8.75cm）の縦断線上の水面形を比較すると図-5. 16のようになり、跳水位置は若干ずれているものの全体的な傾向は再現できていると思われる。

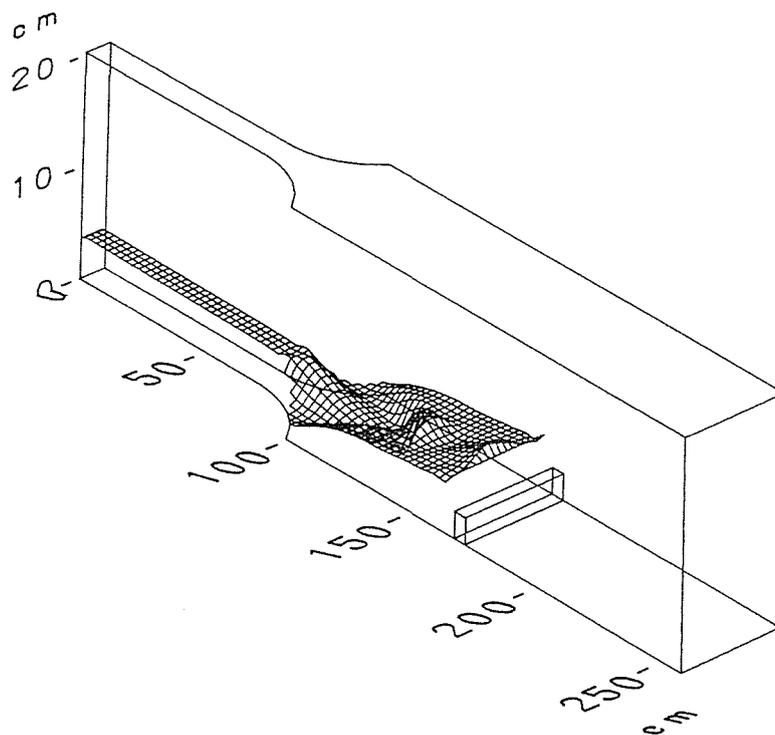


図-5. 14 計算による左右対称な水面形(Cal.No.5A-2.1)

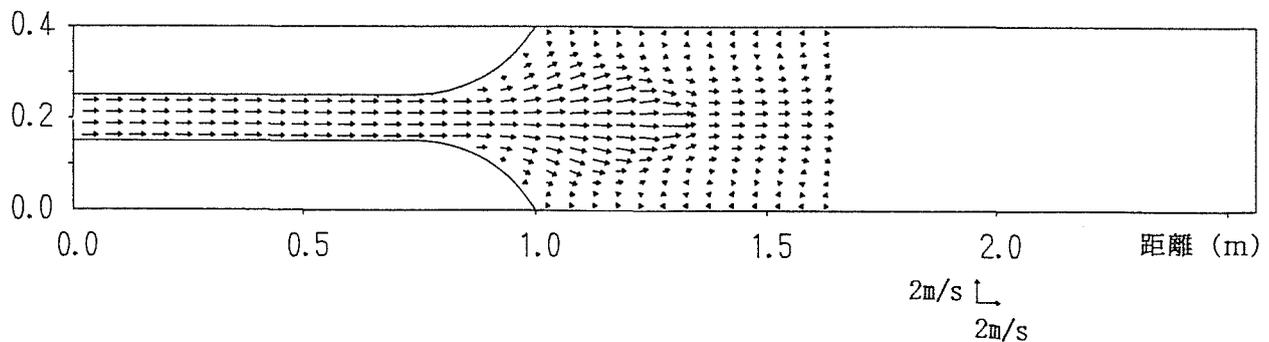


図-5. 15 計算による左右対称な流れの流速ベクトル図(Cal.No.5A-2.1)

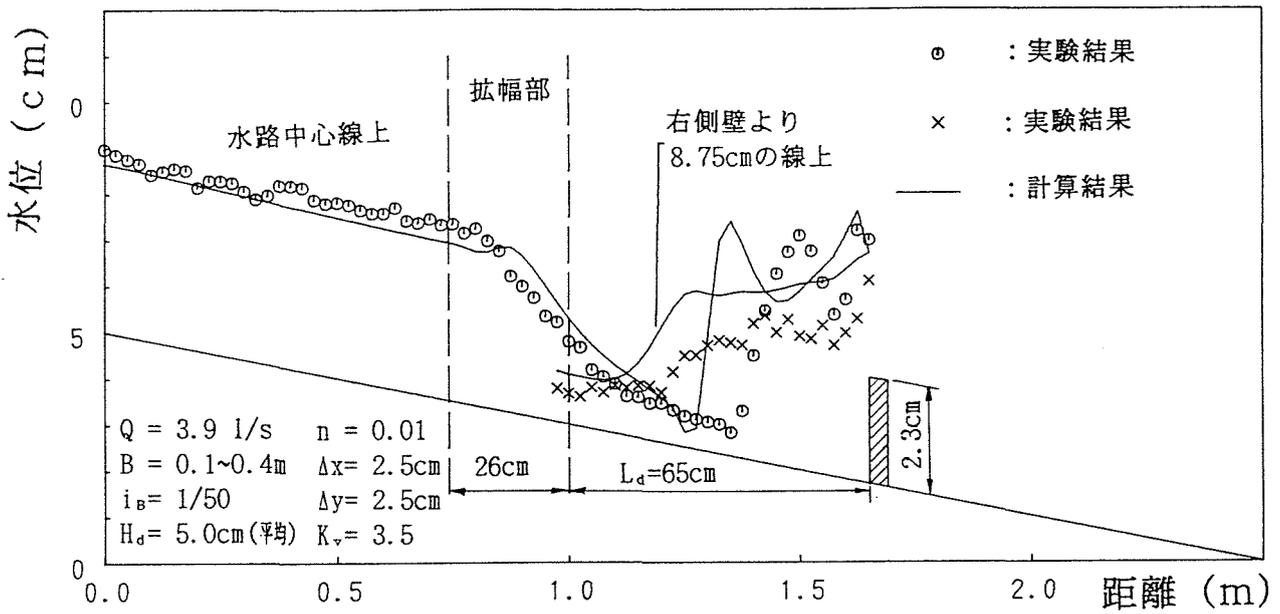


図-5. 16 水面形の比較(Exp. No. 4A-2.1, Cal. No. 5A-2.1)

