

2次長周期波による湾水の振動特性について

1998年1月

喜田昌裕

目 次

第1章 緒論	1
第2章 2次長周期波による港湾の振動に関する従来の研究	7
第1節 概説	7
第2節 1次波による湾水振動	9
第3章 2成分合成波による2次長周期波の湾水振動	23
第1節 概説	23
第2節 2次の非線形干渉波	23
第3節 理論式の誘導	36
3.1 2次長周期波	36
3.2 2次長周期波による湾水振動	42
第4節 理論式の特徴	56
第4章 一方向不規則波による2次長周期波の湾水振動	65
第1節 概説	65
第2節 理論式の誘導	65
2.1 2次長周期波	65
2.2 2次長周期波による湾水振動	70
第3節 理論式の特徴	82
第5章 斜め入射合成波による2次長周期波の湾水振動	87
第1節 概説	87
第2節 理論式の誘導	87
2.1 2次長周期波	87
2.2 2次長周期波による湾水振動	94
第3節 理論式の特徴	108

第6章 結論	115
付録1 湾内における振幅増幅率の有限性について	117
付録2 不規則波による湾水振動の追加計算	118

第1章 緒論

海岸工学は、技術者の経験に依存する技術に、Newton や Laplace による潮汐論、Kelvin や Darwin による潮汐の予報技術、Airy や Gerstner、Stokes による微小振幅波および有限振幅波などの波動理論を背景として発展を開始し¹⁾、さらに第2次世界大戦中に波浪の推算法、浅海における波の変形や海底地形の変化などに関する研究がアメリカで盛んに行われ、これらの研究成果が戦後公開されて基礎的な学問分野としての基礎が確立した。これに加えて戦後の多くの研究者、技術者による研究の成果が合わさって近代海岸工学は急速に進歩発展し体系化されてきた²⁾。

わが国においても、戦後の国土復興が進むにつれて、港湾の整備や海岸の浸食対策の必要性から、急速にこの分野の研究開発が進展した。終戦直後は海岸保全、海岸防災を目的として研究が行われたが、経済の発展にともなって海洋資源の開発・海洋スペース利用の開発・海洋エネルギーの開発などに見られる海洋開発を目的とすることも多くなってきた。さかのぼってみると、昭和30年代に始まる高度経済成長期において、最大の社会基盤の1つであった港湾は、海象が穏やかな東京湾や大阪湾において臨海工業地域の形成、飛躍的に増大する資源・原材料の輸入や加工製品の輸出を支え、わが国の経済社会の発展に大きく貢献してきた。海岸工学はこの過程において港湾整備の基礎技術として役だっただけでなく、適地の利用が飽和状態に達し、港湾用の土地が次第に不足してきた昭和30年代以降に、条件の悪い砂浜海岸に新たな大規模港湾を建造することを可能にし、苫小牧港、鹿島港、新潟東港などに従来では考えられなかったタイプの港湾も実現させた。その後、二度のオイルショックを乗り越えてわが国の経済社会は成熟期を迎え、先端技術の発展が進んで従来の重厚長大型の産業から第3次産業に構造が変化してきた。これにあわせて港湾の物流の構造も大量輸送方式から小口貨物のコンテナ化、多頻度高速輸送へと変化が進んできている。さらにこれからの港湾には、物流だけでなく多様で高品質な産業空間あるいは豊かな生活空間を併せ持つことも望まれるようになってきている。例えば今後見込まれるコンテナ船の大型化に対応した高機能荷役システムを備えたターミナル、FAZなどの機能を備えた背後域等の整備、さらに港のアメニティを増し、人と海のインターフェイスとしての機能すなわちモーターボートやヨット等のプレジャーボートに対応できるマリナーの整備などが求められている。

港湾の利用形態はこのような多様性が見込まれてはいるものの、それが果たすべき工学的な基本要件には大きな変化はない。永井³⁾によると、港湾は「外海の波浪に対して、船舶が安全に停泊できる水面を有し、かつ水陸交通の連絡設備を有するものをいう」と定義されている。建設技術者が港湾施設を設計する際は、水面を静穏に保つための設備の設置を行い、船舶が安全かつ円滑に利用できるようにすることは機能の多様化に関わりなく第一義的な要件である。

水面が静穏かどうかの指標は、通常波高が用いられる。『港湾の施設の技術上の基準・同解説』⁴⁾においても、泊地の静穏度を泊地内の波高で評価し、船型別に荷役限界波高を定めている。

しかし港の外郭施設によって入射波が遮蔽されているはずの状況にあっても大型の係留船舶が大きく動揺して荷役が不可能になったり、係留索が切断される事故が生じることがある。このような現象が発生する理由として次の2つのことが考えられている。すなわち湾水の共振と、船舶の共振である。とくに前者は湾水の副振動（secondary undulation）と呼ばれる閉鎖水面の共振現象で、古くから知られていた現象である。湖沼などの固有の周期をもった自由振動をさすジュネーブ地方の方言であるセイシュ（seiche）が国際的に通用する技術用語となっている。わが国でも長崎地方でアビキ、下田地方でヨタと呼ばれる現象がこれにあると考えられている⁵⁾。最近では湾水振動（harbor oscillation）と呼ばれることも多い。この現象は、一般にも共振（あるいは共鳴）という現象でよく知られており、外部から固有振動数に近い周期的な刺激が加わると、たとえ微弱な刺激でも、物体は大きな振動を起こすためであると理解されている。身近なところでは試験管のような一端が閉じた管のふちに口をあてて、強く息を吹き込むと管に特有な音が出る経験は誰しも記憶しているところである。笛やフルートのような両端が開いた楽器も同様である。これは図1-1のような気柱の共鳴実験を行うことによって簡単に確かめられるが、管内の空気柱も固有振動数をもっていて、これと等しい振動数の音や振動が伝わってくると共振するからである。いま試験管を港湾、空気を水、強く吹いた息を波浪と置き換えると湾水振動をイメージし易くなる。

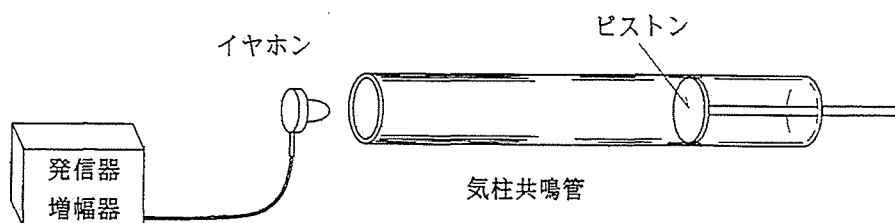


図1-1 気柱の共鳴

通常、外洋の波浪スペクトルは広範囲の周波数帯域を有しており、港湾の固有振動数に対応する成分波を必ず含んでいるので、湾水振動の発生する機会はかなり多いことが考えられる。湾水振動には数多くのモードが存在するが、問題となるのは周期が数十秒から数分のもので、波高は一般には数十 cm 以下であるが、周期が非常に長いために水粒子の水平運動が大きく、係留中の船舶を動揺させて荷役に支障をきたしたり、モーターボートやヨットなどの小型船舶に損傷を与える原因となっている。最近の港湾のように港内の水際線のほとんど全周に岸壁が建設され、しかもコンテナ船のように動揺が大きな障害となる

荷役形態が多くなるにつれて、湾水振動現象は従来に比して大きな問題になってきている。またマリーナの整備が進むと、大型船舶と異なる固有周期によって損傷を受ける新たな事例も発生することが予測される。

我が国における湾水振動現象に関して最近湾水振動が報告されているものとしては田端ら⁶⁾のものをあげることができる。田端らは日本海側に位置する秋田県能代港において係留船舶の荷役障害を調査し、港外の長周期波が顕著な港内副振動を常時励起していることを確認し、その長周期波が波群によるセットダウン波であることを指摘している。また湾水振動が係留船舶のサージの固有周期と一致した場合に荷役障害が発生していることも指摘している。そのほか現在、長周期波によって荷役障害や係留索の切断事故が報告されている港湾としては仙台⁷⁾、苫小牧^{8)~12)}、鹿島¹³⁾をあげることができる。

副振動を起こす原因としては先に挙げた風波によるものの他に、気象擾乱の通過、移動する前線などにもなう微気圧変動、風のガスト、津波やうねりの来襲、高潮、潮汐、海流などが指摘されている。しかしこれまでの調査・報告によると、まれにしか観測されない津波や高潮に比べて副振動の発生頻度は高く、特に風や波が荒くなくても副振動現象が確認されていることなどから、波浪に起因すると考えることが自然であると考えられてきた。しかし通常の風波の周期は高々十数秒程度であるため、それが直接の原因となることはないため 1980 年代までは原因は明らかでないままであった。しかし最近になって浅海域にごく普通に観測される 2 次の非線形長周期波も港湾の副振動の原因となり得ることが指摘され、にわかにこの 2 次長周期波が注目されるようになった¹⁷⁾。我が国でも金山ら¹⁸⁾により現地調査、水理実験および数値計算が行われ、湾水振動を総合的に評価するためには非線形波を考慮することが不可欠であるとの指摘がなされている。詳細については次章で説明するがこれらの指摘の重要性が理解され、現在ではいくつかのモデルが考案されるまでになっている^{19)~22)}。しかしこれらの方法は支配方程式を数値的に解くことによって湾水の振動特性を求めるものが多く、計算に多大な時間を要すること、波浪の不規則性を間接的に表現するため、一般の建設技術者にとって馴染みのあるエネルギースペクトルを直接モデルに入力して計算することができないこと、などの理由から決して使い易いものとはなっていない。

『港湾の施設の技術上の基準・同解説』²³⁾においては「副振動の予想される港湾では、設計潮位の決定や泊地における静穏度の検討に際して、必要に応じ、副振動を考慮するものとする。」と述べられているが、その解説には前述の風波による共振理論が説明されているものの、1960 年代以降の長周期波を対象とした研究の成果は取り入れられていない。その理由としては非線形性を考慮した港内波高計算を行うには、現状では高度な数値計算に頼るしかなく、任意の波浪条件を入力した時に、比較的簡単に計算できる手法が開発されていないことが一因であろう。このような状況下で、高度な数値計算を行うことなく、外海から港湾内に進入する連続スペクトルをもつ波浪による湾水の長周期振動を計算できるモデルの開発が望まれている。

本研究は長周期の波による湾水振動現象の理解のための基礎資料とすることを目的とし、単純な長方形の港湾モデルを想定して、任意のスペクトルを持つ不規則波が港湾内に入射したときの長周期振動特性を求める方法を示したものである。こうして単純化された港湾モデルによって得られる成果は、複雑な形状の港湾での湾水振動の解析に対する基礎資料となり、高度な数値計算を要しないため一般の技術者も容易に利用することが可能となると考える。以下各章における概要を述べれば、次のとおりである。

第2章では、過去における2次長周期波による湾水振動に関する研究について概説するとともに、本研究の基礎モデルとなっている Ippen-Goda¹⁶⁾による湾水振動モデルについて説明する。

第3章ではまず、1次成分波どうしが相互に干渉することによって発生する2次の非線形干渉波の理論式を示す。本研究ではこの非線形干渉波のうち、周波数差と波数差の成分をもつ2次波が長周期の湾水振動を引き起こす原因であると考えた。この章ではまず2成分からなる合成波が長方形の単純な形状の港湾に直角入射した場合について、2次長周期波が港湾の振動にどのように関与しているかを示す。

第4章では、前章で得た結果をもとに、無数に多くの成分波から構成される一方向不規則波が港湾に入射する場合を対象としてモデルを拡張する。この場合、港内外にはすべての成分波ごとに第3章で説明した1次波の重複波が発生し、さらに各成分波が相互に干渉して2次長周期波が発生する。計算の際には1次波の初期位相角の情報が必要となるが、これを平均化操作することにより、任意のスペクトルを持つ一方向不規則波浪による湾水の長周期振動特性が計算できるようにした。

第5章では、より一般的な状況に対応するための基礎的な検討を目的として、波浪が港湾に対して斜めに入射する場合の影響を調べ、この場合の湾水の長周期振動特性を明らかにして、来襲波の方向性が湾水の長周期振動特性に与える影響が評価できるようにした。

第6章ではこの研究で得られた成果を要約して結論とする。

参考文献

- 1) 岩垣雄一・榎木 亨：海岸工学，共立出版，pp.1-2，1979.
- 2) 土木学会編：土木工学ハンドブック，技報堂出版，pp.2219，1974.
- 3) 永井荘一郎：港湾工学（改訂増補版），オーム社，p.1，1965.
- 4) （社）日本港湾協会：港湾の施設の技術上の基準・同解説（下），pp.12，1989.
- 5) 宇野木早苗：港湾のセイシュと長周期波について，第6回海岸工学講演会講演集，pp.1-11，1959.
- 6) 田端竹千穂・田所篤博・平石哲也・玉城重則：港湾における長周期波の増幅現象に関する現地観測，海岸工学論文集第42巻，pp.301-305，1995.
- 7) 永井紀彦・橋本典明・浅井正・戸引勲・伊藤一教・東江隆夫・小林昭男・柴田孝雄：現地データに基づく港内係留船舶の動揺に及ぼす港外長周期波，海岸工学論文集第41巻，pp.931-935，1994.
- 8) 小谷野喜二・数土勉・宮地陽輔：苫小牧西港における副振動特性について，海岸工学論文集第33巻，pp.85-89，1986.
- 9) 松良精三・渥美洋一・菅沼史典・宮本義憲：波群に拘束された長周期波の港内における増幅特性と船体動揺に関する現地観測，海岸工学論文集第41巻，pp.71-75，1994.
- 10) 菅沼史典・神谷昌文・渥美洋一・小泉信男：現地観測による長周期波の発生頻度と船体動揺発生予測の検討，海岸工学論文集第42巻，pp.951-955，1995.
- 11) 神谷昌文・渥美洋一・國田淳・関口信一郎・木村克俊・平石哲也・白石悟・上田茂：長周期波に対する荷役稼働率の評価法とその改善策，海岸工学論文集第43巻，pp.891-895，1996.
- 12) 渥美洋一・若山義樹・國田淳・関口信一郎・川口勉・平石哲也・青木伸一・上田茂：長周期波の港内侵入過程の現地観測と長周期波高予測式の検討，海岸工学論文集第44巻，pp.221-225，1997.
- 13) 土田充・灘岡和夫・西村剛士・佐藤恒夫・山口孝市・平石哲也：多点観測による港内外の波浪特性と港内係留船舶の長周期動揺特性について，海岸工学論文集第44巻，pp.231-235，1997.
- 14) Le-Mehaute, B. : Theory of wave agitation in a harbor, Proc. ASCE, Vol. 87, HY2, pp.31-50, 1961.
- 15) Miles, J. W. and W. Munk : Harbor paradox, Proc. ASCE, vol. 87, WW3, pp.111-130, Aug., 1961.
- 16) Ippen, A. T. and Y. Goda : Wave induced oscillation in harbors, the solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, MIT, 90p., 1963.
- 17) Bowers, E. C. : Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, J. Fluid

- Mech., Vol.79, part1, pp.71-92, 1977.
- 18) 金山進・田口智・清水琢三・長船徹・植木一浩・中原和彦：ブジネスク方程式による港内長周期水位変動の数値計算，海岸工学論文集第 42 巻，pp.291-295, 1995.
 - 19) Mei, C. C. and Y. Agnon : Long period oscillations in a harbour induced by incident short waves, J. Fluid Mech., Vol. 208, pp.595-608, 1989.
 - 20) Wu, J. -K and P. L. -F. Liu : Harbour excitations by incident wave groups, J. Fluid Mech., Vol. 217, pp.595-613, 1990.
 - 21) 佐藤典之・磯部雅彦・泉宮尊司：任意形状港湾に対する不規則波の港内波高分布計算法の改良，海岸工学論文集第 35 巻，pp.257-261, 1988.
 - 22) 喜岡 渉・柏原謙爾・岩垣雄一：不規則波群に伴う 2 次長周期波の湾水振動，土木学会論文集，No. 473/II-24, pp.55-64, 1993.
 - 23) (社) 日本港湾協会：港湾の施設の技術上の基準・同解説（上），pp.144, 1989.

第2章 2次長周期波による港湾の振動に関する従来の研究

第1節 概説

ここではまず一般的な湾水振動に関する従来の研究のうち主要なものについて簡単に説明する。本研究でその理論を拡張した Ippen-Goda¹⁾の理論については第2節で改めて説明する。一般に湾水振動問題は大きく分けて、池や水槽のような閉鎖水域における自由振動問題と、港や湾のように水域の一部が外海とつながって外海の浪の影響を受ける強制振動問題がある。本研究では後者の場合のみを取り扱う。すなわち外海との接続を考慮しているので、外海からの波のエネルギーが港口部を通じて港内に輸送されて湾内に振動を励起する。しかし港内波のエネルギーも港口部を通じて外海へ放射されるのでエネルギー授受がバランスして港内の振幅が決まる。港口部から外海へ逸散するエネルギーは、湾水の振動モードによって異なり、ある特定の周期では港口部で反射されるエネルギーが多くなり水域内に閉じこめられエネルギーが多くなるため水域内の振幅が著しく増幅される。これが湾水振動の基本的なメカニズムである。このメカニズムは1960年代の初頭に Le Mehaute²⁾, Miles Munk³⁾, Ippen-Goda¹⁾らによって理論的に解明された。

Le Mehaute²⁾は、港湾内外で水深が急変する長方形港湾のモデルを考えて湾水の振動を解析した。彼は波を微小振幅と仮定し、港外側の湾幅 B が波長 L の $1/2$ 以下という条件で近似的な解を求めている。理論の展開にあたっては波を複素数表示することによって港内外の多重反射波浪場を簡単に表現する方法を示し、波の進行に伴う底面摩擦の影響、湾奥での反射率などを考慮した解を与えている。

Miles Munk³⁾は、外海に面した任意形状の港湾に対し、積分方程式を用いて共振時の湾水振動の解を求めている。実際の計算に際しては開口幅と湾幅が波長に比して小さい長方形の港湾に限定している。開口幅を狭めることによって外海から侵入する振動エネルギーを減少させても必ずしも湾水振動は小さくならず、むしろ共振状態の波高増幅率が増大する現象すなわちハーバーパラドックスの存在を理論的に示した。しかし実際には開口幅が狭くなると、港口部での波のエネルギー逸散量が大きくなるため共振時にも異常に大きい増幅率にはならず、ハーバーパラドックスは起こりにくいことが指摘されている。

Ippen-Goda¹⁾は、外海に接した防波堤開口部をもつ長方形港湾の強制振動を線形理論により解析的に取り扱い、基本モードの共振現象は湾長が入射波の波長の $1/4$ の長さの場合に発生することなどを明らかにしている。本研究ではこのモデルで用いられた手法を用いて理論を展開するので第2節において改めて説明する。

これらの研究はいずれも通常の風波を対象にしたものであったが、風波の周期は高々十数秒程度であるため、これらの理論で数百 m 以上の規模を持つ港湾で発生する数分オーダーの副振動を説明することはできなかった。

1970年代後半になり1次波の非線形干渉によって発生する2次長周期波が港湾の長周期振動の原因となり得ることがBowers⁴⁾によって示された。

Bowersは、非常に細長い水路の一端に幅の狭い長方形湾の模型を設置し、2成分合成波を入射させた実験を行い、港内では波群に拘束された長波のみならず長周期の自由波も発生し、ある条件下ではこの波が共振現象を引き起こすことを見いだした。この理由として港外と港内の長周期波の水位が港口部において不連続となるため、これを埋めるように港内で長周期の自由波が生じると考えた。村上⁵⁾は、2~3成分からなる合成波による実験と線形理論とを比較し、線形理論の限界を示すとともに合成波の場合には2次干渉の影響が大きいことを指摘している。

1980年代以降は支配方程式を数値的に解く手法が主流となり、Mei-Agnon⁶⁾、Wu-Liu⁷⁾がmultiple-scale摂動法を用いて理論的検討を行っている。Mei-Agnon⁶⁾は、Multiple-scale摂動法を用いて、防波堤のない外海に面した長方形湾に対して高次モードの共振も取り扱うことのできる近似解析法を示している。その際、湾口の幅は波群中に含まれる個々の短周期波の波長に比べて十分に大きく、かつ長周期波の波長に比べると十分に小さいと仮定している。彼らも長周期の自由波が湾水振動を引き起こすことが指摘している。Wu-Liu⁷⁾は、Mei-Agnonと同様にMultiple-scale摂動法を用いて、湾の大きさについて港口の幅が波群中に含まれる個々の短周期波の波長に比べて十分に大きいという条件を与えて近似解析解を示し、二つの細い防波堤によって守られている長方形湾における2次長周期波の応答特性を計算している。わが国でも喜岡ら⁸⁾が、同様にMultiple-scale摂動法を用いて、任意形状の湾に対して計算できるような長周期水面振動の予測手法を示している。しかしこれらの方法では境界条件を与える支配方程式を数値的に解くので、任意形状の港湾を取り扱うことができるものの、波は短周期波の振幅を緩やかに変動させることで不規則性を表現しているにとどまっている。したがって入射波のスペクトルを与えて直接港湾内の長周期波のスペクトルを計算するまでには至っていない。

金山ら⁹⁾は、東京電力(株)福島第二原子力発電所専用港湾における現地観測、水理実験およびブジネスク方程式による数値計算を行い、港口周辺から港内にかけての長周期波を評価するためには非線形項の考慮が不可欠であることを指摘している。しかしこの方法は高度な数値計算および多大な計算時間を要するため、一般の建設技術者が港湾の施設を設計する際に利用し易いとは言えない。本研究は非線形長周期波による湾水の長周期振動現象のメカニズムを検討したもので、矩形の港湾を対象として任意のスペクトルを持つ不規則波が外海から港湾に入射した場合の湾水の長周期振動特性を簡単な式で与えた。したがってこの方法によれば複雑な数値計算を必要とせず、港外の波浪スペクトルを直接扱うことができるため、有義波の諸元および適当な港湾の条件を決定するだけで、比較的容易に港内の長周期振動特性を求めることができる。

第2節 1次波による湾水振動

Ippen と合田は図 2-1 に示すような外海に接した開口部を持った矩形形状の港湾の湾水振動を解析的に取り扱った。以下その過程を示す。

解析にあたり次の5つの条件が仮定されている。すなわち

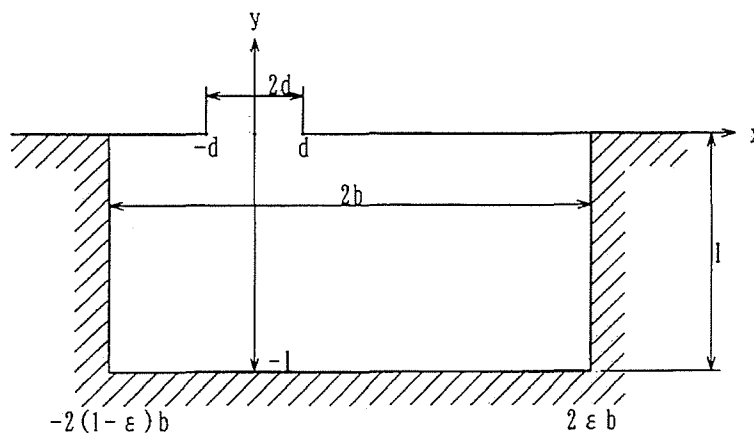


図 2-1 外海に接した開口部を持った矩形形状の港湾

- 1) 港湾内の振動は海岸線に垂直な方向から来襲する規則波によって起こされる。
- 2) すべての境界は完全反射する。
- 3) 水深はどこでも一定である。
- 4) 湾口は狭く、そこでは波の運動は一様である。
- 5) 波は微小振幅で完全流体である。

である。

座標原点は港口の中心とし、海岸線に x 軸、海岸線に直角沖向きに y 軸、静水面より鉛直上向きに z 軸をとる。

速度ポテンシャルを ϕ とすれば、基礎方程式は次式のラプラス式で与えられる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2-1)$$

ϕ を x, y, z, t の関数で表し、次の形を仮定する。

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{i\sigma} f(x, y) Z(z) e^{i\sigma t} \quad (2-2)$$

ここで

$$\sigma = \text{角周波数} = 2\pi/T$$

$$T = \text{周期}$$

である.

関数 $f(x, y)$ と $Z(z)$ をラプラスの式に代入すると次式を得る.

$$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (2-3)$$

(2-3)式を第1項と第2項に分けると, それぞれは x, y および z の関数であり, 上式が恒等的に成立するためには, それぞれは定数でなければならない. いまこれを k^2 と置くと, 底面での境界条件から関数 $Z(z)$ は次式のようになる.

$$Z(z) = ag \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2-4)$$

ここで, h = 水深, a = 振幅である. 水位変動量は水面での境界条件より次式のようになる.

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = af(x, y)e^{i\sigma t} \quad (2-5)$$

(2-4)式と(2-5)式に含まれる定数 k は水面における2次の連続式から決定される.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

すなわち

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (2-6)$$

となる. 以上の結果を(2-3)式に代入すると, 次のヘルムホルツ式が求められる.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0 \quad (2-7)$$

これが $f(x, y)$ の支配方程式となる. この式を $f(x, y)$ に対する境界条件

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad x = 2\epsilon b \quad -2(1-\epsilon)b, -l \leq y \leq 0 \quad (2-8-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad |x| > d, y = 0 \quad (2-8-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad -2(1-\varepsilon)b \leq x \leq 2\varepsilon b, y = -l \quad (2-8-3)$$

$$f(x, y) = \cos ky \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (2-8-4)$$

を満たすように解くことが与えられた問題となる。通常行われるように波の場を港外と港内の2つの領域に分け、港外の諸元に添字1、港内の諸元に添字2をつけて表すことにする。港口において水位が等しくかつ連続であることを表す接続条件は、港口の幅を入射波の波長に比して短いと仮定したので

$$\eta_1(x, 0) = \eta_2(x, 0) \quad \text{at} \quad |x| \leq d \quad (2-9)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{at} \quad |x| \leq d \quad (2-10)$$

となる。すなわち港内から十分離れた点における f_1 あるいは f_2 と ω だけ位相がずれるものとする。

(2-10)式の両辺を次式に示すように、港口において定数 $kce^{i\omega}$ に等しいと置く。 c は定数であり後で決定される。

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)_{y=0} = kce^{i\omega} \quad \text{at} \quad |x| \leq d \quad (2-11)$$

(2-8-4)式に述べたように、波は湾口から離れた領域では重複波となる。この重複波は(2-7)式を満足し、 $y=0$ において水面勾配 $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ となるので、(2-11)式のように位相がずれる状況を重複波と未知の関数である $f_3(x, y)$ との和で表し、次式のように仮定する。

$$f_1(x, y) = \cos ky + kce^{i\omega} f_3(x, y) \quad (2-12)$$

港外での水位 η_1 は、(2-12)式から次式のように表される。

$$\eta_1(x, y, t) = a \cos kye^{i\omega t} + akcf_3(x, y)e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (2-13)$$

$f_3(x, y)$ に対する境界条件は、(2-8-2), (2-8-4), (2-11)式より次式のようになる。

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} 1 & \text{at } |x| \leq d \\ 0 & \text{at } |x| \geq d \end{cases} \quad (2-14-1)$$

$$f_3(x, y) = 0 \quad \text{as } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (2-14-2)$$

いま次式で定義される $f_3(x, y)$ のフーリエ変換を $F(u, y)$ と置く。この関数をラプラスの式に代入すると、 $F(u, y)$ に対する微分方程式が(2-7)式より導かれる。

$$F(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f_3(x, y) dx \quad (2-15)$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} F(u, y) du$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k^2 + u^2)F = 0 \quad (2-16)$$

(2-14)式の境界条件は $F(u, y)$ の場合

$$\left[\frac{\partial F(u, y)}{\partial y}\right]_{y=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \left[\frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0} dx \quad (2-17-1)$$

$$= \frac{2 \sin ud}{u}$$

$$F(u, y) = 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (2-17-2)$$

となる。(2-16)式の微分方程式の一般解は次式で与えられる。

$$F(u, y) = C_1(u) e^{\sqrt{u^2 - k^2} y} + C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} \quad (2-18)$$

(2-18)式の定数 C_1, C_2 を決定するために u の範囲を、 $|u| > k$ の場合と $|u| < k$ の場合の 2 つに分けて考える。

i) $|u| > k$ の場合

この場合、(2-17-2)式より $y \rightarrow \infty$ の時に $F(u, y) = 0$ とならなければならない。よって

$C_1(u)$ は 0 とならなければならない。したがって(2-17-1)式より $C_2(u)$ が得られ、 $F(u, y)$ が決まる。

$$F(u, y) = -\frac{2 \sin ud}{u \sqrt{u^2 - k^2}} e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} \quad (2-19)$$

ii) $|u| < k$ の場合

この場合、(2-18)式の両項とも振動項となる。

$$F(u, y) = C_1(u) e^{i\sqrt{k^2 - u^2} y} + C_2(u) e^{-i\sqrt{k^2 - u^2} y}$$

$F(u, y)$ の第 1 項は沖から岸へ向かう波を表し、第 2 項は岸から沖へ向かう波を表している。($f_3(x, y)$ は $\exp\left\{i\left(\sqrt{k^2 - u^2} y + \sigma t\right)\right\}$ の項を持っているので沖から岸に向かう波である。) 入射波以外に岸に向かう波はないので、 $f_3(x, y)$ には岸に向かう波をあらわす項はないはずである。したがって $C_1(u)$ を 0 と置くと、フーリエ変換 $F(u, y)$ は(2-17-1)式から次式のように決まる。

$$F(u, y) = i \frac{2 \sin ud}{u \sqrt{k^2 - u^2}} e^{-i\sqrt{k^2 - u^2} y} \quad (2-20)$$

いまここで波の関数である $f_3(x, y)$ は(2-19)式と(2-20)式から次式のようになる。

$$f_3(x, y) = iI_1 - I_2 \quad (2-21)$$

ここで

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^k \frac{\sin ud}{u \sqrt{k^2 - u^2}} \cos ux e^{-i\sqrt{k^2 - u^2} y} du \quad (2-21-1)$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_k^\infty \frac{\sin ud}{u \sqrt{u^2 - k^2}} \cos ux e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} du \quad (2-21-2)$$

である。これで港外の水位変動 η_1 は(2-12)式より次式のようになる。

$$\eta_1 = a \cos ky e^{i\alpha} + akc(iI_1 - I_2) e^{i(\alpha+\omega)} \quad (2-22)$$

次に港内の水位変動を求めるために $f_2(x, y)$ を次式に示すような変数分離できる形に仮定する。

$$f_2(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2-23)$$

上式をヘルムホルツの式に代入すると

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (2-24)$$

を得る。(2-24)式の左辺は y のみの関数であり、右辺は x のみの関数であるので、上式が恒常的に成立するためには両者は定数に等しくなければならず、これを α^2 と置くと、関数 $X(x)$ と $Y(y)$ の一般解は次のようになる。

$$X(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \quad (2-25)$$

$$Y(y) = Ce^{\sqrt{\alpha^2 - k^2} y} + De^{-\sqrt{\alpha^2 - k^2} y} \quad (2-26)$$

港の壁面を横切る流速成分は 0 であるという境界条件(2-8-1)式より定数 A および B に対する方程式は次式のようにになる。

$$\left[\frac{dX}{dx} \right]_{x=2\epsilon b} = i\alpha [Ae^{2i\alpha\epsilon b} - Be^{-2i\alpha\epsilon b}] = 0$$

$$\left[\frac{dX}{dx} \right]_{x=2(\epsilon-1)b} = i\alpha [Ae^{2i\alpha(\epsilon-1)b} - Be^{-2i\alpha(\epsilon-1)b}] = 0$$

これらは A と B に対する同次の連立方程式であるので、それぞれの解が存在するためには次の関係が保たなければならない。

$$e^{2i\alpha b} - e^{-2i\alpha b} = 0$$

あるいは

$$\sin 2\alpha b = 0$$

その結果、定数 α は次式を満たさなければならない。

$$\alpha = \frac{n\pi}{2b} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-27)$$

(2-27)式で定義される α を用いると、定数 A と B が次のように導かれる。

$$A = \frac{B_n}{2} e^{-i\epsilon n\pi}$$

$$B = \frac{B_n}{2} e^{i\epsilon n\pi}$$

したがって関数 $X(x)$ は次式のようになる。

$$X(x) = B_n \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\epsilon b) \quad (2-28)$$

(2-26)式中の $Y(y)$ に含まれる定数 C および D は港の背後の壁での境界条件(2-8-3)式より得られる。すなわち(2-26)式を y で微分して、 $y = -l$ を代入すると次式のようになる。

$$\left[\frac{dY}{dy} \right]_{y=-l} = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \left[C e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k^2}} - D e^{l\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] = 0$$

これを満たす C 、 D は

$$C = \frac{C_n}{2} e^{l\sqrt{\alpha^2 - k^2}}$$

$$D = \frac{C_n}{2} e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k^2}}$$

となる。ここに C_n は定数である。したがって関数 $Y(y)$ は次式のようになる。

$$Y(y) = C_n \cosh[\beta_n k (y + l)] \quad (2-29)$$

ここで

$$\beta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2kb} \right)^2 - 1} \quad (\text{実数か虚数のどちらか}) \quad (2-30)$$

C_n を A_n でおき替えると、関数 $f_2(x, y)$ は次式のようになる。

$$f_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (x - 2\epsilon b) \right] \cosh[\beta_n k (y + l)] \quad (2-31)$$

$y=0$ における $f_2(x, y)$ の y に関する微分は次式の $4b$ のモードをもつフーリエ余弦級数となる。

$$\left[\frac{\partial f_2}{\partial y} \right]_{y=0} = -A_0 k \sin kl + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \beta_n k \sinh(\beta_n kl) \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (x - 2\epsilon b) \right]$$

境界条件(2-8-2)式と(2-11)式が与えられると、級数 A_0 と A_n はフーリエ余弦級数式として次のように決定される。

$$A_0 = -\frac{\int_{2\epsilon b-d}^{2\epsilon b+d} kce^{i\omega} dx}{2bk \sin kl} = -\frac{cde^{i\omega}}{b \sin kl}$$

$$A_n = \frac{\int_{2\epsilon b-d}^{2\epsilon b+d} kce^{i\omega} \cos \frac{n\pi x}{2b} dx}{b\beta_n k \sinh \beta_n kl} = \frac{4ce^{i\omega} \sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \epsilon n\pi}{n\pi\beta_n \sin \beta_n kl}$$

これを(2-31)式に代入すると $f_2(x, y)$ が形式的に次のように決定される。

$$f_2(x, y) = -\frac{cde^{i\omega}}{b \sin kl} [\cos k(y + l) - S(x, y)] \quad (2-32)$$

ここに

$$S(x, y) = \frac{4b \sin kl}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \epsilon n\pi}{n\beta_n \sinh \beta_n kl} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\epsilon b) \cosh \beta_n k (y + l) \quad (2-33)$$

である。港内の水位変動 η_2 は $\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ より

$$\eta_2(x, y, t) = -\frac{acd}{b \sin kl} e^{i(\sigma + \omega)} [\cos k(y + l) - S(x, y)] \quad (2-34)$$

となる。ただし $n\pi < 2kb$ の範囲では次の変換をしなければならない。

$$\beta_n = i\beta_n' = i\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{2kb}\right)^2}$$

$$\frac{\cosh \beta_n k(y+l)}{\beta_n \sinh \beta_n kl} = -\frac{\cos \beta_n' k(y+l)}{\beta_n' \sin \beta_n' kl}$$

この段階では、 c と位相角 ω はまだ決まっていない。これらの値は港口で水位を接続することによって決定する。すなわち(2-22)式と(2-34)式に示すように、港口での水位には $\eta_1|_{y=0}$ および $\eta_2|_{y=0}$ の 2 つが存在する。(2-22)式、(2-34)式から分かるように、これらは共に x を含む関数であり、この方向に変位する。しかし最初の仮定(4)より港口は波長に比して十分狭いとしているので、ここでは港口での x 軸方向の水位の変化を無視する。すなわち港口に沿って全ての点で湾外と湾内の水位を接続する代わりに、港口での水位の平均値を(2-9)式に対する近似値として使う。

まず港外の波の平均値は(2-21)式より

$$\begin{aligned} \overline{f_3(x,0)} &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d f_3(x,0) dx \\ &= \frac{1}{\pi d} \left[i \int_{-d}^d dx \int_0^k \frac{\sin ud}{u\sqrt{k^2-u^2}} \cos ux du - \int_{-d}^d dx \int_k^\infty \frac{\sin ud}{u\sqrt{u^2-k^2}} \cos ux du \right] \end{aligned}$$

となる。積分の順序を変え、 x に関する積分の値を先に求めることによって

$$\overline{f_3(x,0)} = \frac{2}{\pi d} \left[i \int_0^k \frac{\sin^2 ud}{u^2 \sqrt{k^2-u^2}} du - \int_k^\infty \frac{\sin^2 ud}{u^2 \sqrt{u^2-k^2}} du \right]$$

を得る。いま $\alpha = ud$ とおくことによって上の式は次のように書き換えられる。

$$\overline{f_3(x,0)} = \frac{1}{k} [i\psi_1 - \psi_2] \quad (2-35)$$

ここで

$$\psi_1 = \psi_1(kd) = \frac{2}{\pi} kd \int_0^{kd} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{(kd)^2 - \alpha^2}} d\alpha \quad (2-36-1)$$

$$\psi_2 = \psi_2(kd) = \frac{2}{\pi} kd \int_{kd}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - (kd)^2}} d\alpha \quad (2-36-2)$$

とおくと、港口における港外の平均の水位変動が次のように表される。

$$\overline{\eta_1(x,0)} = ae^{i\alpha} + ace^{i(\alpha+\omega)} [i\psi_1 - \psi_2] \quad (2-37)$$

これらの ψ_1 および ψ_2 は kd の関数であって、図2-2のように与えられる。

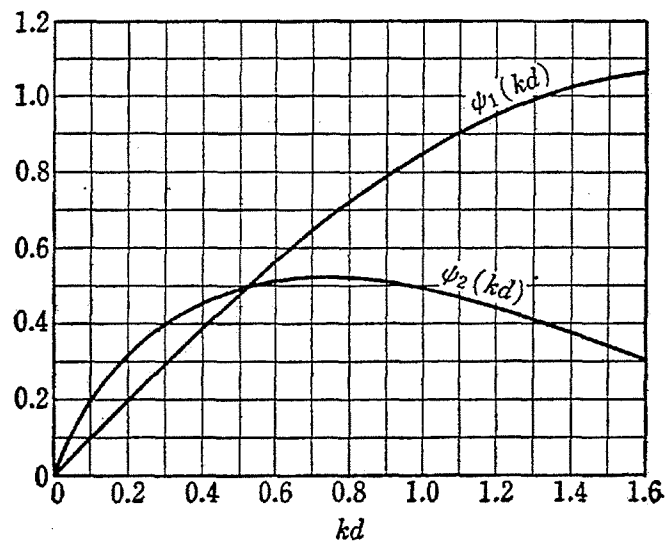


図2-2 ψ_1 および ψ_2 と kd との関係 (Ippen-Goda より)

次に港口における港内の平均の水位変動は(2-34)式より次のように計算される。

$$\begin{aligned} \overline{\eta_2(x,0)} &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{-acd}{b \sin kl} e^{i(\alpha+\omega)} [\cos kl - S(x,0)] dx \\ &= -\frac{acd}{b} e^{i(\alpha+\omega)} [\cot kl - S_1] \end{aligned} \quad (2-38)$$

