フレーゲの方法による算術の導出

田　畑　博　敏*

はじめに

本論文の目的は，『算術の基礎』（*Die Grundlagen der Arithmetik*：Frege［1884］）の§68－83でフレーゲが与えた自然数算術のプログラムに従って，具体的に算術を導出することである(1)。ここで，用いられる論理体系は，『概念記法』（Frege［1879］）での第二階述語論理にヒュームの原理を追加した体系である。この体系が（モデルの存在により）無矛盾であることは既に知られている(2)。フレーゲは上記のプログラムにおいて，数の明示的定義，すなわち「〈概念Ｆと同数的である（equinumerous)〉という概念の外延」という定義を用いないで算術を導出しようとしている。外延（クラス）や集合の概念に訴えず，ヒュームの原理という，数の同一性を論理的に定義するだけの原理によって，どれほどの範囲の算術が導出できるのか，という疑問が直ちに起こる。本論文では，（二階の）ペアノ算術をフレーゲの方法を用いて導出することにより，フレーゲのプログラムが十分なものであることを示す。差し当たっての目標は，以下のペアノの五つの公理を導くことである。

(1)　0（ゼロ）は自然数である。

(2)　すべての自然数は，自然数であるような唯一の後者（successor）を持つ。

(3)　0（ゼロ）はいかなる自然数の後者でもない。

(4)　任意の自然数ｘ，ｙに対して，ｘの後者がｙの後者と同一であれば，ｘとｙは同一である。

(5)　任意の性質Ｆに対して，0がＦを持ち，Ｆを持つ任意の自然数の後者もまたＦを持つならば，すべての自然数がＦを持つ（**数学的帰納法**の原理）。

ペアノの公理系によって算術を導出するとき，通常，「ゼロ」「自然数」「後者」といった概念は原始概念として未定義のままに残されるか，または，より基本的な理論，例えば集合論の中に算術を埋め込んで，集合概念からこれらの概念が導かれるか，である(3)。後者の場合，集合概念に伴う性質がそのまま数の性質に持ち込まれ，これが哲学的疑問を引き起こすことがある(4)。われわれは，フレーゲに倣って，これらの概念を論理的な概念のみで定義し，ペアノの五つの公理も定理として導くという形で，算術を導出する。そのための準備として，上記の五つの公理を論理の記号言語に翻訳する。われわれの記号での“Num”は「自然数」を意味し，“xPy”は「ｘはｙの前者（predecessor）である」または「ｙはｘの後者である」を意味する。そのとき，ペアノの公理は次のように表現できる。（右端にわれわれの算術展開での，これらの公理の定理番号を記す。）

(1′)　$\mathrm{Num}0$ ………定理８

(2′)　$\forall x\,(\mathrm{Num}\,x \to \exists y\,(\mathrm{Num}\,y \wedge xPy \wedge \forall z\,(xPz \to z = y)))$ ………定理15の系

(3′)　$\forall x\,(\mathrm{Num}\,x \to \neg\, xP0)$ ………定理３の系

---

*鳥取大学教育地域科学部・地域設計学講座・哲学

(4′)　$\forall x \forall y \forall z\,(\mathrm{Num}x \wedge \mathrm{Num}y \wedge \mathrm{Num}z \wedge xPz \wedge yPz \rightarrow x = y)$ ……定理2の系

(5′)　$\forall F\,[\,\{F0 \wedge \forall x \forall y\,(Fx \wedge xPy \rightarrow Fy)\} \rightarrow \forall x\,(\mathrm{Num}x \rightarrow Fx)]$

………定理9

これらの算術の基本原理を導くために，以下でわれわれは二階の述語論理とヒュームの原理のみに訴える。ヒュームの原理がどれほど「論理的」な性格を持つか，という点に関して問題がなくはないが，そこで用いられる概念がすべて二階の論理で表現できるという点において，少なくとも，集合概念による数の定義に伴う種々の疑問は免れている。この点で，フレーゲのプログラムは，「問題のより少ない方法でより多くの成果を出す」プログラムとなっている，と考えられる。これが，われわれがフレーゲの方法を取り上げる主要な理由である。

1．同　数　性

フレーゲの方法による算術の導出において中心的な原理となるヒュームの原理を確認することから始める。(原理，公理等の以下の記述において最左端の全称記号は省略することがある。)

ヒュームの原理（HP）：$\#F = \#G \longleftrightarrow F \approx G.$

これは「Fであるものの数とGであるものの数が同一であるのは，概念Fと概念Gが同数的である（equinumerous）ときかつそのときに限る」と読める。『算術の基礎』(以下『基礎』と略記）§71−73で，フレーゲは“$F \approx G$”（概念FとGの同数性）を，Fに帰属する対象とGに帰属する対象との間での，一対一対応づけの可能性として定義する。Fである任意の対象が，Gである少なくとも一つの対象に対して関係ϕにあり，逆に，Gである任意の対象に対して，Fである少なくとも一つの対象が関係ϕにあるとき，すなわち

$$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,(Gy \wedge x\phi y)) \;\wedge\; \forall y\,(Gy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge x\phi y))$$

であるとき，Fである対象とGである対象は，関係ϕによって互いに対応づけられている，と言われる。さらに，この関係ϕが両方向に一意的である（一対一対応である)，すなわち

$$\forall x \forall y \forall z\,(x\phi y \wedge x\phi z \rightarrow y = z) \wedge \forall x \forall y \forall z\,(x\phi z \wedge y\phi z \rightarrow x = y)$$

であるとき，関係ϕによって，Fである任意の対象がGである対象と過不足なく一対一に対応づけられる。よって，Fである対象の個数とGである対象の個数は一致する。こうして，

概念Fと概念Gが同数的である（$F \approx G$）

ということは，

Fであるものと Gであるものを一対一に相互に対応づける関係ϕが存在する

$$\exists\phi\,[\forall x\,\{Fx \rightarrow \exists y\,(Gy \wedge \forall w\,(x\phi w \longleftrightarrow w = y))\} \wedge \forall y\,\{Gy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u\phi y \longleftrightarrow u = x))\}]$$

と定義できる（『基礎』§72)。

ところで，フレーゲは『基礎』§68での数の明示的定義：

概念Fに属する数とは，概念〈Fと同数的である〉の外延である

$\#F = {}'X\,(F \approx X)$

を確認し，「nは数である」という表現がこの定義によって，

nがその概念に属する数であるような概念が存在する

$\exists F\,(n = \#F)$

を意味するとした上で（『基礎』§72)，『基礎』§73でヒュームの原理を証明しようとしている。

その証明は，“≈”が同値関係であること（以下の補題１）を利用するものであるが，これは，暗黙のうちに『算術の基本法則』の公理Ｖ（二階の事例）：

$$'X\,(F\approx X) = 'Y\,(G\approx Y) \longleftrightarrow \forall H\,(F\approx H \longleftrightarrow G\approx H)$$