第4の水面形は、横断方向に変化のない一次元的な跳水となるものである。計算でこれを再現するには、実験と同様な手順を踏む必要がある。すなわち、最初せき高を低くして一次元的な跳水を発生させた後、徐々にせき高を上げて所定の高さにすると、安定した一次元的な跳水を有する水面形が得られる。水深コンターおよび水面形を図-5. 17~19に示す。計算結果の跳水位置は若干ずれるものの水面形は比較的よく再現できている。

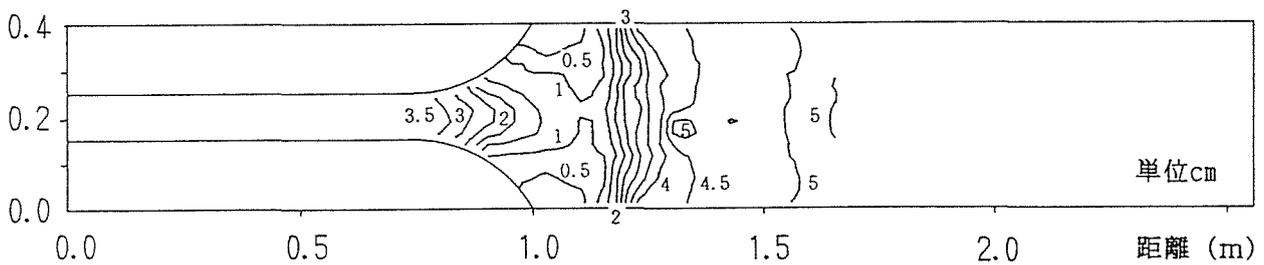


図-5. 17 一次元的な跳水となる場合の水深コンター図  
実験結果(Exp. No. 4A-2.1)

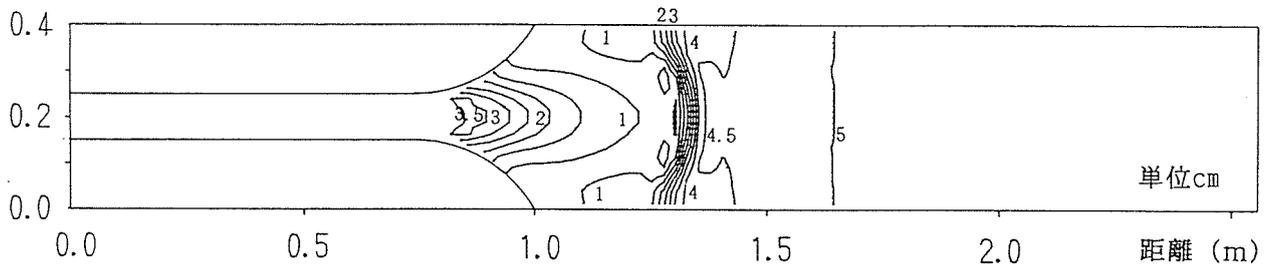


図-5. 18 一次元的な跳水となる場合の水深コンター図  
計算結果(Cal.No.5A-2.1)