ここで

$$S_1 = 8 \left(\frac{b}{\pi d} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \varepsilon n \pi \right)^2}{n^2 \beta_n \tanh \beta_n kl} \quad (2-39)$$

である。いま(2-9)式に(2-37)式および(2-38)式を代入すると c と ω に関する次式が得られる。

$$a + ace^{i\omega} [i\psi_1 - \psi_2] = -\frac{acd}{b} e^{i\omega} [\cot kl - S_1]$$

上式の両辺を $ae^{i\omega}$ で割ると次式のようになる。

$$e^{-i\omega} + c[i\psi_1 - \psi_2] = -\frac{cd}{b} [\cot kl - S_1] \quad (2-40)$$

(2-40)式を実部と虚部に分けることによって c と ω に関する連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} \cos \omega + c \left[\frac{d}{b} (\cot kl - S_1) - \psi_2 \right] &= 0 \\ -\sin \omega + c\psi_1 &= 0 \end{aligned}$$

上式より定数 c と位相角 ω が次のように決まる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d}{b} (\cot kl - S_1) - \psi_2 \right]^2 + \psi_1^2}} \quad (2-41)$$

$$\omega = -\tan^{-1} \frac{\psi_1}{\frac{d}{b} (\cot kl - S_1) - \psi_2} \quad (2-42)$$

次に増幅率を港内と港外との重複波の振幅の比と定義する。港内の任意の点での増幅率は(2-34)式と(2-41)式よりは次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x,y} &= \frac{|\eta_2(x,y)|}{a} \\ &= \frac{|\cos k(y+l) - S(x,y)|}{\sqrt{\left[\cos kl - \left(S_1 + \frac{b}{d} \psi_2 \right) \sin kl \right]^2 + \left(\frac{b}{d} \psi_1 \sin kl \right)^2}} \end{aligned} \quad (2-43)$$

上式は、港内の任意の点 (x, y) での増幅率を与える。 R の値は x, y により変化する。すなわち、場所ごとに変化する。さらに港内での最大振幅が発生する位置は必ずしも一定ではなく、港内の波によって変化する。しかし一般的には港奥の隅 $(x = 2eb, y = -l)$ での増幅率が最大もしくはそれに近くなることが分かっているので、最大を増幅率を隅の位置での値として定義する。

$$M = \frac{|1 - S_2|}{\sqrt{\left[\cos kl - \left(S_1 + \frac{b}{d} \psi_2 \right) \sin kl \right]^2 + \left(\frac{b}{d} \psi_1 \sin kl \right)^2}} \quad (2-44)$$

となる。ここで

$$S_2 = \frac{4b}{\pi d} \sin kl \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \epsilon n \pi}{n \beta_n \sinh \beta_n kl} \quad (2-45)$$

である。(2-44)式より計算した防波堤がある対称形港湾に対する周波数応答曲線が図 2-3 である。

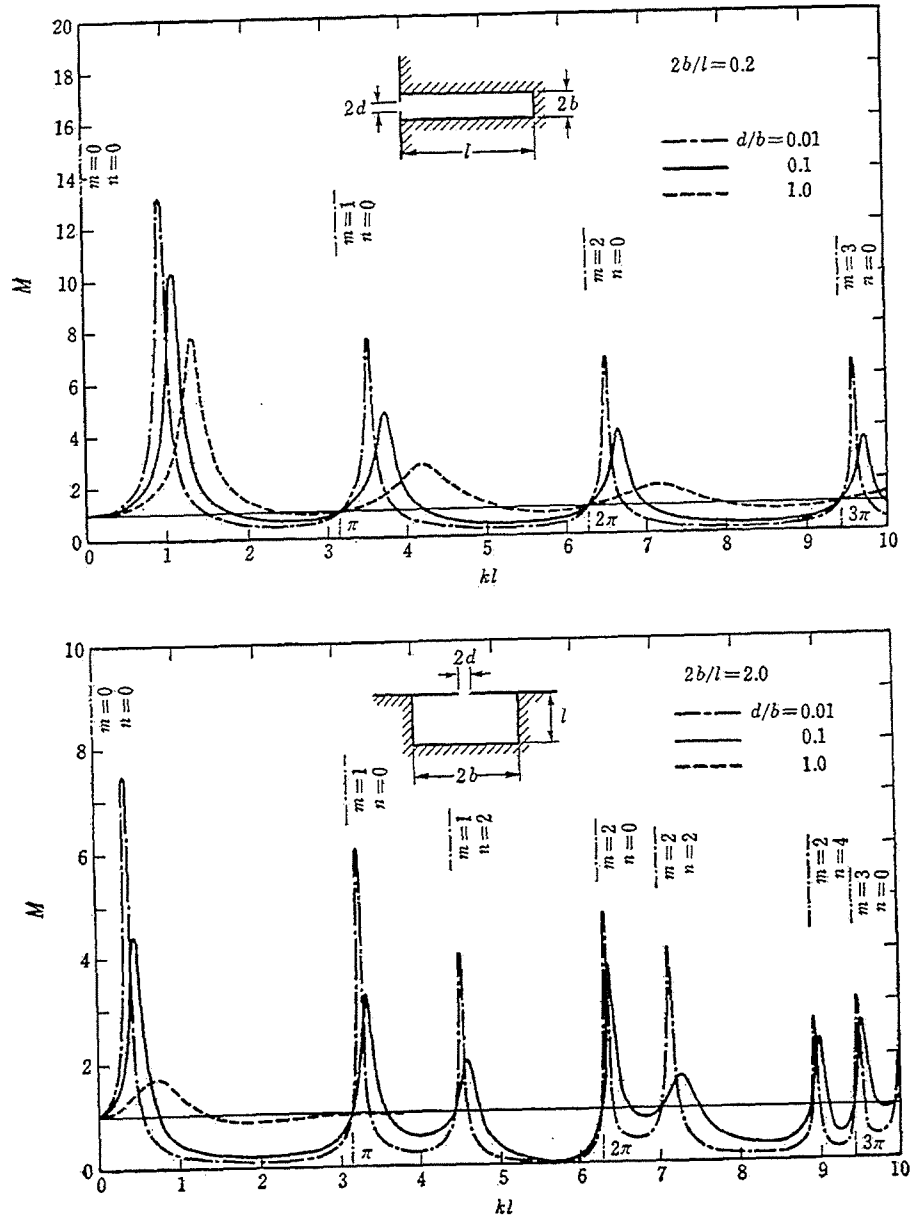


図 2-3 防波堤がある場合の対称形港湾の周波数応答曲線 (Ippen-Goda より)

参考文献

- 1) Ippen, A. T. and Y. Goda : Wave induced oscillation in harbors, the solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, MIT, 90p., 1963.
- 2) Le Mehaute, B. : Theory of wave agitation in a harbor, Proc. ASCE, Vol. 87, HY2, pp.31-50, 1961.
- 3) Miles, J. W. and W. Munk : Harbor paradox, Proc. ASCE, vol. 87, WW3, pp.111-130, Aug., 1961.
- 4) Bowers, E. C. : Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, J. Fluid Mech., Vol.79, part1, pp.71-92, 1977.
- 5) 村上仁士:長方形港湾における湾水振動に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 118p., 1975.
- 6) Mei, C. C. and Y. Agnon : Long period oscillations in a harbour induced by incident short waves, J. Fluid Mech., Vol. 208, pp.595-608, 1989.
- 7) Wu, J. -K and P. L. -F. Liu : Harbour excitations by incident wave groups, J. Fluid Mech., Vol. 217, pp.595-613, 1990.
- 8) 喜岡 渉・柏原謙爾・岩垣雄一 : 不規則波群に伴う 2 次長周期波の湾水振動, 土木学会論文集, No. 473/II-24, pp.55-64, 1993.
- 9) 金山進・田口智・清水琢三・長船徹・植木一浩・中原和彦 : ブジネスク方程式による港内長周期水位変動の数値計算, 海岸工学論文集第 42 巻, pp.291-295, 1995.

第3章 2成分合成波による2次長周期波の湾水振動

第1節 概説

前章において Ippen-Goda¹⁾による1次波の湾水振動のモデルを示した。この理論によると湾長が入射波の波長のほぼ1/4の長さの場合に基本モード(最大)の共振現象が発生する。しかし通常、風波の周期は高々10s程度であるため、数百m以上の規模を持つ港湾で発生する数分のオーダーの副振動は風波が直接の原因とは考えにくい。最近になって浅海域にごく普通に観測される2次の非線形長周期波も港湾の副振動の原因となり得ることが Bowers (1977)²⁾らによって示された。またこの2次の非線形長周期波のうち周波数差の波が surf beat, 浮体の長周期動揺, 係留索の切断等の様々な物理現象を引き起こすと考えられている。そこで第2節においてラプラス方程式を摂動法を用いることによって解き、不規則な波浪場における2次の非線形干渉波の理論を誘導した Sharma-Dean (1979)³⁾の理論を示す。第3節ではこの2次の非線形長周期波が副振動に及ぼす影響を明らかにするための長周期振動モデルの理論式を誘導し、第4節では計算を通じて理論の特性を示す。

第2節 2次の非線形干渉波

不規則波浪場における波相互の非線形干渉に関する研究は Tick⁴⁾によって初めて行われた。彼はラプラスの方程式に摂動法を適用することで第2近似解を得、不規則波に含まれる1次成分波相互の非線形干渉により、その周波数の和と差の2次干渉波が発生することを示した。その後、Longuet-Higgins, Stewart (1964)⁵⁾らにより、Radiation stress の概念が提案され、一様な波の場では wave set down と呼ばれる平均水位の低下が生じることが明らかにされ、これが2次干渉波のうち周波数差の成分波と同じものであることが示された。ここでは不規則な波浪場における2次の非線形干渉波の理論を誘導した Sharma-Dean (1979)³⁾の理論を示す。

粘性が無視できるほど小さく、かつ非圧縮、非回転であるならば水粒子速度は、速度ポテンシャル ϕ を用いて次のように与えられる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3-1)$$

非圧縮性流体の連続式に(3-1)式を代入すれば以下に示す Laplace の方程式が得られる。

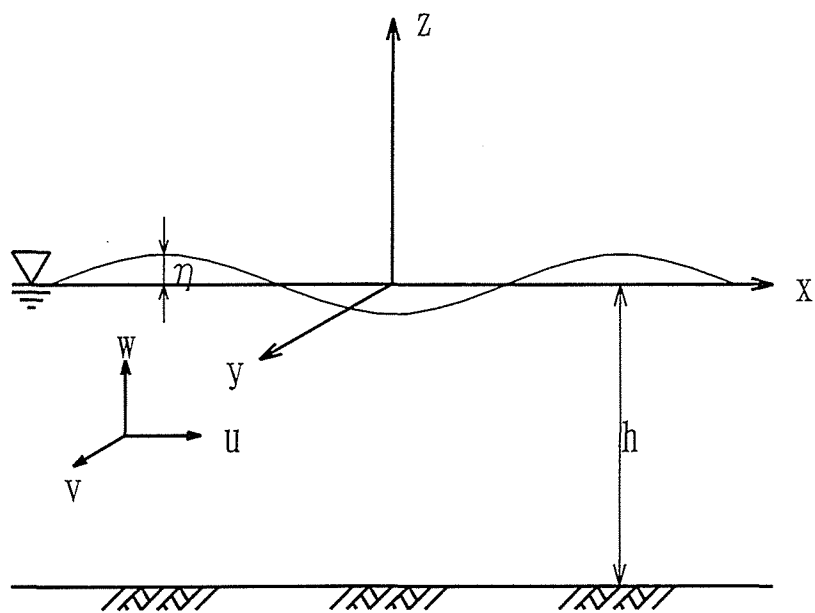


图3-1 坐标系

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3-2)$$

$$(-h \leq z \leq \eta, \quad -\infty \leq x, y \leq \infty)$$

ここに h は水深, η は水位変動である. (3-2)式で示される基礎方程式が満たさなければならぬ 3つの境界条件を以下に示す. 座標系は図 3-1 に示すとおりである.

(1) 底面境界条件:

底面に垂直な方向の水粒子速度は底面において 0 である. すなわち固定床を通じて水の出入りはないという条件は, 例えば水深 h で水平床の場合

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h, \quad -\infty \leq x, y \leq \infty) \quad (3-3)$$

で与えられる.

(2) 水面における運動学的境界条件:

水表面上にある水粒子は常に水表面上にあるという条件は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = w \quad (z = \eta) \quad (3-4)$$

で与えられる.

(3) 水面における力学的境界条件:

水面において圧力は大気圧に等しい. すなわち水面での圧力は 0 に等しいという条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = 0 \quad (z = \eta) \quad (3-5)$$

で与えられる.

上記の(2)(3)の境界条件より η を消去すると次に示す(4)の境界条件が得られる

(4) 水面における結合境界条件:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \right) \left| \vec{\nabla} \phi \right|^2 = 0 \quad (z = \eta) \quad (3-6)$$

この境界条件は非線型であるので、これを線型化するためにまず、全ての変数を以下に示すような微小なパラメータのべき級数として展開する。すなわち

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots \\ \eta &= \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots \\ u &= u^{(1)} + u^{(2)} + \dots\end{aligned}\tag{3-7}$$

これらの微小なパラメータをラプラスの方程式に代入すると、各べきごとに

$$\nabla^2 \phi^{(1)} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \phi^{(2)} = 0 \quad \dots\tag{3-8}$$

が得られる。また(1)の境界条件に代入すると

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad (z = -h)\tag{3-9}$$

を得る。さらに非線型な境界条件(4)を平均水位 $z=0$ のまわりにテーラー級数に展開すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\nabla} \phi \cdot \bar{\nabla} \right) |\bar{\nabla} \phi|^2 \right\} = 0 \quad (z = 0)\tag{3-10}$$

を得る。(3-10)式に(3-7)式を代入すると

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots) + g \frac{\partial}{\partial z} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ |\bar{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots)|^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots) \cdot \bar{\nabla} |\bar{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots)|^2 \\ &\quad + (\eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots) \left\{ \frac{\partial^3}{\partial z \partial t^2} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots) + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\phi^{(2)} + \phi^{(2)} + \dots) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} |\bar{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots) \cdot \bar{\nabla} |\bar{\nabla} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots)|^2 \right\}\end{aligned}\tag{3-11}$$

を得る。上式より同じ次数の項をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \\
& + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \\
& + \frac{\partial}{\partial t} |\overline{\nabla \phi^{(1)}}|^2 + \eta^{(1)} \left(\frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) \\
& + 3\text{次以上の項}
\end{aligned} \tag{3-12}$$

(3)の力学的境界条件も同様に平均水位 $z=0$ のまわりにテーラー級数に展開すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left\{ g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = 0 \quad (z=0) \tag{3-13}$$

同様に(3-13)式の ϕ , η に対して(3-7)式を代入し、同じ次数の項をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
0 = & g\eta^{(1)} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \\
& + g\eta^{(2)} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\overline{\nabla \phi^{(1)}}|^2 + \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \\
& + 3\text{次以上の項}
\end{aligned} \tag{3-14}$$

前述の非線形な境界値問題は摂動法を用いることにより、以下に示す線形な境界値問題へ変換される。すなわち(3-8), (3-9), (3-12), (3-14)式より同じ次数の項をまとめると以下のようなになる。

1次:

$$\nabla^2 \phi^{(1)} = 0 \tag{3-15}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \tag{3-16}$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \tag{3-17}$$

$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \quad (z=0) \quad (3-18)$$

2次:

$$\nabla^2 \phi^{(2)} = 0 \quad (3-19)$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad (3-20)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla} \phi^{(1)}|^2 - \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right\} \quad (z=0) \quad (3-21)$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi^{(1)}|^2 + \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right\} \quad (z=0) \quad (3-22)$$

1次波動場に対する速度ポテンシャルを次の様に仮定する。

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cosh k_n (h+z)}{\cosh k_n h} \sin(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \varepsilon_n) \quad (3-23)$$

(3-23)式は(3-15), (3-16)で与えられる境界条件を満足する。すなわち

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi^{(1)} &= 0 \\ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} &= 0 \quad (z=-h) \end{aligned} \quad (3-24)$$

(3-18)式より水面形として次式を得る。

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sigma_n \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \varepsilon_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\psi_n) \end{aligned} \quad (3-25)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{b_n \sigma_n}{g}, \quad \psi_n = \vec{k}_n \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \varepsilon_n \\ \sigma_n^2 &= g |\vec{k}_n| \tanh |\vec{k}_n| h \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

ここで g は重力加速度, $a_n, k_n, \varepsilon_n, \sigma_n$ はそれぞれ, 1次成分波の振幅, 波数, 初期位相角, 並びに角周波数であり, 変数の上の矢印はそれぞれがベクトルであることを示す. 次に(3-23), (3-25)式で与えられる1次成分波が干渉しあって生じる2次の速度ポテンシャルを次式のように仮定する.

$$\phi^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^{(2)} \frac{\cosh \left| \vec{k}_{ij}^{(2)} \right| (h+z)}{\cosh \left| \vec{k}_{ij}^{(2)} \right| h} \sin \left(\vec{k}_{ij}^{(2)} \cdot \vec{x} - \sigma_{ij}^{(2)} t + \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) \quad (3-27)$$

上式は(3-19), (3-20)式で与えられる境界条件を満足する.

$$\nabla^2 \phi^{(2)} = 0 \quad \text{及び} \quad \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (3-28)$$

ここで $\vec{k}_{ij}^{(2)}$ は1次波の波数ベクトルの和あるいは差の波数ベクトルであり, $\sigma_{ij}^{(2)}$ は1次成分波の和あるいは差の角周波数である. (3-23)式で与えられる1次の速度ポテンシャルを(3-21)式の右辺第1項に代入すると右辺第1項は次式のようにになる.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left| \vec{\nabla} \phi^{(1)} \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \sigma_j \left[\left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j + R_i R_j \right) \sin(\psi_i - \psi_j) - \left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j - R_i R_j \right) \sin(\psi_i + \psi_j) \right] \quad (3-29)$$

ここで

$$R_i = k_i \tanh k_i h = \frac{(\sigma_i)^2}{g} \quad (3-30)$$

である. (3-29)式の i と j を入れ替えると

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left| \vec{\nabla} \phi^{(1)} \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \sigma_i \left[\left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j + R_i R_j \right) \sin(\psi_i - \psi_j) - \left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j - R_i R_j \right) \sin(\psi_i + \psi_j) \right] \quad (3-31)$$

となる. (3-29)式と(3-31)式の両式を辺々加えあわせて2で割ると次式を得る.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left| \vec{\nabla} \phi^{(1)} \right|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_i b_j \left[(\sigma_i - \sigma_j) \left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j + R_i R_j \right) \sin(\psi_i - \psi_j) + (\sigma_i + \sigma_j) \left(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j - R_i R_j \right) \sin(\psi_i + \psi_j) \right] \quad (3-32)$$

次に(3-21)式の右辺第 2 項は

$$-\eta^{(1)} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t^2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j R_j^2 \sigma_i \{ \sin(\psi_i + \psi_j) - \sin(\psi_i - \psi_j) \} \quad (3-33)$$

となる。同様に(3-21)式の最後の項は

$$-\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j k_j^2 \sigma_i \{ \sin(\psi_i + \psi_j) - \sin(\psi_i - \psi_j) \} \quad (3-34)$$

となる。(3-21)式と(3-34)式を辺々加えあわせて 2 で割ると次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi^{(1)} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \sigma_i (k_j^2 - R_j^2) \{ \sin(\psi_i + \psi_j) - \sin(\psi_i - \psi_j) \} \end{aligned} \quad (3-35)$$

(3-35)式の i と j を入れ替えると

$$\begin{aligned} & -\eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi^{(1)} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \sigma_j (k_i^2 - R_i^2) \{ \sin(\psi_i + \psi_j) + \sin(\psi_i - \psi_j) \} \end{aligned} \quad (3-36)$$

(3-35)式と(3-36)式を辺々加えあわせて 2 で割ると次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi^{(1)} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j [(\sigma_i k_j^2 + \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 + \sigma_j R_i^2)] \sin(\psi_i + \psi_j) \\ & \quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j [(\sigma_i k_j^2 - \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 - \sigma_j R_i^2)] \sin(\psi_i - \psi_j) \end{aligned} \quad (3-37)$$

また, (3-27)式で与えられる 2 次の速度ポテンシャル $\phi^{(2)}$ を(3-21)式の左辺第 1 項に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} &= - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} (\sigma_{ij}^{(2)})^2 \sin(\vec{k}_{ij}^{(2)} \cdot \vec{x} - \sigma_{ij}^{(2)} t + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \\ &= - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} (\sigma_{ij}^{(2)})^2 \sin(\psi_{ij}^{(2)})\end{aligned}\quad (3-38)$$

となる。ただし

$$\psi_{ij}^{(2)} = \vec{k}_{ij}^{(2)} \cdot \vec{x} - \sigma_{ij}^{(2)} t + \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (3-39)$$

である。同様にして(3-21)式の右辺第 2 項は

$$g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = g \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^{(2)} \left| \vec{k}_{ij}^{(2)} \right| \tanh \left| \vec{k}_{ij}^{(2)} \right| h \sin(\psi_{ij}^{(2)}) \quad (3-40)$$

となる。(3-32), (3-37), (3-38), (3-40)式を(3-21)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ (\sigma_{ij}^{(2)})^2 + g k_{ij}^{(2)} \tanh k_{ij}^{(2)} h \right\} b_{ij}^{(2)} \sin \psi_{ij}^{(2)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} -\frac{1}{2} b_i b_j \left[(\sigma_i - \sigma_j) (\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j + R_i R_j) \sin(\psi_i - \psi_j) \right. \\ & \quad \left. + (\sigma_i + \sigma_j) (\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j - R_i R_j) \sin(\psi_i + \psi_j) \right] \\ & \quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left[(\sigma_i k_j^2 + \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 + \sigma_j R_i^2) \right] \sin(\psi_i + \psi_j) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left[(\sigma_i k_j^2 - \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 - \sigma_j R_i^2) \right] \sin(\psi_i - \psi_j)\end{aligned}\quad (3-41)$$

これを整理すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}^{(2)} \sin \psi_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\sigma_i - \sigma_j) (\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j + R_i R_j)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i - \psi_j) \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{(\sigma_i k_j^2 - \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 - \sigma_j R_i^2)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i - \psi_j) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left\{ \frac{(\sigma_i + \sigma_j) (\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j - R_i R_j)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i + \psi_j) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_i k_i^2 + \sigma_j k_j^2) - (\sigma_i R_i^2 + \sigma_j R_j^2)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i + \psi_j) \right\}
\end{aligned} \tag{3-42}$$

となる。さらにこれを2次の速度ポテンシャルの(3-28)式に代入すると

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| (h+z)}{\cosh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \frac{(\sigma_i - \sigma_j) (\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j + R_i R_j)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i - \psi_j) \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| (h+z)}{\cosh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \frac{(\sigma_i k_j^2 - \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 - \sigma_j R_i^2)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i - \psi_j) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| (h+z)}{\cosh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \left\{ \frac{(\sigma_i + \sigma_j) (\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j - R_i R_j)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i + \psi_j) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_i k_j^2 - \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 - \sigma_j R_i^2)}{(\sigma_{ij}^{(2)})^2 - g \vec{k}_{ij}^{(2)} \tanh |\vec{k}_{ij}^{(2)}| h} \sin(\psi_i + \psi_j) \right\}
\end{aligned} \tag{3-43}$$

となる。上式より2次の速度ポテンシャルは $\sin(\psi_i - \psi_j)$ と $\sin(\psi_i + \psi_j)$ の形の解を持つ

ことが分かる。前述したように $\vec{k}_{ij}^{(2)}$ と $\sigma_{ij}^{(2)}$ は、1次成分波の波数ベクトルと角周波数の和

と差によって与えられるものであるから $\sin(\psi_i - \psi_j)$ の項に関する $\bar{k}_{ij}^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$ は,

$$\bar{k}_{ij}^{(2)} = |\bar{k}_i - \bar{k}_j| = k_{ij}^- \quad , \quad \sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_i - \sigma_j \quad (3-44)$$

となる. 同様に $\sin(\psi_i + \psi_j)$ の項に関する $\bar{k}_{ij}^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$ は,

$$\bar{k}_{ij}^{(2)} = |\bar{k}_i + \bar{k}_j| = k_{ij}^+ \quad , \quad \sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_i + \sigma_j \quad (3-45)$$

となる. (3-44), (3-45)式より(3-43)式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^-(h+z)}{\cosh k_{ij}^- h} \frac{(\sigma_i - \sigma_j) (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j + R_i R_j)}{(\sigma_i - \sigma_j)^2 - g k_{ij}^- \tanh k_{ij}^- h} \sin(\psi_i - \psi_j) \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^-(h+z)}{\cosh k_{ij}^- h} \frac{(\sigma_i k_j^2 - \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 - \sigma_j R_i^2)}{(\sigma_i - \sigma_j)^2 - g k_{ij}^- \tanh k_{ij}^- h} \sin(\psi_i - \psi_j) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^+(h+z)}{\cosh k_{ij}^+ h} \left\{ \frac{(\sigma_i + \sigma_j) (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j - R_i R_j)}{(\sigma_i + \sigma_j)^2 - g k_{ij}^+ \tanh k_{ij}^+ h} \sin(\psi_i + \psi_j) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_i k_j^2 + \sigma_j k_i^2) - (\sigma_i R_j^2 + \sigma_j R_i^2)}{(\sigma_i + \sigma_j)^2 - g k_{ij}^+ \tanh k_{ij}^+ h} \sin(\psi_i + \psi_j) \right\} \end{aligned} \quad (3-46)$$

次に(3-3)式を変形する. (3-30)式より

$$R_i = k_i \tanh k_i h = \frac{(\sigma_i)^2}{g} \quad (3-47)$$

$$\sigma_i = \sqrt{g R_i}$$

同様に, j 成分によっても次式が成り立つ.

$$\sigma_j = \sqrt{g R_j} \quad (3-48)$$

(3-47), (3-48)式を(3-46)式の各項に代入して整理すると 2 次の速度ポテンシャル $\phi^{(2)}$ が次式のように求められる.

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)} = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^-(h+z)}{\cosh k_{ij}^- h} \frac{1}{(\sigma_i - \sigma_j)} \\
& \times \left\{ \frac{2(\sqrt{R_i} - \sqrt{R_j})^2 (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j + R_i R_j)}{(\sigma_i + \sigma_j) \left[(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j})^2 - k_{ij}^+ \tanh k_{ij}^+ h \right]} \right. \\
& \left. + \frac{(\sqrt{R_i} - \sqrt{R_j}) \left[\sqrt{R_i} (k_i^2 - R_i^2) - \sqrt{R_i} (k_j^2 - R_j^2) \right]}{(\sqrt{R_i} - \sqrt{R_j})^2 - k_{ij}^- \tanh k_{ij}^- h} \right\} \sin(\psi_i - \psi_j) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^+(h+z)}{\cosh k_{ij}^+ h} \frac{1}{(\sigma_i + \sigma_j)} \\
& \times \left\{ \frac{2(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j})^2 (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j - R_i R_j)}{(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j})^2 - k_{ij}^+ \tanh k_{ij}^+ h} \right. \\
& \left. + \frac{(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j}) \left[\sqrt{R_i} (k_i^2 - R_i^2) + \sqrt{R_i} (k_j^2 - R_j^2) \right]}{(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j})^2 - k_{ij}^+ \tanh k_{ij}^+ h} \right\} \sin(\psi_i + \psi_j)
\end{aligned} \tag{3-49}$$

(3-49)式を更に簡単にすると次式を得る.

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)} = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^-(h+z)}{\cosh k_{ij}^- h} \frac{D_{ij}^-}{(\sigma_i - \sigma_j)} \sin(\psi_i - \psi_j) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^+(h+z)}{\cosh k_{ij}^+ h} \frac{D_{ij}^+}{(\sigma_i + \sigma_j)} \sin(\psi_i + \psi_j)
\end{aligned} \tag{3-50}$$

ここで

$$\begin{aligned}
D_{ij}^- = & \frac{(\sqrt{R_i} - \sqrt{R_j}) \left[\sqrt{R_j} (k_i^2 - R_i^2) - \sqrt{R_i} (k_j^2 - R_j^2) \right] + 2(\sqrt{R_i} - \sqrt{R_j})^2 (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j - R_i R_j)}{(\sqrt{R_i} - \sqrt{R_j})^2 - k_{ij}^- \tanh k_{ij}^- h} \\
D_{ij}^+ = & \frac{(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j}) \left[\sqrt{R_j} (k_i^2 - R_i^2) + \sqrt{R_i} (k_j^2 - R_j^2) \right] + 2(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j})^2 (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j + R_i R_j)}{(\sqrt{R_i} + \sqrt{R_j})^2 - k_{ij}^+ \tanh k_{ij}^+ h}
\end{aligned} \tag{3-51}$$

次に(3-23), (3-25), (3-50)式で表される 1 次の速度ポテンシャル $\phi^{(1)}$, 水面形 $\eta^{(1)}$ 及び 2 次の速度ポテンシャル $\phi^{(2)}$ を(3-22)式に代入することによって 2 次の水面形 $\eta^{(2)}$ を計算する. 以下にその過程を示す.

(3-22)式の右辺第 1 項は次式のようになる.

$$\left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right|_{z=0} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j D_{ij}^- \cos(\psi_i - \psi_j) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j D_{ij}^+ \cos(\psi_i + \psi_j) \quad (3-52)$$

また(3-22)式の右辺第2項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \nabla \phi^{(1)} \right|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \bar{k}_i \cdot \bar{k}_j \left\{ \cos(\psi_i + \psi_j) + \cos(\psi_i - \psi_j) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j R_i R_j \left\{ -\cos(\psi_i + \psi_j) + \cos(\psi_i - \psi_j) \right\} \end{aligned} \quad (3-53)$$

(3-22)式の右辺第3項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} &= \left\{ \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sigma_i \cos \psi_i \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (-\sigma_j) b_j k_j \tanh k_j h \cos \psi_j \right\} \\ &= -\frac{1}{2} g \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j R_j \left\{ \cos(\psi_i + \psi_j) + \cos(\psi_i - \psi_j) \right\} \end{aligned} \quad (3-54)$$

ここで

$$a_i = \frac{b_i \sigma_i}{g}, \quad a_j = \frac{b_j \sigma_j}{g}$$

したがって、(3-52)、(3-53)、(3-54)式を(3-22)式に代入すると

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \left[\frac{1}{4g} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left\{ D_{ij}^- - (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j + R_i R_j) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j (R_i + R_j) \right] \cos(\psi_i - \psi_j) \\ &\quad + \left[\frac{1}{4g} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \left\{ D_{ij}^+ - (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j - R_i R_j) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j (R_i + R_j) \right] \cos(\psi_i + \psi_j) \end{aligned} \quad (3-55)$$

を得る。ここで

$$R_i = \frac{(\sigma_i)^2}{g}, \quad a_i = \frac{b_i \sigma_i}{g}$$

より、(3-55)式に含まれる $b_i b_j$ の部分は次のようになる。すなわち

$$\frac{1}{4g} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \frac{1}{\sqrt{R_i R_j}} \quad (3-56)$$

したがって(3-55)式は次式のように表される。

$$\eta^{(2)} = \eta_i^{(2)} + \eta_s^{(2)} \quad (3-57)$$

$$\eta_i^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \left\{ \frac{D_{ij}^- - (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j + R_i R_j)}{\sqrt{R_i R_j}} + (R_i + R_j) \right\} \cos(\psi_i - \psi_j) \quad (3-58a)$$

$$\eta_s^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \left\{ \frac{D_{ij}^- - (\bar{k}_i \cdot \bar{k}_j - R_i R_j)}{\sqrt{R_i R_j}} + (R_i + R_j) \right\} \cos(\psi_i + \psi_j) \quad (3-58b)$$

第3節 理論式の誘導

3. 1 2次長周期波

いま図 3-2 のような形状をもち、内外とも水深が一定の矩形の湾に外海から(3-59)式および(3-60)式で表される 2 成分合成波が港口に対して直角に入射する場合について考える。

$$\eta_1 = \frac{a_1}{2} \exp i \{ k_1 y + \sigma_1 t + \varepsilon_1 \} \quad (3-59)$$

$$\eta_2 = \frac{a_2}{2} \exp i \{ k_2 y + \sigma_2 t + \varepsilon_2 \} \quad (3-60)$$

ここで ε_n は初期位相角を表す。このとき湾外および湾内には成分波ごとに第 2 章第 2 節で説明した重複波が発生する。さらに波が自由波の条件を満たす場合、相互に干渉して非線形な波が発生する。3 次以上の干渉波も発生するが (Phillips, 1969) の振幅のオーダーが 2 次のものに比して小さいのでここでは 2 次干渉波に限って論議する。すなわち、2 つの 1 次成分波の干渉によりそれぞれの周波数の和および差の 2 次波が発生し、2 次波の波数は 1 次波の波数がベクトル合成されたものになる。また 2 つの 1 次波は防波堤 ($y=0$) および港奥 ($y=-l$) の境界で反射するため、 y 軸の正の方向だけでなく、負の方向に進む波も存在する。

したがって港内外の速度ポテンシャルとしては 1 次波相互の干渉により

$$\sigma^- t \pm k^- x, \quad \sigma^- t \pm k^+ x, \quad \sigma^+ t \pm k^+ x, \quad \sigma^+ t \pm k^- x$$

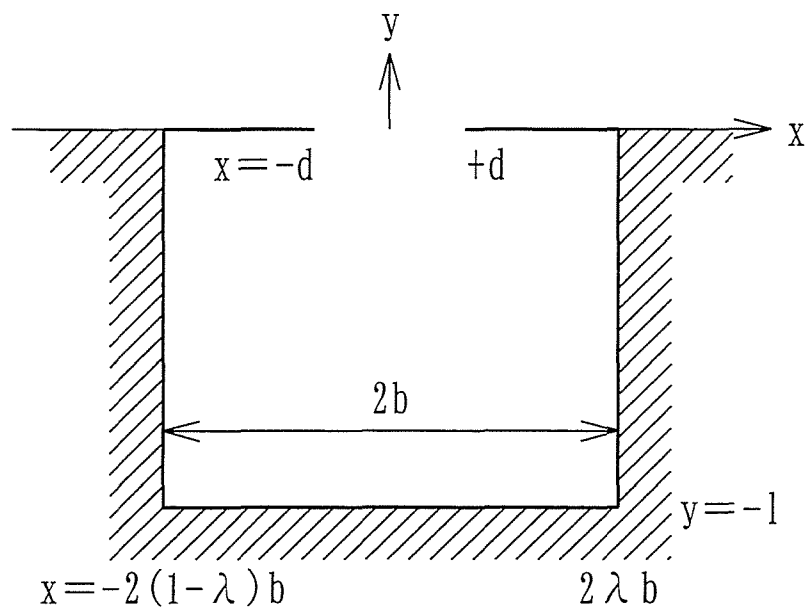


図3-2 記号と座標系

および

$$2(\sigma_j t \pm k_j x) \quad j=1,2$$

の偏角を持つ 2 次波が発生する。ここでは長周期の波を対象としているので σ^+ を含む波と $2\sigma_j$ の波を無視する。さらに湾水の長周期振動に対する $\sigma^- t \pm k^+ x$ の波の影響は $\sigma^- t \pm k^- x$ のものに比して小さいのでこれも無視する (Bowers, 1977) ²⁾。

まず港外について考える。(3-59)および(3-60)式で表される 2 つの入射波の干渉による 2 次波の速度ポテンシャルは次式のようになる。

$$\phi_{1bl}^{(2)} = -i \frac{b_1 b_2}{2 \times 4} \frac{\cosh k^- (h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \exp i \{ k^- y + \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (3-61)$$

となる。ここに

$$b_i = \frac{a_i}{\sigma_i} g \quad (i=1,2)$$

$$k^- = |k_1 - k_2|$$

$$\sigma^- = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\varepsilon^- = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$D^- = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}) \{ \sqrt{R_2} (k_1^2 - R_1^2) - \sqrt{R_1} (k_2^2 - R_2^2) \} + 2(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 (k_1 k_2 - R_1 R_2)}{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 - k^- \tanh k^- h}$$

$$R_i = k_i \tanh k_i h \quad i=1,2$$

である。

(3-59)式の波が $y=0$ の壁に反射してできる反射波の水面形は次式のようになる。

$$\eta_1 = \frac{a_1}{2} \exp i \{ -k_1 y + \sigma_1 t + \varepsilon_1 \} \quad (3-62)$$

同様に(3-60)式の波の反射波の水面形は次式のようになる。

$$\eta_2 = \frac{a_2}{2} \exp i \{ -k_2 y + \sigma_2 t + \varepsilon_2 \} \quad (3-63)$$

(3-62), (3-63)式で表される 2 つの反射波の干渉による 2 次波の速度ポテンシャルは同様に次式で表される。

$$\phi_{1bR}^{(2)} = -i \frac{b_1 b_2 \cosh k^-(h+z)}{2 \times 4 \cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \exp i \{-k^-y + \sigma^-t + \varepsilon^-\} \quad (3-64)$$

(3-61)式と(3-64)式を加え合わせると港外における2次干渉波の重複波の速度ポテンシャルが得られる。すなわち

$$\begin{aligned} \phi_{1b}^{(2)} &= \phi_{1bI}^{(2)} + \phi_{1bR}^{(2)} \\ &= -i \frac{b_1 b_2 \cosh k^-(h+z)}{2 \times 4 \cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \{ \exp(ik^-y) + \exp(-ik^-y) \} \exp i(\sigma^-t + \varepsilon^-) \\ &= -i \frac{b_1 b_2 \cosh k^-(h+z)}{4 \cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \cos k^-y \exp i\{\sigma^-t + \varepsilon^-\} \end{aligned} \quad (3-65)$$

(3-65)式で表される速度ポテンシャルをもつ波の水面形は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_{1b}^{(2)} &\equiv \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right)_{z=0} \\ &= \frac{b_1 b_2}{4g} D^- \cos k^-y \exp i\{\sigma^-t + \varepsilon^-\} \end{aligned} \quad (3-66)$$

ここで

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{g a_i}{\sigma_i} = \frac{g a_i}{\sqrt{g k_i \tanh k_i h}} \\ &= \frac{g a_i}{\sqrt{g R_i}} \end{aligned}$$

を用いると(3-66)式は次のように書き換えられる。

$$\eta_{1b}^{(2)} = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos k^-y \exp i\{\sigma^-t + \varepsilon^-\} \quad (3-67)$$

となる。ちなみに(3-61)式の入射波による2次干渉波の水面形は

$$\eta_{1bI}^{(2)} = \frac{a_1 a_2}{2 \times 4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \{ k^- y + \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (3-68)$$

(3-64)式の反射波による2次干渉波の水面形は

$$\eta_{1bR}^{(2)} = \frac{a_1 a_2}{2 \times 4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \{ -k^- y + \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (3-69)$$

である。

次に港内について考える。港内の水面形は Ippen-Goda によると

$$\eta_2(x, y, t) = -\frac{a_1 c_1 d}{b \sin k_1 l} \exp i \{ \sigma_1 t + \omega_1 + \varepsilon_1 \} \times [\cos k_1 (y + l) - S_1(x, y)] \quad (3-70)$$

で与えられる。ここに

$$S_1(x, y) = \frac{4b \sin k_1 l}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} k_1 l} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \cosh \beta_{1n} k_1 (y + l) \quad (3-71)$$