を前提してのみ成り立つものである。数の明示的定義に従えば，数の同一性は概念の「同外延性」に訴えざるを得ないからである。しかし，フレーゲは，『基礎』§74以下の算術プログラムにおいて，「外延」に基づく数の明示的定義にではなく，「同数性」に基づく数の同一性の基準を与えるヒュームの原理にのみ訴えている。われわれもこれに倣って，ヒュームの原理から出発する。よって，ヒュームの原理は数の「文脈的定義」の役割を果たす。ヒュームの原理：

$$\#F = \#G \longleftrightarrow F\approx G$$

は，左辺，すなわち＃Ｆ（Ｆであるものの数）と＃Ｇ（Ｇであるものの数）の同一性を，右辺，すなわち一対一対応の存在によって定義している，と解釈できる。右辺に現れるのは二階述語論理で表現可能な概念，その意味で「論理的な」概念である。

さて，同数性“≈”に関する補題を導くことから始める。

補題１：同数性の関係“≈”は同値関係である。

《証明》

（ｉ）反射性。任意の概念Ｆについて，$F\approx F$であることを示す。任意の対象ｘについて，Fx……①と仮定する。同一性の論理法則により，$x=w \longleftrightarrow w=x$であるから，全称化により$\forall w\,(x=w \longleftrightarrow w=x)$，$\therefore Fx \wedge \forall w\,(x=w \longleftrightarrow w=x)$。これから，存在化により，$\exists y\,(Fy \wedge \forall w\,(x=w \longleftrightarrow w=y))$……②。この②は①の仮定の下に導出されたから，条件化と全称化により，$\forall x\,\{Fx \rightarrow \exists y\,(Fy \wedge \forall w\,(x=w \longleftrightarrow w=y))\}$……③。同様に，任意の対象ｙについて$Fy$と仮定することから，命題論理$u=y \longleftrightarrow u=y$により，$Fy \wedge \forall u\,(u=y \longleftrightarrow u=y)$が導け，これから存在化により，$\exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u=y \longleftrightarrow u=x))$が導けるので，条件化によって，$\forall y\,\{Fy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u=y \longleftrightarrow u=x))\}$……④が帰結する。③と④の連言から，“$x=y$”を“$x\phi y$”とみなすことによって，

$$\exists\phi\,[\forall x\,\{Fx \rightarrow \exists y\,(Fy \wedge \forall w\,(x\phi w \longleftrightarrow w=y))\} \wedge$$
$$\forall y\,\{Fy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u\phi y \longleftrightarrow u=x))\}]$$

すなわち，$F\approx F$が導ける。

（ii）対称性。任意の概念Ｆ，Ｇについて，$F\approx G \rightarrow G\approx F$を示す。$F\approx G$と仮定する。すなわち$\exists\phi\,[\forall x\,\{Fx \rightarrow \exists y\,(Gy \wedge \forall w\,(x\phi w \longleftrightarrow w=y))\} \wedge \forall y\,\{Gy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u\phi y \longleftrightarrow u=x))\}]$……①と仮定する。いま①の仮定で存在が仮定されている関係ϕをϕ_0とすると，①の後半の連言肢：$\forall y\,\{Gy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u\phi_0 y \longleftrightarrow u=x))\}$……②が導ける。ここで，関係$\phi_0$の逆関係$\phi_0^{-1}$を，$\forall x \forall y\,(x\phi_0^{-1} y \longleftrightarrow y\phi_0 x)$と定義する……③。さて，いま，任意の対象ｙに対して，Gyと仮定する……④。②と④より，$\exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(u\phi_0 y \longleftrightarrow u=x))$が導かれるが，③での逆関係$\phi_0^{-1}$の定義により，$u\phi_0 y \longleftrightarrow y\phi_0^{-1} u$であるから，$\exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(y\phi_0^{-1} u \longleftrightarrow u=x))$が導かれる。これは，④の仮定の下で導かれたので，条件化によって，$Gy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(y\phi_0^{-1} u \longleftrightarrow u=x))$が導かれ，これから全称化により，$\forall y\,\{Gy \rightarrow \exists x\,(Fx \wedge \forall u\,(y\phi_0^{-1} u \longleftrightarrow u=x))\}$……⑤。次に，任意の対象ｘに対して，$Fx$と仮定する……⑥。仮定①で存在が仮定されている，上の議論のときと同じ関係ϕ_0について，①の仮定の前半の連言肢：$\forall x\,\{Fx \rightarrow \exists y\,(Gy \wedge \forall w\,(x\phi_0 w \longleftrightarrow w=y))\}$が導けるから，これと⑥より，$\exists y\,(Gy \wedge \forall w\,(x\phi_0 w \longleftrightarrow w=y))$が導ける。

③の逆関係の定義より，$x\phi_0 w \longleftrightarrow w\phi_0^{-1} x$であるから，$\exists y\ (Gy \wedge \forall w\ (w\phi_0^{-1} x \longleftrightarrow w=y))$……⑦。⑦は⑥の仮定の下で導かれたから，条件化と全称化により，$\forall x\ \{Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall w\ (w\phi_0^{-1} x \longleftrightarrow w=y))\}$が導かれる……⑧。⑤と⑧の連言から$\phi_0^{-1}$の存在化により，

$$\exists\phi\ [\forall y\ \{Gy \rightarrow \exists x\ (Fx \wedge \forall u\ (y\phi u \longleftrightarrow u=x))\} \wedge \forall x\ \{Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall w\ (w\phi x \longleftrightarrow w=y))\}],$$

すなわち，$G \approx F$が導かれる……⑨。⑨は，$F \approx G$の仮定（①）の下に導かれたから，条件化により，$F \approx G \rightarrow G \approx F$が証明された。

（iii）　推移性。任意の概念F，G，Hに対して，$F \approx G \wedge G \approx H \rightarrow F \approx H$を示す。まず，

$$F \approx G \wedge G \approx H \cdots\cdots ①$$

と仮定する。この仮定の前半の連言肢：$F \approx G$により，

$$\exists\phi\ [\forall x\ \{Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall w\ (x\phi w \longleftrightarrow w=x))\} \wedge \forall y\ \{Gy \rightarrow \exists x\ (Fx \wedge \forall u\ (u\phi y \longleftrightarrow u=x))\}] \cdots\cdots ②$$

が導かれる。また，仮定①の後半の連言肢：$G \approx H$により，

$$\exists\phi\ [\forall y\ \{Gy \rightarrow \exists z\ (Hz \wedge \forall s\ (y\phi s \longleftrightarrow s=z))\} \wedge \forall z\ \{Hz \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall v\ (v\phi z \longleftrightarrow v=y))\}] \cdots\cdots ③$$