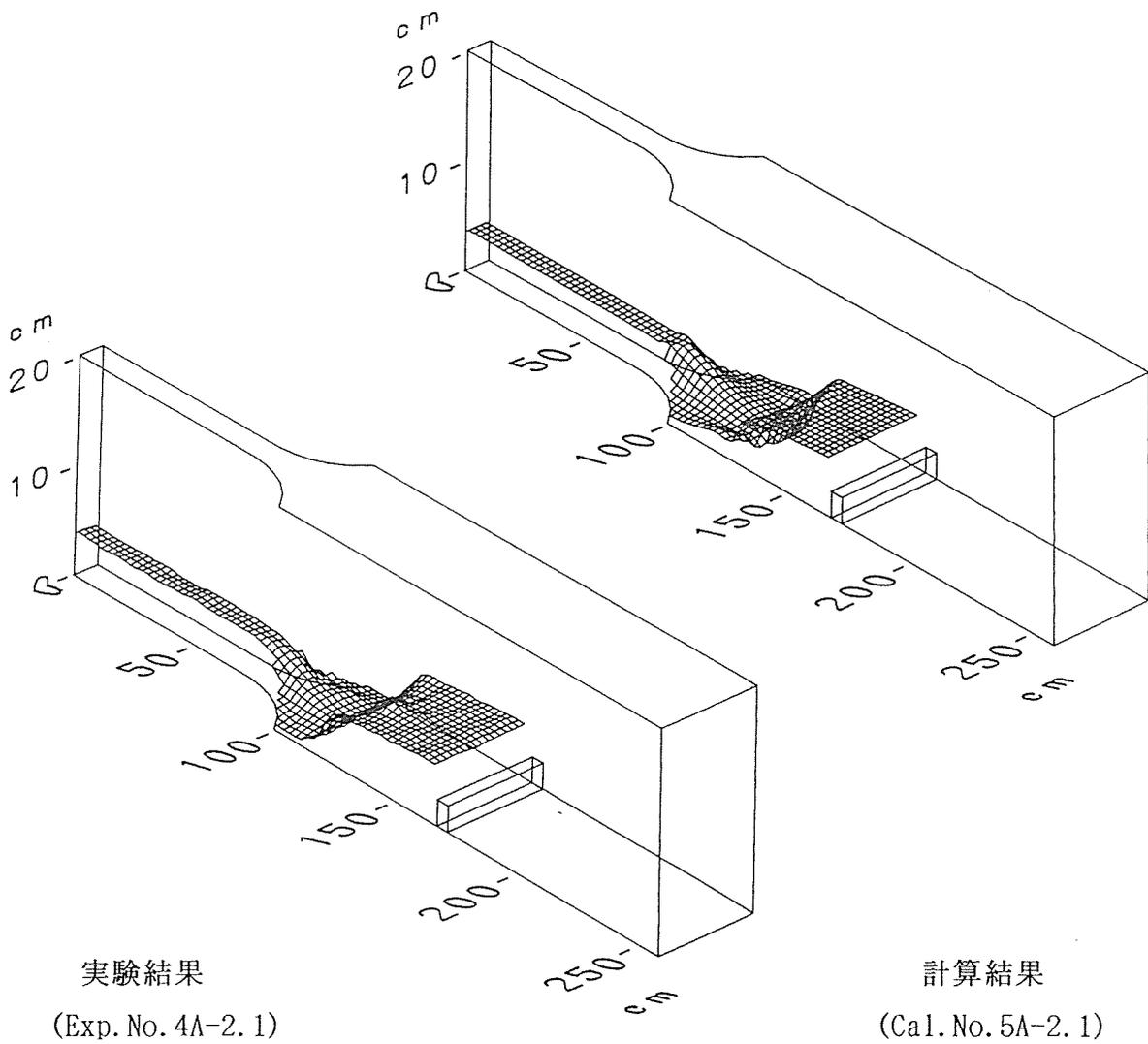


図-5. 19 一次元的な跳水となる場合の水面形

拡幅部からせき上げ位置が離れている場合 ( $L_d=70\text{cm}$ )、水面形は左右非対称となる。実験結果と計算結果を示すと図-5. 20のようになる。

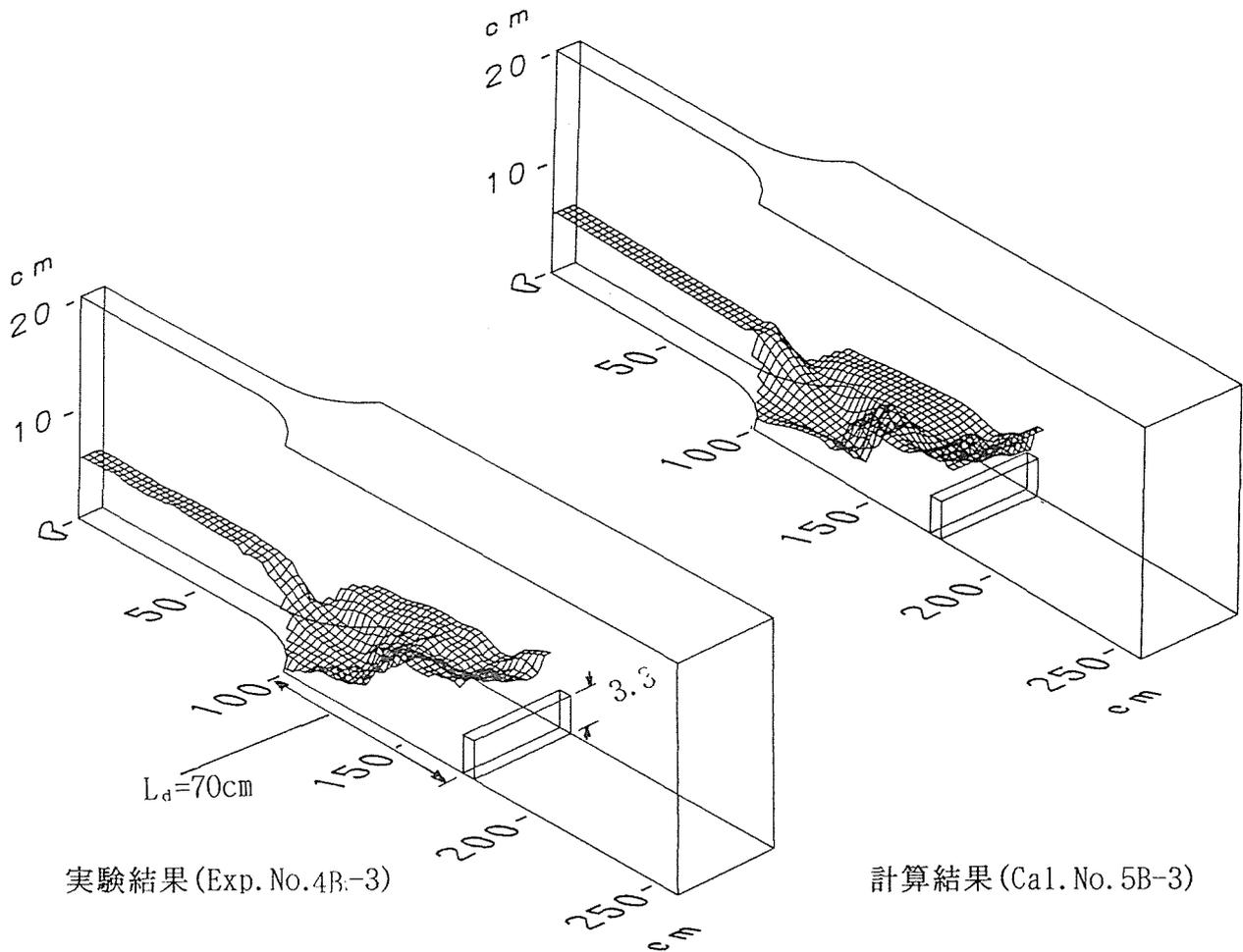


図-5. 20 拡幅部からせき上げ位置が離れている場合の水面形

### 5. 3. 2 急勾配拡幅部における河床変動への適用

急勾配水路の拡幅部における河床変動は、前章で述べたように浮き州ができて水路が蛇行するものと流量がある程度大きく河床全体で洗掘や堆積が生じるものがある。マッコーマック法の平面二次元計算の適用は、後者のみについて行った。ここではその結果と妥当性について検討する。