である。港内の x 軸方向の波を無視すると(3-70)式に含まれる自由波は角カッコ内の第1項だけである。

$$\eta_2(y, t) = -\frac{a_1 c_1 d}{b \sin k_1 l} \exp i (\sigma_1 t + \varepsilon_1 + \omega_1) \cos k_1 (y + l) \quad (3-72)$$

(3-72)式の波は重複波であり、これは沖から岸に向かう波と岸から沖に向かう波が重なり合ったものである。すなわち

$$\begin{aligned} \eta_2(y, t) = & -\frac{a_1 c_1 d}{2b \sin k_1 l} \exp i (\sigma_1 t + \varepsilon_1 + \omega_1) \exp i \{ k_1 (y + l) \} \\ & -\frac{a_1 c_1 d}{2b \sin k_1 l} \exp i (\sigma_1 t + \varepsilon_1 + \omega_1) \exp -i \{ k_1 (y + l) \} \end{aligned} \quad (3-73)$$

である。(3-73)式のうち第1項は沖から岸に向かう波を表し、第2項は岸から沖へ向かう波を表している。いま(3-72)式の添字を2としたもう1つの波について考えると

$$\begin{aligned}\eta_2(y,t) = & -\frac{a_2 c_2 d}{2b \sin k_2 l} \exp i(\sigma_2 t + \varepsilon_2 + \omega_2) \exp i\{k_2(y+l)\} \\ & -\frac{a_2 c_2 d}{2b \sin k_2 l} \exp i(\sigma_2 t + \varepsilon_2 + \omega_2) \exp -i\{k_2(y+l)\}\end{aligned}\quad (3-74)$$

となる。

(3-73), (3-74)式のうち同じ方向の波が干渉してできる2次長周期波の水面形は、沖から岸に向かう波の場合

$$\begin{aligned}\eta_{2bl}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i\{(k_1 - k_2)(y+l) + (\sigma_1 - \sigma_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega_1 - \omega_2\} \\ = & \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i\{k^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\}\end{aligned}\quad (3-75)$$

であり、岸から沖に向かう波の場合

$$\begin{aligned}\eta_{2br}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i\{-(k_1 - k_2)(y+l) + (\sigma_1 - \sigma_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega_1 - \omega_2\} \\ = & \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i\{-k^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\}\end{aligned}\quad (3-76)$$

である。(3-75)式と(3-76)式を重ね合わせると、港内における2次干渉波の水面形が得られる。

$$\eta_{2b}^{(2)} = \frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos k^-(y+l) \exp i\{\sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\}\quad (3-77)$$

それぞれの波の速度ポテンシャルは、まず(3-75)式より沖から岸に向かう波について

$$\phi_{2bl}^{(2)} = \frac{-i}{2} \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sigma^-} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^- h} \exp i\{k^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\}\quad (3-78)$$

次に(3-76)式より岸から沖に向かう波について

$$\phi_{2bR}^{(2)} = \frac{-i}{2} \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^- \cosh k^- (h+z)}{\sigma^- \cosh k^- h} \exp i \{ -k^- (y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \quad (3-79)$$

(3-78)式と(3-79)式の数値ポテンシャルを重ね合わせると、港内における1次の進行波の重なり合った波（重複波）に伴う2次干渉波の数値ポテンシャルが得られる。

$$\phi_{2b}^{(2)} = -i \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^- \cosh k^- (h+z)}{\sigma^- \cosh k^- h} \cos k^- (y+l) \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \quad (3-80)$$

3. 2 2次長周期波による湾水振動

3. 1において港内外における2次干渉波の重複波の数値ポテンシャルを求めた。これら波も(2-8-1)～(2-8-4)式に示す境界条件を満足しなければならない。しかし、(3-65)式と(3-80)式は港口で等しくならず、 $y=0$ でポテンシャルの不連続が起こる。具体的には(3-65)式は境界条件(2-8-2)、(2-8-4)は満足するが他は満たさない。(3-80)式は境界条件(2-8-1)、(2-8-3)は満足するが他は満たさない。ここでは Bowers にならってこの不連続を埋めるような周波数 σ^- の波が新たに発生するものとする。この波の数値ポテンシャルを求めるにあたっては前と同様に、港外側と港内側のものに分けて計算し、最後に(3-65)式、(3-80)式も含めて港口で接続させる。

まず港外の波について検討する。港外には数値ポテンシャルが(3-65)式で与えられる2次波が存在する。ここではさらに σ^- の波が存在するものとする。いまその数値ポテンシャルを

$$\phi_{1f} = \frac{-i}{\sigma^-} f_1(x, y) Z_{f1}(z) \exp i (\sigma^- t + \varepsilon^-) \quad (3-81)$$

と仮定する。以下添字 f は σ^- の周波数の自由波およびそれに関連する波のものであることを表す。(3-65)式の拘束波の数値ポテンシャルはラプラスの式を満足するので、(3-65)式と(3-81)式の波が共存する場合には(3-81)式もまたラプラスの式を満足しなければならない。(3-81)式をラプラスの式に代入すると

$$\frac{1}{f_1} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Z_f} \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} = 0 \quad (3-82)$$

第1項は x, y の関数, 第2項は z だけの関数であるので両者の和が定常的に0となるためには両項とも定数でなければならない. いまこれらを k_f^2 に等しいと置く. すなわち

$$\frac{1}{Z_{f1}} \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} = k_f^2 \quad (3-83)$$

および

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k_f^2 f_1 = 0 \quad (3-84)$$

(3-83)式を変形し

$$\frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} - k_f^2 Z_{f1} = 0 \quad (3-85)$$

とする. ここで(3-85)式と底面の境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi_{1f}}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

を用いると

$$Z_{f1} = g \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \quad (3-86)$$

が得られる. 水面形は水面での境界条件より導かれ次式のようなになる.

$$\eta_{1f}(x, y, t) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{1f}}{\partial t} \right)_{z=0} = f_1(x, y) \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (3-87)$$

定数 k_f は水面における連続式から決定される.

$$\frac{\partial \eta_{1f}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_{1f}}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (3-88)$$

したがって周波数差の波に関する分散関係式が得られる.

$$(\sigma^-)^2 = gk_f \tanh k_f h \quad (3-89)$$

ここに k_f は σ^- に対応する自由波の波数である. ここで(3-84)式の f_1 として

$$f_1 = k_f C \exp i \Omega f_1' \quad (3-90)$$

と置く. f_1' に対する境界条件は

$$\left. \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 1 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \quad (3-91)$$

$$f_1' \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

である. ここで合田らに習って

$$F(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1'(x, y) dx \quad (3-92)$$

$$f_1'(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} F(u, y) du$$

で定義される $f_1'(x, y)$ のフーリエ変換 $F(u, y)$ を用いる. f_1 がヘルムホルツの式を満たすので f_1' もまたヘルムホルツの式を満足する. すなわち

$$\frac{\partial^2 f_1'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1'}{\partial y^2} + f_1' k_f^2 = 0 \quad (3-93)$$

(3-92)式の関係 (第2式) を(3-93)式に代入すると $F(u, y)$ に対する微分方程式が導かれる.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k_f^2 - u^2)F = 0 \quad (3-94)$$

を得る. (3-91)式の境界条件は $F(u, y)$ に置き換えられ次式のようなになる.

$$\left[\frac{\partial F(u, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{\partial f_1'}{\partial y} \right]_{y=0} dx \quad (3-95)$$

$$= \int_{-d}^d e^{iux} dx$$

$$= \frac{2 \sin ud}{u}$$

$$F(u, y) = 0 \quad y \rightarrow \infty \quad (3-96)$$

(3-94)式の微分方程式の一般解は次式で与えられる。

$$F(u, y) = C_1(u)e^{\sqrt{u^2 - k_f^2}y} + C_2(u)e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2}y} \quad (3-97)$$

(3-97)式の定数 C_1, C_2 を決定するために, u の範囲を $|u| > k_f$ の場合と, $|u| < k_f$ の場合の 2 つに分けて考える。

i) $|u| > k_f$ の場合

この場合, (3-96)式より $y \rightarrow \infty$ の時に $F(u, y) = 0$ とならなければならない。よって $C_1(u) = 0$ とならなければならない。したがって(3-95)式より $C_2(u)$ が得られ, $F(u, y)$ が決まる。

$$F(u, y) = -\frac{2 \sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2}y} \quad (3-98)$$

ii) $|u| < k_f$ の場合

(3-97)式の第 1 項は 1 次波の場合と同様に沖から岸に向かう波を表している。ここで扱っているのは岸から沖に向かって伝播する放射波であるので $C_1(u) = 0$ として(3-95)式から次式のようなになる。

$$F(u, y) = i \frac{2 \sin ud}{u \sqrt{k_f^2 - u^2}} e^{-i \sqrt{k_f^2 - u^2}y} \quad (3-99)$$

いまここで関数 f_1' を合田らと同様にして次式のように置く。

$$f_1' = iI_1 - I_2 \quad (3-100)$$

ここに

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_f} \frac{\sin ud}{u\sqrt{k^2 - u^2}} \cos uxe^{-i\sqrt{k_f^2 - u^2}y} du$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin ud}{u\sqrt{u^2 - k_f^2}} \cos uxe^{-\sqrt{u^2 - k_f^2}y} du$$

である。これで港外の水面形 η_{1f} は次式のようになる。

$$\eta_{1f} = kC(iI_1 - I_2) \exp i\{\sigma^- t + \Omega\} \quad (3-101)$$

また速度ポテンシャル ϕ_{1f} は次式のようになる。

$$\phi_{1f} = \frac{-i}{\sigma^-} \{iI_1 - I_2\} k_f Cg \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \exp i\{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} \quad (3-102)$$

次に港内の波について検討する。港内にはすでに周波数が σ^- の 2 次の拘束波が存在している。この波と港外の周波数が σ^- の 2 次の拘束波である放射波とは港口部で連続しない。そこで港内外の波が港口部で接続するような新しい 2 次の自由波が港内に発生するものとする。ここで新しく発生する自由波の速度ポテンシャルを次式のように仮定する。

$$\phi_{2f} = \frac{-i}{\sigma^-} f_2(x, y) Z_f(z) \exp i\{\sigma^- t + \varepsilon^-\} \quad (3-103)$$

ここで関数 $f(x, y)$ を次式に示すような変数分離できる形に仮定する。

$$f_2(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (3-104)$$

(3-103)式において $Z_f(z)$ は前述の底面と水面における境界条件より

$$Z(z) = g \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \quad (3-105)$$

$$(\sigma^-)^2 = gk_f \tanh k_f h$$

となる。(3-103)式と(3-104)式をあわせてラプラスの式に代入すると

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_f^2 = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (3-106)$$

を得る。(3-106)式の両辺はそれぞれ y および x のみの関数であるので(3-106)式が成立するためには両辺が共通の定数でなければならない。いまこれを α^2 と置くと関数 $X(x)$ と $Y(y)$ の一般解は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \\ Y(y) &= Ce^{\sqrt{\alpha^2 - k_f^2} y} + De^{-\sqrt{\alpha^2 - k_f^2} y} \end{aligned} \quad (3-107)$$

実数 X は港内の両側の壁での境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} \right|_{x=2\lambda b, 2(\lambda-1)b} = 0$$

により

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=2\lambda b, 2(\lambda-1)b} = 0 \quad (3-108)$$

でなければならない。以下、合田らの(2-25), (2-26)式と全く同様にして

$$X(x) = B_n \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \quad (3-109)$$

が得られる。

さらに湾奥の壁 ($y = -l$) において

$$\left. \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial y} \right|_{y=-l} = 0$$

でなければならないので

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=-l} = \sqrt{\alpha^2 - k_f^2} \left[Ce^{-l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} - De^{l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \right] = 0 \quad (3-110)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{C_n}{2} e^{l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \\
 D &= \frac{C_n}{2} e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}}
 \end{aligned}
 \tag{3-111}$$

である。したがって関数 $Y(y)$ は(3-111)式を(3-107)式に代入することで次式を得る。

$$Y(y) = C_n \cosh[\beta_{2n} k_f (y + l)]
 \tag{3-112}$$

ここに

$$\beta_{2n} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2k_f b}\right)^2 - 1}
 \tag{3-113}$$

である。 C_n を A_n でおき替えると、関数 $f_2(x, y)$ は次式のようにになる。

$$f_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b)\right] \cosh[\beta_{2n} k_f (y + l)]
 \tag{3-114}$$

次に A_n を決定する。湾口における f_2 の y 方向の勾配は f_1 の湾口での勾配に等しくなければならぬ。すなわち

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} &= k_f C e^{i\Omega} \\
 f_1 &= k_f C e^{i\Omega} f_1'
 \end{aligned}
 \tag{3-115}$$

において

$$\left. \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 1 & x \leq |d| \\ 0 & x > |d| \end{cases}
 \tag{3-116}$$

と置いたので(3-90), (3-91)式より

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} = k_f C e^{i\Omega}
 \tag{3-117}$$

と置いて良い。従って $y=0$ における $f_2(x, y)$ の y に関する微分は次式のようなになる。

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{y=0} = -A_0 k_f \sin kl + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \beta_{2n} k_f \sinh(\beta_{2n} k_f l) \cos \left[\frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \right] \quad (3-118)$$

$A_0 \sim A_n$ については合田らと全く同様にして決めることができる。すなわち

$$A_0 = -\frac{\int_{2\lambda b-d}^{2\lambda b+d} k_f C e^{i\Omega} dx}{2b k_f \sin kl} = -\frac{C d e^{i\Omega}}{b \sin k_f l} \quad (3-119)$$

$$A_n = \frac{\int_{2\lambda b-d}^{2\lambda b+d} k_f C e^{i\Omega} \cos \frac{n\pi x}{2b} dx}{b \beta_{2n} k_f \sinh \beta_{2n} k_f l} = \frac{4 C e^{i\Omega} \sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \pi \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} k_f l} \quad (3-120)$$

となる。以上を(3-114)式に代入すると $f_2(x, y)$ が決められる。

$$f_2(x, y) = -\frac{C d e^{i\Omega}}{b \sin k_f l} \left[\cos k_f (y + l) - S(x, y) \right] \quad (3-121)$$

ここに

$$S(x, y) = \frac{4b \sin k_f l}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} k_f l} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \cosh \beta_n k_f (y + l) \right\} \quad (3-122)$$

である。以上と(3-105)式を(3-103)式に代入すると港内の速度ポテンシャルが得られる。

$$\phi_{2f} = \frac{i}{\sigma^-} \frac{C d}{b \sin k_f l} \left[\cos k_f (y + l) - S(x, y) \right] \frac{\cosh k_f (z + h)}{\cosh k_f h} g \exp i(\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-) \quad (3-123)$$

つぎに未知数である定数 C と位相角 Ω を、港口部で速度ポテンシャルを接続することにより決定する。式中から分かるように速度ポテンシャルは、港口において港外のもとの港内のものが存在する。ここで考慮すべき条件は港外での速度ポテンシャル $\phi_{1b}^{(2)}$ および ϕ_{1f} 、港内の速度ポテンシャル $\phi_{2b}^{(2)}$ および ϕ_{2f} である。 $\phi_{1b}^{(2)}$ および $\phi_{2b}^{(2)}$ は確定しているが、(3-102)

式および(3-123)式中に振幅および位相に関する未知数を含んでいる。ここでは港口部 ($|x| < d$) での速度ポテンシャルの平均値が港内外で等しいとして、これらの未知定数を決定する。すなわち

$$\begin{aligned} \phi_{1b}^{(2)} \Big|_{y=0} + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx \\ = \phi_{2b}^{(2)} \Big|_{y=0} + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} \Big|_{y=0} dx \end{aligned} \quad (3-124)$$

まず港外の波に関する左辺について計算する。左辺第1項は(3-65)式より

$$\begin{aligned} \phi_{1b}^{(2)} \Big|_{y=0} &= \frac{-i}{4} b_1 b_2 \frac{\cosh k^- (h+z) D^-}{\cosh k^- h} \frac{D^-}{\sigma^-} \cos k^- y \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \Big|_{y=0} \\ &= -i \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k^- (h+z) D^-}{\cosh k^- h} \frac{D^-}{\sigma^-} \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \end{aligned} \quad (3-125)$$

左辺第2項は(3-102)式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{-i}{\sigma^-} \{ iI_1 - I_2 \} k_f Cg \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} dx \\ &= \frac{-i}{\sigma^-} k_f Cg \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \{ iI_1 - I_2 \} dx \\ &= \frac{-i}{\sigma^-} k_f Cg \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2d} \int_{-d}^d i \frac{2}{\pi} \int_0^{k_f} \frac{\sin ud}{u \sqrt{k_f^2 - u^2}} \cos u x du dx - \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{2}{\pi} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} \cos u x du dx \right\} \end{aligned} \quad (3-126)$$

(3-126)式の積分の順序を変え $ud = \gamma$ と置き、整理すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx &= \frac{-i}{\sigma^-} k_f Cg \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\
&\times \left\{ \frac{2}{\pi d} i \int_0^{k_f d} \frac{\sin^2 u d}{u^2 \sqrt{k_f^2 - u^2}} du - \frac{2}{\pi d} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin^2 u d}{u^2 \sqrt{u^2 - k_f^2}} du \right\} \\
&= \frac{-i}{\sigma^-} Cg \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} [i\psi_1 - \psi_2]
\end{aligned} \tag{3-127}$$

ここに

$$\psi_1 = \frac{2}{\pi} k_f d \int_0^{k_f d} \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2 \sqrt{(k_f d)^2 - \gamma^2}} d\gamma \tag{3-128-1}$$

$$\psi_2 = \frac{2}{\pi} k_f d \int_{k_f d}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - (k_f d)^2}} d\gamma \tag{3-128-2}$$

である。(3-125)式と(3-127)式をまとめると、(3-124)式の左辺は次式のようなる。

$$\begin{aligned}
\phi_{1b}^{(2)} \Big|_{y=0} + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx &= \\
&-i \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k_f^-(h+z)}{\cosh k_f^- h} \frac{D^-}{\sigma^-} \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \\
&-i \frac{1}{\sigma^-} Cg \frac{\cosh k_f (h+z)}{\cosh k_f h} [i\psi_1 - \psi_2] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \}
\end{aligned} \tag{3-129}$$

次に (3-124)式の港内の波に関する右辺の計算をする。まず右辺第1項は(3-80)式より

$$\phi_{2b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx = -i \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^- \cosh k^-(h+z)}{\sigma^- \cosh k^- h} \cos k^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \tag{3-130}$$

右辺第2項は(3-123)式より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b \sin k_f l} \frac{\cosh k_f (h+z)}{\cosh k_f h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\
&\quad \times [\cos k_f l - S(x,0)] dx \\
&= \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b \sin k_f l} \frac{\cosh k_f (h+z)}{\cosh k_f h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\
&\quad \times \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \cos k_f l - S(x,0) dx \\
&= \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b} \frac{\cosh k_f (h+z)}{\cosh k_f h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} [\cot k_f l - S_1]
\end{aligned} \tag{3-131}$$

ここに

$$S_1 = 8 \left(\frac{b}{\pi d} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi \right)^2}{n^2 \beta_n \tanh \beta_n k l}$$

である。

(3-130)式と(3-131)式をまとめると、(3-124)式の右辺は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\phi_{2b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} \Big|_{y=0} dx &= \\
-i \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^- \cosh k^- (h+z)}{\sigma^- \cosh k^- h} \cos k^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} &\quad (3-132) \\
+i \frac{1}{\sigma^-} \frac{Cd}{b} \frac{\cosh k_f (h+z)}{\cosh k_f h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} [\cot k_f l - S_1] &
\end{aligned}$$

ここでさらに式の形を簡単にするために、次の関係を用いてポテンシャルの接続を水位の接続に変える。

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \tag{3-133a}$$

$$\eta^{(2)} \equiv \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right)_{z=0} \tag{3-133b}$$

(3-129)式および(3-132)式より

$$\begin{aligned}
 & \frac{b_1 b_2}{4g} D^- \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} + C [i\psi_1 - \psi_2] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\
 &= \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^-}{g} \cos k^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \\
 & \quad - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \}
 \end{aligned} \tag{3-134}$$

(3-134)式を変形すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_1 a_2}{4\sqrt{R_1 R_2}} D^- \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} + C [i\psi_1 - \psi_2] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\
 &= \frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos k^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \\
 & \quad - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \}
 \end{aligned} \tag{3-135}$$

ここで(3-135)式の両辺を $e^{i\sigma^- t}$ で割り, 整理すると次式のようになる.

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \varepsilon^- + C (i\psi_1 - \psi_2) \exp i \{ \Omega + \varepsilon^- \} \\
 &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \exp i \{ \varepsilon^- + \omega^- \} \\
 & \quad - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \exp i \{ \Omega + \varepsilon^- \}
 \end{aligned} \tag{3-136}$$

ここで(3-136)式中の実部と虚部に分けて整理をする.

まず実部だけを取り出すと次式のようになる.

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos \varepsilon^- - C \psi_1 \sin \{\Omega + \varepsilon^-\} - C \psi_2 \cos \{\Omega + \varepsilon^-\} \\
&= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \cos(\varepsilon^- - \omega^-) - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \cos \{\Omega + \varepsilon^-\}
\end{aligned} \tag{3-137}$$

これを C について整理すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& C \sqrt{\left\{ \frac{d}{b} (\cot k_f l - S_1) - \psi_2 \right\}^2 + \{\psi_1\}^2} \cos(\Omega + \varepsilon^- + \phi) \\
&= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \left\{ \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \cos(\varepsilon^- + \omega^-) - \cos \varepsilon^- \right\}
\end{aligned} \tag{3-138}$$

次に虚部だけを取り出すと次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \sin \varepsilon^- + C \psi_1 \cos \{\Omega + \varepsilon^-\} - C \psi_2 \sin \{\Omega + \varepsilon^-\} \\
&= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \sin(\varepsilon^- + \omega^-) - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \sin \{\Omega + \varepsilon^-\}
\end{aligned} \tag{3-139}$$

これを C について整理すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& C \sqrt{\left\{ \frac{d}{b} (\cot k_f l - S_1) - \psi_2 \right\}^2 + \{\psi_1\}^2} \sin(\Omega + \varepsilon^- + \phi) \\
&= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \left\{ \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \sin(\varepsilon^- + \omega^-) - \sin \varepsilon^- \right\}
\end{aligned} \tag{3-140}$$

(3-138)式, (3-140)式より C , Ω に関して次の式を得る。

$$C = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \sqrt{\frac{P_1^2 - 2P_1 \cos \omega^- + 1}{(P_2 - \psi_2)^2 + \psi_1^2}} \tag{3-141}$$

および

$$\tan\{\Omega + \varepsilon^- + \phi\} = \frac{P_1 \sin(\varepsilon^- + \omega^-) - \sin \varepsilon^-}{P_1 \cos(\varepsilon^- + \omega^-) - \cos \varepsilon^-} \quad (3-142)$$

ここに

$$\tan \phi = \frac{\psi_1}{\frac{d}{b} [\cot k_f l - S_1] - \psi_2} \quad (3-143)$$

$$P_1 = \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \quad (3-144)$$

$$P_2 = (d/b) [\cot k_f l - S_1] \quad (3-145)$$

である。

次に港の共振による振幅の増幅率を計算する。一般に(3-59)式と(3-60)式で与えられる 2 波の干渉により生じる外海での 2 次の長周期拘束波の振幅は次式で与えられる。

$$\frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad (3-146)$$

ここで、港内での水位とこの振幅との比を R とする。港内での水位は(3-123)式より

$$\begin{aligned} \eta_{2f} &\equiv \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{2f}}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{Cd}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x,y)] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \end{aligned} \quad (3-147)$$

で与えられる。(3-147)式に(3-141)式を代入し、振幅の比 R を求めると次式のようになる。

$$R = \left| \frac{(d/b)}{\sin k_f l} \left\{ \frac{P_1^2 - 2P_1 \cos \omega^- + 1}{(P_2 - \psi_2)^2 + \psi_1^2} \right\}^{1/2} [\cos k_f l (y+l) - S(x,y)] \right| \quad (3-148)$$

第4節 理論式の特性

ここでは計算を通じて理論の特性を示す。計算条件を示したものが表3-1である。

表3-1 計算条件

case	h(m)	T_1 (s)	T_2 (s)	f (Hz)	b(m)	d(m)
1	10	10.0	10.526	0.005	50	50
2	10	9.0	9.424	0.005	50	50
3	10	8.0	8.333	0.005	50	50
4	10	7.0	7.254	0.005	50	50
5	10	10.0	10.204	0.002	50	50
6	10	10.0	10.417	0.004	50	50
7	10	10.0	10.638	0.006	50	50
8	10	10.0	10.870	0.008	50	50
9	10	10.0	10.526	0.005	100	100
10	10	10.0	10.526	0.005	200	200
11	10	10.0	10.526	0.005	100	50
12	10	10.0	10.204	0.002	100	50

水深はすべてのケースで 10m とした。各ケースについて湾内の $x = 2\epsilon b, y = -l$ の点での増幅率 R と湾の奥行き長さ l との関係を示したものが図 3-3~14 である。すべてのケースで $\epsilon = 1/2$ とした。case1~10 は $d=b$ すなわち港口が全開の場合について計算している。

まず case1~4 は入射波の周波数差が 0.005 (Hz), すなわち周期が 200 (s) となるような 2 波の組み合わせについて増幅率 R を計算したものである。これらの図から分かるように、いずれのケースにおいても基本モードのピーク付近での R の様子に大きな変化はなく、共振時の湾の奥行き長さも同じである。したがって周波数差が同じ場合、増幅率の変化に大きな差異は無いと言える。

これを踏まえて case5~8 は入射波の周波数差を変化させて R の変化を見たものであり、周波数差を 0.002 (Hz) から 0.008 (Hz) まで変化させている。いずれのケースにおいても、湾の奥行き長さが波長の 1/4 付近となる位置で第 1 のピークが現れており、また周波数差が大きくなるほど、つまり case5 から 8 に変化するにつれて R の値が小さくなっている。したがって湾の諸元が同じ場合、同じ波高の波の組み合わせであっても、ごく近い周期の場合、共振時の R の値が大きくなると言える。

case9~10 は湾幅による R の変化を見たものである。入射波の周期、位相差、水深は case1 と同じである。いずれも湾幅 b が狭くなると、 R のピーク値が増加している。

case11~12 は case1, 5 について、それぞれ $d=b$ 以外の計算をしたものである。いずれのケースについても図中に髭状のものが生じている。これは港内での 2 次長周期拘束波の平均水位を表す(3-135)式右辺第 1 項中の分母のうち $\sin k_1 l / \sin k_2 l$ が 0 に近づく時に生じるも

のである。これは De Girolamo⁷⁾の実験においても同様の特徴が報告されている。振幅が発散する可能性については【付録1】において述べる。

非線形干渉による2次長周期波の振幅は、水深が十分浅く、2次の周波数、振幅がほぼ等しい場合には近似的に(3-149)式で計算することができる。(Kimura, 1984)⁸⁾

$$a^2k / (4kh - 1) \quad (3-149)$$

ここに a , k は1次波の振幅、波数である。例えば case1 の場合、各成分波の振幅を 1(m) とすれば、1次波の周期が約 10 秒であるので、(3-149)式から2次長周期波の振幅は、約 4(cm)となる。図 3-1 の基本モードの共振時には湾奥では、 R が約 6 となることから、波高は約 0.5(m)とかなり大きな値となる。

最後に X 軸方向の共振の可能性について説明する。(3-70)式および(3-71)式に含まれる

$$\cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \quad (3-150)$$

の項について、1次波の波長が $L=4b/n$ (n は正の整数) の場合にこの波は自由波となる。(3-59), (3-60)式の2つの1次波がともにこの条件を満たす場合、それらの波の干渉により周波数差の拘束波が発生する。この波により港口部で港内外の波に不連続が生じた場合、同様に x 軸方向に自由波が発生し、条件が満たされると resonance が発生する。ただこれらの条件を満足する波の組み合わせは限られていること、通常の風波の周期帯の波では n の値が小さい場合、周波数差の波はあまり長周期の波にならない。等の理由で式の煩雑さを避けるためにここではこのような状況を考慮しない結果を示した。

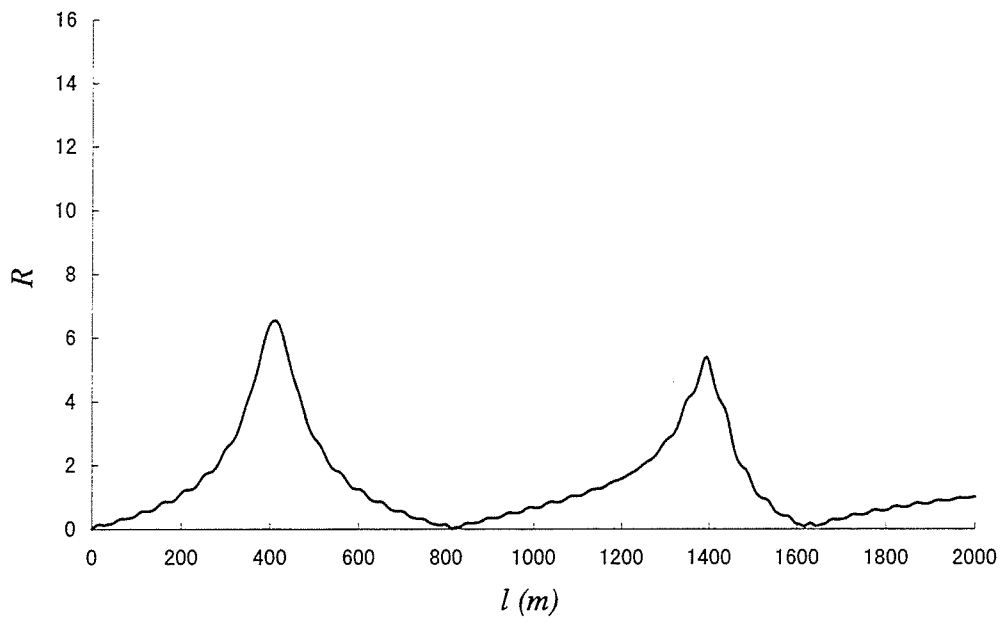


図3-3 湾の振動特性(case1)

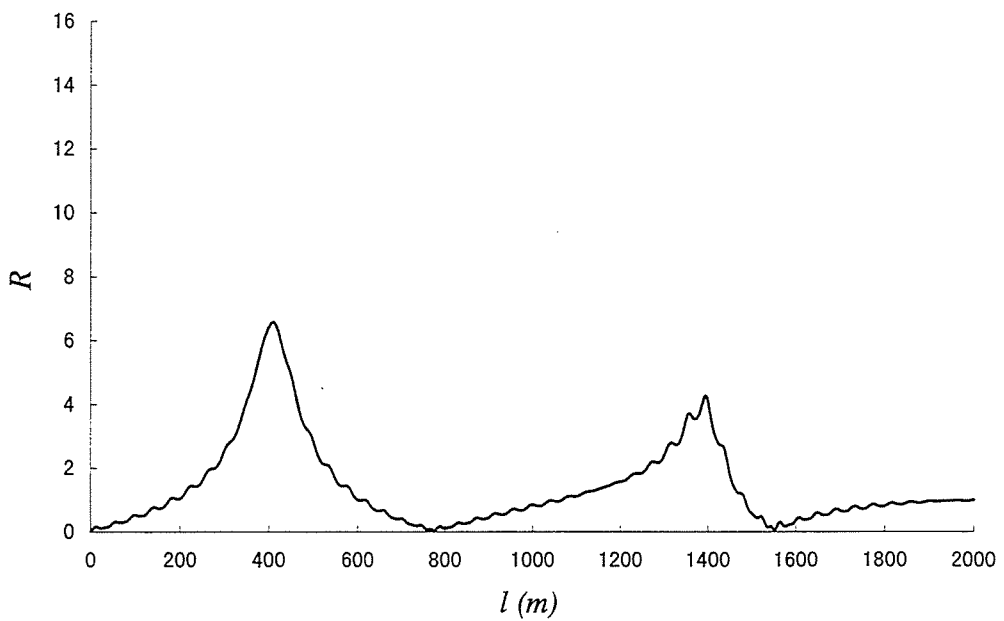


図3-4 湾の振動特性(case2)

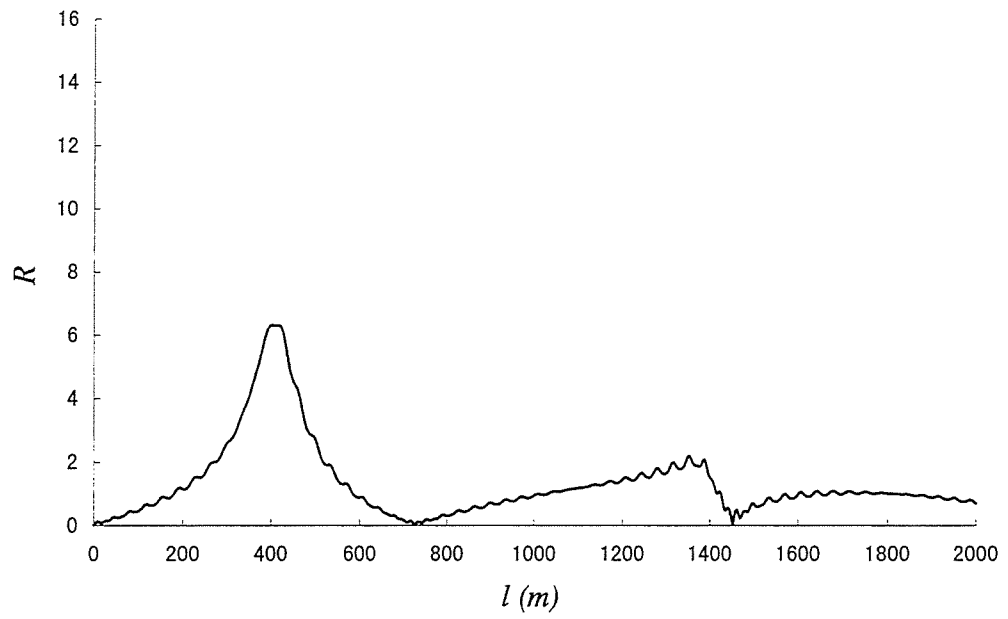


図3-5 湾の振動特性(case3)

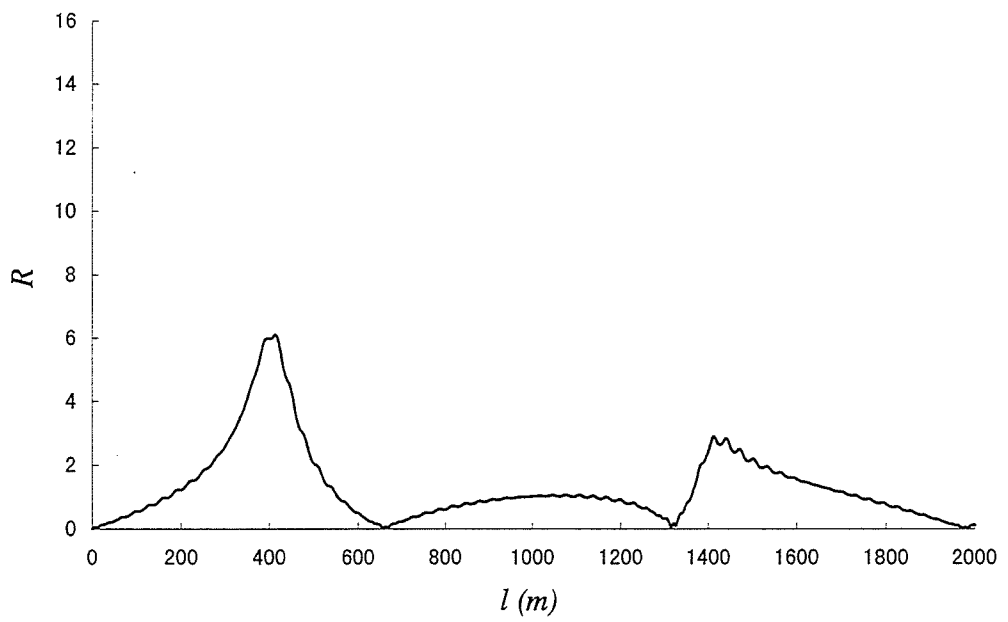


図3-6 湾の振動特性(case4)

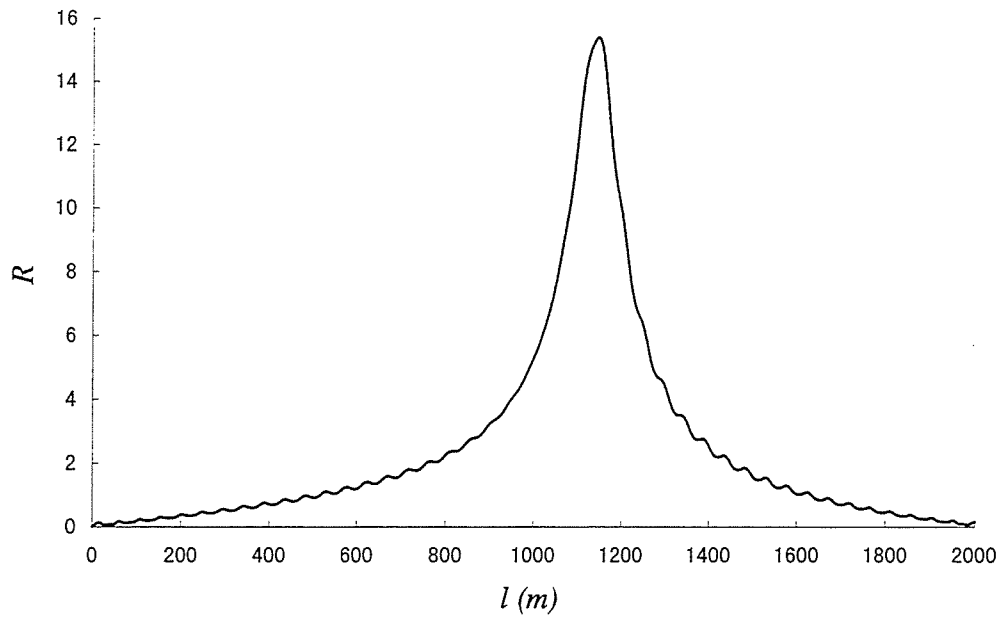


図3-7 湾の振動特性 (case5)

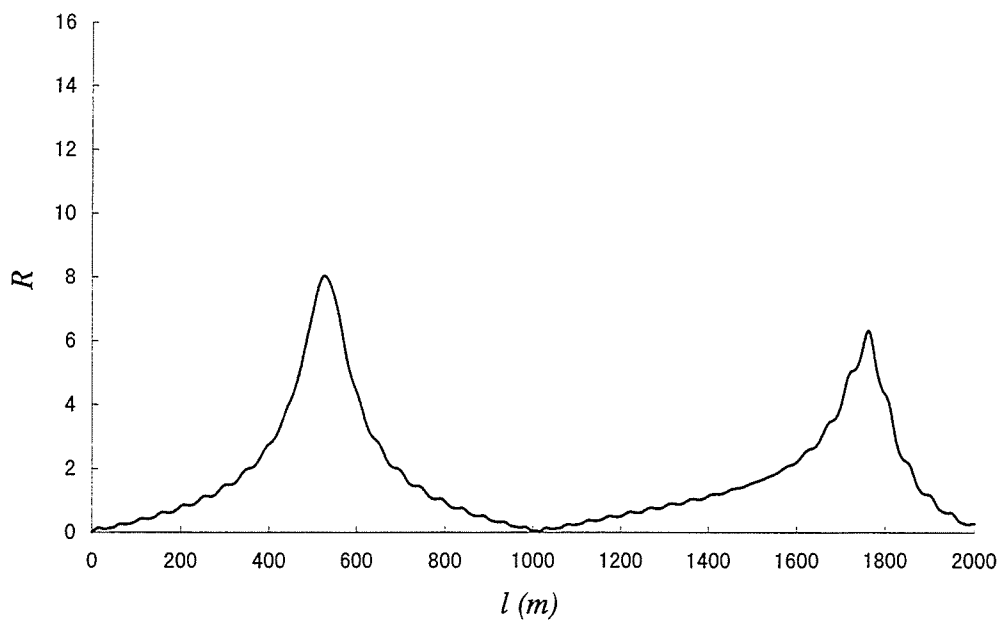


図3-8 湾の振動特性 (case6)