が導かれる。②と③で存在が仮定されている関係を，それぞれϕ_0，φ_0とする。そして，これらの関係ϕ_0，φ_0から作られる関係積をζ_0と定義する：

$$\forall x \forall z\ (x\zeta_0 z \longleftrightarrow \exists y\ (x\phi_0 y \wedge y\varphi_0 z)) \cdots\cdots ④。$$

さて，任意の対象xについて，

$$Fx \cdots\cdots ⑤$$

と仮定する。②の前半より，$\forall x\ \{Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall w\ (x\phi_0 w \longleftrightarrow w=y))\}$と仮定できるから，⑤により，$\exists y\ (Gy \wedge \forall w\ (x\phi_0 w \longleftrightarrow w=y))$が導ける。よって，

$$Gy_0 \wedge \forall w\ (x\phi_0 w \longleftrightarrow w=y_0) \cdots\cdots ⑥$$

と仮定する。同様に，③の前半より，$\forall y\ (Gy \rightarrow \exists z\ (Hz \wedge \forall s\ (y\varphi_0 s \longleftrightarrow s=z))\}$と仮定できるから，これと，⑥の前半の連言肢：$Gy_0$から，$\exists z\ (Hz \wedge \forall s\ (y_0 \varphi_0 s \longleftrightarrow s=z))$が導ける。よって，

$$Hz_0 \wedge \forall s\ (y_0 \varphi_0 s \longleftrightarrow s=z_0) \cdots\cdots ⑦$$

と仮定する。さて，任意の対象wに対して，

$$x\zeta_0 w \quad \text{すなわち，} \exists y\ (x\phi_0 y \wedge y\varphi_0 w) \cdots\cdots ⑧$$

と仮定する。⑧より，$x\phi_0 y' \wedge y'\varphi_0 w$とすると，⑥の後半より，$x\phi_0 y' \rightarrow y'=y_0$だから，$y'=y_0$が導かれる。よって，$x\phi_0 y_0 \wedge y_0 \varphi_0 w$であるが，⑦の後半より，$y_0 \varphi_0 w \rightarrow w=z_0$であるから，$w=z_0$が導かれる。これは⑧の仮定から導けたので条件化により，

$$x\zeta_0 w \rightarrow w=z_0 \cdots\cdots ⑨$$

逆に，

$$w=z_0 \cdots\cdots ⑩$$

と仮定する。仮定⑥の後半より，$x\phi_0 y_0 \longleftrightarrow y_0=y_0$が導かれるが，$y_0=y_0$は論理法則であるから，$x\phi_0 y_0$が導かれる。また，同様に，⑦の後半より，$y_0 \varphi_0 z_0 \longleftrightarrow z_0=z_0$が導かれるが，$z_0=z_0$であるから，$y_0 \varphi_0 z_0$である。よって，これらの連言により，$x\phi_0 y_0 \wedge y_0 \varphi_0 z_0$。∴存在化により，$\exists y\ (x\phi_0 y \wedge y\varphi_0 z_0)$。∴④の定義より，$x\zeta_0 z_0$，よって仮

定⑩より，$x\zeta_0 w$ が導かれる。これは⑩の仮定の下で導かれるから，条件化により，

$w=z_0\rightarrow x\zeta_0 w$……⑪

が導かれる。⑨と⑪の連言から全称化により，$\forall w(x\zeta_0 w\longleftrightarrow w=z_0)$ が導ける。これと⑦の前半：Hz_0の連言から存在化により，$\exists z(Hz\wedge\forall w(x\zeta_0 w\longleftrightarrow w=z))$ が導ける。これは，仮定⑤の下で導かれたから，条件化と全称化により，以下の式⑫が導かれる。

$\forall x\{Fx\rightarrow\exists z(Hz\wedge\forall w(x\zeta_0 w\longleftrightarrow w=z))\}$……⑫

次に，任意の対象zに対して，

Hz……⑬

と仮定する。⑬と，③の後半の連言肢から，ϕ_0の仮定より，$\exists y(Gy\wedge\forall v(v\phi_0 z\longleftrightarrow v=y))$ が導かれるので，

$Gy_1\wedge\forall v(v\phi_0 z\longleftrightarrow v=y_1)$……⑭

と仮定する。⑭の前半の連言肢：Gy_1と，②の後半の連言肢より，ϕ_0の仮定から，$\exists x(Fx\wedge\forall u(u\phi_0 y_1\longleftrightarrow u=x))$ が導けるので，

$Fx_0\wedge\forall u(u\phi_0 y_1\longleftrightarrow u=x_0)$……⑮

と仮定する。いま，任意の対象uと⑬でのzに対して，

$u\zeta_0 z$，すなわち$\exists y(u\phi_0 y\wedge y\phi_0 z)$……⑯

と仮定する。⑯より，$u\phi_0 y''\wedge y''\phi_0 z$とおくと，⑭の後半の連言肢より，$y''\phi_0 z\rightarrow y''=y_1$が導かれるので，$y''=y_1$が導出される。よって，$u\phi_0 y_1$が導かれるが，⑮の後半の連言肢により，$u\phi_0 y_1\rightarrow u=x_0$が帰結するので，結局，$u=x_0$が導ける。これは，⑯の仮定の下で導けたので，条件化により，

$u\zeta_0 z\rightarrow u=x_0$……⑰

が導ける。逆に，任意の対象uに対して，

$u=x_0$……⑱

と仮定する。ところで，⑮の後半から，$x_0\phi_0 y_1\longleftrightarrow x_0=x_0$が導けるので，これと，$x_0=x_0$から，$x_0\phi_0 y_1$が導ける。また，⑭の後半から，$y_1\phi_0 z\longleftrightarrow y_1=y_1$が導けるので，これと$y_1=y_1$から，$y_1\phi_0 z$ が導ける。これらの連言：$x_0\phi_0 y_1\wedge y_1\phi_0 z$の存在化：$\exists y(x_0\phi_0 y\wedge y\phi_0 z)$ から，④によって，$x_0\zeta_0 z$ が導ける。これから仮定⑱により，$u\zeta_0 z$ が導ける。これは，⑱の仮定の下で導かれたから，条件化により，

$u=x_0\rightarrow u\zeta_0 z$……⑲

が導かれる。⑰と⑲の連言から全称化によって，$\forall u(u\zeta_0 z\longleftrightarrow u=x_0)$ が導ける。これと，⑮の前半の連言肢：Fx_0との連言を存在化して，$\exists x(Fx\wedge\forall u(u\zeta_0 z\longleftrightarrow u=x))$ が得られるが，これは，仮定⑬の下で得られたので，条件化と全称化により，

$\forall z\{Hz\rightarrow\exists x(Fx\wedge\forall u(u\zeta_0 z\longleftrightarrow u=x))\}$……⑳

が導ける。こうして，⑫と⑳の連言から，ζ_0を存在化して，

$$\exists\zeta[\forall x\{Fx\rightarrow\exists z(Hz\wedge\forall w(x\zeta w\longleftrightarrow w=z))\}\wedge \forall z\{Hz\rightarrow\exists x(Fx\wedge\forall u(u\zeta z\longleftrightarrow u=x))\}]$$

が導ける。これは，$F\approx H$ に他ならない。これは，仮定①の下に導けたので，条件化により，

$F\approx G\wedge G\approx H\rightarrow F\approx H$

が証明される。　Q.E.D.