断面縮小部で平衡流砂量より若干少ない給砂をした場合 (Exp. No. 4F-4) の、ほぼ安定した状態についての実験結果と計算結果を示すと図-5. 21のように、拡幅部周辺での概形は比較的よく再現できている。しかし、計算結果は実験結果に比べ、拡幅部の下流側で洗掘と堆積がいずれも小さい。また河床が形成される時間は、計算結果の方が相当速くなっている。横断方向の流れの扱い方や初期条件の与え方など、いくつか検討の余地がある。

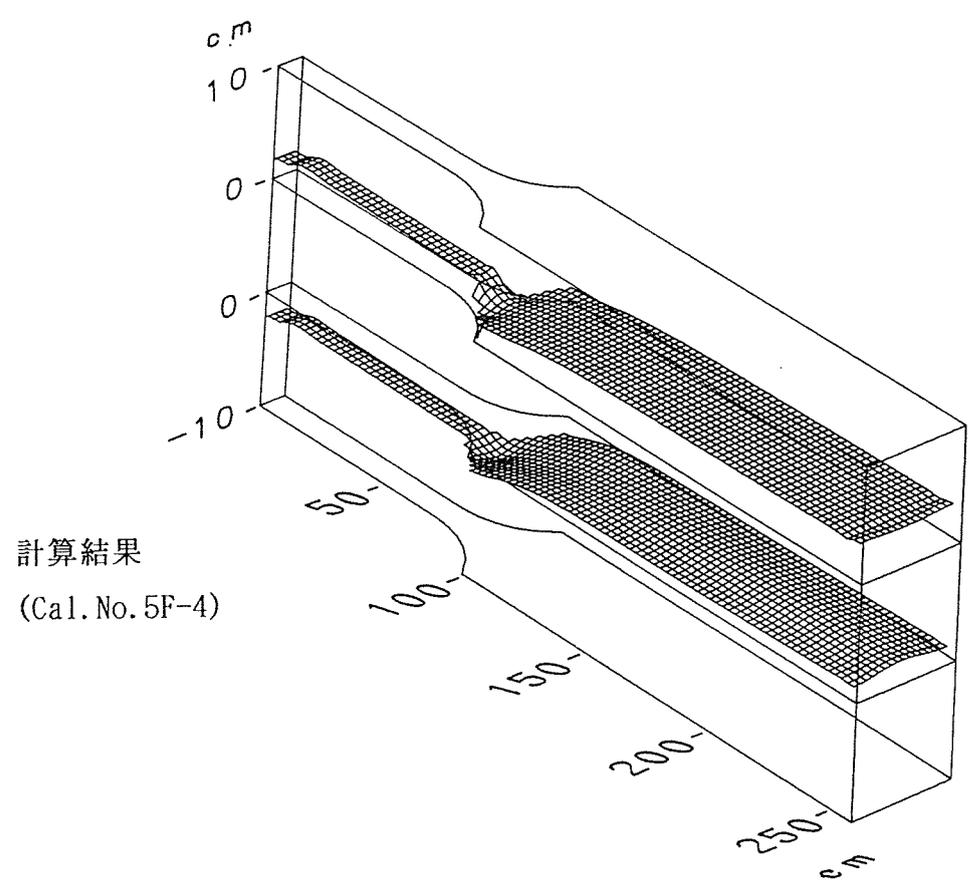
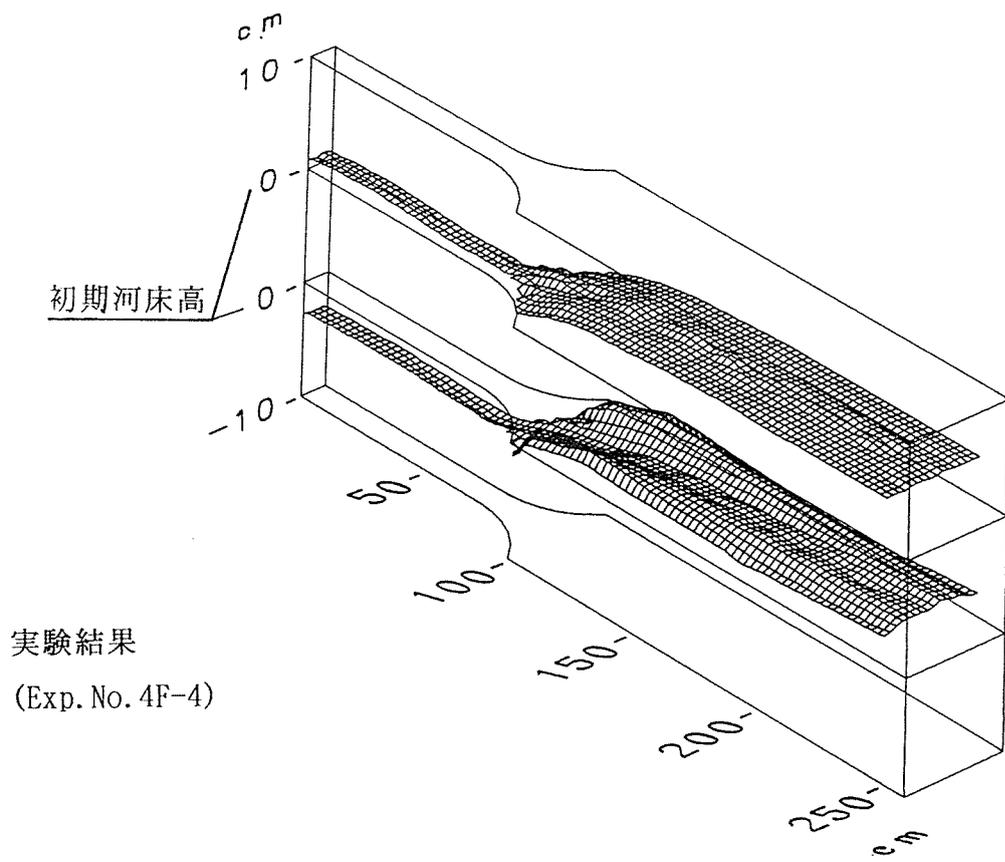