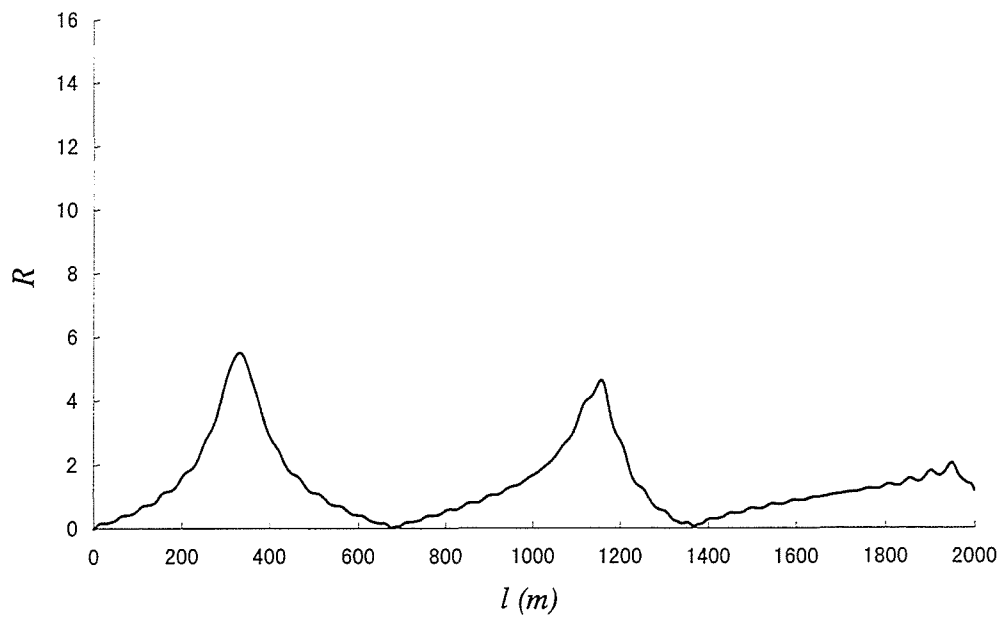


図3-9 湾の振動特性(case7)

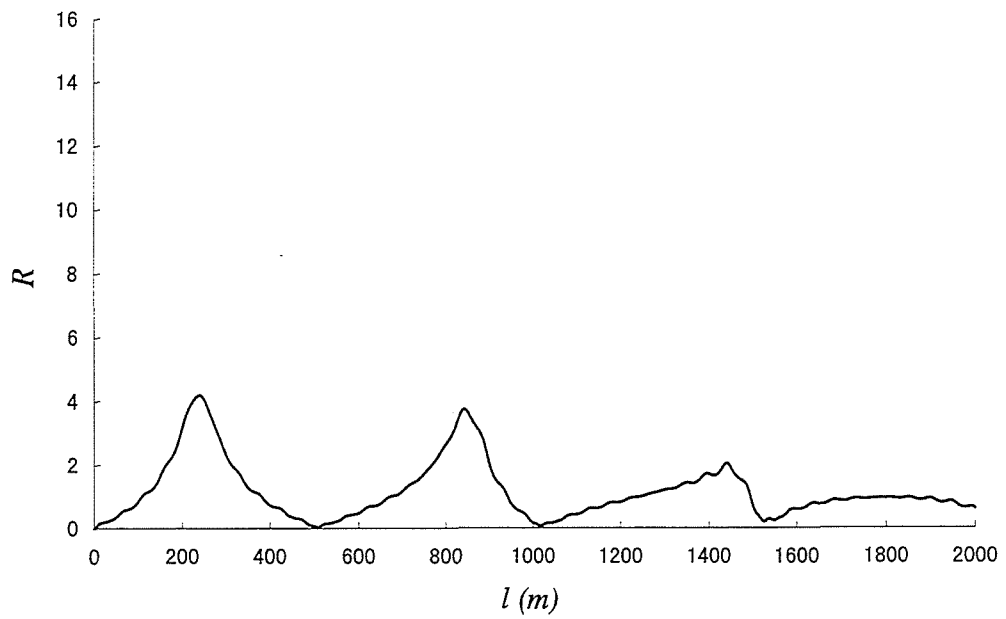


図3-10 湾の振動特性(case8)

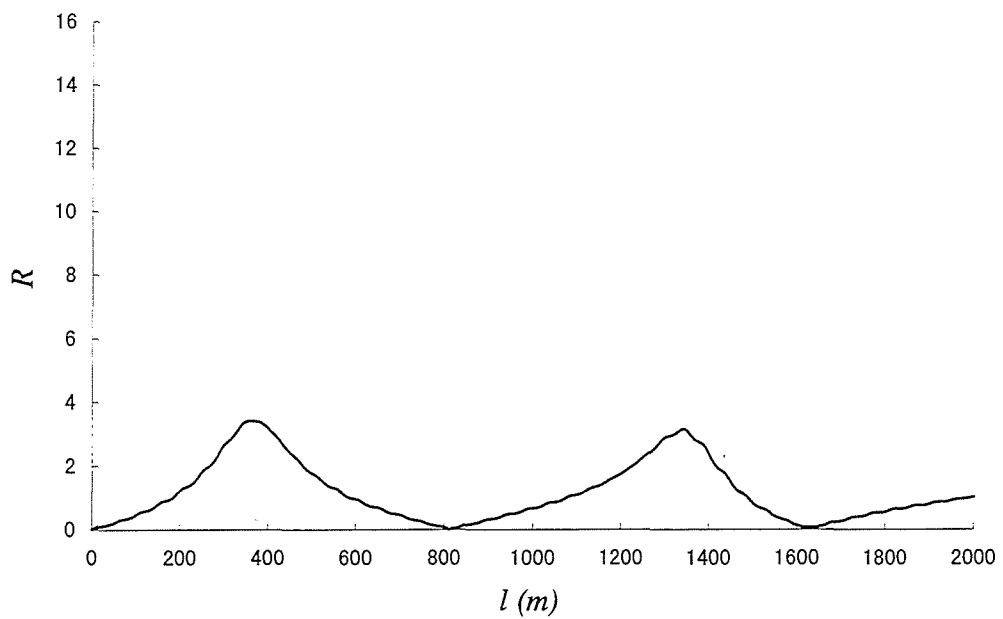


図3-11 湾の振動特性(case9)

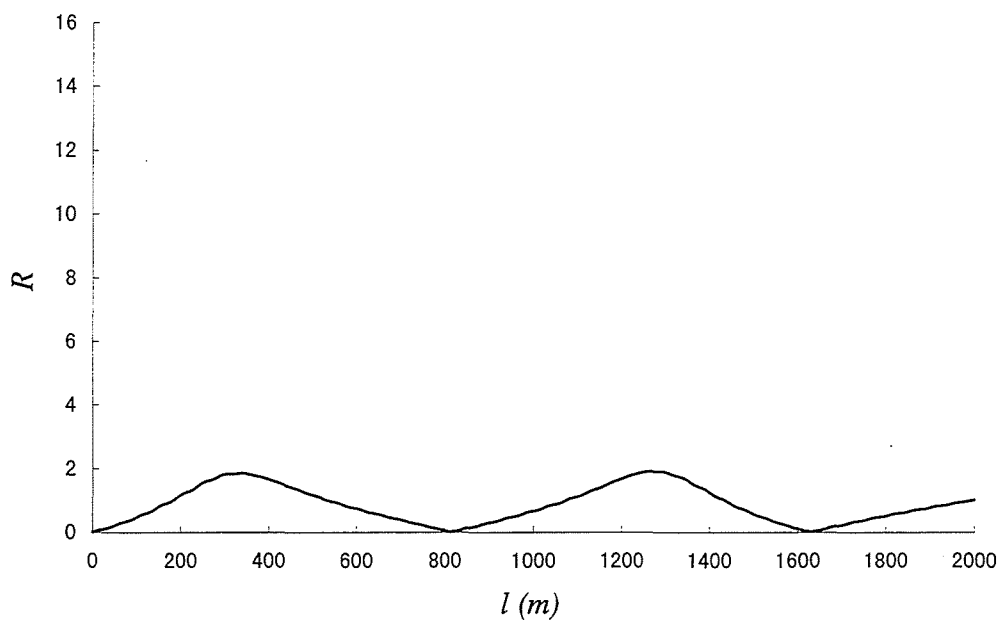


図3-12 湾の振動特性(case10)

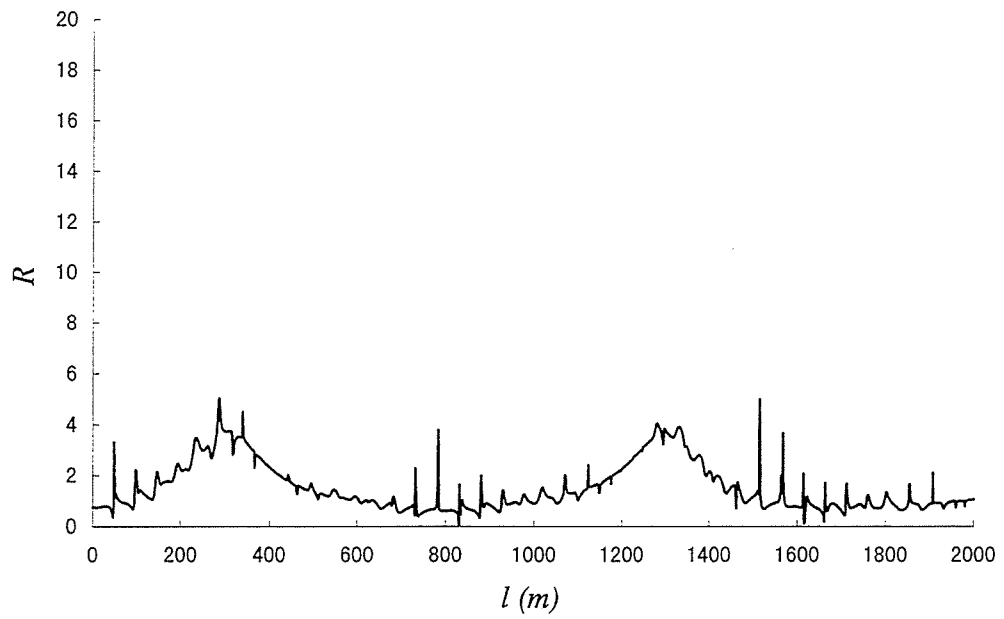


図3-13 湾の振動特性(case11)

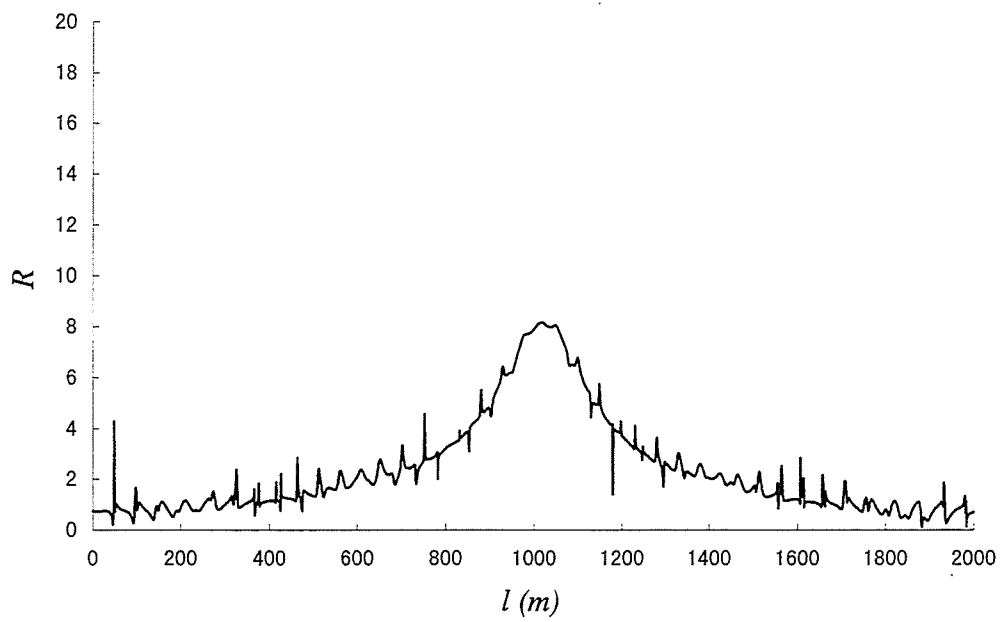


図3-14 湾の振動特性(case12)

参考文献

- 1) Ippen, A. T. and Y. Goda : Wave induced oscillation in harbors, the solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, MIT, 90p., 1963.
- 2) Bowers, E. C. : Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, J. Fluid Mech., Vol.79, part1, pp.71-92, 1977.
- 3) Sharma, J. N. and R. G. Dean. : Development and evaluation of a procedure for simulating a random directional second order sea surface and associated wave forces, Ocean Engg. Rept. No. 20, Dept. Civil Engg., Univ. of Delaware, 139p, 1979.
- 4) Tick, L. J. : A non-linear random model of gravity waves, Jour. Math. Mech. , 8, pp. 643-652, 1959.
- 5) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart : Radiation stresses in water waves : a physical discussion, with applications, Deep Sea Res. , Vol.11, pp. 529-569, 1964.
- 6) Phillips, O. M. : The dynamics of the upper ocean, Cambridge University press, 261p. , 1969.
- 7) Paolo De Girolama : An experiment on harbour resonance induced by incident regular waves and irregular short waves, In : Proc. 22nd Int. Conf. on Coastal Engineering, pp.47-66, 1996.
- 8) Kimura, A. : Averaged two-dimensional frequency wave spectrum of wind waves, Rept. No.84-3, Comm. on Hydraulics Dept. of civil eng. Delft. Univ., 54p, 1984.
- 9) 木村 晃・喜田昌裕・山崎樹実也 : 2次長周期波による港湾の振動について, 海岸工学論文集第43巻, pp.211-215, 1996.

第4章 一方向不規則波による2次長周期波の湾水振動

第1節 概説

第2章において Ippen-Goda¹⁾による1次波の湾水振動のモデルを示し、前章ではこれを拡張した二成分合成波により生じる周波数差の波が原因となる湾水の長周期振動モデルを示した。本章ではこのモデルをより一般的な状況に対応させるために、無数に多くの成分波を持つ一方向不規則波浪による湾水の平均化された長周期振動モデルに拡張する。これまで Mei-Agnon(1989)²⁾らが Multiple-Scale 摂動法を用いた計算法で高次の非線形波による副振動が生じることを示しているが、この方法では1次波の振幅、周波数を緩やかに変化させることで波の不規則性を間接的に表現するにとどまっているため、入射波のスペクトルを与えて直接港内の長周期波のスペクトルを計算することはできない。本研究によるモデルを用いれば、港外における2次の長周期波のスペクトルを与えると港内の波のスペクトルを計算することができる。第2節でこのモデルの理論式を誘導し、第3節では計算を通じて理論の特性を示す。

第2節 理論式の誘導

2.1 2次長周期波

いま外海から(4-1)式で表される不規則波が港口に対して直角に入射する場合について検討する。

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2} \exp i \{ k_m y + \sigma_m t + \varepsilon_m \} \quad (4-1)$$

ここで $a_m/2, k_m, \sigma_m, \varepsilon_m$ は第 m 成分波の振幅、波数、角周波数および初期位相角を表す。このとき湾外および湾内にはすべての成分波ごとに第2章第2節で説明した重複波が発生する。さらに波が自由波の条件を満たす場合、各成分波が相互に干渉して非線形な波が発生する。本章においても前述の理由から2次干渉波に限って論議する。すなわち $\sigma_{mn}^- t \pm k_{mn}^- y$ の波のみを考慮する。ここで σ_{mn}^- および k_{mn}^- はそれぞれ第 m 成分波と第 n 成分波の角周波数および波数の差の値である。

まず港外について考える。(4-1)式で表される入射波相互の干渉による2次波の速度ポテ

ンシャルは次式のようになる。

$$\phi_{1bI}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{b_m b_n}{2 \times 4} \frac{\cosh k_{mn}^- (h+z)}{\cosh k_{mn}^- h} \frac{D_{mn}^-}{\sigma_{mn}^-} \exp i \{ k_{mn}^- y + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- \} \quad (4-3)$$

ここに

$$b_m = \frac{a_m}{\sigma_m} g$$

$$k_{mn}^- = |k_m - k_n|$$

$$\sigma_{mn}^- = \sigma_m - \sigma_n$$

$$\varepsilon_{mn}^- = \varepsilon_m - \varepsilon_n$$

$$D_{mn}^- = \frac{(\sqrt{R_m} - \sqrt{R_n}) \{ \sqrt{R_n} (k_m^2 - R_n^2) - \sqrt{R_m} (k_n^2 - R_m^2) \} + 2(\sqrt{R_m} - \sqrt{R_n})^2 (k_m k_n - R_m R_n)}{(\sqrt{R_m} - \sqrt{R_n})^2 - k_{mn}^- \tanh k_{mn}^- h}$$

$$R_m = k_m \tanh k_m h$$

である。

(4-1)式の波が $y=0$ の壁に反射してできる反射波の水面形は次式のようになる。

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2} \exp i \{ -k_m y + \sigma_m t + \varepsilon_m \} \quad (4-4)$$

(4-4)式で表される2つの反射波の干渉による2次波の速度ポテンシャルは同様にして次式で表される。

$$\phi_{1bR}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{b_m b_n}{2 \times 4} \frac{\cosh k_{mn}^- (h+z)}{\cosh k_{mn}^- h} \frac{D_{mn}^-}{\sigma_{mn}^-} \exp i \{ -k_{mn}^- y + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- \} \quad (4-5)$$

(4-3)式と(4-5)式を加え合わせると港外における2次干渉波の重複波の速度ポテンシャルが得られる。すなわち

$$\begin{aligned}
\phi_{1b}^{(2)} &= \phi_{1bl}^{(2)} + \phi_{1br}^{(2)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{b_m b_n}{2 \times 4} \frac{\cosh k_{mn}^- (h+z)}{\cosh k_{mn}^- h} \frac{D_{mn}^-}{\sigma_{mn}^-} \left\{ \exp(ik_{mn}^- y) + \exp(-ik_{mn}^- y) \right\} \exp i(\sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -i \frac{b_m b_n}{4} \frac{\cosh k_{mn}^- (h+z)}{\cosh k_{mn}^- h} \frac{D_{mn}^-}{\sigma_{mn}^-} \cos k_{mn}^- y \exp i(\sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-)
\end{aligned} \tag{4-6}$$

(4-6)式で表される速度ポテンシャルをもつ波の水面形は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\eta_{1b}^{(2)} &\equiv \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right)_{z=0} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_m b_n}{4g} D_{mn}^- \cos k_{mn}^- y \exp i(\sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-)
\end{aligned} \tag{4-7}$$

ここで

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{g a_m}{\sigma_m} = \frac{g a_m}{\sqrt{g k_m \tanh k_m h}} \\
&= \frac{g a_m}{\sqrt{g R_m}}
\end{aligned}$$

を用いると(4-7)式は次のように書き換えられる。

$$\eta_{1b}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \cos k_{mn}^- y \exp i(\sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-) \tag{4-8}$$

となる。ちなみに(4-3)式の入射波による2次干渉波の水面形は

$$\eta_{1bl}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{2 \times 4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \exp i\{k_{mn}^- y + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-\} \tag{4-9}$$

(4-5)式の反射波による2次干渉波の水面形は

$$\eta_{1br}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{2 \times 4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \exp i\{-k_{mn}^- y + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-\} \tag{4-10}$$

である。

次に港内について考える。港内の水面形は

$$\eta_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{a_m c_m d}{b \sin k_m l} \exp i \{ \sigma_m t + \omega_m + \varepsilon_m \} [\cos k_m (y + l) - S_f(x, y)] \quad (4-11)$$

で与えられる。ここでの $S_f(x, y)$, c_m および β_{1n} はそれぞれ(3-17)式, (2-39)式および(2-28)式の k に k_m を代入して計算した値であり次式のようなになる。

$$S_f(x, y) = \frac{4b \sin k_m l}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} k_m l} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \cosh \beta_{1n} k_m (y + l)$$

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{[(d/b)(\cot k_m l - S_1) - \psi_2]^2 + \psi_1^2}} \quad (4-12)$$

$$\beta_{1n} = \sqrt{(n\pi / 2k_m b)^2 - 1}$$

である。(4-11)式の自由波のうち、港内の x 軸方向の自由波を無視すると

$$\eta_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{a_m c_m d}{b \sin k_m l} \exp i (\sigma_m t + \varepsilon_m + \omega_m) \cos k_m (y + l) \quad (4-13)$$

のみとなる。(4-13)式の波は重複波であり、これは沖から岸に向かう波と岸から沖に向かう波が重なり合ったものである。すなわち

$$\eta_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{a_m c_m d}{2b \sin k_m l} \exp i (\sigma_m t + \varepsilon_m + \omega_m) \exp i \{ k_m (y + l) \}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{a_m c_m d}{2b \sin k_m l} \exp i (\sigma_m t + \varepsilon_m + \omega_m) \exp -i \{ k_m (y + l) \} \quad (4-14)$$

となる。(4-14)式のうち第 1 項は沖から岸に向かう波を表し、第 2 項は岸から沖へ向かう波を表している。いま(4-13)式の添字を n とした別の波について考えると

$$\eta_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n c_n d}{2b \sin k_n l} \exp i (\sigma_n t + \varepsilon_n + \omega_n) \exp i \{ k_n (y + l) \}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n c_n d}{2b \sin k_n l} \exp i (\sigma_n t + \varepsilon_n + \omega_n) \exp -i \{ k_n (y + l) \} \quad (4-15)$$

となる。

(4-14), (4-15)式のうち同じ方向の波が干渉してできる 2 次長周期波の水面形は沖から岸に向かう波の場合

$$\eta_{2bl}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{a_m a_n c_m c_n d^2}{4b^2 \sin k_m l \sin k_n l} \right) \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \exp i \left\{ k_{mn}^- (y+l) + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^- \right\} \quad (4-16)$$

であり, 岸から沖に向かう波の場合

$$\eta_{2bR}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{a_m a_n c_m c_n d^2}{4b^2 \sin k_m l \sin k_n l} \right) \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \exp i \left\{ -k_{mn}^- (y+l) + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^- \right\} \quad (4-17)$$

である。(4-16)式と(4-17)式を重ね合わせると, 港内における 2 次干渉波の水面形が得られる。

$$\eta_{2b}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n c_m c_n d^2}{4b^2 \sin k_m l \sin k_n l} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \cos k_{mn}^- (y+l) \exp i \left\{ \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^- \right\} \quad (4-18)$$

それぞれの波の速度ポテンシャルは, まず(4-16)式より沖から岸に向かう波について

$$\phi_{2bl}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{2} \left(\frac{b_m b_n c_m c_n d^2}{4b^2 \sin k_m l \sin k_n l} \right) \frac{D_{mn}^-}{\sigma_{mn}^-} \frac{\cosh k_{mn}^- (h+z)}{\cosh k_{mn}^- h} \times \exp i \left\{ k_{mn}^- (y+l) + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^- \right\} \quad (4-19)$$

次に(4-17)式より岸から沖に向かう波について

$$\phi_{2bR}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{2} \left(\frac{b_m b_n c_m c_n d^2}{4b^2 \sin k_m l \sin k_n l} \right) \frac{D_{mn}^-}{\sigma_{mn}^-} \frac{\cosh k_{mn}^- (h+z)}{\cosh k_{mn}^- h} \times \exp i \left\{ -k_{mn}^- (y+l) + \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^- \right\} \quad (4-20)$$

となる。

(4-19)式と(4-20)式の速度ポテンシャルを重ね合わせると, 港内における 1 次の進行波に伴う次の 2 次干渉波の速度ポテンシャルが得られる。

$$\phi_{2b}^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -i \left(\frac{b_m b_n c_m c_n d^2}{4b^2 \sin k_m l \sin k_n l} \right) \frac{D_{mn}^- \cosh k_{mn}^- (h+z)}{\sigma_{mn}^- \cosh k_{mn}^- h} \cos k_{mn}^- (y+l) \quad (4-21)$$

$$\times \exp i \{ \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^- \}$$

2. 2 2次長周期波による湾水振動

2. 1において港内外における2次干渉波の重複波の速度ポテンシャルを求めた。これらの波も(2-8-1)~(2-8-4)式に示す境界条件を満足しなければならない。しかし、(4-6)式と(4-21)式で表される波の総和は港口で等しくならず、 $y=0$ でポテンシャルの不連続が起こる。ここでも前と同様に、この不連続を埋めるような自由波が新たに発生するものと考ええる。ここでは不規則波を取り扱っているので、周波数の異なる無数に多くの長周期の自由波が発生する。

まず港外の波について検討する。港外には速度ポテンシャルが(4-6)式で与えられる2次波が存在する。ここではさらに新しい自由波が存在するものと考ええる。いまそのポテンシャルを

$$\phi_{1f} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{\sigma_{mn}^-} f_1(x, y) Z_{f1}(z) \exp i (\sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^-) \quad (4-22)$$

と仮定する。(4-6)式の拘束波のポテンシャルはラプラスの式を満足するので、(4-6)式と(4-22)式の波が共存する場合には(4-22)式もまたラプラスの式を満足しなければならない。(4-22)式をラプラスの式に代入すると

$$\frac{1}{f_1} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Z_f} \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} = 0 \quad (4-23)$$

いまこれらを前章と同様に k_f^2 に等しいと置く。ここで k_f は第 m 成分波と第 n 成分波の周波数の差である σ_{mn}^- に対応する自由波の波数を表している。すなわち

$$\frac{1}{Z_{f1}} \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} = k_f^2 \quad (4-24)$$

および

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k_f^2 f_1 = 0 \quad (4-25)$$

(4-24)式を変形し

$$\frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} - k_f^2 Z_{f1} = 0 \quad (4-26)$$

とする。ここで(4-26)式と底面の境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi_{1f}}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

を用いると

$$Z_{f1} = g \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \quad (4-27)$$

が得られる。水面形は水面での境界条件より導かれ次式のようなになる。

$$\eta_{1f}(x, y, t) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{1f}}{\partial t} \right)_{z=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_1(x, y) \exp i \{ \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- \} \quad (4-28)$$

定数 k は水面における連続式から決定される。

$$\frac{\partial \eta_{1f}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_{1f}}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (4-29)$$

したがって周波数差の波に関する分散関係式が得られる。

$$(\sigma_{mn}^-)^2 = g k_f \tanh k_f h \quad (4-30)$$

ここに k_f は σ_{mn}^- に対応する自由波の波数である。ここで(4-25)式の f_1 として

$$f_1 = k_f C_{mn} \exp i \Omega_{mn} f_1' \quad (4-31)$$

と置く。 f_1' に対する境界条件は

$$\left. \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 1 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \quad (4-32)$$

$$f_1' \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

である。ここで合田らに習って

$$\begin{aligned} F(u, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1'(x, y) dx \\ f_1'(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} F(u, y) du \end{aligned} \quad (4-33)$$

で定義される $f_1'(x, y)$ のフーリエ変換 $F(u, y)$ を用いる。 f_1' がヘルムホルツの式を満たすので f_1' もまたヘルムホルツの式を満足する。すなわち

$$\frac{\partial^2 f_1'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1'}{\partial y^2} + f_1' k_f^2 = 0 \quad (4-34)$$

である。

(4-33)式の関係 (第2式) を(4-34)式に代入すると $F(u, y)$ に対する微分方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k_f^2 - u^2)F = 0 \quad (4-35)$$

を得る。(4-32)式の境界条件は $F(u, y)$ に置き換えられ次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F(u, y)}{\partial y} \right]_{y=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{\partial f_1'}{\partial y} \right]_{y=0} dx \\ &= \int_{-d}^d e^{iux} dx \\ &= \frac{2 \sin ud}{u} \end{aligned} \quad (4-36)$$

$$F(u, y) = 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty \quad (4-37)$$

(4-35)式の微分方程式の一般解は次式で与えられる。

$$F(u, y) = C_1(u) e^{\sqrt{u^2 - k_f^2} y} + C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2} y} \quad (4-38)$$

(4-38)式の右辺に含まれる係数 C_1, C_2 を決定するために、 u の範囲を2つに分けて考える。

すなわち、 $|u| > k_f$ の場合と、 $|u| < k_f$ の場合に分けて考える。

i) $|u| > k_f$ の場合

この場合, (4-37)式より $y \rightarrow \infty$ の時に $F(u, y) = 0$ とならなければならない. よって $C_1(u) = 0$ とならなければならない. したがって(4-36)式より $C_2(u)$ が得られ, $F(u, y)$ が決定する. すなわち

$$F(u, y) = -\frac{2 \sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2} y} \quad (4-39)$$

ii) $|u| < k_f$ の場合

(4-38)式の第 1 項は 1 次波の場合と同様に沖から岸に向かう波を表している. ここで扱っているのは岸から沖に向かって伝播する放射波であるので $C_1(u) = 0$ として(4-36)式から次式のようになる.

$$F(u, y) = i \frac{2 \sin ud}{u \sqrt{k_f^2 - u^2}} e^{-i \sqrt{k_f^2 - u^2} y} \quad (4-40)$$

いまここで関数 f_1' を合田らと同様にして次式のように置く.

$$f_1' = iI_1 - I_2 \quad (4-41)$$

ここに

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_f} \frac{\sin ud}{u \sqrt{k^2 - u^2}} \cos uxe^{-i \sqrt{k_f^2 - u^2} y} du$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} \cos uxe^{-\sqrt{u^2 - k_f^2} y} du$$

である. これで港外の水面形 η_{1f} は次式のようになる.

$$\eta_{1f} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_f C_{mn} (iI_1 - I_2) \exp i \{ \sigma_{mn}^- t + \Omega_{mn} \} \quad (4-42)$$

また速度ポテンシャル ϕ_{1f} は次式のようになる.

$$\phi_{1f} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{\sigma_{mn}^-} \{iI_1 - I_2\} k_f C_{mn} g \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma_{mn}^- t + \Omega_{mn} + \varepsilon^- \} \quad (4-43)$$

次に港内の波について検討する。ここでも前章と同様に、港内外の波が港口部で接続するような新しい2次の自由波が港内に発生するものとする。ここで新しく発生する自由波の速度ポテンシャルを次式のように仮定する。

$$\phi_{2f} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{\sigma_{mn}^-} f_2(x, y) Z_f(z) \exp i \{ \sigma_{mn}^- t + \varepsilon_{mn}^- \} \quad (4-44)$$

ここで関数 $f_2(x, y)$ を次式に示すような変数分離できる形に仮定する。

$$f_2(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (4-45)$$

(4-44)式において $Z_f(z)$ は前述の底面と水面における境界条件より

$$Z(z) = g \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \quad (4-46)$$

$$(\sigma_{mn}^-)^2 = g k_f \tanh k_f h$$

となる。(4-44)式と(4-45)式をあわせてラプラスの式に代入すると

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_f^2 = - \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (4-47)$$

を得る。(4-47)式の両辺はそれぞれ y および x のみの関数であるので(4-47)式が成立するためには両辺が共通の定数でなければならない。いまこれを α^2 と置くと関数 $X(x)$ と $Y(y)$ の一般解は次式のようになる。

$$\begin{aligned} X(x) &= A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x} \\ Y(y) &= C e^{\sqrt{\alpha^2 - k_f^2} y} + D e^{-\sqrt{\alpha^2 - k_f^2} y} \end{aligned} \quad (4-48)$$

実数 X は港内の両側の壁での境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} \right|_{x=2\lambda b, 2(\lambda-1)b} = 0$$

により

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=2\lambda b, 2(\lambda-1)b} = 0 \quad (4-49)$$

でなければならない。以下、合田らの(2-25), (2-26)式と全く同様にして

$$X(x) = B_n \cos \frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b) \quad (4-50)$$

が得られる。

さらに湾奥の壁 ($y = -l$) において

$$\left. \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial y} \right|_{y=-l} = 0$$

でなければならないので

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=-l} = \sqrt{\alpha^2 - k_f^2} \left[C e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} - D e^{l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \right] = 0 \quad (4-51)$$

となる。ここに新しい変数 C_n を用いると

$$\begin{aligned} C &= \frac{C_n}{2} e^{l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \\ D &= \frac{C_n}{2} e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \end{aligned} \quad (4-52)$$

となる。したがって関数 $Y(y)$ は(4-52)式を(4-48)式に代入することで次式を得る。

$$Y(y) = C_n \cosh[\beta_{2n} k_f (y + l)] \quad (4-53)$$

ここに

$$\beta_{2n} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2k_f b} \right)^2 - 1} \quad (4-54)$$

である。 C_n を A_n で表すと、関数 $f_2(x, y)$ は次式のようになる。

$$f_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b)\right] \cosh[\beta_{2n} k_f (y + l)] \quad (4-55)$$

次に A_n を決定する。湾口における f_2 の y 方向の勾配は f_1 の湾口での勾配に等しくなければならない。すなわち

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} = k_f C_{mn} \exp i \Omega_{mn} \quad (4-56)$$

$$f_1 = k_f C_{mn} \exp i \Omega_{mn} f_1'$$

において

$$\left. \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 1 & x \leq |d| \\ 0 & x > |d| \end{cases} \quad (4-57)$$

と置いたので(4-31), (4-32)式より

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} = k_f C_{mn} \exp i \Omega_{mn} \quad (4-58)$$

と置いて良い。従って $y=0$ における $f_2(x, y)$ の y に関する微分は次式のようになる。

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{y=0} = -A_0 k_f \sin kl + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \beta_{2n} k_f \sinh(\beta_{2n} k_f l) \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b)\right] \quad (4-59)$$

$A_0 \sim A_n$ については合田らと全く同様にして決めることができる。すなわち

$$A_0 = -\frac{\int_{2\lambda b-d}^{2\lambda b+d} k_f C_{mn} \exp i \Omega_{mn} dx}{2b k_f \sin k_f l} = -\frac{C_{mn} d \exp i \Omega_{mn}}{b \sin k_f l} \quad (4-60)$$

$$A_n = \frac{\int_{2\lambda b-d}^{2\lambda b+d} k_f C_{mn} \exp i \Omega_{mn} \cos \frac{n\pi x}{2b} dx}{b \beta_{2n} k_f \sinh \beta_{2n} k_f l} = \frac{4C_{mn} \exp i \Omega_{mn} \sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n\pi}{n\pi \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} k_f l} \quad (4-61)$$

となる。以上を(4-55)式に代入すると $f_2(x, y)$ が決められる。

$$f_2(x, y) = -\frac{C_{mn} d \exp i \Omega_{mn}}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x, y)] \quad (4-62)$$

ここに

$$S(x, y) = \frac{4b \sin k_f l}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} k_f l} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \cosh \beta_n k_f (y+l) \right\} \quad (4-63)$$

である。以上と(4-46)式を(4-44)式に代入すると港内の速度ポテンシャルが得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{2f} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\sigma_{mn}^-} \frac{C_{mn} d}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x, y)] \\ & \times \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} g \exp i (\sigma_{mn}^- t + \Omega_{mn} + \varepsilon_{mn}^-) \end{aligned} \quad (4-64)$$

また水面形は次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} \eta_{2f} = & \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{2f}}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} \\ = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{C_{mn} d}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x, y)] \exp i \{ \sigma_{mn}^- t + \Omega_{mn} + \varepsilon_{mn}^- \} \end{aligned} \quad (4-65)$$

ここで未知数 C_{mn} および Ω_{mn} は(3-141)式および(3-142)式の添え字 1, 2 を m, n に置き換えたものであり次式のようになる。

$$C_{mn} = \frac{a_m a_n D_{mn}^-}{4 \sqrt{R_m R_n}} \sqrt{\frac{P_{1mn}^2 - 2P_{1mn} \cos \omega_{mn}^- + 1}{(P_{2mn} - \psi_{2f})^2 + \psi_{1f}^2}} \quad (4-66)$$

$$\omega_{mn}^- = \omega_m - \omega_n \quad (4-67)$$

$$\tan \{ \Omega_{mn} + \varepsilon_{mn}^- + \phi_{mn} \} = \frac{P_{1mn} \sin(\varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^-) - \sin \varepsilon_{mn}^-}{P_{1mn} \cos(\varepsilon_{mn}^- + \omega_{mn}^-) - \cos \varepsilon_{mn}^-} \quad (4-68)$$

ここに

$$\tan \phi_{mn} = \frac{\psi_{1f}}{P_{2mn} - \psi_{2f}}$$

である。また P_{1mn} は(3-144)式の添え字 1,2 を m, n に置き換えたものであり P_{2mn} は(3-145)式に k_{mn} を代入した値である。

以上の結果を用いて港内外の波の振幅を計算する。

まず港外に存在する周波数の異なる無数に多くの長周期波のうち、角周波数が $\sigma_{mn}^- = \sigma_m - \sigma_n = \sigma_r$ となる波だけを取り出す。(4-8)式より σ_r の波だけを取り出すと

$$\eta_{1r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \exp i \{ \sigma_r t + \varepsilon_{mn}^- \} \quad (m = r + n) \quad (4-69)$$

ただし $y=0$, $\sigma_m > \sigma_n$ としてある。ここで η_{1r} の振幅を η_{1ra} とすると、港外側の振幅は

$$\begin{aligned} |\eta_{1ra}|^2 &= \eta_{1ra} \eta_{1ra}^* \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \exp \{ i \varepsilon_{mn}^- \} \times \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_p a_q}{4} \frac{D_{pq}^-}{\sqrt{R_p R_q}} \exp \{ -i \varepsilon_{pq}^- \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_m a_n}{4} \frac{a_p a_q}{4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \frac{D_{pq}^-}{\sqrt{R_p R_q}} \exp i \{ \varepsilon_{mn}^- - \varepsilon_{pq}^- \} \quad (m = r + n, p = r + q) \end{aligned} \quad (4-70)$$

で与えられる。ここに η_{1ra}^* は η_{1ra} の共役複素数である。(4-70)式には 1 次成分波の周波数相互の差の項が含まれている。ここで(4-70)式に含まれる ε_{mn}^- と ε_{pq}^- に関して平均化操作を行う。(4-1)式の ε_m は $0 \sim 2\pi$ の間で一様に分布する確率量であると考えてよいので平均化操作をする際、いずれか一方の項について平均化(他方の項は固定しておく)すれば、位相の項は消える。すなわち次式を得る。

$$\overline{|\eta_{1ra}|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m^2 a_n^2}{16} \frac{(D_{mn}^-)^2}{R_m R_n} \quad (m = r + n) \quad (4-71)$$