補題2：$\forall x(Fx\longleftrightarrow Gx)\rightarrow(F\approx G)$

この補題の意味は，相互に同外延的である（すなわち全く同じ対象が帰属する）二つの概念は同数的である（帰属する対象間に一対一対応が存在する），ということである。

《証明》

$$\forall x\ (Fx \longleftrightarrow Gx) \cdots\cdots ①$$

と仮定する。$x\phi y \longleftrightarrow x=y$とおく。任意の対象xに対して，$Fx$……②と仮定する。①より，$Fx \longleftrightarrow Gx$ であるから，Gx……③が導ける。任意の対象zに対して，$x\phi z$と仮定すると，“ϕ”の定義より，$x=z$であるから，$z=x$ が導ける。すなわち，$x\phi z \rightarrow z=x$……④。逆に$z=x$と仮定すると，$x=z$　すなわち$x\phi z$が導けるから，$z=x\rightarrow x\phi z$……⑤が成り立つ。④と⑤より，$x\phi z \longleftrightarrow z=x$，∴全称化により，$\forall z\ (x\phi z \longleftrightarrow z=x)$……⑥。③と⑥より，$Gx \wedge \forall z\ (x\phi z \longleftrightarrow z=x)$，∴存在化によって，$\exists y\ (Gy \wedge \forall z\ (x\phi z \longleftrightarrow z=y))$。これは②の仮定の下で導かれたので，条件化と全称化により，

$$\forall x\ \{Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall z\ (x\phi z \longleftrightarrow z=y))\} \cdots\cdots ⑦$$

が導ける。同様に，任意の対象yに対して，Gyと仮定すると，①と“ϕ”の定義により，$Fy \wedge \forall w\ (w\phi y \longleftrightarrow w=y)$ が導けるので，存在化により，$\exists x\ (Fx \wedge \forall w\ (w\phi y \longleftrightarrow w=x))$ が導ける。よって，条件化と全称化により，

$$\forall y\ \{Gy \rightarrow \exists x\ (Fx \wedge \forall w\ (w\phi y \longleftrightarrow w=x))\} \cdots\cdots ⑧$$

が導ける。⑦と⑧の連言を作り，それからϕを存在化することにより，

$$\exists\phi\ [\forall x\ \{Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \wedge \forall z\ (x\phi z \longleftrightarrow z=y))\} \wedge$$
$$\forall y\ \{Gy \rightarrow \exists x\ (Fx \wedge \forall w\ (w\phi y \longleftrightarrow w=x))\}\ ]$$

すなわち，$F \approx G$が導かれる。　　Q.E.D.

2．ゼロと後者関係

『基礎』§74で，フレーゲは，いかなる対象もそれに帰属しない概念，すなわち論理的に矛盾している概念として，「それ自身と同一でない」という概念——これを［$x : x \neq x$］と表示する——を採用した。ライプニッツと同様，フレーゲは同一性を識別不可能性と見做す。言い換えると，

$$x=y \longleftrightarrow \forall F\ (Fx \longleftrightarrow Fy)$$

を同一性の二階の論理による定義とフレーゲは考えるので，「いかなる対象もそれに帰属しない」ということが論理的に示されうる概念として，（そのような概念は無数にあるが）彼は特に概念：［$x : x \neq x$］を採用する。そこで，ゼロは，概念［$x : x \neq x$］に属する数として定義される。

定義１（ゼロの定義）：$0 = \#[x : x \neq x]$

『基礎』§75で，フレーゲは，「ゼロが属する概念にはいかなる対象も帰属せず，逆にゼロはいかなる対象も帰属しない概念に属する数である」と述べる。われわれはこれをゼロに関する最初の定理としよう。

定理１：$\# F = 0 \longleftrightarrow \forall x \neg Fx$（概念Fに属する数が０であるとき，かつそのときのみ，概念Fにはいかなる対象も帰属しない。）

《証明》

（ｉ）　最初に，$\# F = 0 \rightarrow \forall x \neg Fx$ を示す。そのために，

$$\# F = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

と仮定する。定義１より，$0 = \#[x : x \neq x]$ と０は定義されるので，“＝”の推移性により，

$\#F=\#[x : x \neq x]$ ……②

が導かれる。②とヒュームの原理（の事例）：$\#F=\#[x : x \neq x] \longleftrightarrow F \approx [x : x \neq x]$ から，

$F \approx [x : x \neq x]$ ……③

が導かれる。しかし，$\forall x \neg (x \neq x)$ であるから，概念 $[x : x \neq x]$ は空である。故に，③により概念Fも空でなければならない。もしある対象xについてFxであれば，③より，ある関係ϕにより，$y \neq y$ であるような，$x \phi y$ なる唯一の対象yが存在する。しかし，同一性の論理法則により，$y=y$ であるから矛盾である。こうして，

$\forall x \neg Fx$ ……④

が導かれる。④は仮定①の下で導かれたから，条件化により，以下の式が帰結する。

$\#F=0 \rightarrow \forall x \neg Fx$ ……⑤

（ii） 次に，⑤の逆：$\forall x \neg Fx \rightarrow \#F=0$ を導くために，

$\forall x \neg Fx$ ……⑥

を仮定する。論理法則 $x=x$ および $x=x \rightarrow (x \neq x \rightarrow Fx)$ から modus ponens により，

$x \neq x \rightarrow Fx$ ……⑦

が導ける。また⑥より，$\neg Fx$ が導けるが，論理法則により，$\neg Fx \rightarrow (Fx \rightarrow x \neq x)$ であるから，modus ponensにより，

$Fx \rightarrow x \neq x$ ……⑧

が導ける。⑦と⑧の連言：$Fx \longleftrightarrow x \neq x$ から全称化により，

$\forall x (Fx \longleftrightarrow x \neq x)$ ……⑨

が導ける。補題2：$\forall x (Fx \longleftrightarrow x \neq x) \rightarrow F \approx [x : x \neq x]$ と⑨から modus ponens により，

$F \approx [x : x \neq x]$ ……⑩

が導ける。そこで，ヒュームの原理：$\#F=\#[x : x \neq x] \longleftrightarrow F \approx [x : x \neq x]$ と⑩から，

$\#F=\#[x : x \neq x]$ ……⑪

が導けるが，定義1により，$0=\#[x : x \neq x]$ であるから，これと⑪から同一性法則により，

$\#F=0$ ……⑫

が帰結する。⑫は仮定⑥の下で導かれたから，条件化によって，

$\forall x \neg Fx \rightarrow \#F=0$ ……⑬

が導かれる。⑤と⑬の連言により，以下が帰結する。

$\#F=0 \longleftrightarrow \forall x \neg Fx$　　Q.E.D.