図-5. 21 移動床での水面形と河床形

固定床の場合、拡幅部で一定方向に流れを右または左に向ける条件を加えると、実験でも数値計算でも主流が右または左に向いて安定した流れとなることを示した。移動床については実験的に検討した結果、前章で示したように一つの水理条件に対して複数の水面形や河床形が形成されることはなかった。そこで移動床について、主流が左右に偏った初期条件を与えた場合、水面形と河床形がどう変化するか計算してみた。

移動床の計算における初期条件は、平坦河床の固定床流れから得られる水面形を与えるが、次の3つのものを与えた。

- ① 左右対称な流れ
- ② 主流が右に向いた流れ
- ③ 主流が左に向いた流れ

拡幅部A、B、C 3断面における河床および水面の変化を、計算開始の0秒から20秒(10000回)まで求め図-5. 22~24に示す。図を見ると通水初期には若干右または左に偏って洗掘が起こっているが、水面に比べ河床の横断方向の変化は小さく時間の経過とともに左右対称な形に近づいている。通水後20秒後の結果を見ると、初期条件での違いはなく、水面形および河床形はほぼ同じようになっている。これらの計算例から、移動床流れにおいて流れの非対称性を与えても、河床自らが左右対称な安定河床へと進行する様子が読み取れる。

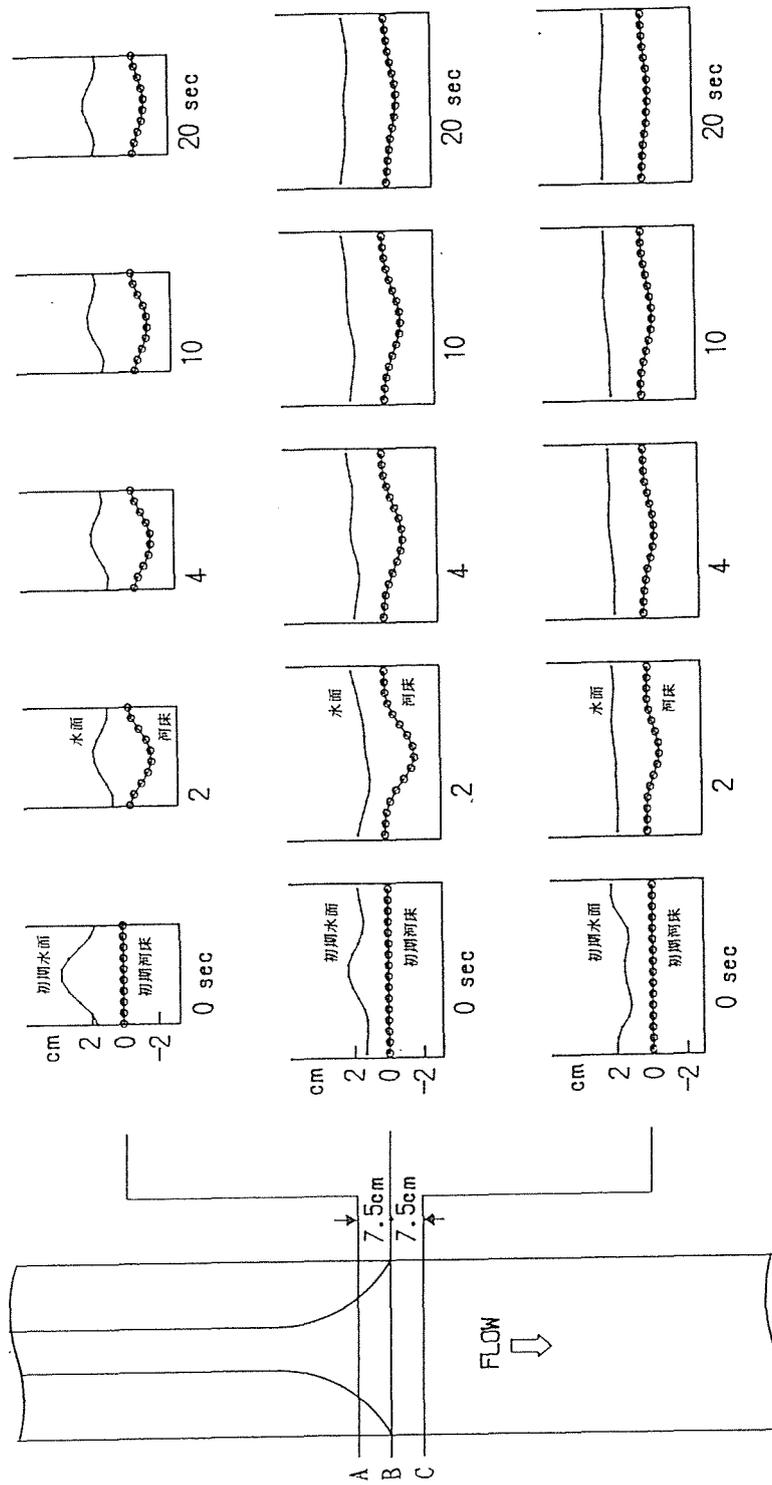


図-5. 2.2 左右対称な流れを初期条件とした場合の河床の時間的な変化  
(Cal.No. 5F-2)