となる。

全く同様に港内側の自由波について考える。

(4-65)式のうち角周波数が $\sigma_{mn}^- = \sigma_m - \sigma_n = \sigma_r$ となる波だけを取り出すと次式のようになる。

$$\eta_{2r} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{C_{mn}(d/b)}{\sin k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)] \exp i \{ \sigma_r t + \Omega_{mn} + \varepsilon_{mn}^- \} \quad (4-72)$$

$(m = r + n)$

となる。ここに k_r は σ_r に対する自由波の波数である。さらに港内側の振幅は

$$\begin{aligned} |\eta_{2ra}|^2 &= \eta_{2ra} \eta_{2ra}^* \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{C_{mn}(d/b)}{\sin k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)] \exp i \{ \Omega_{mn} + \varepsilon_{mn}^- \} \\ &\quad \times \sum_{q=1}^{\infty} -\frac{C_{pq}(d/b)}{\sin k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)] \exp -i \{ \Omega_{pq} + \varepsilon_{pq}^- \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{C_{mn} C_{pq} (d/b)^2}{\sin^2 k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)]^2 \\ &\quad \times \exp i \{ \Omega_{mn} - \Omega_{pq} + \varepsilon_{mn}^- + \varepsilon_{pq}^- \} \end{aligned} \quad (4-73)$$

$(m = r + n, p = r + q)$

となる。ここに η_{2ra}^* は η_{2ra} の共役複素数である。ここで(4-66)式に含まれる ψ_{1f} と ψ_{2f} は k, d が0に近づくと同じように0に近づくと関数である(図2-2参照)。例えば湾が細長く、 b/d が1の場合、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= kd + O(k^3 d^3) \\ \psi_2 &= \frac{2}{\pi} kd \left[\frac{3}{2} - \gamma - \ln(kd) \right] + O(k^2 d^2) \end{aligned} \right\} \quad (4-74)$$

と近似できる(Ippen-Goda, 1963)。ここに $\gamma = 0.5772 \dots$ (オイラー数)である。 k_r は十分小さいので $k_r d \approx 0$ すなわち

$$\psi_{1f} \equiv \psi_{2f} \equiv 0 \quad (4-75)$$

と近似できる. (4-75)式の関係をも(2-42)式, (3-142)式に代入すると

$$\Omega_{mn} \equiv \varepsilon_m - \varepsilon_n + \delta_{mn} - \varepsilon_{mn}^- = \delta_{mn} \quad (4-76)$$

となる. さらに

$$\delta_{mn} = \tan^{-1} \left\{ \frac{P_{1mn} \sin \omega_{mn}^-}{P_{1mn} \cos \omega_{mn}^- - 1} \right\} \quad (4-77)$$

であり, (4-75)式が成立する場合(4-67)式は $\omega_{mn}^- \equiv 0$ となるから $\delta_{mn} \equiv 0$ であり(4-73)式は

$$\begin{aligned} |n_{2ra}|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{C_{mn} C_{pq} (d/b)^2}{\sin^2 k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)]^2 \exp i \{ \delta_{mn} - \delta_{pq} + \varepsilon_{mn}^- - \varepsilon_{pq}^- \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{C_{mn} C_{pq} (d/b)^2}{\sin^2 k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)]^2 \exp i \{ \varepsilon_{mn}^- - \varepsilon_{pq}^- \} \\ &\quad (m = r + n, p = r + q) \end{aligned} \quad (4-78)$$

となる. (4-70)式から(4-71)式の部分と同様に位相角について平均操作を行うと最終的に

$$\overline{|n_{2ra}|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}^2 (d/b)^2}{\sin^2 k_r l} [\cos k_r l (y+l) - S_f(x, y)]^2 \quad (4-79)$$

を得る. 以上より角周波数が σ_r である波の港内における自由波の振幅(重複波)の2乗平均値と同じ周波数の港外における拘束波の振幅(重複波)の2乗平均値との比が次式のよ
うに計算できる.

$$R^2(\sigma_r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}^2 (d/b)^2}{\sin^2 k_r l} [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m^2 a_n^2 (D_{mn}^-)^2}{16 R_m R_n}} \quad (m = r + n) \quad (4-80)$$

ここで

$$A_{mn} = \frac{a_m a_n}{4} \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \quad (4-81)$$

および

$$B_{mn} = \frac{\{P_{1mn}^2 - 2P_{1mn} \cos \omega_{mn}^- + 1\}^{1/2} (d/b) [\cos k_r (y+l) - S_f(x, y)]}{\{P_{2mn} - \psi_{2f}\}^2 + \psi_{1f}^2}^{1/2} \sin k_r l \quad (4-82)$$

と置くと(4-80)式は次式のように置き換えられる。

$$R^2(\sigma_r) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} B_{mn}]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2} \quad (m = r + n) \quad (4-83)$$

ただし(4-82)式では(4-75)式および(4-76)式の近似は用いていない。いま不規則波の周波数スペクトル $S(\sigma)$ が与えられたものとすれば(4-81)式は

$$A_{mn} = \sqrt{4S(\sigma_m)S(\sigma_n)} d\sigma \frac{D_{mn}^-}{\sqrt{R_m R_n}} \quad (4-84)$$

と与えることもできる。その際には

$$\sigma_m = md\sigma, \quad \sigma_n = nd\sigma, \quad \sigma_r = rd\sigma \quad (4-85)$$

となる。

第3節 理論式の特性

ここでは計算を通じて理論の特性を示す。計算条件を示したものが表4-1である。

水深はすべてのケースで10(m)とした。計算に用いた不規則波のスペクトルはBretshneider-光易型である。 R は湾外の $x = \infty, y = 0$ の点と湾内は $x = b, y = -l$ の点での重複波の振幅を用いて計算した。各ケースの計算結果の R と、湾の奥行き長さ l と長周期の自由波の波数 k_r の積 $k_r l$ との関係を示したものが図4-1~7である。すべてのケースで $\varepsilon = 1/2$ とした。規則波による湾水の共振では湾長/波長が $1/4, 3/4, 5/4, \dots$ 付近でresonanceが発生する。しかしいずれの図からも分かるように、不規則波の場合は湾幅に関わりなく $1/4, 3/4, \dots$ より幾分小さい部分でresonanceが発生する。

case1~3は有義波周期を変化させた場合について計算したものである。図から分かるように、有義波周期が変化しても、 R の基本モードでのピーク付近の様子にあまり大きな差はない。高次の共振モードでの R の値はいずれのケースでもあまり大きくなるしない。

case1に比べてcase4, 5は湾幅を大きくした場合について計算したものである。湾幅が大きくなると、 R のピーク値が小さくなるのが分かる。

case1に比べてcase6は湾口の幅を狭くした場合について計算したものである。図から分かるように湾口を狭くすると R のピーク値が大きくなる。これはharbor paradox現象に対応するものと推定される。

case7では湾長を長くした場合についても計算を行ったが、湾長が長くなると、 R のピーク値が大きくなるが、resonance時の $k_r l$ の値には大きな変化がない。

ここで計算した各ケースは実港湾に比べて港口幅が幾分小さいが、この場合でも高次の共振モードでの R の値はあまり大きくなるしない。したがって2次長周期波による共振現象では基本モードにのみ注意すればよいようである。

水深、有義波高を変化させた計算も行ったが、増幅率 R に関する限り変化は見られなかった。なお、これらの計算結果は巻末の付録2に記載している。

表4-1 計算条件

case	h(m)	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	l(m)	b(m)	d(m)
1	10	3.0	10.0	500	100	100
2	10	3.0	8.0	500	100	100
3	10	3.0	6.0	500	100	100
4	10	3.0	10.0	500	150	150
5	10	3.0	10.0	500	200	200
6	10	3.0	10.0	500	100	50
7	10	3.0	10.0	1000	100	100

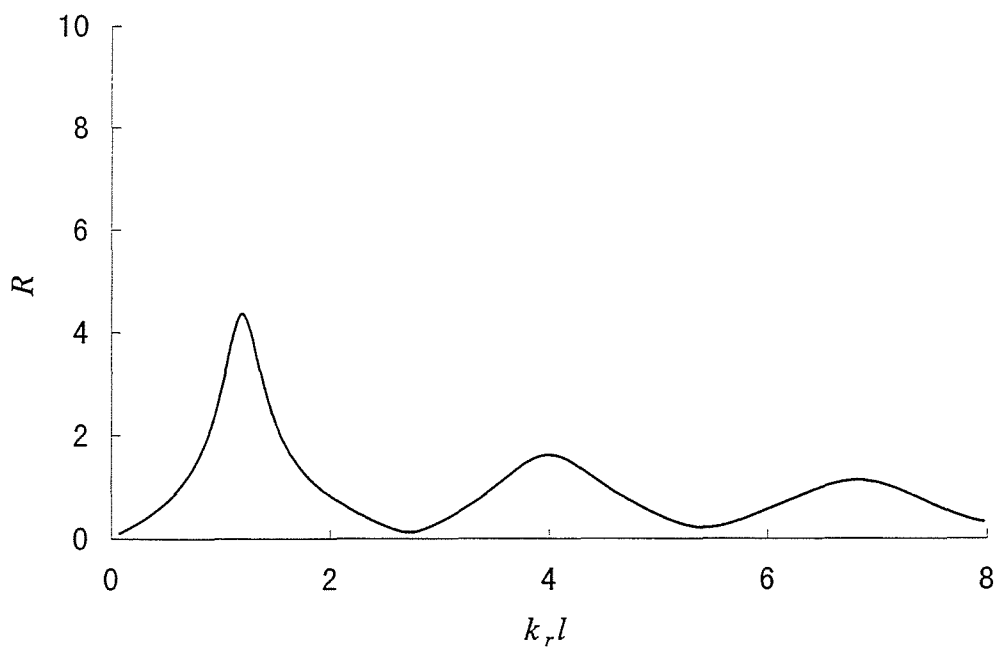


図4-1 湾の振動特性 (case1)

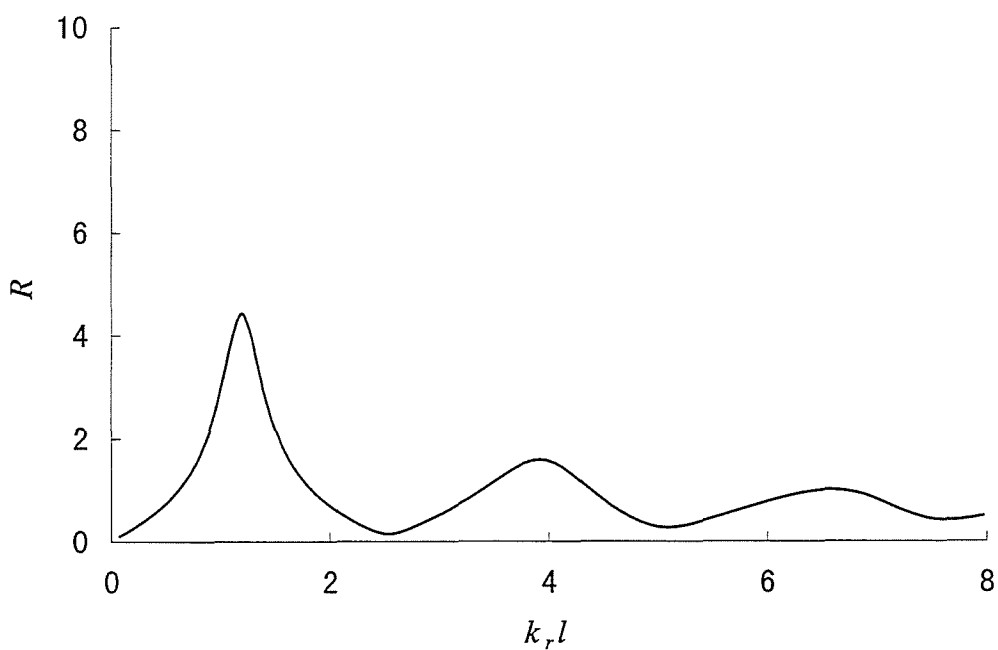


図4-2 湾の振動特性 (case2)

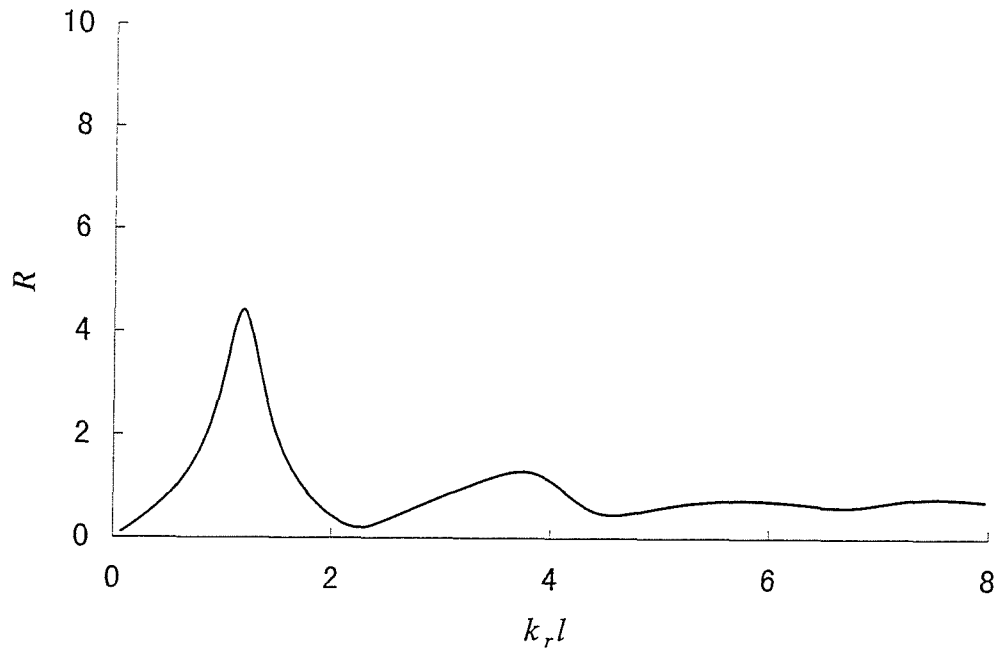


図4-3 湾の振動特性 (case3)

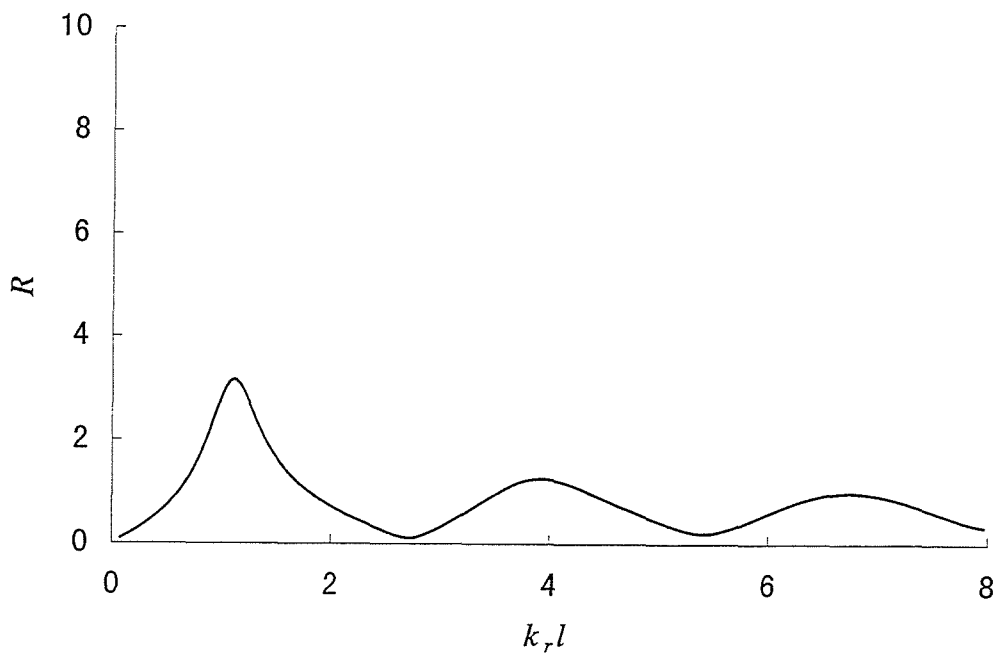


図4-4 湾の振動特性 (case4)

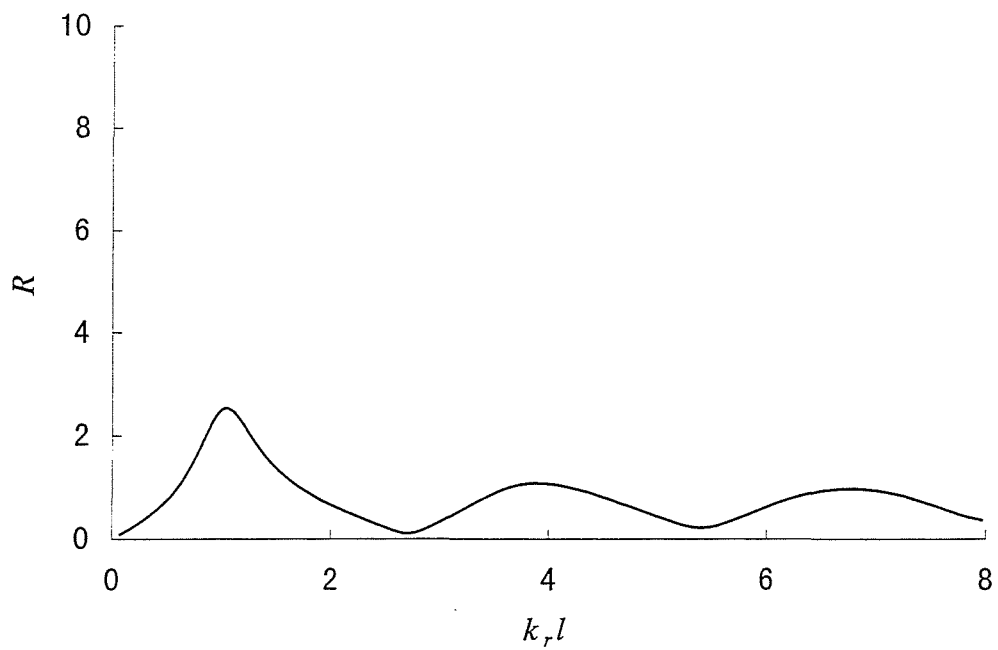


図4-5 湾の振動特性(case5)

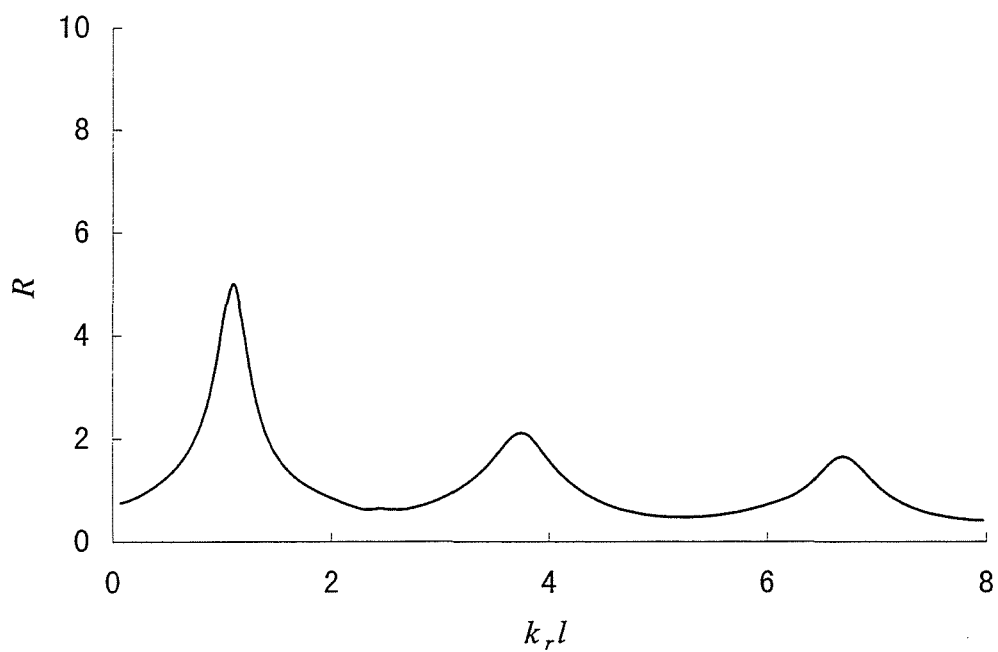


図4-6 湾の振動特性(case6)

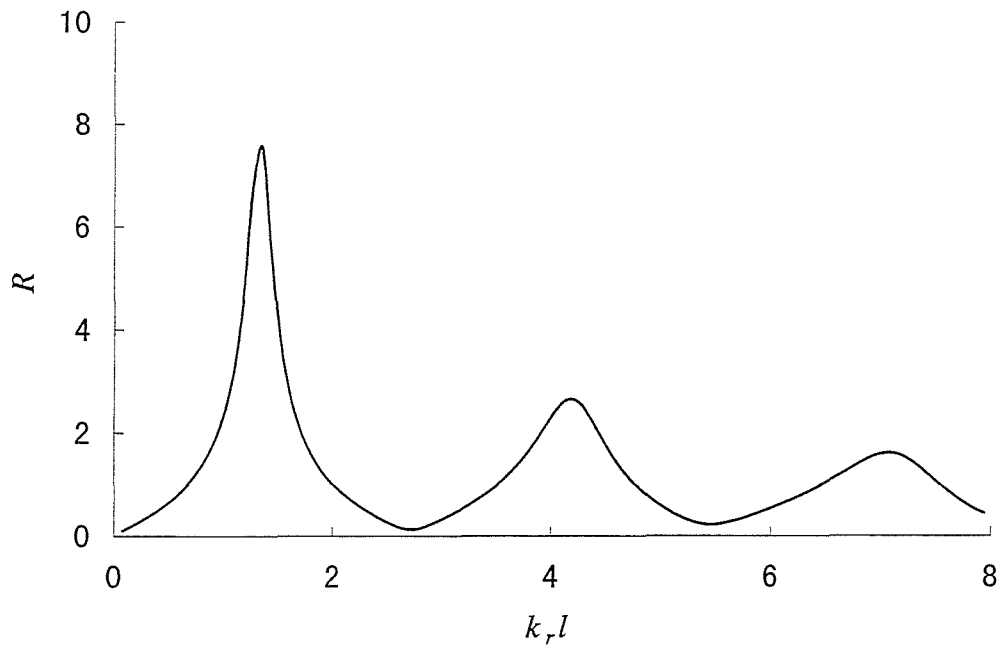


図4-7 湾の振動特性(case7)

参考文献

- 1) Ippen, A. T. and Y. Goda : Wave induced oscillation in harbors, the solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, MIT, 90p., 1963.
- 2) Mei, C. C. and Y. Agnon : Long period oscillations in a harbour induced by incident short waves, J. Fluid Mech., Vol. 208, pp.595-608, 1989.
- 3) 木村 晃・喜田昌裕・山崎樹実也 : 不規則波による湾水の長周期振動について, 海岸工学論文集第 44 卷, pp.251-255, 1997.

第5章 斜め入射合成波による2次長周期波の湾水振動

第1節 概説

第3章において Ippen-Goda¹⁾の理論を拡張した2成分合成波により生じる周波数差の波が原因となる湾水の長周期振動モデルを示し、第4章においてこれを不規則波の場合について拡張した。両モデルとも港口に対して波が直角に入射する場合についてのモデルであった。本章ではより一般的な状況に対応させるために、波が港口に対して斜めに入射する場合について検討する。まず本章では2成分合成波による場合についてのモデルを確立し、斜め入射の湾水の長周期振動特性を求める方法を示す。第2節でこのモデルの理論式を誘導し、第3節では計算を通じて理論の特性を示す。

第2節 理論式の誘導

2.1 2次長周期波

いま外海から(5-1)式および(5-2)式で表される2成分合成波が港口に対して斜めに入射する場合について考える。

$$\eta_1 = \frac{a_1}{2} \exp i \{ k_1 x \cos(+\theta_1) + k_1 y \sin(+\theta_1) + \sigma_1 t + \varepsilon_1 \} \quad (5-1)$$

$$\eta_2 = \frac{a_2}{2} \exp i \{ k_2 x \cos(+\theta_2) + k_2 y \sin(+\theta_2) + \sigma_2 t + \varepsilon_2 \} \quad (5-2)$$

ここで θ_n は港口に対する入射波との角度を表し(直角方向を 90° とする)、 ε_n は初期位相角を表す。このとき湾外および湾内には成分波ごとに第2章第2節で説明した重複波が発生する。さらに波が自由波の条件を満たす場合、相互に干渉して非線形な波が発生する。本章においても前述の理由から2次干渉波に限って論議する。すなわち、2つの1次成分波の干渉によりそれぞれの周波数の和および差の2次波が発生し、2次波の波数は1次波の波数がベクトル合成されたものになる。また2つの1次波は防波堤($y=0$)および港奥($y=-l$)の境界で反射するため、 y 軸の正の方向だけでなく、負の方向に進む波も存在する。ここで

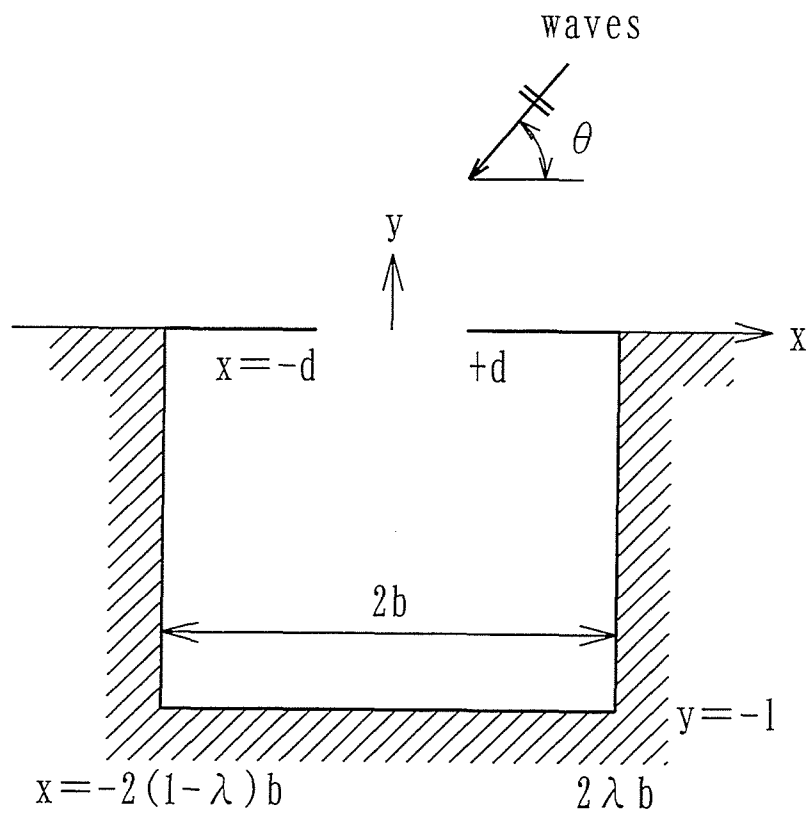


図5-1 記号と座標系

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 \mathbf{x} &= k_1 x \cos \theta_1 + k_1 y \sin \theta_1 \\ \mathbf{k}_2 \mathbf{x} &= k_2 x \cos \theta_2 + k_2 y \sin \theta_2\end{aligned}$$

とおくと(5-1)式および(5-2)式は次のように書き換えられる。

$$\eta_i = \frac{a_i}{2} \exp i \{ \mathbf{k}_i \mathbf{x} + \sigma_i t + \varepsilon_i \} \quad (i=1,2)$$

したがって港内外の速度ポテンシャルとしては1次波相互の干渉により

$$\sigma^- t \pm \mathbf{k}^- \mathbf{x}, \sigma^- t \pm \mathbf{k}^+ \mathbf{x}, \sigma^+ t \pm \mathbf{k}^+ \mathbf{x}, \sigma^+ t \pm \mathbf{k}^- \mathbf{x}$$

および

$$2(\sigma_j t \pm \mathbf{k}_j \mathbf{x}) \quad j=1,2$$

の偏角を持つ2次波の項を含むものが得られる。ここでは長周期の波を対象としているので σ^+ を含む波と $2\sigma_j$ の波を無視する。さらに湾水の長周期振動に対する $\sigma^- t \pm \mathbf{k}^+ \mathbf{x}$ の波の影響は $\sigma^- t \pm \mathbf{k}^- \mathbf{x}$ のものに比して小さいので無視する (Bowers, 1977)²⁾。

まず港外について考える。(5-1)および(5-2)式で表される2つの入射波の干渉による2次波の速度ポテンシャルは次式のようなになる。

$$\phi_{bi}^{(2)} = -i \frac{b_1 b_2}{2 \times 4} \frac{\cosh k^- (h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \exp i \{ \mathbf{k}^- \mathbf{x} + \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (5-3)$$

となる。ここに

$$b_i = \frac{a_i}{\sigma_i} g \quad (i=1,2)$$

$$k^- = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|, \quad \mathbf{k}^- = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$$

$$\sigma^- = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\varepsilon^- = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$D^- = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}) \{ \sqrt{R_2} (k_1^2 - R_1^2) - \sqrt{R_1} (k_2^2 - R_2^2) \} + 2(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - R_1 R_2)}{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2 - k^- \tanh k^- h}$$

$$R_i = k_i \tanh k_i h \quad i=1,2$$

$$k_i = |\mathbf{k}_i|$$

である.

(5-1)式の波が $y=0$ の壁に反射してできる反射波の水面形は次式のようなになる.

$$\eta_1 = \frac{a_1}{2} \exp i \{ k_1 x \cos(-\theta_1) + k_1 y \sin(-\theta_1) + \sigma_1 t + \varepsilon_1 \} \quad (5-4)$$

同様に(5-2)式の波の反射波の水面形は次式のようなになる.

$$\eta_2 = \frac{a_2}{2} \exp i \{ k_2 x \cos(-\theta_2) + k_2 y \sin(-\theta_2) + \sigma_2 t + \varepsilon_1 \} \quad (5-5)$$

(5-4), (5-5)式で表される 2 つの反射波の干渉による 2 次波の速度ポテンシャルは同様にして次式で表される.

$$\phi_{1bR}^{(2)} = -i \frac{b_1 b_2}{2 \times 4} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \exp i \{ \mathbf{k}^- \cdot \mathbf{x} + \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (5-6)$$

(5-3)式と(5-6)式を加え合わせると港外における 2 次干渉波の重複波の速度ポテンシャルが得られる. すなわち

$$\begin{aligned} \phi_{1b}^{(2)} &= \phi_{1bI}^{(2)} + \phi_{1bR}^{(2)} \\ &= -i \frac{b_1 b_2}{2 \times 4} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \{ \exp(i \mathbf{k}^- \cdot \mathbf{x}) + \exp(i \mathbf{k}^- \cdot \mathbf{x}) \} \exp i(\sigma^- t + \varepsilon^-) \\ &= -i \frac{b_1 b_2}{2 \times 4} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \exp i(\sigma^- t + \varepsilon^-) \\ &\quad \times [\exp i(k_1 x \cos \theta_1 + k_1 y \sin \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2 - k_2 y \sin \theta_2) \\ &\quad + \exp i\{ k_1 x \cos(-\theta_1) + k_1 y \sin(-\theta_1) - k_2 x \cos(-\theta_2) - k_2 y \sin(-\theta_2) \}] \\ &= -i \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k^-(h+z)}{\cosh k^-h} \frac{D^-}{\sigma^-} \exp i \{ k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2 \} \\ &\quad \times \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \cos(k_1 y \sin \theta_1 - k_2 y \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (5-7)$$

(5-7)式で表される速度ポテンシャルをもつ波の水面形は次式のようなになる.

$$\begin{aligned}\eta_{1b}^{(2)} &\equiv \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right)_{z=0} \\ &= \frac{b_1 b_2}{4g} D^- \cos(k_1 y \sin \theta_1 - k_2 y \sin \theta_2) \exp i \{ k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2 \} \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \}\end{aligned}\quad (5-8)$$

ここで

$$\begin{aligned}b_i &= \frac{g a_i}{\sigma_i} = \frac{g a_i}{\sqrt{g k_i \tanh k_i h}} \\ &= \frac{g a_i}{\sqrt{g R_i}}\end{aligned}\quad (5-9)$$

を用いると(5-8)式は次のように書き換えられる。

$$\eta_{1b}^{(2)} \equiv \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos(k_1 y \sin \theta_1 - k_2 y \sin \theta_2) \exp i \{ k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2 \} \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \}\quad (5-10)$$

となる。ちなみに(5-3)式の入射波による2次干渉波の水面形は

$$\eta_{1bi}^{(2)} = \frac{a_1 a_2}{2 \times 4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \{ \mathbf{k}^- \cdot \mathbf{x} + \sigma^- t + \varepsilon^- \}\quad (5-11)$$

(5-6)式の反射波による2次干渉波の水面形は

$$\eta_{1br}^{(2)} = \frac{a_1 a_2}{2 \times 4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \{ \mathbf{k}^- \cdot \mathbf{x} + \sigma^- t + \varepsilon^- \}\quad (5-12)$$

である。ここに \mathbf{k}^- は \mathbf{k}^- とy軸に対して対称な波数ベクトルを表す。

次に港内について考える。(5-1)式のように入射波が港口に対して直角以外の方向から入射する場合、港内の水面形は

$$\eta_2(x, y, t) = -\frac{a_1 c_1 d}{b \sin k_1 l} \exp i \{ \sigma_1 t + \omega_1 + \varepsilon_1 \} \times [\cos k_1 (y+l) - S_1(x, y)]\quad (5-13)$$

で与えられる。ここに

$$S_1(x, y) = \frac{4b \sin k_1 l}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \beta_{1n} \sinh \beta_{1n} k_1 l} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \cosh \beta_{1n} k_1 (y+l)\quad (5-14)$$

である。(5-13)式の自由波のうち、港内の x 軸方向の波を無視すると

$$\eta_2(y,t) = -\frac{a_1 c_1 d}{b \sin k_1 l} \exp i(\sigma_1 t + \varepsilon_1 + \omega_1) \cos k_1(y+l) \quad (5-15)$$

のみとなる。(5-15)式の波は重複波であり、これは沖から岸に向かう波と岸から沖に向かう波が重なり合ったものである。すなわち

$$\begin{aligned} \eta_2(y,t) = & -\frac{a_1 c_1 d}{2b \sin k_1 l} \exp i(\sigma_1 t + \varepsilon_1 + \omega_1) \exp i\{k_1(y+l)\} \\ & -\frac{a_1 c_1 d}{2b \sin k_1 l} \exp i(\sigma_1 t + \varepsilon_1 + \omega_1) \exp -i\{k_1(y+l)\} \end{aligned} \quad (5-16)$$

となる。(5-16)式のうち第 1 項は沖から岸に向かう波を表し、第 2 項は岸から沖へ向かう波を表している。いま(5-15)式の添字を 2 としたもう一つの波について考えると

$$\begin{aligned} \eta_2(y,t) = & -\frac{a_2 c_2 d}{2b \sin k_2 l} \exp i(\sigma_2 t + \varepsilon_2 + \omega_2) \exp i\{k_2(y+l)\} \\ & -\frac{a_2 c_2 d}{2b \sin k_2 l} \exp i(\sigma_2 t + \varepsilon_2 + \omega_2) \exp -i\{k_2(y+l)\} \end{aligned} \quad (5-17)$$

となる。

(5-16)、(5-17)式のうち同じ方向の波が干渉してできる 2 次長周期波の水面形は、沖から岸に向かう波の場合

$$\begin{aligned} \eta_{2bl}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i\{(k_1 - k_2)(y+l) + (\sigma_1 - \sigma_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega_1 - \omega_2\} \\ = & \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i\{k_+^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\} \end{aligned} \quad (5-18)$$

であり、岸から沖に向かう波の場合

$$\begin{aligned}
\eta_{2bR}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \{ -(k_1 - k_2)(y+l) + (\sigma_1 - \sigma_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega_1 - \omega_2 \} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \exp i \{ -k_*^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \}
\end{aligned} \tag{5-19}$$

である。(5-18)式と(5-19)式を重ね合わせると、港内における2次干渉波の水面形が得られる。

$$\eta_{2b}^{(2)} = \frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos k_*^-(y+l) \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \tag{5-20}$$

それぞれの波の速度ポテンシャルは、まず(5-18)式より沖から岸に向かう波について

$$\phi_{2bl}^{(2)} = \frac{-i}{2} \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sigma^-} \frac{\cosh k_*^-(h+z)}{\cosh k_*^- h} \exp i \{ k_*^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \tag{5-21}$$

ここに

$$k_*^- = k_1 - k_2 \quad k_1 = |\mathbf{k}_1| \quad k_2 = |\mathbf{k}_2|$$

次に(5-19)式より岸から沖に向かう波について

$$\phi_{2bR}^{(2)} = \frac{-i}{2} \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sigma^-} \frac{\cosh k_*^-(h+z)}{\cosh k_*^- h} \exp i \{ -k_*^-(y+l) + \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \tag{5-22}$$

(5-21)式と(5-22)式の速度ポテンシャルを重ね合わせると、港内における1次の進行波の重なり合った波(重複波)に伴う2次干渉波の速度ポテンシャルが得られる。

$$\phi_{2b}^{(2)} = -i \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^-}{\sigma^-} \frac{\cosh k_*^-(h+z)}{\cosh k_*^- h} \cos k_*^-(y+l) \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \tag{5-23}$$

2. 2 2次長周期波による湾水振動

2. 1において港内外における2次干渉波の重複波の速度ポテンシャルを求めた。これら波も(2-8-1)~(2-8-4)式に示す境界条件を満足しなければならない。しかし、(5-7)式と(5-23)式は港口で等しくならず、 $y=0$ でポテンシャルの不連続が起こる。具体的には(5-7)式は境界条件(2-8-2)、(2-8-4)は満足するが他は満たさない。(5-23)式は境界条件(2-8-1)、(2-8-3)は満足するが他は満たさない。ここでもこの不連続を埋めるような周波数が σ^- の波が新たに発生するものとする。この波のポテンシャルを求めるにあたっては、前と同様に、港外側と港内側のものに分けて計算し、最後に(5-7)式、(5-23)式も含めて港口で接続させる。

まず港外の波について検討する。港外には速度ポテンシャルが(5-7)式で与えられる2次波が存在する。ここではさらに σ^- の自由波が存在するものとする。いまそのポテンシャルを

$$\phi_{1f} = \frac{-i}{\sigma^-} f_1(x, y) Z_{f1}(z) \exp i(\sigma^- t + \varepsilon^-) \quad (5-24)$$

と仮定する。(5-7)式の拘束波のポテンシャルはラプラスの式を満足するので、(5-7)式と(5-24)式の波が共存する場合には(5-24)式もまたラプラスの式を満足しなければならない。(5-24)式をラプラスの式に代入すると

$$\frac{1}{f_1} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Z_{f1}} \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} = 0 \quad (5-25)$$

第1項は x, y の関数、第2項は z だけの関数であるので両者の和が定常的に0となるためには両項とも定数でなければならない。いまこれらを k_f^2 に等しいと置く。すなわち

$$\frac{1}{Z_{f1}} \frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} = k_f^2 \quad (5-26)$$

および

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k_f^2 f_1 = 0 \quad (5-27)$$

(5-26)式を変形し

$$\frac{\partial^2 Z_{f1}}{\partial z^2} - k_f^2 Z_{f1} = 0 \quad (5-28)$$

とする。ここで(5-28)式と底面の境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi_{1f}}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