『基礎』の§76で，フレーゲは，後者関係の逆関係である前者の関係（すなわち，数列において数mが数nの直前に現れるというm，n間の二項関係）を定義することにより，実質上，後者関係を定義している。それによれば，数mが数nの前者であるのは，以下の場合かつその場合に限る：

> 概念Fに属する数がnであり，「Fではあるがyと同一ではない」という概念に属する数がmであるような，そのような，概念FとFに帰属する対象yが存在する。

この定義をわれわれは定義2として登録する。

定義2（前者（後者の逆）関係の定義）：

$mPn \Leftrightarrow \exists F \exists y (Fy \wedge n=\#F \wedge m=\#[x : Fx \wedge x \neq y])$

われわれは“mPn”を「mはnの前者である」または「mはnに直接に先行する」(「nはmの後者である」または「nはmの直後に現れる」)と読む。

定義2から，前者の関係は（従って後者の関係も）一対一対応であることが導かれる。これを定理2とする。

定理2：$mPn \land sPt \to (m=s \longleftrightarrow n=t)$

《証明》

$$mPn \land sPt \cdots\cdots ①$$

と仮定する。①の仮定と関係Pの定義（定義2）によって，以下を満たす概念F，Gおよび対象y，zが存在する：

$$Fy \land n=\#F \land m=\#[x:Fx \land x \neq y] \land Gz \land t=\#G \land s=\#[w:Gw \land w \neq z] \cdots\cdots ②$$

（i） まず，$m=s \to n=t$を導くために，

$$m=s \cdots\cdots ③$$

を仮定する。②と③より同一性法則により，$\#[x:Fx \land x \neq y]=\#[w:Gw \land w \neq z]$が導かれるので，ヒュームの原理によって，

$$[x:Fx \land x \neq y] \approx [w:Gw \land w \neq z] \cdots\cdots ④$$

が導かれる。②から，Fy，Gzであるから，④で概念$[x:Fx \land x \neq y]$と概念$[w:Gw \land \land w \neq z]$の間に存在する一対一対応関係を$\phi$とすれば，$\phi \cup \{\langle y, z\rangle\}$を作ることにより，

$$F \approx G \cdots\cdots ⑤$$

が導ける。よって，ヒュームの原理：$\#F=\#G \longleftrightarrow F \approx G$により，$\#F=\#G$。これと，②に含まれる$\#F=n$，$\#G=t$により，

$$n=t \cdots\cdots ⑥$$

が導かれる。⑥は③の仮定のもとで導かれたので，条件化により，以下が帰結する。

$$m=s \to n=t \cdots\cdots ⑦$$

（ii） 次に，⑦の逆：$n=t \to m=s$を導くために，

$$n=t \cdots\cdots ⑧$$

と仮定する。②と⑧から，

$$\#F=\#G \cdots\cdots ⑨$$

が帰結する。ヒュームの原理によって，⑨から

$$F \approx G \cdots\cdots ⑩$$

が導かれる。⑩により，FとGの間に一対一対応関係ϕが存在して，ϕによって，Fyであるyに対して，Gw_0であるような，$y \phi w_0$なる唯一のw_0が存在し，また，Gzであるzに対して，Fx_0であるような，$x_0 \phi z$なる唯一のx_0が存在する。そこで，ϕを用いて，概念$[x:Fx \land x \neq y]$と概念$[w:Gw \land w \neq z]$の間に，新しい一対一対応関係φを次のように作ることができる。

$$\varphi=((\phi-\{\langle x_0, z\rangle, \langle y, w_0\rangle\}) \cup \{\langle x_0, w_0\rangle\})-\{\langle y, z\rangle\} \text{ (5)} \cdots\cdots ⑪$$

この関係φによって，われわれは，

$$[x:Fx \land x \neq y] \approx [w:Gw \land w \neq z] \cdots\cdots ⑫$$

を示すことができる。⑫から，ヒュームの原理によって，$\#[x:Fx \land x \neq y]=\#[w:Gw \land w \neq z]$が導かれるから，②によって，

$$m=s \cdots\cdots ⑬$$

が導ける。⑬は仮定⑧の下で導かれたので，条件化により，

$$n=t \to m=s \cdots\cdots ⑭$$

が導ける。⑦と⑭の連言により，$m=s \longleftrightarrow n=t$ を得るが，これは仮定①の下で導かれるので，条件化により，以下が帰結する。

$$mPn \wedge sPt \to (m=s \longleftrightarrow n=t) \qquad \text{Q.E.D.}$$

われわれはまだ「自然数」を定義していないが，定理２の系としてペアノの第４公理を得る。

系（ペアノの第４公理）：$\forall x \forall y \forall z\ (\mathrm{Num}\,x \wedge \mathrm{Num}\,y \wedge \mathrm{Num}\,z \wedge xPz \wedge yPz \to x=y)$

《証明》

定理２と命題論理（$A \to (B \longleftrightarrow C)$ ／∴ $A \wedge C \to B$）により，

$$mPn \wedge sPt \wedge n=t \to m=s \cdots\cdots ①$$

が導かれる。①から，全称化，全称例化により，

$$\forall w\ (xPz \wedge yPw \wedge z=w \to x=y) \cdots\cdots ②$$

述語論理の法則により，②は　$\exists w\ (xPz \wedge yPw \wedge z=w) \to x=y$ と同値であるが，さらにこの後者の先件部分が　$xPz \wedge yPz$ と同値であるから，結局，②は次と同値である：

$$xPz \wedge yPz \to x=y \cdots\cdots ③$$

③から，命題論理（$A \to B$ ／∴ $C \wedge A \to B$）により，$\mathrm{Num}\,x \wedge \mathrm{Num}\,y \wedge \mathrm{Num}\,z \wedge xPz \wedge yPz \to x=y$　が導けるから，これに全称化を施して，以下を得る。

$$\forall x \forall y \forall z\ (\mathrm{Num}\,x \wedge \mathrm{Num}\,y \wedge \mathrm{Num}\,z \wedge xPz \wedge yPz \to x=y) \qquad \text{Q.E.D.}$$

『基礎』§77で，フレーゲは，数１を，「０と同一である」という概念に属する数と定義している。これをわれわれは定義３として登録しよう。

定義３（数１の定義）：$1=\#[x : x=0]$

$0P1$ が成り立つことは容易に確かめられる(6)。１以上の自然数：２，３，４，等々は，概念「０または１と同一である」に属する数，概念「０または１または２と同一である」に属する数，概念「０または１または２または３と同一である」に属する数，等々として定義される。