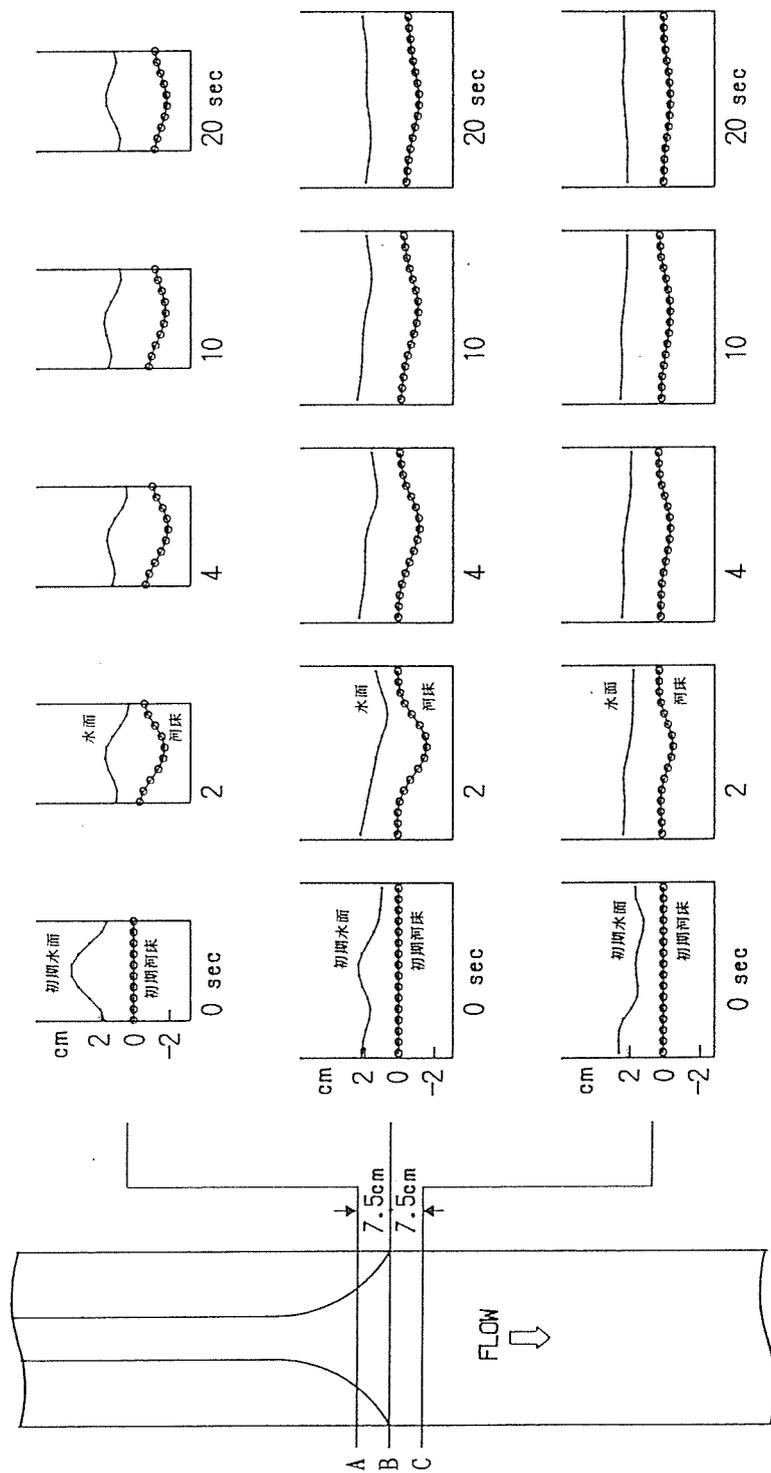


図-5. 23 主流が右向きの流れを初期条件とした場合の河床の時間的な変化  
(Cal.No. 5F-2)