を用いると

$$Z_{f1} = g \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \quad (5-29)$$

が得られる。水面形は水面での境界条件より導かれ次式のようなになる。

$$\eta_{1f}(x, y, t) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{1f}}{\partial t} \right)_{z=0} = f_1(x, y) \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \quad (5-30)$$

定数 k_f は水面における連続式から決定される。

$$\frac{\partial \eta_{1f}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_{1f}}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (5-31)$$

したがって周波数差の波に関する分散関係式が得られる。

$$(\sigma^-)^2 = g k_f \tanh k_f h \quad (5-32)$$

ここに k_f は σ^- に対応する自由波の波数である。ここで(5-27)式の f_1 として

$$f_1 = k_f C \exp i \Omega f_1' \quad (5-33)$$

と置く。 f_1' に対する境界条件は

$$\left. \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 1 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \quad (5-34)$$

$$f_1' \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

である。ここで合田らに習って

$$\begin{aligned}
F(u, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1'(x, y) dx \\
f_1'(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} F(u, y) du
\end{aligned}
\tag{5-35}$$

で定義される $f_1'(x, y)$ のフーリエ変換 $F(u, y)$ を用いる。 f_1 がヘルムホルツの式を満たすので f_1' もまたヘルムホルツの式を満足する。 すなわち

$$\frac{\partial^2 f_1'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1'}{\partial y^2} + f_1' k_f^2 = 0.
\tag{5-36}$$

(5-35)式の関係 (第2式) を(5-36)式に代入すると $F(u, y)$ に対する微分方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k_f^2 - u^2)F = 0
\tag{5-37}$$

を得る。 (5-34)式の境界条件は $F(u, y)$ に置き換えられ次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial F(u, y)}{\partial y} \right]_{y=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\frac{\partial f_1'}{\partial y} \right]_{y=0} dx \\
&= \int_{-d}^d e^{iux} dx \\
&= \frac{2 \sin ud}{u}
\end{aligned}
\tag{5-38}$$

$$F(u, y) = 0 \quad ; \quad y \rightarrow \infty
\tag{5-39}$$

(5-37)式の微分方程式の一般解は次式で与えられる。

$$F(u, y) = C_1(u) e^{\sqrt{u^2 - k_f^2} y} + C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2} y}
\tag{5-40}$$

(5-40)式の右辺に含まれる係数 C_1, C_2 を決定するために、 u の範囲を2つに分けて考える。

すなわち、 $|u| > k_f$ の場合と、 $|u| < k_f$ の場合に分けて考える。

i) $|u| > k_f$ の場合

この場合、(5-39)式より $y \rightarrow \infty$ の時に $F(u, y) = 0$ とならなければならない。 よって $C_1(u) = 0$ とならなければならない。 したがって(5-38)式より $C_2(u)$ が得られ、 $F(u, y)$ が

決定する。すなわち

$$F(u, y) = -\frac{2 \sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2} y} \quad (5-41)$$

ii) $|u| < k_f$ の場合

(5-40)式の第1項は1次波の場合と同様に沖から岸に向かう波を表している。ここで扱っているのは岸から沖に向かって伝播する放射波であるので $C_1(u) = 0$ として(5-38)式から次式のようになる。

$$F(u, y) = i \frac{2 \sin ud}{u \sqrt{k_f^2 - u^2}} e^{-i \sqrt{k_f^2 - u^2} y} \quad (5-42)$$

いまここで関数 f_1' を前と同様に次式のように置く。

$$f_1' = iI_1 - I_2 \quad (5-43)$$

ここに

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_f} \frac{\sin ud}{u \sqrt{k^2 - u^2}} \cos u x e^{-i \sqrt{k_f^2 - u^2} y} du$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} \cos u x e^{-\sqrt{u^2 - k_f^2} y} du$$

である。これで港外の水面形 η_{1f} は次式のようになる。

$$\eta_{1f} = kC(iI_1 - I_2) \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \quad (5-44)$$

また速度ポテンシャル ϕ_{1f} は次式のようになる。

$$\phi_{1f} = \frac{-i}{\sigma^-} \{ iI_1 - I_2 \} k_f C g \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \quad (5-45)$$

次に港内の波について検討する。港内にはすでに周波数が σ^- の2次の拘束波が存在し

ている。この波と港外の周波数が σ^- の2次の拘束波である放射波とは港口部で連続しない。そこで港内外の波が港口部で接続するような新しい2次の自由波が港内に発生するものとする。ここで新しく発生する自由波の速度ポテンシャルを次式のように仮定する。

$$\phi_{2f} = \frac{-i}{\sigma^-} f_2(x, y) Z_f(z) \exp\{-\sigma^- t + \varepsilon^-\} \quad (5-46)$$

ここで関数 $f(x, y)$ を次式に示すような変数分離できる形に仮定する。

$$f_2(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (5-47)$$

(5-46)式において $Z_f(z)$ は前述の底面と水面における境界条件より

$$Z(z) = g \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \quad (5-48)$$

$$(\sigma^-)^2 = g k_f \tanh k_f h$$

となる。(5-46)式と(5-47)式をあわせてラプラスの式に代入すると

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_f^2 = -\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (5-49)$$

を得る。(5-49)式の両辺はそれぞれ y および x のみの関数であるので(5-49)式が成立するためには両辺が共通の定数でなければならない。いまこれを α^2 と置くと関数 $X(x)$ と $Y(y)$ の一般解は次式のようになる。

$$\begin{aligned} X(x) &= A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x} \\ Y(y) &= C e^{\sqrt{\alpha^2 - k_f^2} y} + D e^{-\sqrt{\alpha^2 - k_f^2} y} \end{aligned} \quad (5-50)$$

実数 X は港内の両側の壁での境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial x} \right|_{x=2\lambda b, 2(\lambda-1)b} = 0$$

により

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=2\lambda b, 2(\lambda-1)b} = 0 \quad (5-51)$$

でなければならない。以下、合田らの(2-25), (2-26)式と全く同様にして

$$X(x) = B_n \cos \frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b) \quad (5-52)$$

が得られる。

さらに湾奥の壁 ($y = -l$) において

$$\left. \frac{\partial \phi_{2f}}{\partial y} \right|_{y=-l} = 0$$

でなければならないので

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=-l} = \sqrt{\alpha^2 - k_f^2} \left[C e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} - D e^{l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \right] = 0 \quad (5-53)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} C &= \frac{C_n}{2} e^{l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \\ D &= \frac{C_n}{2} e^{-l\sqrt{\alpha^2 - k_f^2}} \end{aligned} \quad (5-54)$$

である。したがって関数 $Y(y)$ は(5-54)式を(5-50)式に代入することで次式を得る。

$$Y(y) = C_n \cosh[\beta_{2n} k_f (y + l)] \quad (5-55)$$

ここに

$$\beta_{2n} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2k_f b} \right)^2 - 1} \quad (5-56)$$

である。 C_n を A_n で表すと、関数 $f_2(x, y)$ は次式のようになる。

$$f_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b)\right] \cosh[\beta_{2n} k_f (y + l)] \quad (5-57)$$

次に A_n を決定する. 湾口における f_2 の y 方向の勾配は f_1 の湾口での勾配に等しくなければならない. すなわち

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} &= k_f C e^{i\Omega} \\ f_1 &= k_f C e^{i\Omega} f_1' \end{aligned} \quad (5-58)$$

において

$$\left. \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 1 & x \leq |d| \\ 0 & x > |d| \end{cases} \quad (5-59)$$

と置いたので(5-33), (5-34)式より

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} = k_f C e^{i\Omega} \quad (5-60)$$

と置いて良い. 従って $y=0$ における $f_2(x, y)$ の y に関する微分は次式のようになる.

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{y=0} = -A_0 k_f \sin kl + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \beta_{2n} k_f \sinh(\beta_{2n} k_f l) \cos\left[\frac{n\pi}{2b}(x - 2\lambda b)\right] \quad (5-61)$$

$A_0 \sim A_n$ については前と全く同様にして決めることができる. すなわち

$$A_0 = -\frac{\int_{2\lambda b-d}^{2\lambda b+d} k_f C e^{i\Omega} dx}{2b k_f \sin kl} = -\frac{C d e^{i\Omega}}{b \sin k_f l} \quad (5-62)$$

$$A_n = \frac{\int_{2\lambda b-d}^{2\lambda b+d} k_f C e^{i\Omega} \cos \frac{n\pi x}{2b} dx}{b \beta_{2n} k_f \sinh \beta_{2n} k_f l} = \frac{4C e^{i\Omega} \sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n\pi \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} k_f l} \quad (5-63)$$

となる. 以上を(5-57)式に代入すると $f_2(x, y)$ が決められる.

$$f_2(x, y) = -\frac{Cde^{i\Omega}}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x, y)] \quad (5-64)$$

ここに

$$S(x, y) = \frac{4b \sin k_f l}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi}{n \beta_{2n} \sinh \beta_{2n} k_f l} \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\lambda b) \cosh \beta_n k_f (y+l) \right\} \quad (5-65)$$

である。以上と(5-48)式を(5-46)式に代入すると港内の速度ポテンシャルが得られる。

$$\phi_{2f} = \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x, y)] \frac{\cosh k_f (z+h)}{\cosh k_f h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \quad (5-66)$$

つぎに未知数である定数 C と位相角 Ω を、港口部で速度ポテンシャルを接続することにより決定する。式中から分かるように速度ポテンシャルは、港口において港外のものと同様のものが存在する。ここで考慮すべき条件は港外での速度ポテンシャル $\phi_{1b}^{(2)}$ および ϕ_{1f} 、港内での速度ポテンシャル $\phi_{2b}^{(2)}$ および ϕ_{2f} である。 $\phi_{1b}^{(2)}$ および $\phi_{2b}^{(2)}$ は確定しているが、(5-45)式および(5-66)式中に振幅および位相に関する未知数を含んでいる。ここでは港口部 ($|x| < d$) での速度ポテンシャルの平均値が港内外で等しいとして、これらの未知定数を決定する。すなわち

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} \Big|_{y=0} dx \end{aligned} \quad (5-67)$$

まず港外の波に関する左辺について計算する。左辺第1項は(5-7)式より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{-i}{4} b_1 b_2 \frac{\cosh k^-(h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \\
&\quad \times \exp i \{k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2\} \exp i \{\sigma^- t + \varepsilon^-\} dx \\
&= \frac{-i}{2d} \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k^-(h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \exp i \{\sigma^- t + \varepsilon^-\} \\
&\quad \times \int_{-d}^d \exp i \{k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2\} dx \\
&= \frac{-i}{2d} \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k^-(h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \exp i \{\sigma^- t + \varepsilon^-\} \frac{1}{i(k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2)} \\
&\quad \times \left[\exp i \{k_1 x \cos \theta_1 - k_2 x \cos \theta_2\} \right]_{-d}^d \\
&= \frac{-i}{2d} \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k^-(h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \exp i \{\sigma^- t + \varepsilon^-\} \frac{2 \sin \{k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2\}}{k_1 \cos \theta_1 - k_2 \cos \theta_2} \\
&= -i \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k^-(h+z) D^-}{\cosh k^- h \sigma^-} \frac{\sin \{k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2\}}{k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2} \exp i \{\sigma^- t + \varepsilon^-\}
\end{aligned} \tag{5-68}$$

左辺第 2 項は(5-45)式より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{-i}{\sigma^-} \{iI_1 - I_2\} k_f Cg \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} dx \\
&= \frac{-i}{\sigma^-} k_f Cg \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \{iI_1 - I_2\} dx \\
&= \frac{-i}{\sigma^-} k_f Cg \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{2d} \int_{-d}^d i \frac{2}{\pi} \int_0^{k_f} \frac{\sin ud}{u \sqrt{k_f^2 - u^2}} \cos ux du dx - \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{2}{\pi} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin ud}{u \sqrt{u^2 - k_f^2}} \cos ux du dx \right\}
\end{aligned} \tag{5-69}$$

(5-69)式の積分の順序を変え $ud = \gamma$ と置き、整理すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx &= \frac{-i}{\sigma^-} k_f Cg \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{2}{\pi d} i \int_0^{k_f} \frac{\sin^2 ud}{u^2 \sqrt{k_f^2 - u^2}} du - \frac{2}{\pi d} \int_{k_f}^{\infty} \frac{\sin^2 ud}{u^2 \sqrt{u^2 - k_f^2}} du \right\} \\
&= \frac{-i}{\sigma^-} Cg \frac{\cosh k_f(z+h)}{\cosh k_f h} \exp i \{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} [i\psi_1 - \psi_2]
\end{aligned} \tag{5-70}$$

ここに

$$\psi_1 = \frac{2}{\pi} k_f d \int_0^{k_f d} \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2 \sqrt{(k_f d)^2 - \gamma^2}} d\gamma$$

$$\psi_2 = \frac{2}{\pi} k_f d \int_{k_f d}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - (k_f d)^2}} d\gamma$$

(5-68)式と(5-69)式をまとめると、(5-67)式の左辺は次式のようなる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{1f} \Big|_{y=0} dx = \\ & -i \frac{b_1 b_2}{4} \frac{\cosh k_f^-(h+z)}{\cosh k_f^- h} \frac{D^- \sin \{k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2\}}{\sigma^- k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2} \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \\ & -i \frac{1}{\sigma^-} k_f C g \frac{\cosh k_f^-(h+z)}{\cosh k_f^- h} \frac{1}{k_f} [i \psi_1 - \psi_2] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \end{aligned} \quad (5-71)$$

次に (5-67)式の港内の波に関する右辺の計算をする。まず右辺第1項は(5-23)式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d -i \left(\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \right) \frac{D^- \cosh k_*^-(h+z)}{\sigma^- \cosh k_*^- h} \\ & \times \cos k_*^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} dx \\ &= -i \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^- \cosh k_*^-(h+z)}{\sigma^- \cosh k_*^- h} \\ & \times \cos k_*^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \end{aligned} \quad (5-72)$$

右辺第2項は(5-66)式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b \sin k_f l} \frac{\cosh k_f^-(h+z)}{\cosh k_f^- h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\ & \times [\cos k_f^- l - S(x,0)] dx \\ &= \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b \sin k_f l} \frac{\cosh k_f^-(h+z)}{\cosh k_f^- h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\ & \times \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \cos k_f^- l - S(x,0) dx \\ &= \frac{i}{\sigma^-} \frac{Cd}{b} \frac{\cosh k_f^-(h+z)}{\cosh k_f^- h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} [\cot k_f^- l - S_1] \end{aligned} \quad (5-73)$$

ここに

$$S_1 = 8 \left(\frac{b}{\pi d} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \lambda n \pi \right)^2}{n^2 \beta_n \tanh \beta_n kl}$$

(5-72)式と(5-73)式をまとめると、(5-67)式の右辺は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2b}^{(2)} \Big|_{y=0} dx + \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi_{2f} \Big|_{y=0} dx = \\ -i \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^- \cosh k_1^- (h+z)}{\sigma^- \cosh k_1^- h} \cos k_1^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \\ + i \frac{1}{\sigma^-} \frac{Cd \cosh k_f (h+z)}{b \cosh k_f h} g \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} [\cot k_f l - S_1] \end{aligned} \quad (5-74)$$

ここでさらに式の形を簡単にするために、次の関係を用いてポテンシャルの接続を水位の接続に変える。

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (5-75a)$$

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (5-75b)$$

(5-71)式および(5-74)式より

$$\begin{aligned} \frac{b_1 b_2}{4g} D^- \frac{\sin \{ k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2 \}}{k_1 d \cos \theta_1 - k_2 d \cos \theta_2} \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- \} \\ + C [i\psi_1 - \psi_2] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \\ = \frac{b_1 b_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^-}{g} \cos k_1^- l \exp i \{ \sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^- \} \\ - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \end{aligned} \quad (5-76)$$

(5-76)式を変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1 a_2}{4\sqrt{R_1 R_2}} D^- \frac{\sin\{k_1 d \cos\theta_1 - k_2 d \cos\theta_2\}}{k_1 d \cos\theta_1 - k_2 d \cos\theta_2} \exp i\{\sigma^- t + \varepsilon^-\} \\
& + C[i\psi_1 - \psi_2] \exp i\{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} \\
& = \frac{a_1 a_2 c_1 c_2 d^2}{4b^2 \sin k_1 l \sin k_2 l} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \cos k_1 l \exp i\{\sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\} \\
& - \frac{Cd}{b} [\cot k_1 l - S_1] \exp i\{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\}
\end{aligned} \tag{5-77}$$

また簡単のために次式のように置き換える.

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{\sin\{k_1 d \cos\theta_1 - k_2 d \cos\theta_2\}}{k_1 d \cos\theta_1 - k_2 d \cos\theta_2} \tag{5-78}$$

(5-77)式の左辺は次式のようになる.

$$\eta_1 = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} f(\theta_1, \theta_2) \exp i\{\sigma^- t + \varepsilon^-\} + C(i\psi_1 - \psi_2) \exp i\{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\} \tag{5-79}$$

(5-77)式の右辺は次式のようになる.

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k_1 l \exp i\{\sigma^- t + \varepsilon^- + \omega^-\} \\
& - \frac{Cd}{b} [\cot k_1 l - S_1] \exp i\{\sigma^- t + \Omega + \varepsilon^-\}
\end{aligned} \tag{5-80}$$

ここで(5-79)式および(5-80)式を $e^{i\sigma^- t}$ で割る. (5-79)式は次式のようになる.

$$\eta_1 = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} f(\theta_1, \theta_2) \exp i\varepsilon^- + C(i\psi_1 - \psi_2) \exp i\{\Omega + \varepsilon^-\} \tag{5-81}$$

(5-80)式は次式のようになる.

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k_1 l \exp i\{\varepsilon^- + \omega^-\} \\
& - \frac{Cd}{b} [\cot k_1 l - S_1] \exp i\{\Omega + \varepsilon^-\}
\end{aligned} \tag{5-82}$$

ここで(5-81)式と(5-82)式中の実部と虚部に分けて整理をする。
 まず実部だけを取り出すと次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} f(\theta_1, \theta_2) \cos \varepsilon^- - C \psi_1 \sin(\Omega + \varepsilon^-) - C \psi_2 \cos(\Omega + \varepsilon^-) \\ &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos^- l \cos(\omega^- + \varepsilon^-) - \frac{Cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \cos(\Omega + \varepsilon^-) \end{aligned}$$

これを C について整理すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & C \sqrt{\left\{ \frac{d}{b} (\cot k_f l - S_1) - \psi_2 \right\}^2 + \{\psi_1\}^2} \cos(\Omega + \varepsilon^- + \phi) \\ &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \left\{ \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos^- l \cos(\omega^- + \varepsilon^-) - f(\theta_1, \theta_2) \cos \varepsilon^- \right\} \end{aligned}$$

次に虚部だけを取り出すと次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} f(\theta_1, \theta_2) \sin \varepsilon^- + C \psi_1 \cos(\Omega + \varepsilon^-) - C \psi_2 \sin(\Omega + \varepsilon^-) \\ &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k^- l \sin(\omega^- + \varepsilon^-) - \frac{cd}{b} [\cot k_f l - S_1] \sin(\Omega + \varepsilon^-) \end{aligned}$$

これを C について整理すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & C \sqrt{\left\{ \frac{d}{b} (\cot k_f l - S_1) - \psi_2 \right\}^2 + \{\psi_1\}^2} \\ &= \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \left\{ \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos^- l \sin(\omega^- + \varepsilon^-) - f(\theta_1, \theta_2) \sin \varepsilon^- \right\} \end{aligned}$$

従って次式を得る。

$$C = \frac{a_1 a_2}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \sqrt{\frac{\{f(\theta_1, \theta_2)\}^2 + P_1^2 - 2f(\theta_1, \theta_2)P_1 \cos \omega^-}{(P_2 - \psi_2)^2 + \psi_1^2}} \quad (5-83)$$

および

$$\tan(\Omega + \varepsilon^- + \phi) = \frac{P_1 \sin(\omega^- + \varepsilon^-) - f(\theta_1, \theta_2) \sin \varepsilon^-}{P_1 \cos(\omega^- + \varepsilon^-) - f(\theta_1, \theta_2) \cos \varepsilon^-} \quad (5-84)$$

ここに

$$\tan \phi = \frac{\psi_1}{\frac{d}{b} [\cot k_f l - S_1] - \psi_2}$$

$$P_1 = \frac{c_1 c_2 (d/b)^2}{\sin k_1 l \sin k_2 l} \cos k_f l$$

$$P_2 = (d/b) [\cot k_f l - S_1]$$

である。

次に港の共振による振幅の増幅率を計算する。一般に(5-1)式と(5-2)式で与えられる2波の干渉により生じる外海での2次の長周期拘束波の振幅は次式で与えられる。

$$\frac{a_1 a_1}{4} \frac{D^-}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad (5-85)$$

ここで、港内での水位とこの振幅との比を R とする。港内での水位は(5-66)式より

$$\begin{aligned} \eta_{2f} &\equiv \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_{2f}}{\partial t} \right) \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{Cd}{b \sin k_f l} [\cos k_f (y+l) - S(x, y)] \exp i \{ \sigma^- t + \Omega + \varepsilon^- \} \end{aligned} \quad (5-86)$$

で与えられる。

(5-86)式に(5-83)式を代入し、振幅の比 R を求めると次式のようなになる。

$$R = \left| \frac{(d/b) \left\{ \frac{f(\theta_1, \theta_2)^2 + P_1^2 - 2f(\theta_1, \theta_2)P_1 \cos \omega^-}{(P_2 - \psi_2)^2 - \psi_1^2} \right\}^{1/2} [\cos k_f l(y+l) - S(x, y)]}{\sin k_f l} \right|$$

(5-87)

第3節 理論式の特性

ここでは計算を通じて理論の特性を示す。斜め入射波による湾内での増幅率 R におけるピーク出現傾向は直角入射の場合と同様であるので、ここでは入射方向に関する関数である $f(\theta_1, \theta_2)$ の特性を示す。計算条件を示したものが表 5-1 である。

case1~3 は入射波の周波数差が 0.005(Hz)となるような 2 波のいくつかの組み合わせについて入射角度を $0^\circ \sim 90^\circ$ (図 5-1 参照) まで変化した時の $f(\theta_1, \theta_2)$ との関係を示したものである。図から分かるように入射波の周波数差が等しい場合、 $k_1 d$ と $k_2 d$ の差が大きくなるほど、すなわち case1 から 3 になるほど、各 θ での $f(\theta_1, \theta_2)$ の値が小さくなっており、同じ周波数差の波であってもその組み合わせによって $f(\theta_1, \theta_2)$ が変化する。

これをふまえて case4~5 は、case1 を基に入射波の周波数差を変化させた場合の $f(\theta_1, \theta_2)$ の変化を示したものである。図から分かるように、入射波の周波数差を変化させても各ケースにおいて有意な差異は見られない。

case6~7 は case1 を基に、湾の開口幅 (d) による $f(\theta_1, \theta_2)$ の変化を示したものである。開口幅を狭くすると、いずれの θ の組み合わせについても $f(\theta_1, \theta_2)$ の値が大きくなるのが分かる。したがって開口幅を狭くすると、波の入射角による影響が小さくなる。

case8~9 は case1 を基に、水深の変化による $f(\theta_1, \theta_2)$ の変化を示したものである。水深を変化させると $k_1 d$ と $k_2 d$ が変化するため case1~3 と同じ結果となり、 $k_1 d$ と $k_2 d$ の差が大きくなるほど各 θ での $f(\theta_1, \theta_2)$ の値が小さくなる。

表 5-1 計算条件

case	h(m)	T_1 (s)	T_2 (s)	d(m)
1	10	10.0	10.526	50
2	10	9.0	9.424	50
3	10	8.0	8.333	50
4	10	10.0	10.204	50
5	10	10.0	10.417	50
6	10	10.0	10.526	30
7	10	10.0	10.526	20
8	8	10.0	10.526	50
9	6	10.0	10.526	50

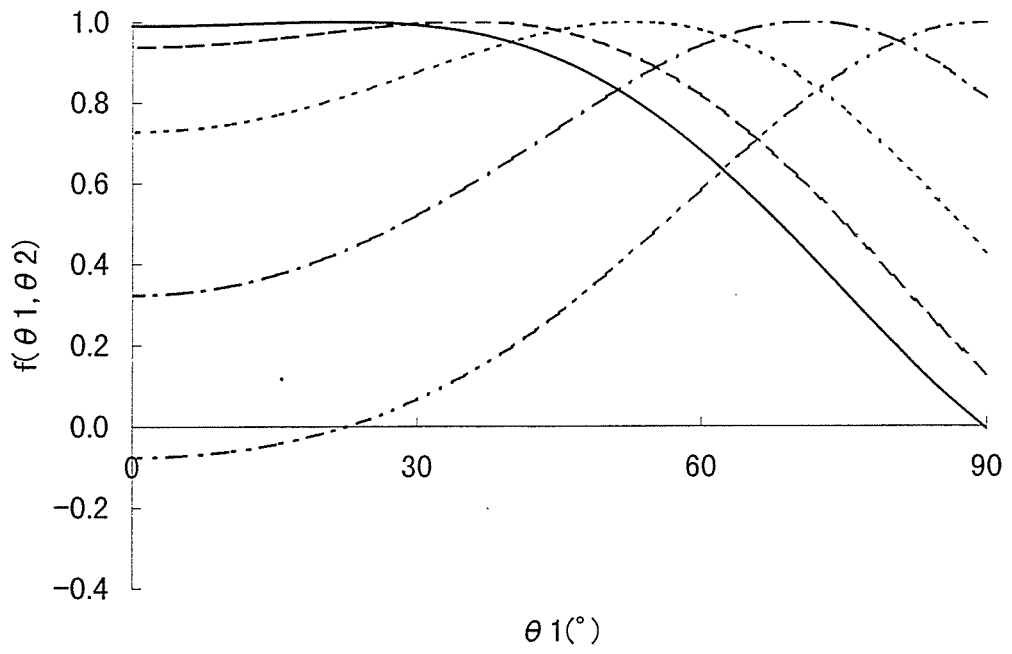


図5-2 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case1)

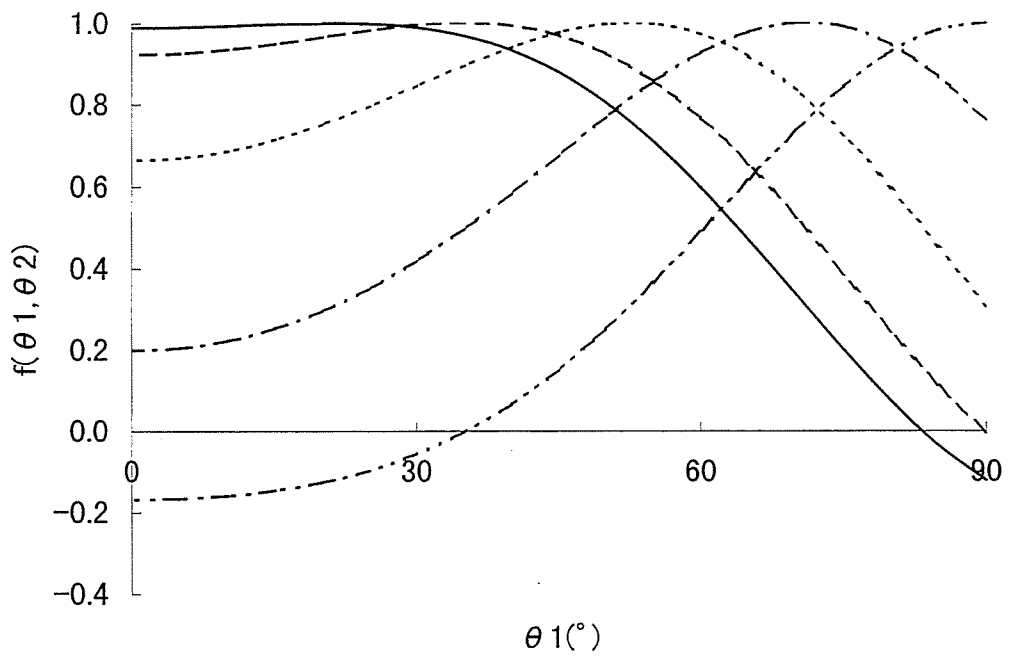


図5-3 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case2)

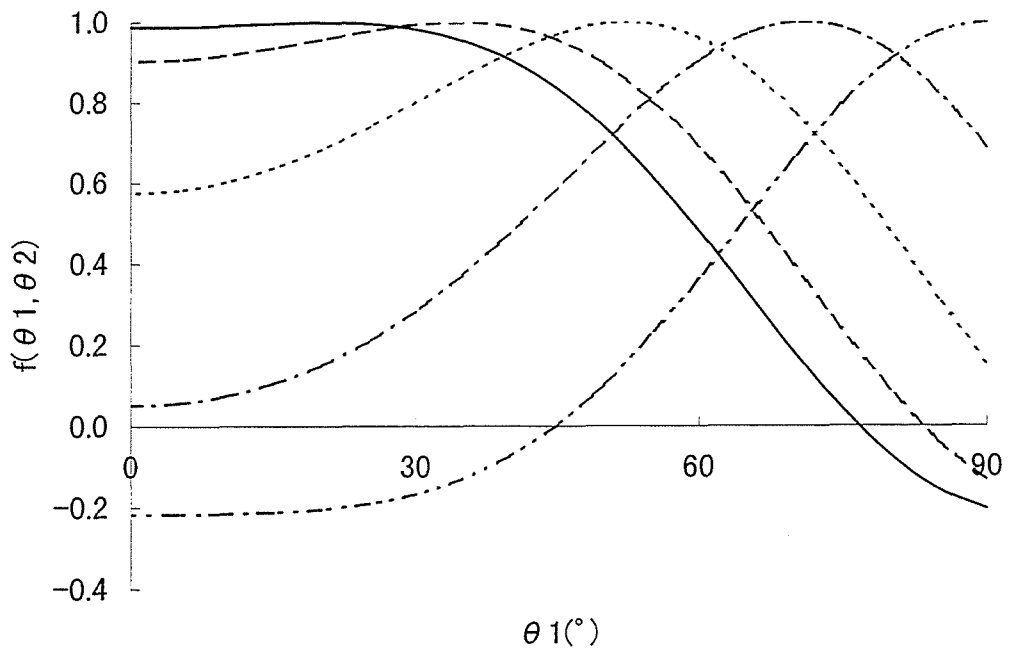


図5-4 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case3)

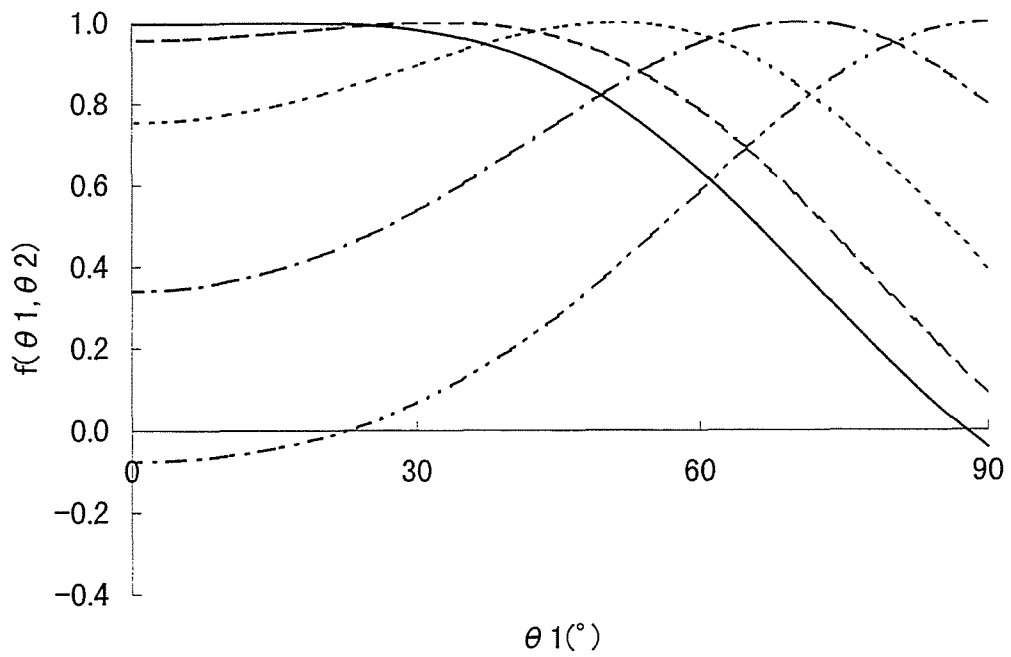


図5-5 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case4)

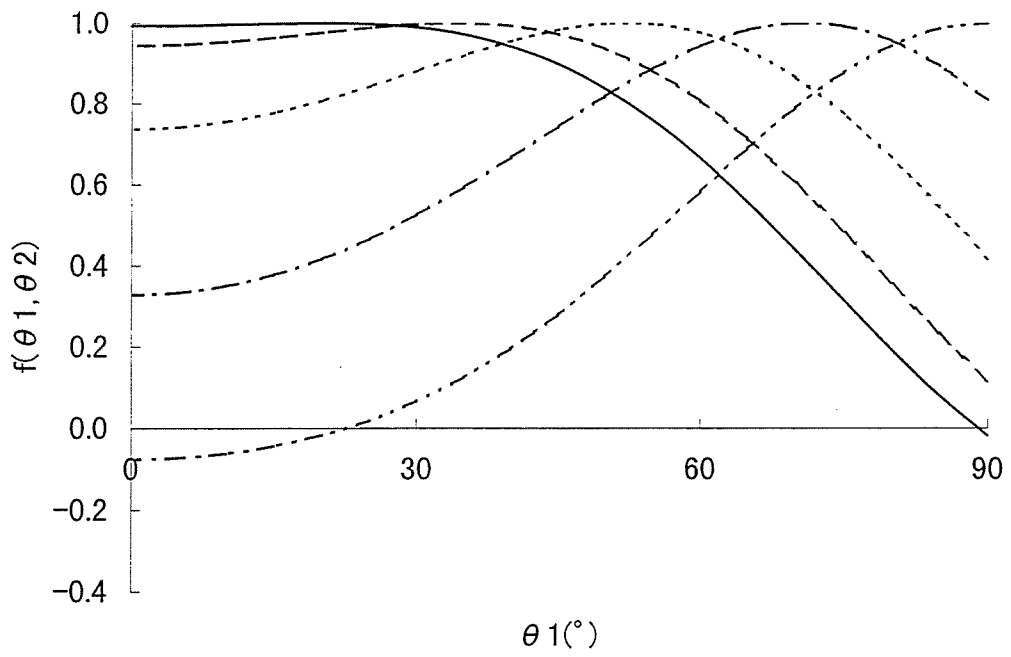


図5-6 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case5)

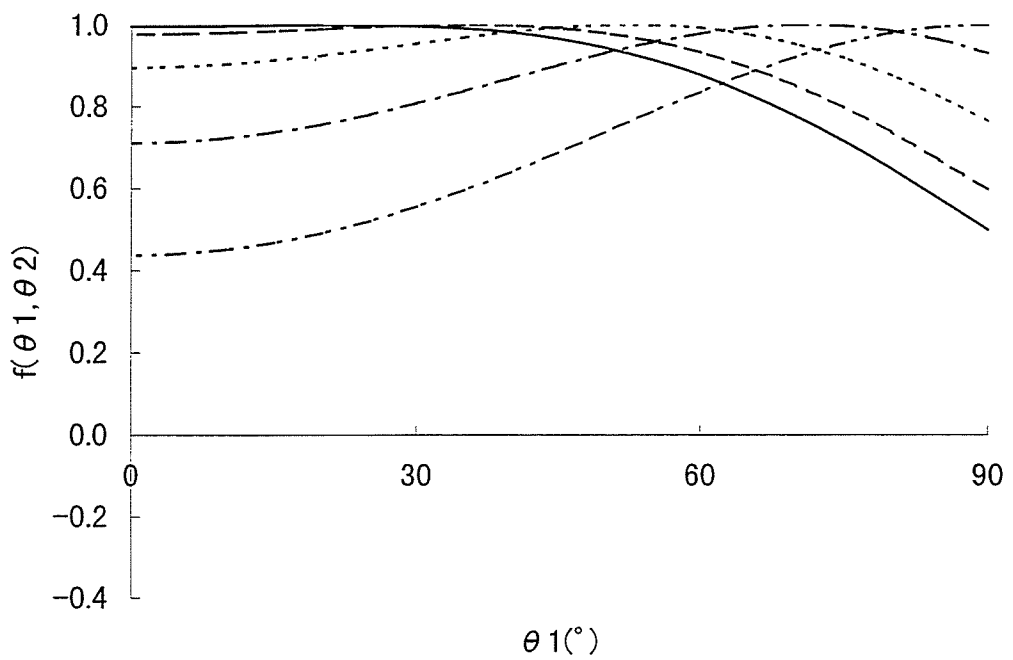


図5-7 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case6)

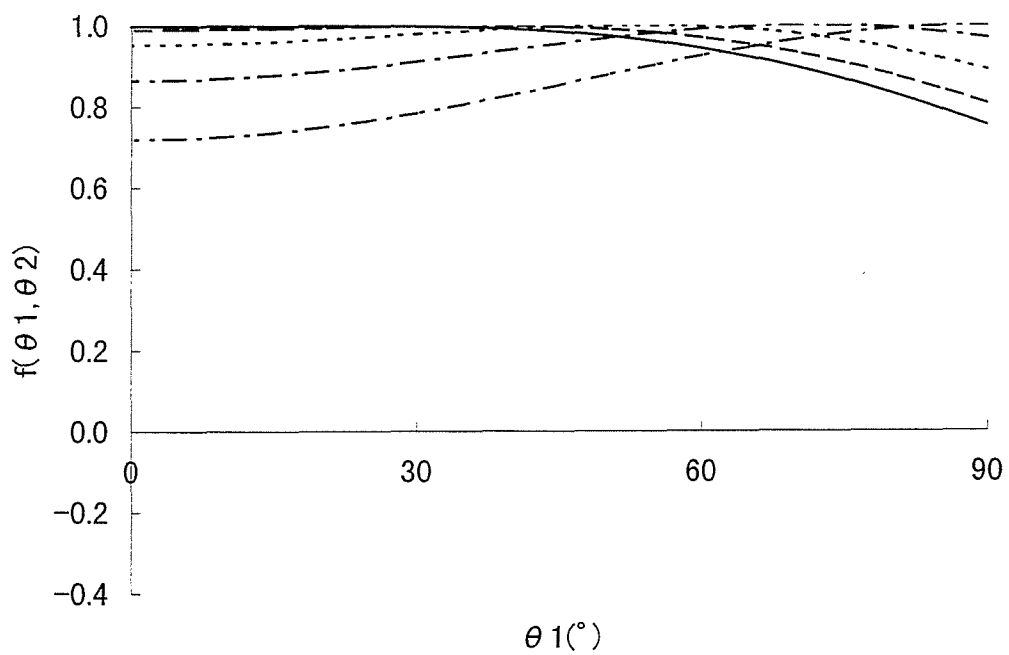


図5-8 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case7)

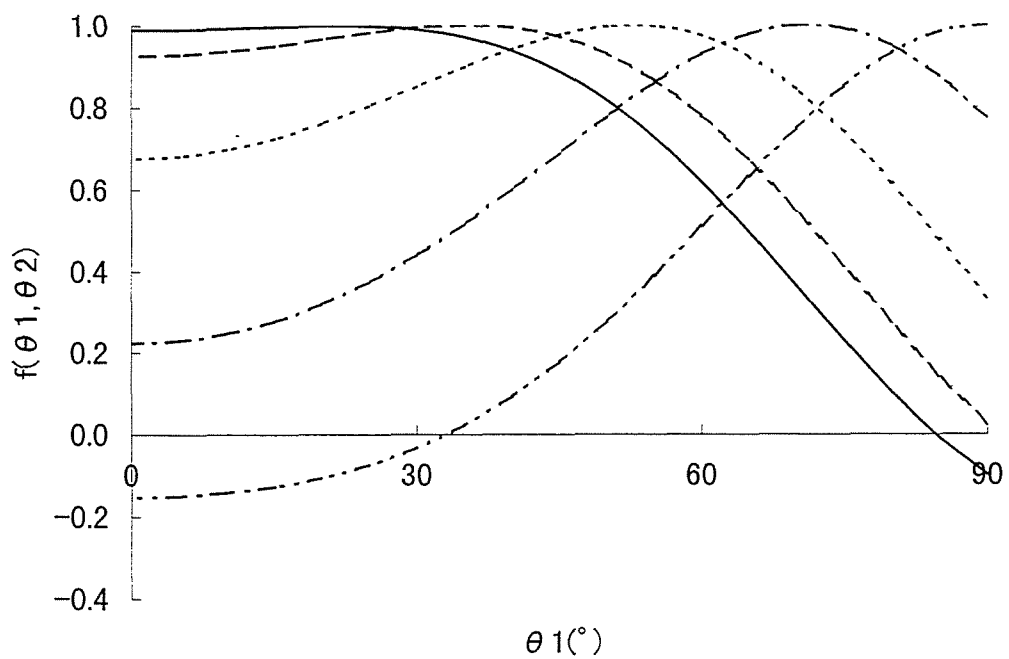


図5-9 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case8)

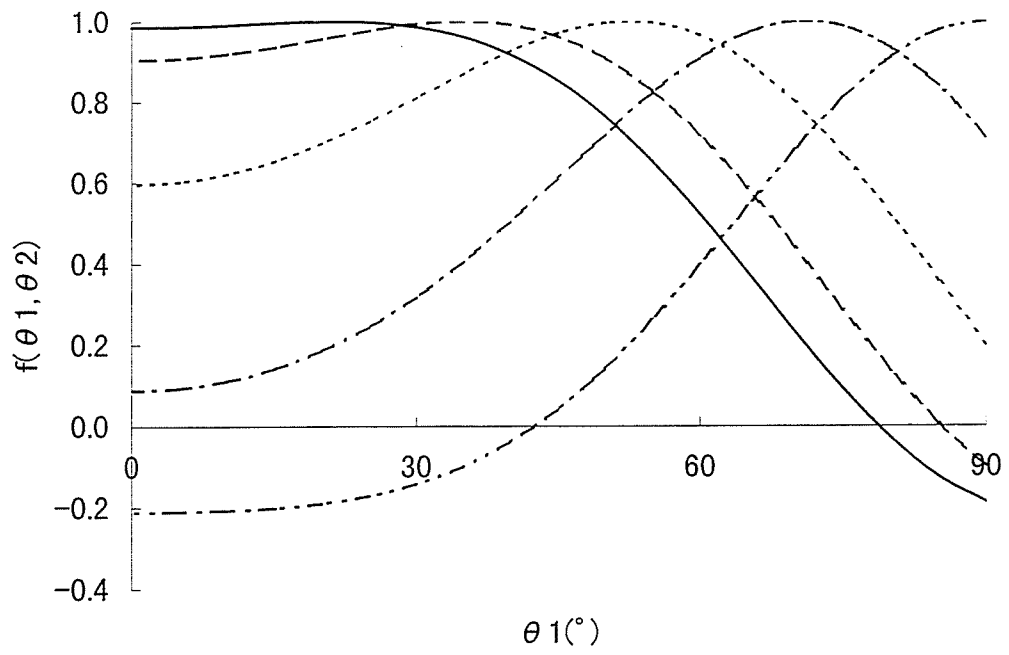
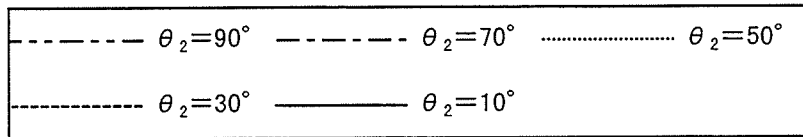


図5-10 $f(\theta_1, \theta_2)$ と θ_1, θ_2 の関係 (case9)



参考文献

- 1) Ippen, A. T. and Y. Goda : Wave induced oscillation in harbors, the solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Hydrodynamics Lab. Rep. No. 59, MIT, 90p., 1963.
- 2) Bowers, E. C. : Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, J. Fluid Mech., Vol.79, part1, pp.71-92, 1977.
- 3) 木村 晃・喜田昌裕 : 斜め入射波による湾水の長周期動揺について, 鳥取大学工学部研究報告第 28 巻第 1 号, PP. 235-243, 1997.