次に，０は最初の数である，すなわち０の前者は存在しないという定理を導こう。

定理３（０の前者の非存在）：$\neg mP0$

《証明》背理法によって証明するために，任意の対象ｍを取り，

$$mP0 \cdots\cdots ①$$

と仮定する。前者関係Ｐの定義（定義２）により，ある概念Ｆとある対象ｙが存在して，

$$Fy \wedge 0=\#F \wedge m=\#[x : Fx \wedge x \neq y] \cdots\cdots ②$$

定理１より $0=\#F \longleftrightarrow \forall x \neg Fx$ であるから，②に含まれる $0=\#F$ により，

$$\forall x \neg Fx \cdots\cdots ③$$

が導かれる。よって③より，$\neg Fy$ が導けるが，他方②には Fy が含まれているから，これらの連言が導かれる：

$$Fy \wedge \neg Fy \cdots\cdots ④$$

こうして矛盾が導かれたので，最初の仮定は否定されねばならない。すなわち，

$$\neg mP0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

われわれはペアノの第３公理を（“Num” が何を意味しようとも）われわれの定理３の系として導くことができる。

系（ペアノの第３公理）：∀ｘ（Numx→￢ｘＰ０）

《証明》

定理３より，￢ｍＰ０であるから，命題論理（Ｂ／∴Ａ→Ｂ）によって，Numm→￢ｍＰ０が導ける。これに全称化を施して，∀ｘ（Numx→￢ｘＰ０）が導ける。 Q.E.D.

３．関係の固有な祖先

次に関係の固有祖先（関係）の定義に進もう。これは『概念記法』（§26定義76）に由来する。

定義４（関係の固有祖先の定義）：

ｘＲ＊ ｙ⇔ ∀Ｆ［∀ａ∀ｂ｛（ａ＝ｘ∨Ｆａ）∧ａＲｂ→Ｆｂ｝→Ｆｙ］

ここで，Ｒは任意の二項関係であり，これの固有祖先と呼ばれる新しい関係Ｒ＊が定義されている。関係“Ｒ＊”の意味を理解するために，メタファーとして，“ｘＲｙ”を「親ｘの子ｙに対する関係（親子関係)」,“ｘＲ＊ ｙ”を「祖先ｘの子孫ｙに対する関係」と解釈しよう。さて，式∀ａ∀ｂ｛（ａ＝ｘ∨Ｆａ）∧ａＲｂ→Ｆｂ｝は式∀ｂ（ｘＲｂ→Ｆｂ）∧∀ａ∀ｂ（Ｆａ∧ａＲｂ→Ｆｂ）と同値である[(7)]。上のメタファーによって，“∀ｂ（ｘＲｂ→Ｆｂ)”は「ｘのすべての子は性質Ｆを持つ」を意味し，“∀ａ∀ｂ（Ｆａ∧ａＲｂ→Ｆｂ)”は「親ａとその子ｂの任意のペアーに対して，もし親ａが性質Ｆを持てばその子ｂもＦを持つ」を，言い換えると「性質Ｆは任意の親からその子へ遺伝する」を，意味する。よって，定義４の意味は,「ｘがｙの（固有な）祖先であるのは，ｘのすべての子が持つ任意の遺伝的性質Ｆをｙは持つとき，かつそのときに限る」となる。任意の関係，例えば多対多の関係にある「親子関係」Ｒに対して，固有祖先の関係Ｒ＊が定義できるので，特に一対一の関係である「前者ｘの後者ｙに対する関係」“ｘＰｙ”に対しても，関係Ｐ＊が定義される。そのとき，“ｘＰ＊ｙ”は「ｘに始まるＰ関係の系列を辿ればｙに至る」あるいは「ｘで始まるＰ系列においてｙはｘに後続する」を意味する。以後，われわれは一般的な関係Ｒに対して定義された「固有祖先」の関係Ｒ＊を，関係Ｐにも適用して，Ｐの固有祖先の関係Ｐ＊を考える。

さて，ここで，関係の「固有祖先」に関する定理を証明するための簡便な方法を導入しよう。

方法（※）

“ｘＲ＊ ｙ→…ｙ…”という形の定理を証明するには，次の二点を示せば十分である。まず，Ｆ＝［ｚ：…ｚ…］と置け。それから，任意の対象ａ，ｂに対して，（ａ＝ｘ∨Ｆａ）およびａＲｂを仮定して，Ｆｂを導け。

これが簡便な方法になっている理由は以下の通りである。いま，“ｘＲ＊ ｙ→…ｙ…”が成り立つことを示さねばならないから，われわれはまずｘＲ＊ ｙと仮定することになる。すなわち，条件「“ｘのすべての子が持つ遺伝的性質である（∀ａ∀ｂ｛（ａ＝ｘ∨Ｆａ）∧ａＲｂ→Ｆｂ｝)”という条件を満たす任意の性質Ｆをｙは持つ」と仮定する。そこで，もしＦ＝［ｚ：…ｚ…］とおいて，このＦについて，Ｆが“ｘのすべての子が持つ遺伝的性質である”ことが示されたならば，ｙはこのＦを持つ，すなわち“…ｙ…”が成り立つことが導かれる。よって，Ｆ＝［ｚ：…ｚ…］とおいたＦに対して，∀ａ∀ｂ｛（ａ＝ｘ∨Ｆａ）∧ａＲｂ→Ｆｂ｝を示せば十分である。われわれはこの方法を「方法（※)」として引用し，先に述べたように，Ｐの固有祖先Ｐ＊に関する，“ｘ

$P^* y \rightarrow \cdots y \cdots$” の形の定理の証明にもこれを用いるであろう。

定理４：$xRy \rightarrow xR^* y$

この定理の意味は，（定義４でのメタファーを引き継ぐならば）「親の子に対する関係は祖先の子孫に対する関係の特殊ケースである」ということである。フレーゲはこの定理を『概念記法』第３部で命題91として導出している。

《証明》

$$xRy \cdots\cdots ①$$

と仮定する。われわれは $xR^* y$ を示さねばならない。そこで，定義４により，任意のFを取り

$$\forall a \forall b \{(x=a \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\} \cdots\cdots ②$$

と仮定する。これらの仮定からFyを導かねばならない。②から全称例化により，

$$(x=x \vee Fx) \wedge xRy \rightarrow Fy \cdots\cdots ③$$

が導かれる。論理法則 $x=x$ から，命題論理により，$x=x \vee Fx$ が導けるから，これと仮定①の連言により，

$$(x=x \vee Fx) \wedge xRy \cdots\cdots ④$$

が導ける。③と④から modus ponens により，

$$Fy \cdots\cdots ⑤$$

が導ける。⑤は仮定②の下で導かれたから，条件化と全称化により，

$$\forall F[\forall a \forall b \{(x=a \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\} \rightarrow Fy] \cdots\cdots ⑥$$

が導ける。⑥は，$xR^* y$ に他ならない（定義４）。これは①から導かれたので，条件化により，

$$xRy \rightarrow xR^* y$$ Q.E.D.