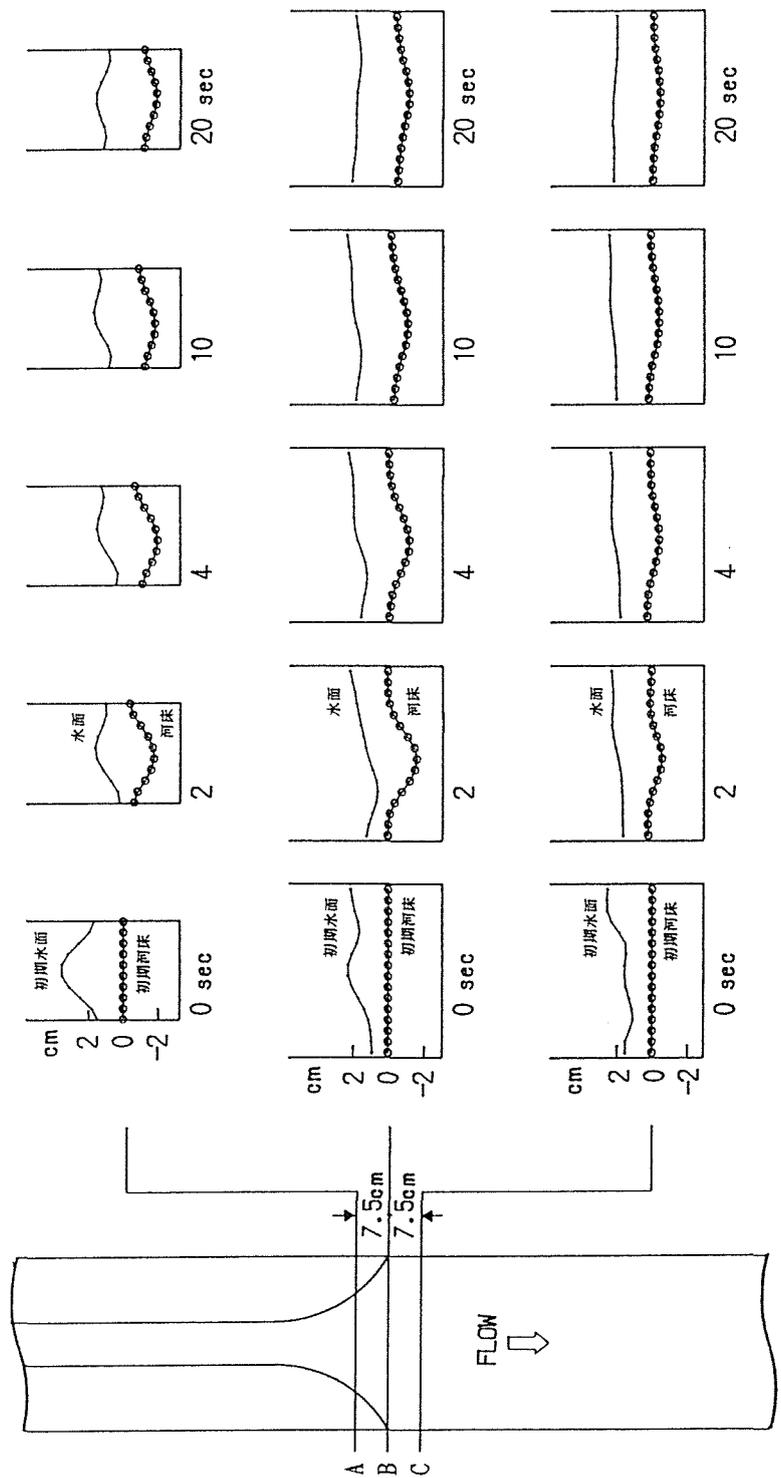


図-5. 24 主流が左向きの流れを初期条件とした場合の河床の時間的な変化  
(Cal.No.5F-2)

## 5. 4 結語

本章では、急勾配拡幅部における流れと河床変動の計算を行い、実験結果と比較して計算結果の妥当性を検討した。計算対象とした流れは、水深が浅く流速が比較的速いので、河床が露出し易く計算は不安定であったが、適当な格子間隔と人工粘性係数を用いることで安定した計算を行うことができた。本章で得られた結果をまとめるとつぎのようである。

(1) 急勾配拡幅部における固定床の流れについて、下流側をせき上げ跳水を発生させる場合、一次元解析で得られた人工粘性係数を用いて、流れを比較的良く再現することができる。

(2) 水理条件が同じでも水面形の形態が異なる数種の流れについて、初期条件や計算途中で挿入する条件を変えることでほぼ水面の形態を再現することができる。この場合の初期条件や途中の挿入条件は、実験で与える条件と同様な手順で与えることができる。

(3) 河床変動の計算結果は、実験結果よりも洗掘と堆積が若干小さく、時間的には速く進行する傾向にある。横断方向の流速の扱いや初期条件の与え方など、何らかの改良が必要と思われる。

(4) 河床変動の計算結果では、流れの非対称性を与えても、河床自らが左右対称な安定河床へと進行し、実験結果の特性をよく再現している。

## 参考文献

- 1) Garcia R. and Kahawita R.A.: Numerical Solution of the St. Venant Equations with the MacCormack Finite-Difference Scheme, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- 2) 河村三郎・中谷剛: TVD-MacCORMACK法による常・射流混在流の数値計算法、水工学論文集、第37巻、pp. 763-768, 1993.
- 3) 河村三郎・中谷剛・前田哲史・澤田良二: TVD-MacCormack 法による河床変動計算 土木学会第48回年次学術講演会講演概要集、pp. 518-519, 1993.
- 4) 岡部健士・山下秀基・天野裕仁: 常・射流が混在する二次元浅水流の数値計算法、水工学論文集、第39巻、pp. 403-410, 1995.
- 5) 名合宏之・前野詩朗・尾幡佳徳・飯田明典: 常流と射流が混在する流れの数値解析法に関する研究、土木学会中国支部研究発表会講演概要集、pp. 205-206, 1996.
- 6) 永瀬恭一・道上正規・檜谷治: 狭窄部を持つ急流河川の平面二次元流計算、土木学会第40回年次学術講演会講演概要集、pp. 590-591, 1995.
- 7) 永瀬恭一・道上正規・檜谷治: 狭窄部を持つ山地河川の河床変動、水工学論文集、第40巻、pp. 887-892, 1996.
- 8) 芦田和男・道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する研究、土木学会論文集、第206号、pp. 59-69, 1972.
- 9) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形と流れに関する水理学的研究、学位論文、1984.
- 10) 日本機械学会編: 流れの数値シミュレーション、コロナ社、pp. 106-110, 1988.
- 11) 日下部重幸・道上正規・藤田正治・檜谷治・宮本邦明: マッコーマック法を用いた砂防ダム上流の堆砂計算法に関する研究、水工学論文集、第40巻、pp. 977-982, 1996.