第6章 結論

湾水振動は港湾に外海から波が侵入した際に、その港湾の固有周波数に相当する周波数帯の波が増幅される現象である。一般に、広帯域の周波数を持つ外洋の波浪スペクトルの中には、港湾の固有振動数も含まれており、湾水振動の発生する機会はかなり多いと考えられる。湾水振動の波高は一般には数十 cm 以下であるが、周期が非常に長く水粒子の水平運動が大きいために、係留中の船舶を動揺させて荷役に支障をきたしたり、モーターボートやヨットなどの小型船舶に損傷を与える原因となっている。本論文は、長周期波による湾水振動現象の理解のための基礎的な研究として、単純な長方形の港湾モデルを想定して、任意のスペクトルを持つ不規則波が港湾内に入射したときの長周期振動特性を求める方法を示したものである。本章では、各章で得られた結果をまとめるとともに、今後に残された問題点について論ずる。

第1章では、本研究を行うにあたっての社会的背景について述べ、港湾の副振動現象を採り上げ、実際に現象が顕在化している港湾を紹介した。さらに副振動現象の発生原因について触れ、これまで港湾の計画・設計の際に用いられてきた風波のみを対象とするやり方では必ずしも十分でないことを指摘し、本研究の目的を明確にするとともにその目的を達成するための本研究の概略を紹介した。

第2章では、本研究の工学的な背景と位置づけを明確にするため、長周期波による湾水振動に関する従来知見について整理し、概説した。そのなかで湾水振動現象を説明するには1次波を対象とするだけでは十分とはいえず、2次波を考慮する必要があることを示した。さらにこれまでに開発された2次波を考慮した各種モデルの問題点を挙げ、比較的容易に扱えるモデルの開発が求められている現状を述べた。次に本研究の基礎モデルとなっている Ippen-Goda による湾水振動モデルについて説明した。

第3章では、2成分合成波が長方形港湾に入射した場合の2次長周期波による湾水の振動特性を検討した。その結果、湾長が2次長周期波の波長の1/4付近の長さの場合に基本モード（最大）のピークが現れた。これは従来研究の結果が示す1次波の湾水振動の結果と同じである。しかし従来研究では、数百m以上の規模をもつ港湾で発生する数分オーダーの副振動を1次波の湾水振動モデルでは説明できなかったが、本章で示した2次長周期波による湾水の振動モデルを用いればこれを説明できることが分かった。さらに周波数差が大きくなるほど共振時の増幅率が小さくなること、入射波群の中にごく近い周波数の組み合わせが存在すると、湾内の振幅増幅率が高くなる場合があること、湾幅を狭くするにつれて港内の振幅増幅率が高くなることなどが分かった。

第4章では、第3章の結果をもとにして、無数に多くの成分波から構成される一方向不規則波が港湾に入射する場合を対象としてモデルを拡張した。この場合、港内外にはすべての成分波ごとに第3章で説明した1次波の重複波が発生し、さらに各成分波が相互に干

渉して2次長周期波が発生する。計算には1次波の初期位相角の情報を必要となるが、本研究ではこれを平均化操作することにより、任意のスペクトルを持つ一方向不規則波浪による湾水の長周期振動特性が計算できるようにした。この方法を用いれば、湾外における2次の長周期拘束波のスペクトルを与えた時の湾内波のスペクトルを計算することができる。計算の結果によれば、いずれのケースでも波長が湾長の1/4, 3/4 および 5/4 に対応する部分で振幅増幅率のピークが出現しており、これは第3章における規則波の結果とよく対応している。振幅増幅率のピークが出現する kl の値の幅は非常に狭く、したがって共振の発生は、湾外での共振周波数に対応する2次長周期拘束波が存在するかどうかに影響される。さらに有義波周期が小さい場合、湾内の振幅増幅率が小さくなる。すなわち相対水深が浅くなると湾内の振幅増幅率が大きくなること、また湾口の幅を狭くした場合に、湾内の振幅増幅率が大きくなるハーバー・パラドックスの現象が出現することなども分かった。現実には湾口におけるエネルギー損失によってハーバー・パラドックスの現象は現れにくいだが、港湾計画時や改修時においてある程度以上のエネルギー損失がなければ、湾口を狭めることが逆に湾内の振幅増幅率を高める恐れがある。湾長の影響も検討したが、湾長が十分大きい場合には、湾の長さは湾内の振幅増幅率にほとんど影響しない。

第5章では、波の入射方向の影響を調べるために、波が斜めに入射する場合の湾水の振動特性を求める方法を示した。その結果、同じ周波数差の波の組み合わせであっても k_1d と k_2d の差が大きくなれば、港湾に対する波の入射角の影響が大きくなること、逆に入射波の周波数差を変化させても入射角の影響に有意な差異は見られないこと、また湾口の幅を狭くすると、波の入射角による影響が小さくなること等が分かった。

以上、本研究により得られた結果を述べた。本研究で得られた成果は、複雑な形状の港湾での湾水振動の解析に対する基礎資料となり、高度な数値計算を要しないため一般の技術者も容易に利用することが可能である。

なお残された問題としては、湾口におけるエネルギーの減衰効果をいかに評価するかということ、1次波による湾水振動の際にも問題となっている港内の摩擦の影響の評価がある。湾水振動を抑えるために防波堤などにより湾口を狭くした場合、いわゆるハーバーパラドックス現象が生じることは本研究でも確認されている。実際の現象では、湾口部での流体のはく離領域での渦の発生などによってエネルギーロスが大きくなるため、必ずしも理論解析どおりの結果ほどは増大しないとされている。したがってこのエネルギーロスの効果を定量的に評価する必要があるが、長周期波を対象とする湾水振動実験は、造波時の自由波の発生により水槽実験がかなり難しいため、実験自体の信頼性もまた十分検討する必要がある。

【付録 1】湾内における振幅増幅率の有限性について

ここでは第 3 章第 4 節で述べた振幅増幅率が発散する可能性について述べる。(3-135)式のうち右辺のうち $\sin k_1 l \sin k_2 l$ に関する項のみを取り出すと次式のようなになる。

$$\frac{a_1 a_2 c_1 c_2 (d/b)^2}{4 \sin k_1 l \sin k_2 l} \quad (1)$$

(1)式のうち $\sin k_1 l \sin k_2 l$ が 0 に近づく時に、髭状のものが出現することは前述した。

(2-41)式より

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d}{b} (\cot k_1 l - S_{11}) - \psi_{12} \right]^2 + \psi_{11}^2}}$$

したがって

$$\frac{c_1 (d/b)}{\sin k_1 l} = \frac{1}{\sqrt{\left[\cos k_1 l - \left(S_{11} + \frac{d}{b} \psi_{12} \right) \sin k_1 l \right]^2 + \left[\frac{d}{b} \psi_{11} \sin k_1 l \right]^2}} \quad (2)$$

となる。上式から分かるように分母の中には $k_1 l$ を含む項は 3 つあるが、 $\sin k_1 l$ と $\cos k_1 l$ が混在している。したがってこれらが同時に 0 になることはなく、発散しないため振幅は有限である。

【付録 2】 不規則波による湾水振動の追加計算

ここでは「第 4 章 不規則波による 2 次長周期波の湾水振動」において表-1 に示す計算条件で追加計算を行った。

表-1 計算条件

case	h(m)	$H_{1/3}$ (m)	$T_{1/3}$ (s)	l(m)	b(m)	d(m)
1	7.5	3.0	10.0	500	100	100
2	7.5	3.0	10.0	500	150	150
3	7.5	3.0	10.0	500	200	200
4	7.5	3.0	10.0	500	100	50
5	7.5	3.0	10.0	1000	100	100
6	13.5	3.0	10.0	500	100	100
7	13.5	3.0	10.0	500	150	150
8	13.5	3.0	10.0	500	200	200
9	13.5	3.0	10.0	500	100	50
10	13.5	3.0	10.0	1000	100	100
11	10.0	3.0	8.0	500	100	100
12	10.0	3.0	8.0	500	150	150
13	10.0	3.0	8.0	500	200	200
14	10.0	3.0	8.0	500	100	50
15	10.0	3.0	8.0	1000	100	100
16	10.0	3.0	6.0	500	100	100
17	10.0	3.0	6.0	500	150	150
18	10.0	3.0	6.0	500	200	200
19	10.0	3.0	6.0	500	100	50
20	10.0	3.0	6.0	1000	100	100
21	10.0	4.0	10.0	500	100	100
22	10.0	4.0	10.0	500	150	150
23	10.0	4.0	10.0	500	200	200
24	10.0	4.0	10.0	500	100	50
25	10.0	4.0	10.0	1000	100	100
26	10.0	5.0	10.0	500	100	100
27	10.0	5.0	10.0	500	150	150
28	10.0	5.0	10.0	500	200	200
29	10.0	5.0	10.0	500	100	50
30	10.0	5.0	10.0	1000	100	100

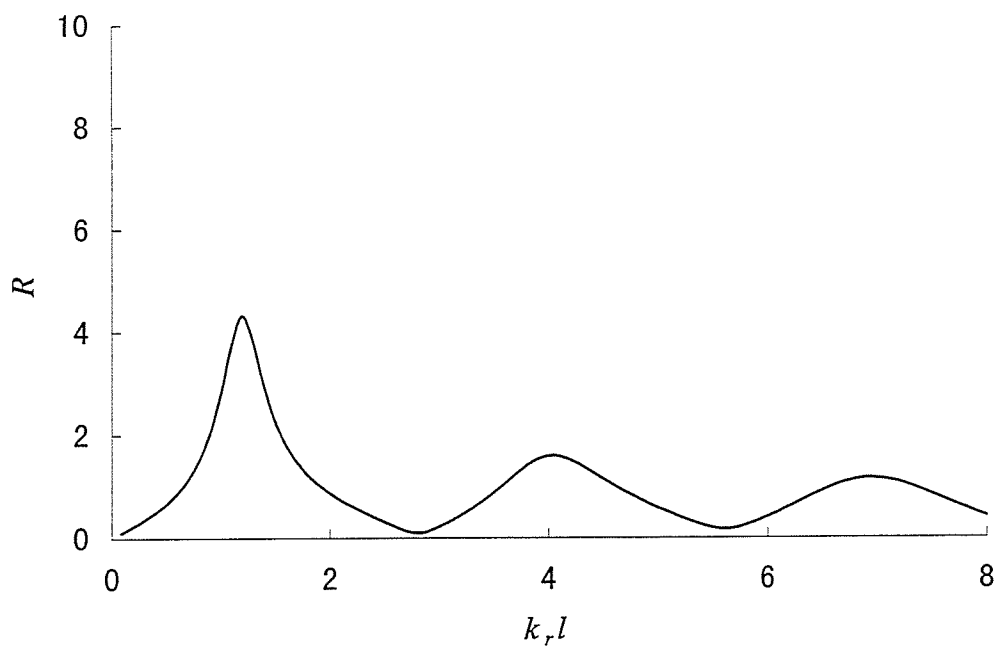


図-1 湾の振動特性(case1)

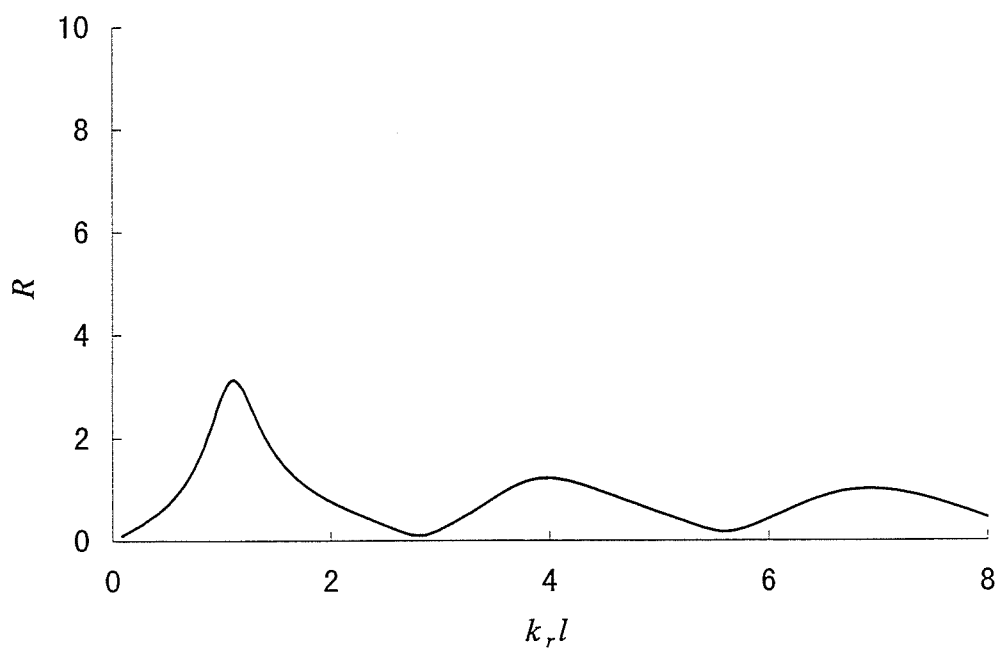


図-2 湾の振動特性(case2)

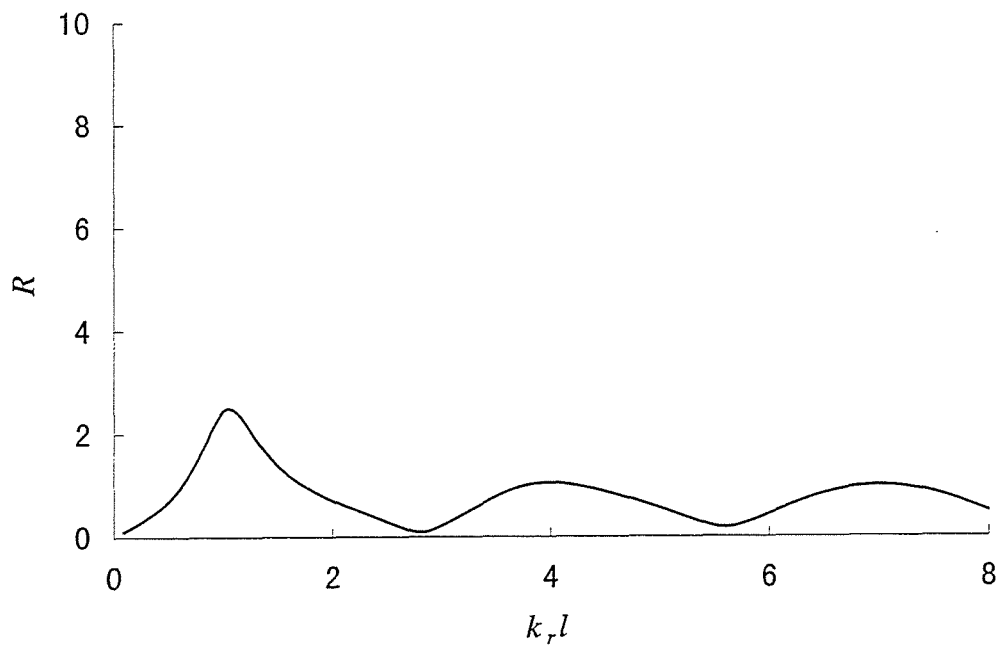


図-3 湾の振動特性(case3)

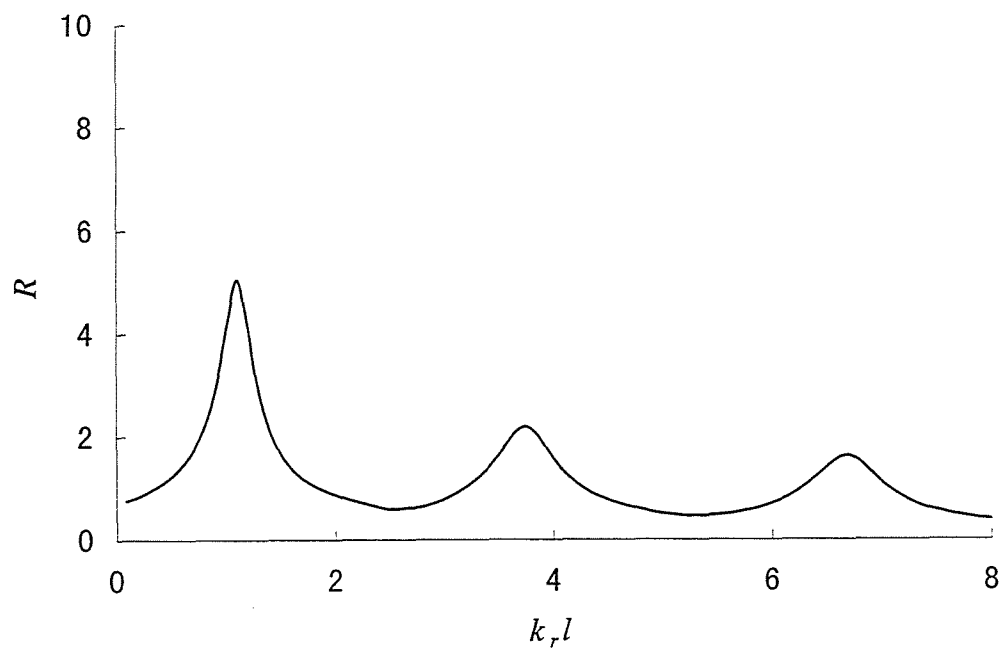


図-4 湾の振動特性(case4)

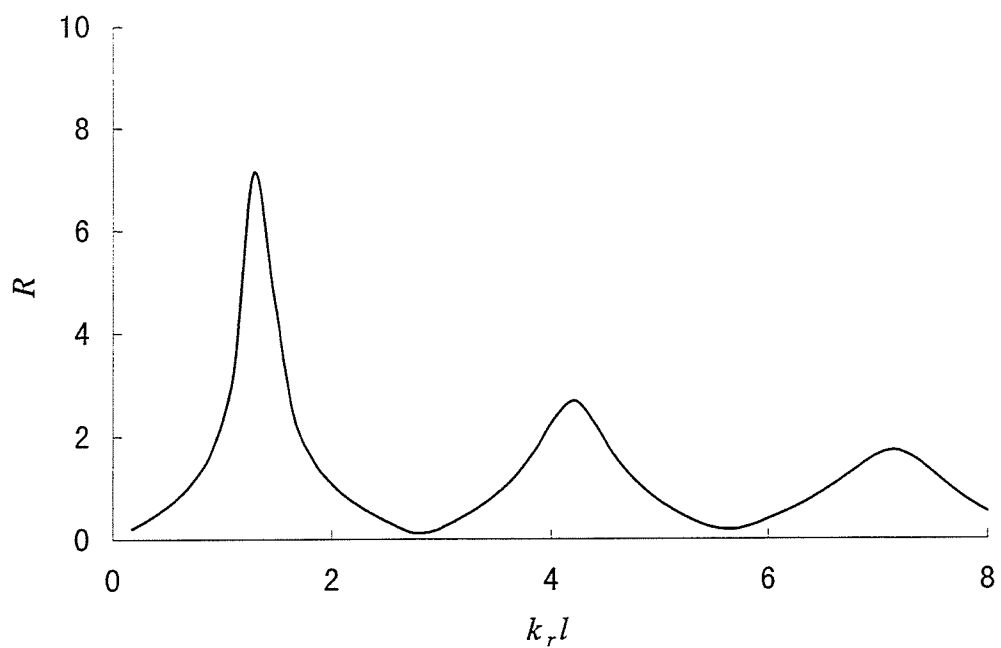


図-5 湾の振動特性(case5)

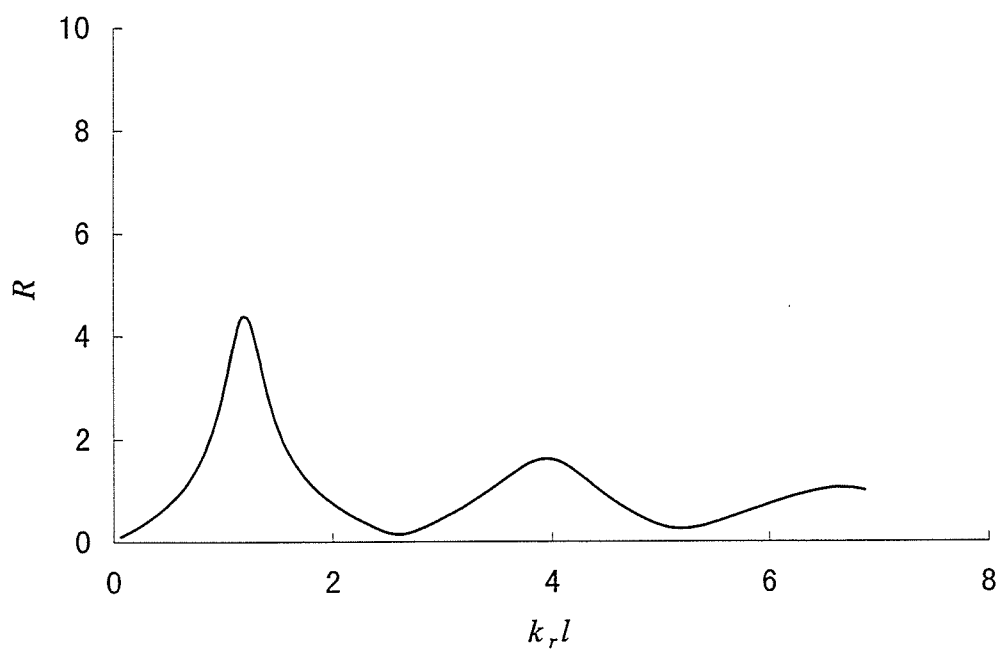


図-6 湾の振動特性(case6)

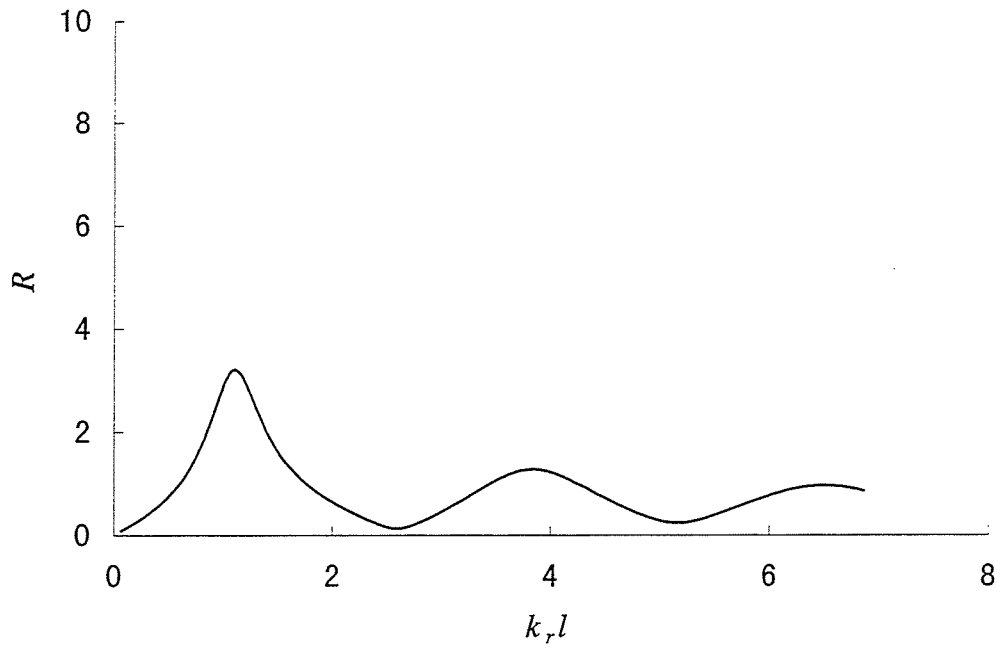


図-7 湾の振動特性 (case7)

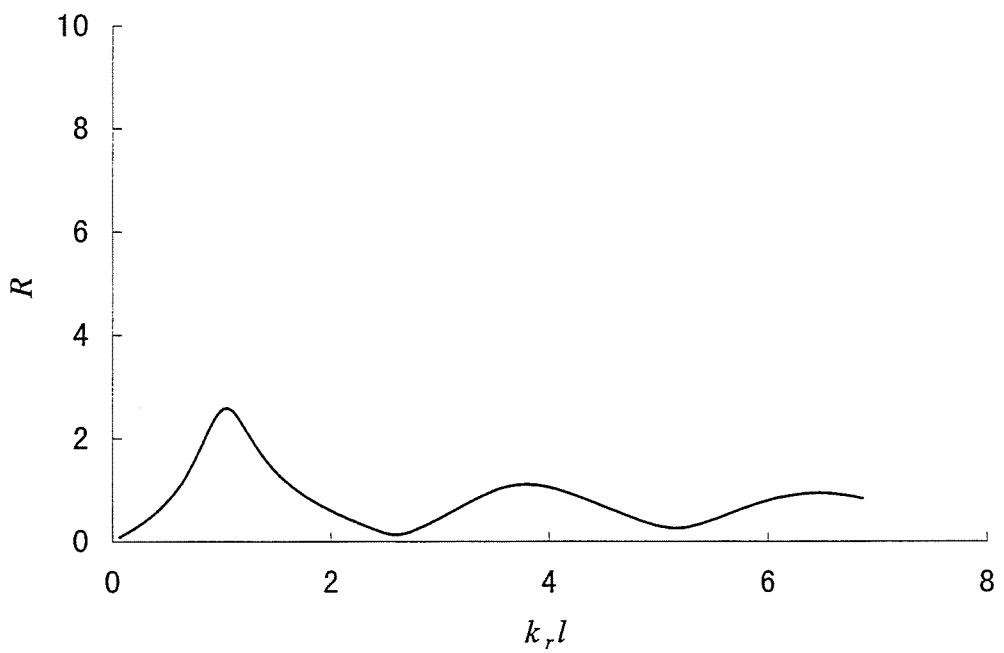


図-8 湾の振動特性 (case8)

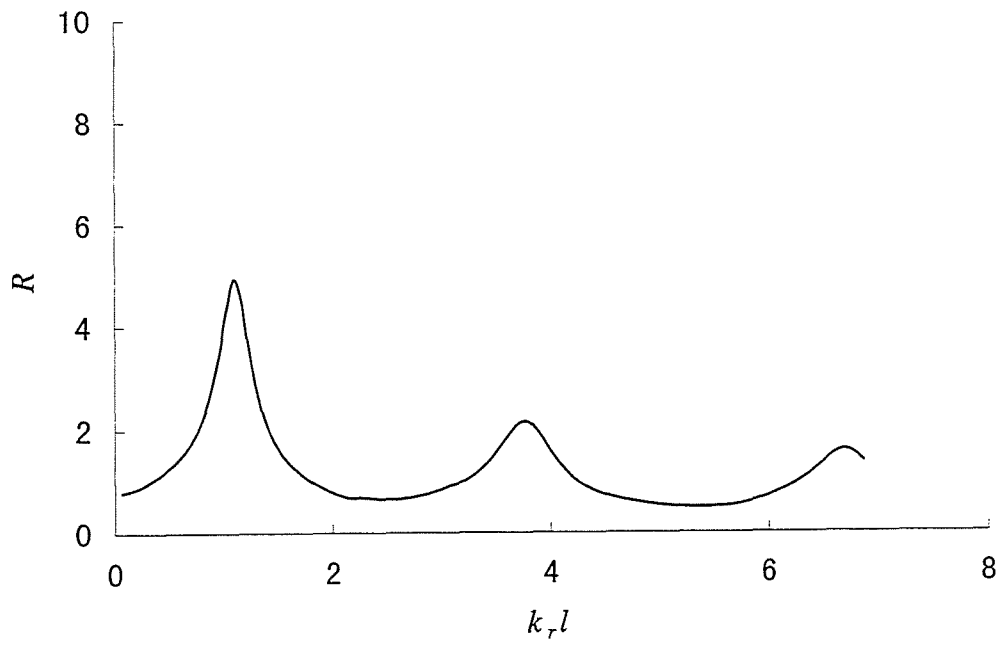


図-9 湾の振動特性(case9)

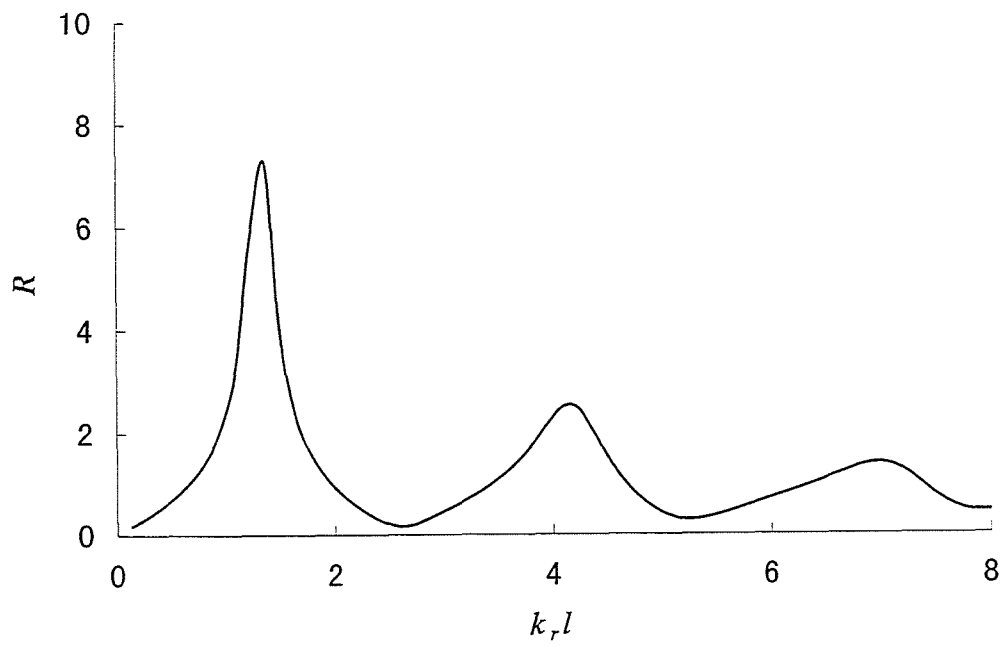


図-10 湾の振動特性(case10)

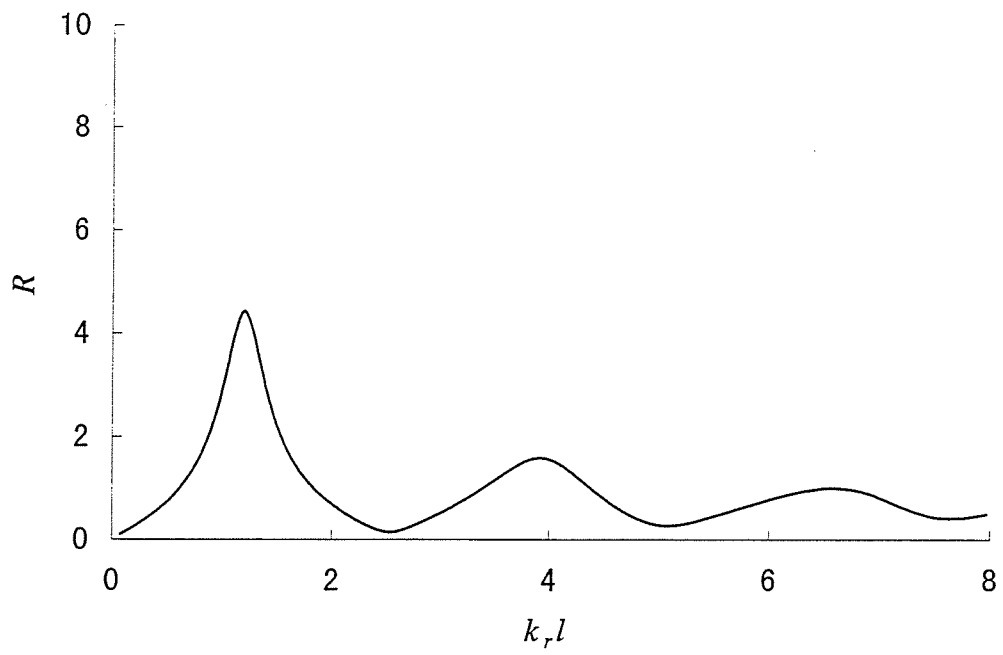


図-11 湾の振動特性(case11)

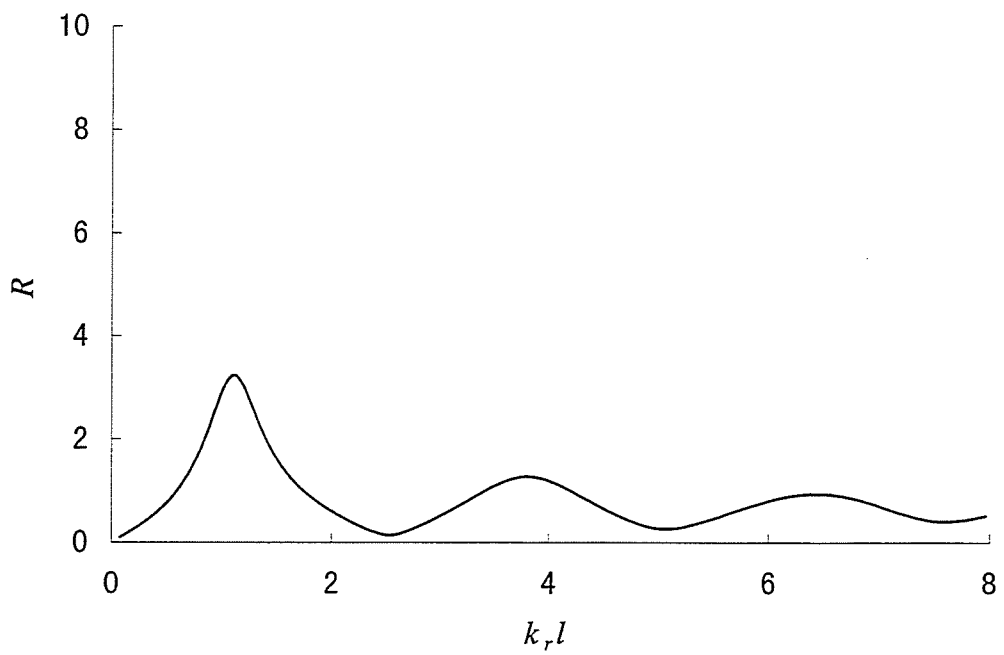


図-12 湾の振動特性(case12)