フレーゲは，『概念記法』第３部で命題98として，R^*（Rの固有祖先）の推移性に言及している。われわれもこれを定理５として登録しよう。

定理５（R^* の推移性）：$xR^* y \wedge yR^* z \rightarrow xR^* z$

《証明》

定義４を考慮して，

$$xR^* y \wedge yR^* z \cdots\cdots ①$$

$$\forall a \forall b \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\} \cdots\cdots ②$$

と仮定する。われわれはFzを導かねばならない。①の後半には連言肢 $yR^* z$，すなわち $\forall F[\forall a \forall b \{(a=y \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\} \rightarrow Fz$ が含まれているので，これの先件部分：$\forall a \forall b \{(a=y \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\}$ を示せば十分である。そのためには，任意の対象a，bに対して，

$$(a=y \vee Fa) \wedge aRb \cdots\cdots ③$$

を仮定して，Fbを導けばよい。ところで，②と，①の前半の連言肢 $xR^* y$，すなわち　$\forall F[\forall a \forall b \{(a=x \vee Fa) \wedge aRb \rightarrow Fb\} \rightarrow Fy]$ の全称例化により，

$$Fy \cdots\cdots ④$$

が導ける。③の前半の連言肢：$a=y \vee Fa$ より，場合を二つに分ける。$a=y$ のとき，④から，同一性法則により，Faが導かれる。Faのとき，トリヴィアルにFaが成り立つ。よって，いずれにせよFaが導かれる。よって命題論理により，$a=x \vee Fa$ である。ところが，③の後半の連言肢より，aRbである。よって，これらの連言を作ると，

$(a = x \lor Fa) \land aRb$……⑤

が導ける。ここで，②に全称例化を施すと $(a = x \lor Fa) \land aRb \to Fb$ が得られるから，これと⑤から modus ponens によって，

Fb……⑥

が導ける。⑥は③の仮定の下で導かれたので，条件化と全称化によって，

$\forall a \forall b\{(a = y \lor Fa) \land aRb \to Fb\}$……⑦

が導ける。①に含まれる $yR^* z : \forall F[\forall a \forall b\{(a = y \lor Fa) \land aRb \to Fb\} \to Fz]$ の全称例化と⑦から，modus ponens により，

Fz……⑧

が導ける。⑧は仮定②の下で導かれているので，条件化と F の全称化により，

$\forall F[\forall a \forall b\{(a = x \lor Fa) \land aRb \to Fb\} \to Fz]$……⑨

が導ける。⑨は定義④により　$xR^* z$ である。これは仮定①の下に導かれたので条件化により，

$xR^* y \land yR^* z \to xR^* z$

が導ける。　Q.E.D.

さて，「祖先の子孫に対する関係」として一般的に考えられた関係Rの固有祖先R*から，われわれは対応する，関係Pの固有祖先P*（後続関係）に向かおう。祖先関係が「親の親の…の親」というように親子の関係が重なっている（多重関係積）であるのと同様，後続関係は後者関係（前者関係の逆）が重なることで成り立つ関係である。

定理6：$xP^* n \to \exists m\, mPn \land \forall m(mPn \to xP^* m \lor x = m)$

この定理の意味はこうである：「もしnがxに後続するならば（nがxの後者であるか，xの後者の後者であるか，xの後者の後者の後者であるか，…，ならば），nには前者が存在し，nの前者はすべてxに後続するかまたはxそのものである」。

《証明》

P*をR*の特殊ケースと見なすと，定理6は“$xP^* n \to \cdots n \cdots$”という形をしているので，方法（※）が使える。そこで，方法（※）を使うために，

$F = [z : \exists m\, mPz \land \forall m(mPz \to (xP^* m \lor x = m))]$……①

とおく。そして，

$xP^* n$……②

と仮定する。任意の対象a，bに対して

$(a = x \lor Fa) \land aPb$……③

と仮定する。①，②，③の下に Fb，すなわち $\exists m\, mPb \land \forall m(mPb \to (xP^* m \lor x = m))$ を導き出せば十分である。③の後半の連言肢：aPb から存在化によって，

$\exists m\, mPb$……④

が導ける。これでFbの前半の連言肢が導かれたので，後半の連言肢を導出せねばならない。そのために，任意の対象mに対して，

mPb……⑤

と仮定する。③の後半の連言肢：aPb と，⑤の mPb と，定理2（Pの一対一対応）により，

$a = m$……⑥

が導ける。③の前半の連言肢：$a = x \lor Fa$ を考慮して，場合を二つに分ける。

（ｉ）　a＝xの場合。このとき，⑥よりx＝mであるから，命題論理（B／∴A∨B）により，xP* m∨x＝m　が導かれるが，これは仮定⑤に依存していたので条件化と全称化により，

∀m（mPb→xP* m∨x＝m）……⑦

が導かれる。

（ii）　Fa，すなわち∃mmPa∧∀m（mPa→xP* m∨x＝m）の場合。この仮定の前半の連言肢∃mmPaより，あるm′につき，

m′Pa……⑧

とする。この仮定の後半の連言肢の全称例化：m′Pa→xP* m′∨x＝m′と，⑧から，

xP* m′∨x＝m′……⑨

が導ける。⑨の選言を考慮して再び場合に分ける。

（ii－1)　xP* m′のとき。⑥と⑧より，m′Pmが導けるが，これと定理4：m′Pm→m′P* mから modus ponens により，m′P* mが導ける。よって，仮定xP* m′との連言によりxP* m′∧m′P* m。ところが定理5（P*の推移性）よりxP* m′∧m′P* m→xP* mであるから，modus ponens により，

xP* m……⑩

が導かれる。

（ii－2)　x＝m′のとき。⑧よりxPaが導かれるが，⑥よりxPm。定理4よりxPm→xP* mであるから，modus ponens により，

xP* m……⑪

(ii－1)のときも(ii－2)のときも，いずれもxP* mが導かれた。よって，命題論理により，

xP* m∨x＝m……⑫

が導かれる。⑫は⑤の仮定に依存しているので，条件化と全称化により，

∀m（mPb→xP* m∨x＝m）……⑬

が導ける。(ｉ)の場合も(ii)の場合も ∀m（mPb→xP* m∨x＝m）が導けたので，これと④との連言により，

∃mmPb∧∀m（mPb→xP* m∨x＝m）

が導ける。つまりFbが導ける。　　　　**Q.E.D.**

フレーゲは，『基礎』の§83で，「自然数の系列で0に後続するどんな数もそれ自身に後続することはない」と述べている。われわれは，この命題を定理7として導出しよう。

定理7：0P* n→￢nP* n

（この定理の特殊ケースとして「0は自分自身に後続しない」：￢0P* 0が含まれる。）

《証明》

方法（※）を使うために，

F＝［z：￢zP* z］……①

とおく。そして，任意の対象a，bに対して，

（a＝0∨Fa）∧aPb……②

と仮定する。われわれはFb，すなわち￢bP* bを導かねばならない。背理法を用いるため，

bP* b……③

と仮定する。③と定理6：bP* b→∃mPb∧∀m（mPb→bP* m∨b＝m）により，

$\forall m\ (mPb \rightarrow bP^{*}m \vee b=m)$ ……④

が導ける。②の後半の連言肢：aPbと，④の全称例化：$aPb \rightarrow bP^{*}a \vee b=a$により，

$bP^{*}a \vee b=a$……⑤

が導ける。⑤の選言を考慮して，場合を二つに分ける。

（i） $bP^{*}a$の場合。②に含まれるaPbと，定理4：$aPb \rightarrow aP^{*}b$により，$aP^{*}b$が導かれるが，これと，仮定：$bP^{*}a$と，定理5（P^{*}の推移性）により，