## 第6章 結論

山地河川では、主として急勾配の流れとなるが、勾配や川幅の変化が激しく、常流と射流の混在する場合がある。さらに山地河川の河床変動は、河道での堆砂や砂防ダムの堆砂機能を含めそれ自体大切な現象であるが、河川中下流部への土砂の供給源としても重要なものである。また景観や親水を考慮して計画される多自然型川づくりなどにおいて、流路形状や河床勾配が複雑に変化し常流・射流の混在する流れとなることもある。これらの流れや河床変動を解析する手段として、今後高精度で汎用性のある数値計算手法の必要性が高くなっていくものと考えられる。

本研究では、急勾配水路における常流・射流の混在する流れについて実験による現象の把握と数値計算による再現性の向上を検討してきた。各章において得られた結果をまとめるとつぎのようである。

第2章では、射流から常流に変化する流れの一次元計算法に関して、マッコーマック法を用いた場合の計算の安定性や最適な人工粘性係数の求め方について検討した。適当な人工粘性係数を用いて、マッコーマック法を射流から常流に変化する流れに適用すると、跳水位置や跳水前後の共役水深などを含めて精度良く計算することができた。実験と計算結果より跳水上流で発生する数値振動は、配置された格子点との位置関係、フルード数および格子点間隔と跳水長との比によって異なることが分かった。このことを用いて、流れに対する拡散型の最適な人工粘性係数を求める方法を提案した。またこの方法で得られた値は、従来経験的に求められた値に近いものであった。

第3章では、常流・射流の混在する領域における河床変動の一次元計算法に関して、マッコーマック法を用いた場合の計算の安定性などについて検討した。砂防ダム上流部の堆砂過程に対して、適当な人工粘性係数を用いてマッコーマック法による一次元計算法を適用すると堆砂の進行状況など精度良く計算することができた。しかし、堆砂の計算でデルタ高さが高くなると計算が不安定になる。この不安定の要因を探り、デルタ先端上流側の水位が下流側に比べ高くなり過ぎ段落ち状態になると、計算精度が悪くなることを明らかにした。また、安定した計算のための改良法や適用限度の目安についても提案した。

第4章では、急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元特性に関して実験的に検討した。拡幅部を通過する流れを対象として固定床と移動床の実験を行った。固定床においては、主流が左右に振れるなど水理条件が同じでも、初期条件の僅かな違いで異なった水面形を形成するものが見られた。またこれらは特に外力を加えない限り一応安定した水面形を保っている。しかし、移動床では主流が左右対称形となるものが多く見られた。移動床では、拡幅部を通過する流路として最も流れ易い形に自ら河床形を作り出しているものと考えられる。

移動床では流量が小さく拡幅部通過後蛇行流路を形成する場合、いわゆる水みちについ

ても調べた。水みちの実験では、幅が広く長い区間を必要とするので断面縮小部を設けない実験も行った。この場合、無給砂で河床低下となるときは安定した水みちとなり、上流から平衡流砂量を給砂すると水みちは不安定に変動を続けた。

第5章では、急勾配水路の拡幅部における流れと河床変動の平面二次元計算法に関して検討した。急勾配拡幅部を射流で流下する流れや下流をせき上げて跳水を発生させた流れの水面形の計算は、マッコーマック法の二次元計算法により精度よく実験結果を再現することができた。特に固定床流れの実験で、同じ水理条件に対して複数の水面形が得られたものについて、実験と同様の初期条件を与えて複数の水面形を表すことができた。河床変動についてもマッコーマック法の二次元計算法を用いて河床と水面形をほぼ再現することができた。また、河床変動の計算では、流れの非対称な初期条件を与えても、河床自らが左右対称な安定河床へと進行するなど、実験結果の特性をよく再現できた。

しかし、時間的な河床変動を細かく再現するには初期条件の与え方や横断方向の流速の扱いなど若干改良の余地がある。

以上、本研究において得られた成果について述べた。急勾配水路における常流・射流の混在する流れと河床変動の問題は、地形や河床材料など局所的な条件を組み入れて解析しなければならないので、今後数値解析が多く用いられるものと思われる。今後に残された問題も少なくないが、この研究が急勾配水路の流れや河床変動の解析を行う上での一助となれば幸いである。

## 謝 辞

本研究を行うに当たり、終始一貫して暖かい御指導を賜った鳥取大学工学部長道上正規教授に深甚なる謝意を表すとともに、研究を始める機会を作って頂き、種々適切な御助言を賜った鳥取大学学生部長野田英明教授に厚くお礼申し上げます。

研究遂行上細部にわたり常に有意義な御助言を頂いた京都大学農学部藤田正治助教授に感謝の意を表します。また、数値解析について多くの検討や御助言を頂いた鳥取大学工学部檜谷治助教授ならびに鳥取大学地域共同研究センター宮本邦明助教授に厚くお礼申し上げます。さらに、水工学における実験的な研究の面白さと大切さを身をもってお教え頂いた立命館大学理工学部大同淳之教授に感謝いたします。

そして、自然科学に興味を持たせて頂いた進士三郎先生、日々教育に当たりながら研究心を持ち続けることの大切さを示して頂いた神戸高専岸本進名誉教授、研究を行う上で何かと御協力頂いた神戸高専都市工学科（土木工学科）教職員の方々、水工学の研究を一緒に続けてきた多くの卒業研究生の皆さんに心から感謝いたします。

**END**