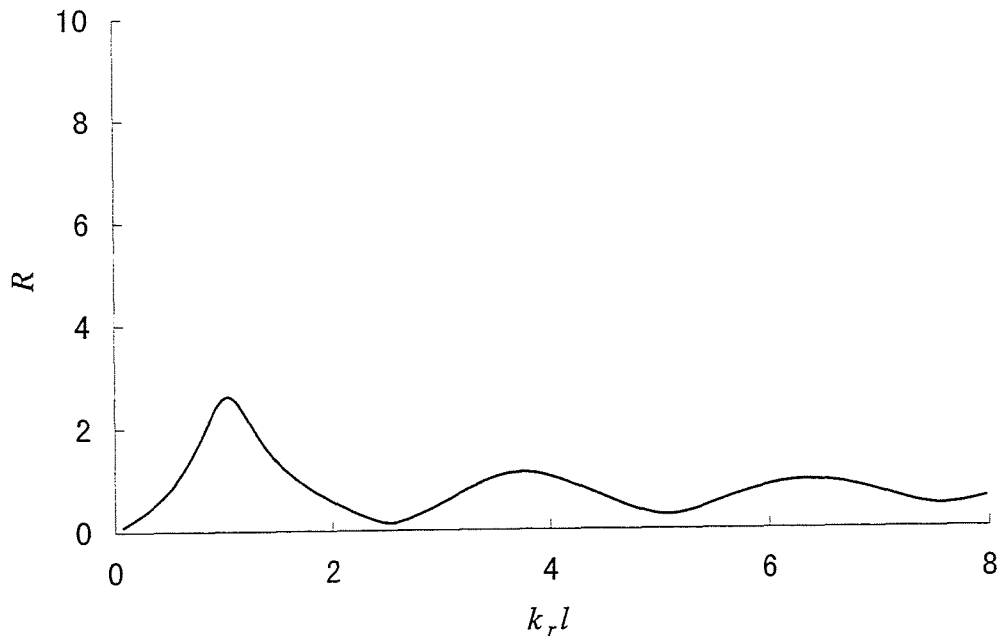


図-13 湾の振動特性(case13)

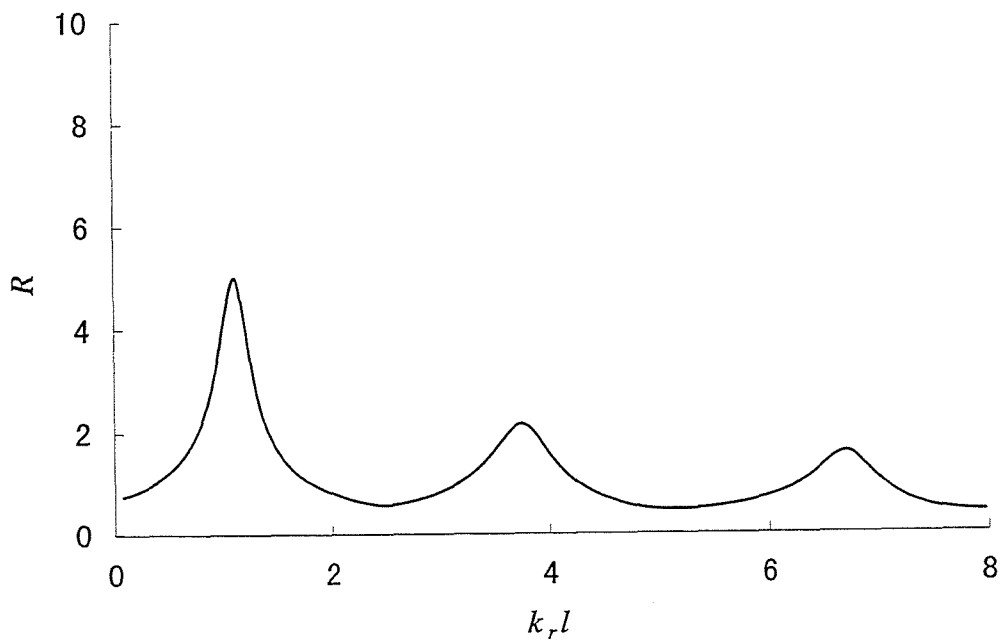


図-14 湾の振動特性(case14)

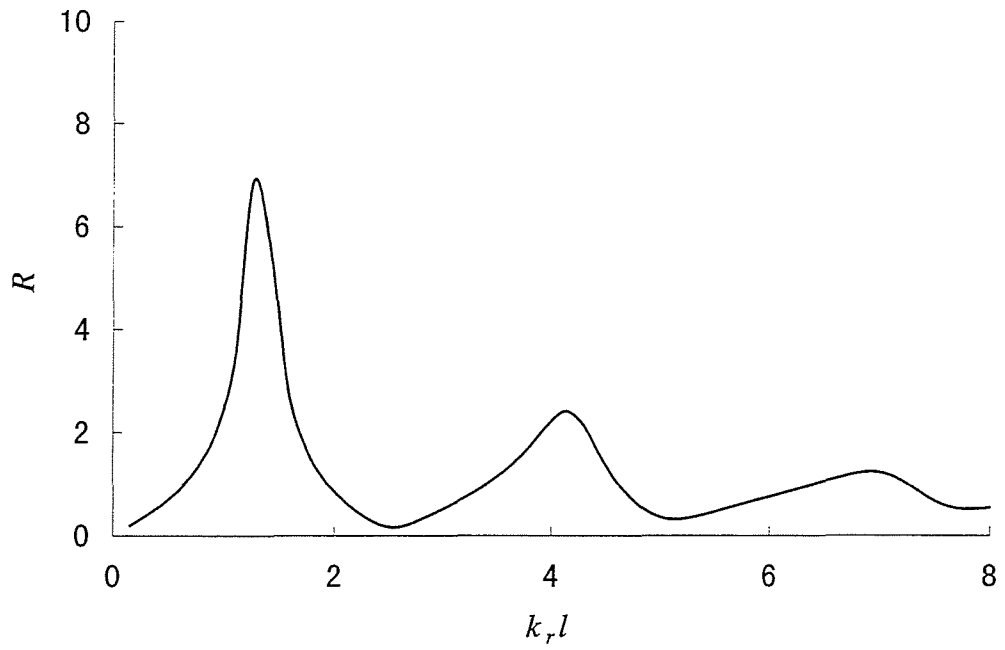


図-15 湾の振動特性(case15)

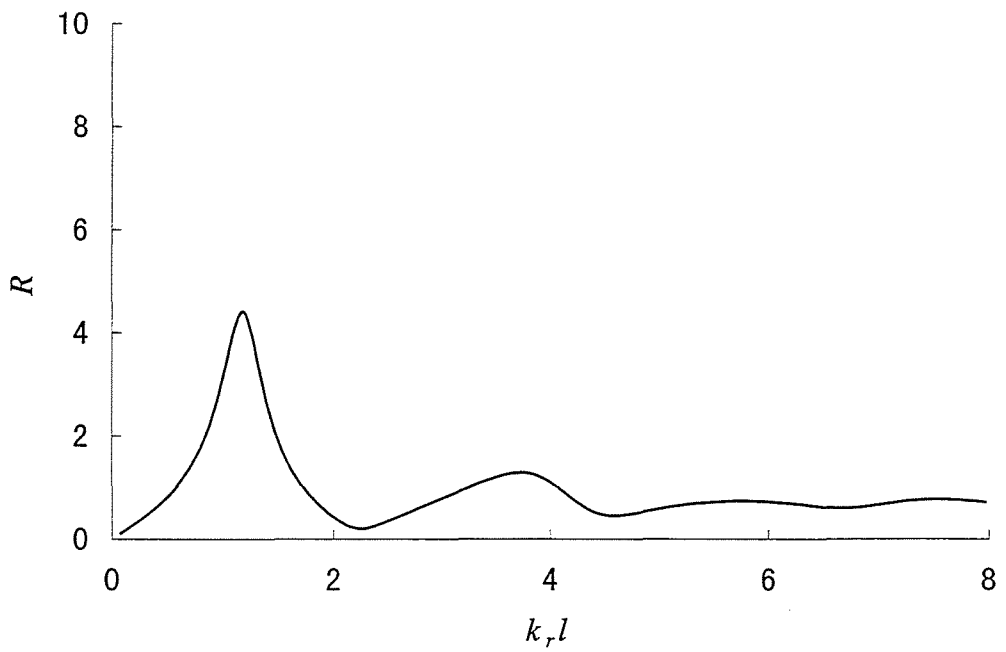


図-16 湾の振動特性(case16)

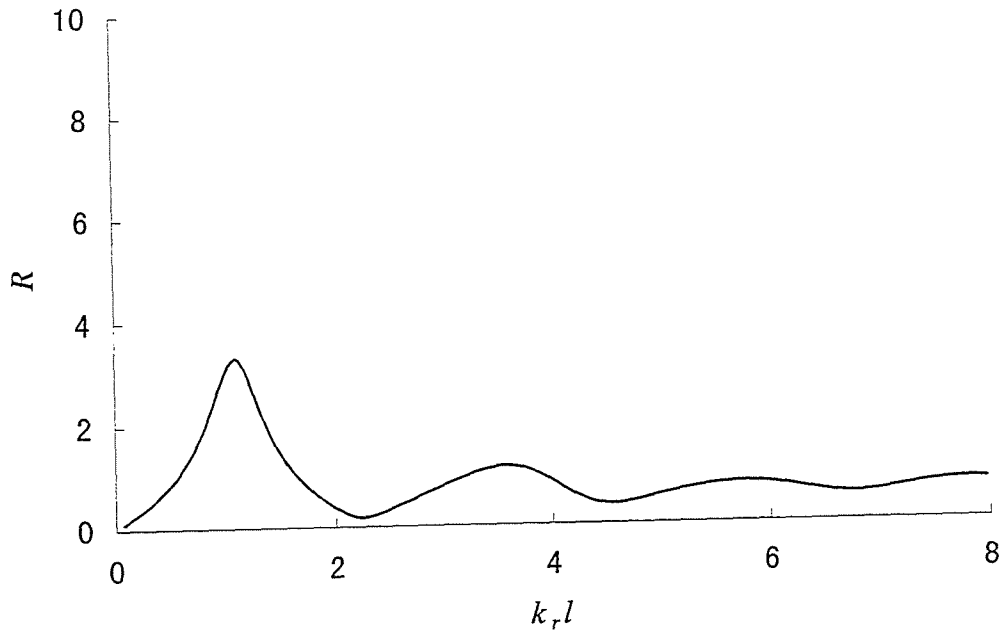


図-17 湾の振動特性(case17)

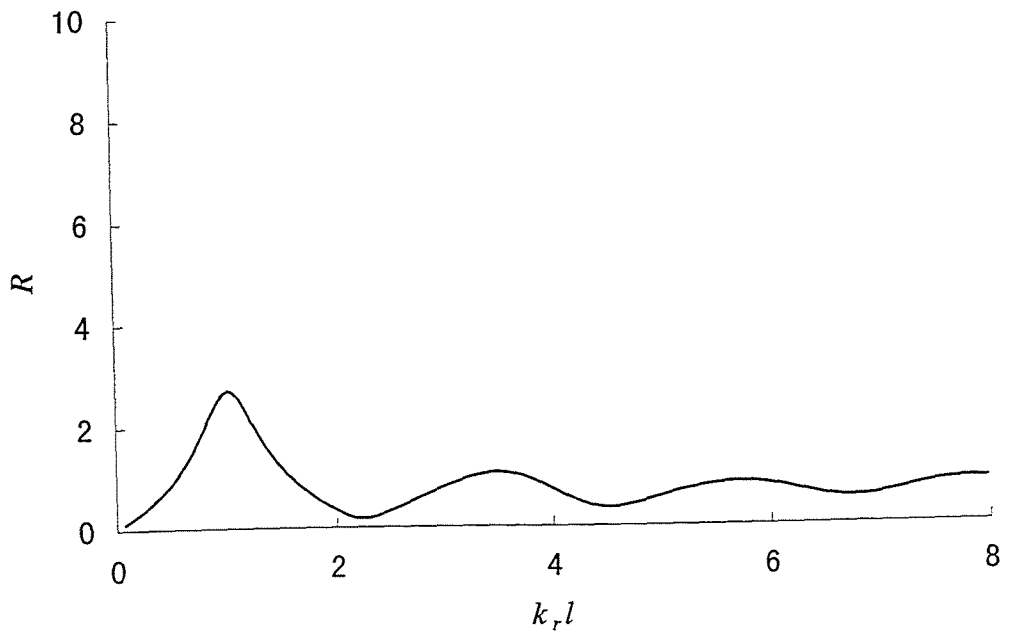


図-18 湾の振動特性(case18)

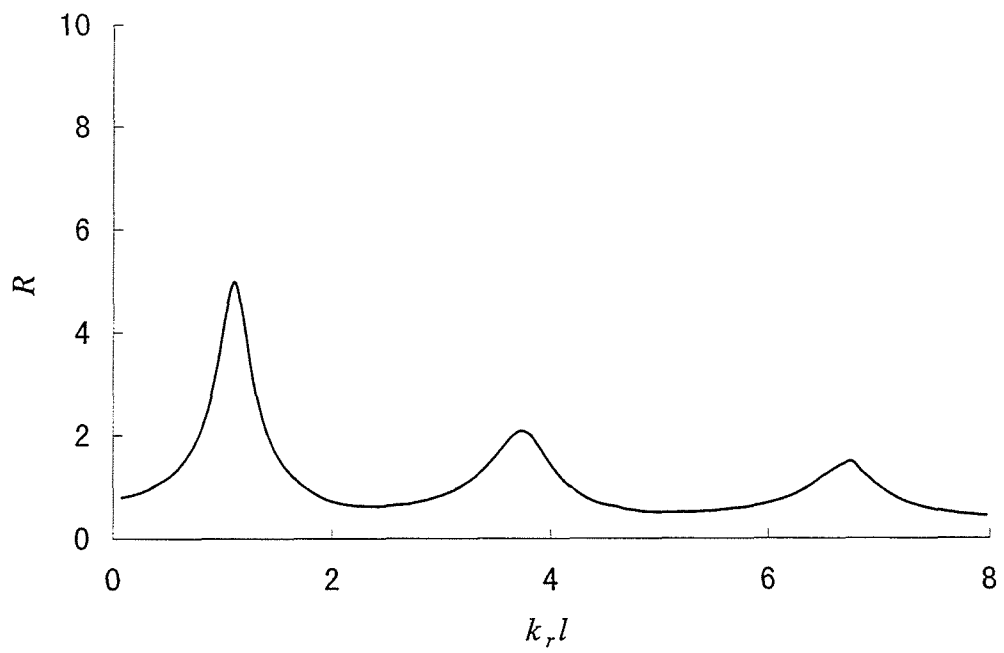


図-19 湾の振動特性(case19)

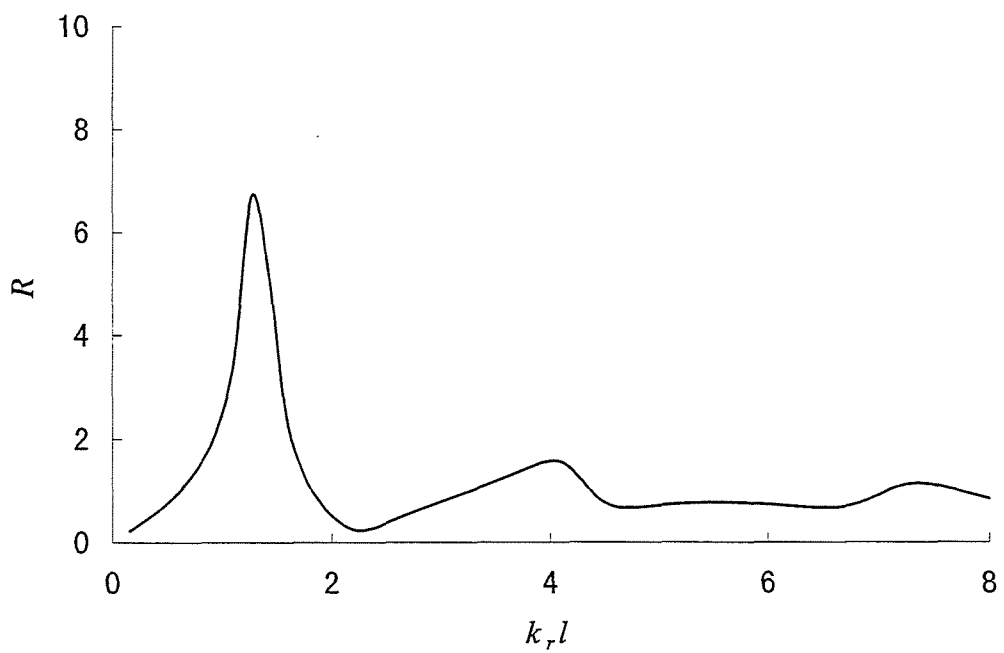


図-20 湾の振動特性(case20)

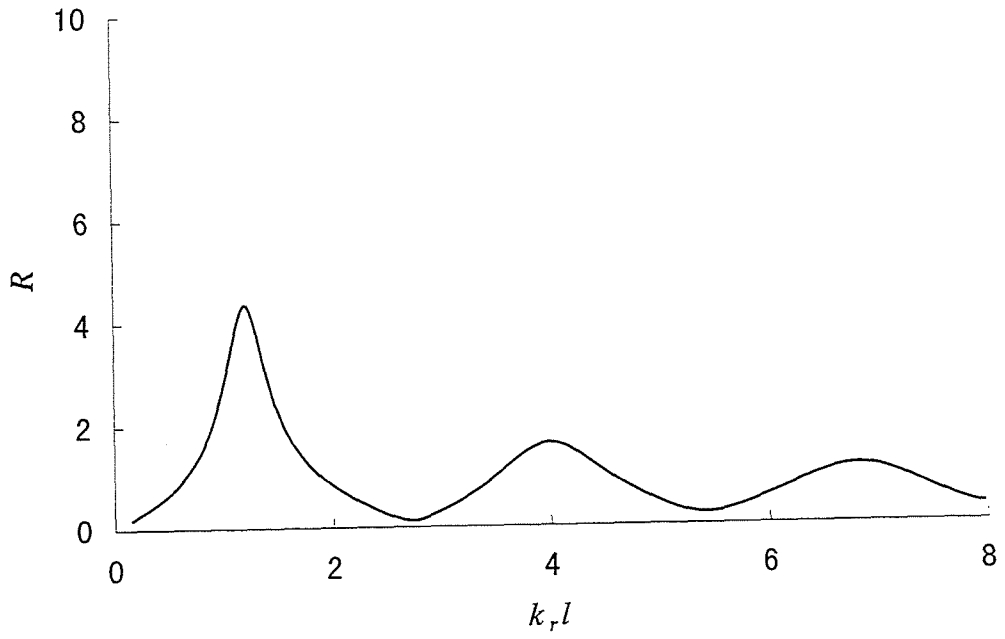


図-21 湾の振動特性(case21)

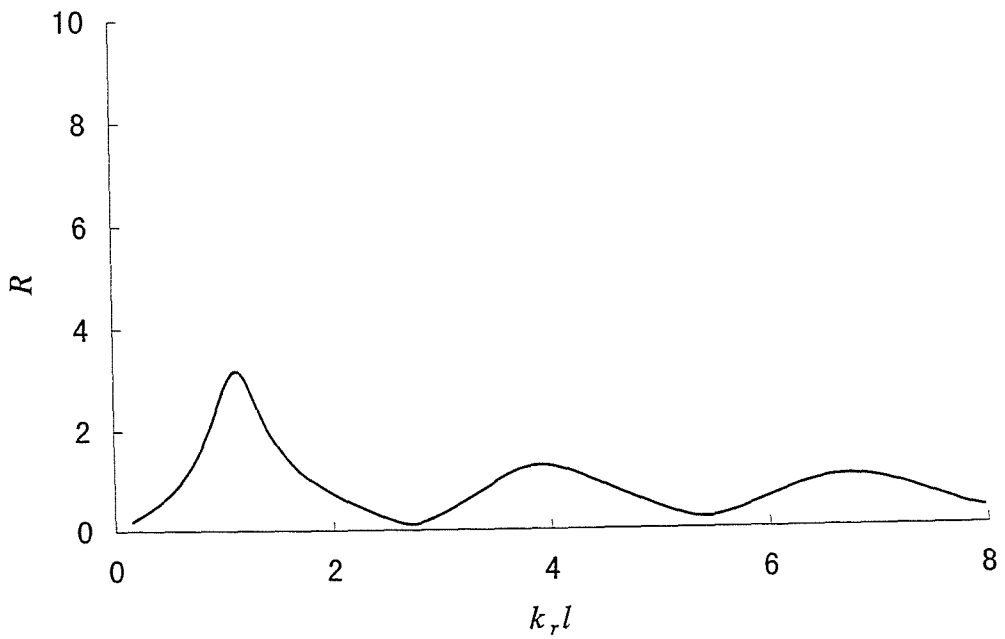


図-22 湾の振動特性(case22)

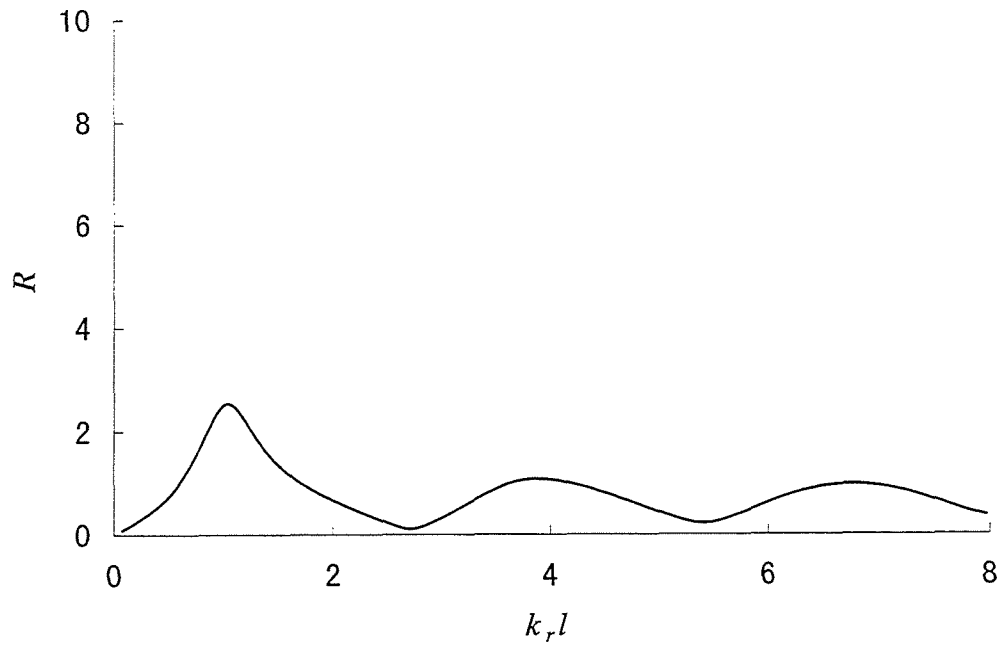


図-23 湾の振動特性(case23)

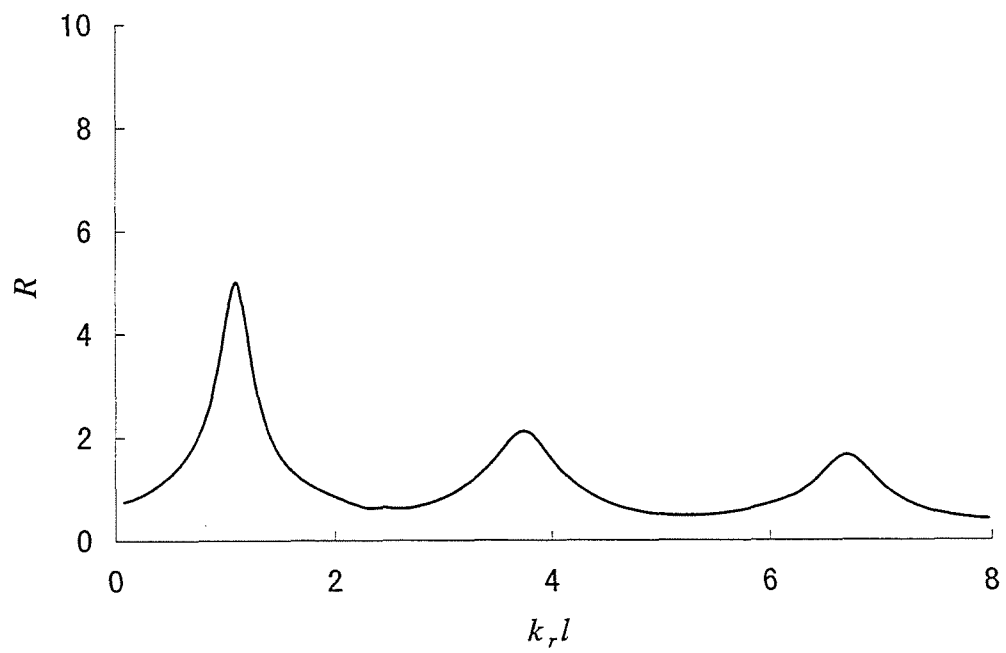


図-24 湾の振動特性(case24)

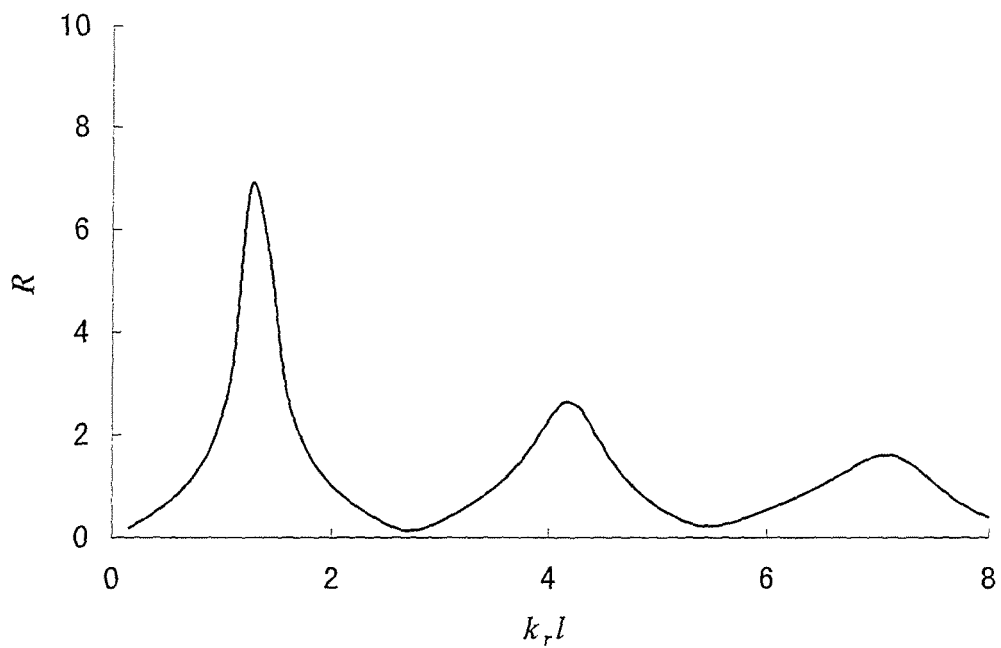


図-25 湾の振動特性(case25)

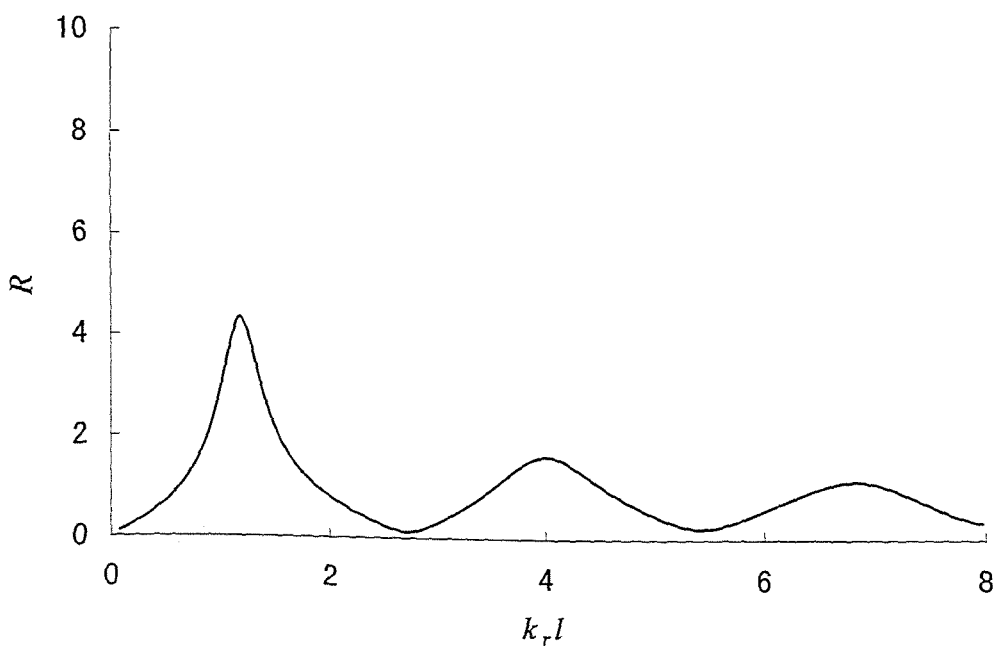


図-26 湾の振動特性(case26)

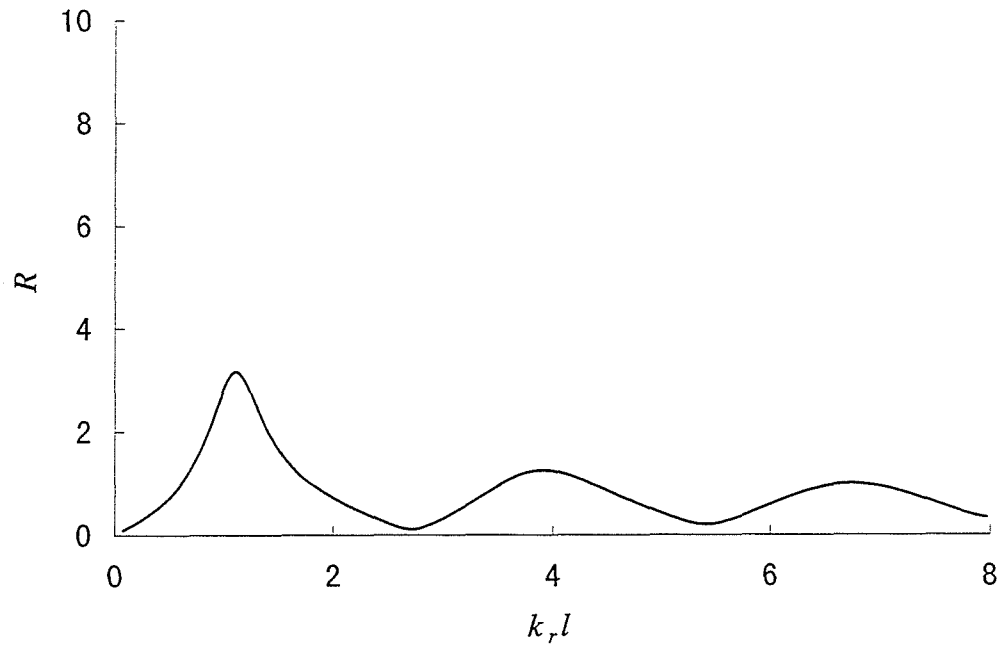


図-27 湾の振動特性(case27)

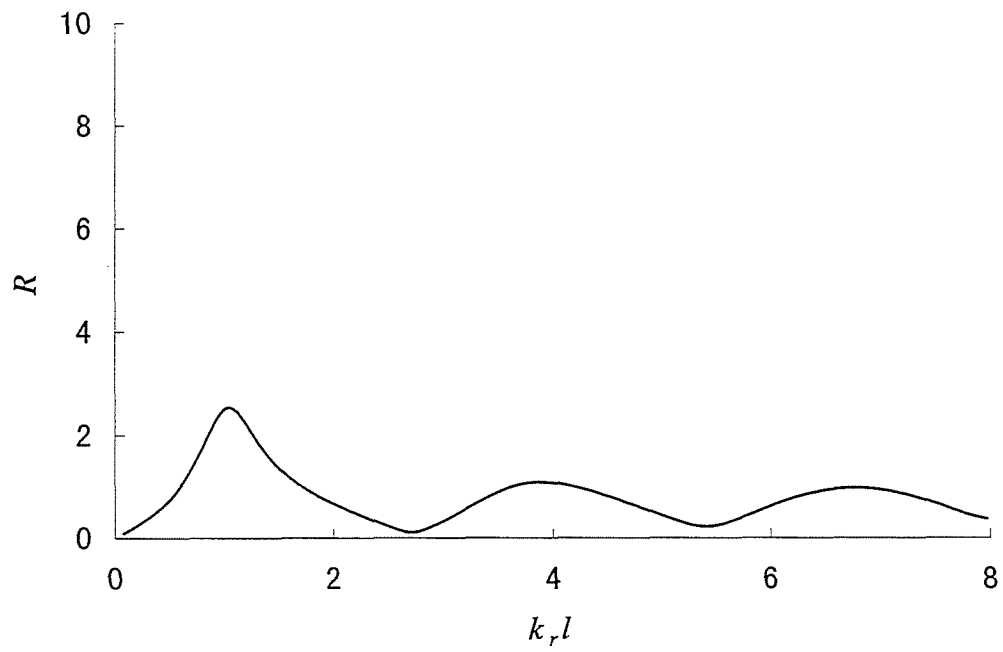


図-28 湾の振動特性(case28)

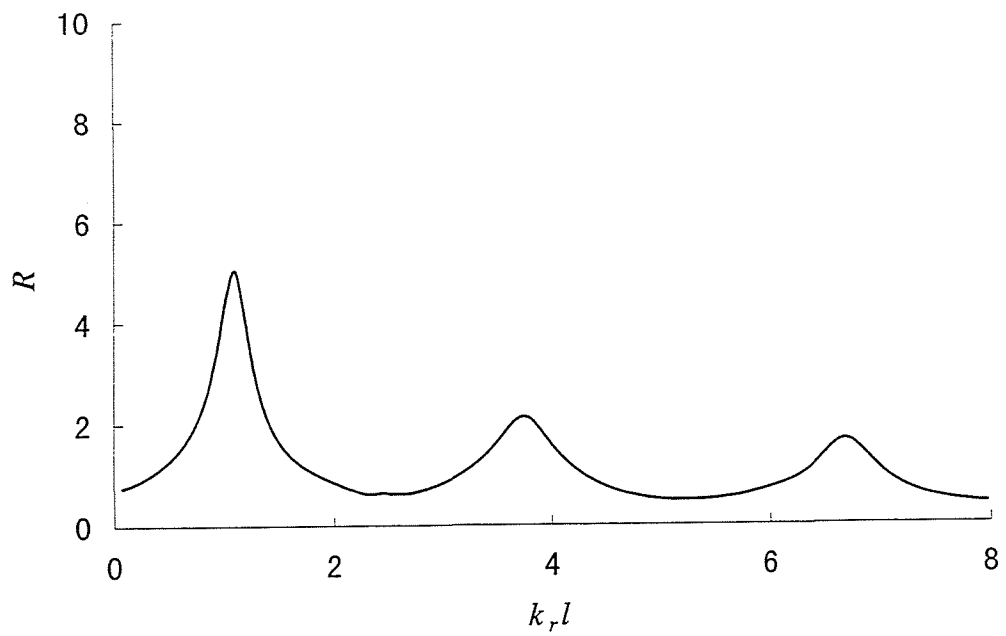


図-29 湾の振動特性(case29)

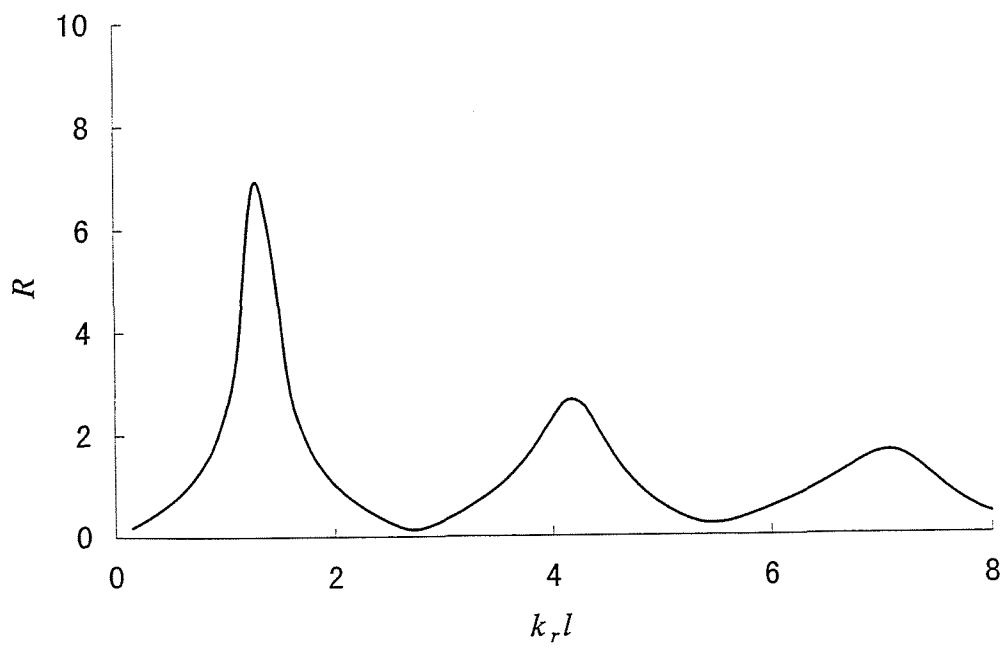


図-30 湾の振動特性(case30)

謝 辞

本研究を行うにあたり、研究を始める機会を作って頂き、学生時代より終始熱心にかつ適切なご指導を賜りました鳥取大学工学部 木村晃教授にあらためて甚大なる謝意を表します。

鳥取大学工学部 松見吉晴助教授には、学生時代より海岸工学の研究を通して熱心な御指導と暖かい激励を賜ったことに深く感謝致します。

セントラルコンサルタント(株) 橋本宏取締役には、本研究を行う貴重な機会を与えてくださり、ここに深く感謝致します。

セントラルコンサルタント(株) 中田正夫取締役には、終始本研究を支えて頂きました。途中何度も相談に乗って頂き、その都度貴重な助言を賜り、ここに深く感謝致します。

鳥取大学工学部 太田隆夫助手には、公私にわたり温かい励ましのお言葉を頂きましたことに心からお礼申し上げます。

本論文作成に際し、御協力して頂いた鳥取大学工学部海洋開発研究室の諸氏に感謝の意を表します。

主要記号表

- a : 振幅
b : 港湾幅
d : 港口幅
F(u, y) : 関数 f(u, y) のフーリエ変換
g : 重力加速度
H : 波高
h : 水深
k : 波数 ($=2\pi/L$)
L : 波長
l : 港湾長
R : 増幅率
T : 周期
 γ : オイラー数, 0.5772.....
 ε : 初期位相角
 η : 水位変動量
 θ : 入射角
 λ : 相対港口位置
 π : 円周率
 σ : 角周波数
 ϕ : 速度ポテンシャル
 Ω : 港内外の重複波の位相角 (2次波)
 ω : 港内外の重複波の位相角 (1次波)
添え字 1 : 港外の波を表す
添え字 2 : 港内の波を表す
添え字 b : 拘束波
添え字 f : 自由波
添え字 - : 周波数あるいは波数の差の波を表す
添え字 * : 共役複素数

END