$aP^{*}a$……⑥

が導かれる。

（ii） $b=a$の場合。③の仮定より

$aP^{*}a$……⑦

が導かれる。（i）の場合も（ii）の場合も$aP^{*}a$，すなわち，$\neg Fa$である。これと，②の前半の連言肢：$a=0 \vee Fa$により，$a=0$である。よって，これと，⑥，⑦での$aP^{*}a$から，

$0P^{*}0$……⑧

が導かれる。ところで，定理6：$0P^{*}0 \rightarrow \exists m\, mP0 \wedge \forall m\ (mP0 \rightarrow 0P^{*}m \vee 0=m)$と命題論理（$C \rightarrow A \wedge B / \therefore C \rightarrow A$）により，$0P^{*}0 \rightarrow \exists m\, mP0$であるから，これと⑧から，

$\exists m\, mP0$……⑨

が導かれる。しかし，定理3より$\forall m \neg mP0$，$\therefore \neg \exists m\, mP0$。こうして矛盾が導出された。よって，背理法により，$\neg bP^{*}b$，すなわちFbである。 Q.E.D.

4．自然数と数学的帰納法

さて，これから自然数を定義する。その基礎となるのは後続関係P^{*}（前者関係の固有祖先）である。まず準備として“≦”（小大関係）を定義する。

定義5（より小さいもののより大きいものに対する関係の定義）：

$m \leqq n \Leftrightarrow mP^{*}n \vee m=n$

広義の「小大関係」は「後続するかまたは同一」という関係によって定義できる。

次に自然数を定義する。

定義6（自然数の定義）：$\mathrm{Num}\,n \Leftrightarrow 0 \leqq n$

こうして「自然数」(Num) 0，1，2，… は「0であるかまたは0に後続するもの」として定義できる。

定理8（ペアノの第1公理）：$\mathrm{Num}\,0$

《証明》

論理法則より，$0=0$である。これから命題論理により，$0P^{*}0 \vee 0=0$が導かれる。定義5により，$0 \leqq 0$，ゆえに定義6により，$\mathrm{Num}\,0$である。 Q.E.D.

定理9（数学的帰納法：ペアノの第5公理）：

$\forall F\ [\{F0 \wedge \forall x \forall y\ (Fx \wedge xPy \rightarrow Fy)\} \rightarrow \forall x\ (\mathrm{Num}\,x \rightarrow Fx)]$

《証明》

任意の性質Fを取り，

$F0 \wedge \forall x \forall y\ (Fx \wedge xPy \rightarrow Fy)$……①

と仮定する。示すべきことは，任意の対象 z に対して，Num z → F z である。そこで，Num z，すなわち，定義 6 と定義 5 により，

$0 P^* z \vee 0 = z$ ……②

と仮定する。②の選言を考慮して，場合を二つに分ける。

（ i ）　$0 P^* z$ の場合。$0 P^* z \to F z$ を示せば十分である。そこで，方法（※）を用いるため，

$F = [z : F z]$ ……③

とおき，任意の対象 a，b について，

$(a = 0 \vee F a) \wedge a P b$ ……④

と仮定する。方法（※）により，F b（③より F b そのもの）を導けば十分である。④の前半の連言肢より，$a = 0 \vee F a$ が導かれる。$a = 0$ のとき，①の前半の連言肢：F 0 により，F a が導かれるので，いずれにせよ F a が導かれる。よって，この F a と，④の後半の連言肢：a P b から，

$F a \wedge a P b$ ……⑤

が導かれる。ところが，①の後半の連言肢から全称例化により，$F a \wedge a P b \to F b$ が導かれるので，これと⑤から modus ponens によって，

$F b$ ……⑥

が導かれる。よって，方法(※)により，$0 P^* z \to F z$ が示されたから，$0 P^* z$ の仮定により

$F z$ ……⑦

が導かれる。

（ ii ）　$0 = z$ の場合。①の前半の連言肢：F 0 より，

$F z$ ……⑧

が導かれる。(i),(ii)のどちらの場合も，F z が導かれた。これは，仮定②，すなわち（定義 5，定義 6 により）仮定 Num z に依存して導かれた。よって，条件化により，Num z → F z が導かれるから，全称化により，

$\forall x\ (\mathrm{Num}\, x \to F x)$ ……⑨

が帰結する。⑨は仮定①の下で導かれたから，条件化と（F の）全称化により，

$\forall F\ [\{F 0 \wedge \forall x \forall y\ (F x \wedge x P y \to F y)\} \to \forall x\ (\mathrm{Num}\, x \to F x)]$ が導かれる。

Q.E.D.

定理10：$(m P n \wedge 0 P^* n) \to \forall x\ (x \leqq m \leftrightarrow x \leqq n \wedge x \neq n)$

この定理の意味は，「m が，0 で始まる自然数の列で 0 に後続する n の前者であれば，m 以下の数はすべて n より小さくて n に等しくはない数と一致する」である。

《証明》

$m P n \wedge 0 P^* n$ ……①

と仮定する。この仮定のもとに，定理の後件部分である同値式を導かねばならない。x を任意の対象として，$x \leqq m \to x \leqq n \wedge x \neq n$ を導くため，

$x \leqq m$ ……②

と仮定する。②から，定義 5（“≦”の定義）により，

$x P^* m \vee x = m$ ……③

が導ける。③の選言を考慮して場合を分ける。

（i）　xP^*mの場合。①の前半の連言肢：mPnと，定理4：$mPn \rightarrow mP^*n$から，mP^*nが導ける。$\therefore xP^*m \wedge mP^*n$。ところが定理5より$P^*$は推移的である，すなわち$xP^*m \wedge mP^*n \rightarrow xP^*n$であるから，$xP^*n$が導かれる。

（ii）　$x=m$の場合。①の前半の連言肢：mPnより，xPnが導ける。これから，定理4：$xPn \rightarrow xP^*n$によって，xP^*nが導かれる。

こうして，（i），（ii）のどちらの場合にも

xP^*n……④

が導かれた。よって，命題論理により，$xP^*n \vee x=n$，すなわち，定義5により，

$x \leqq n$……⑤

が導かれる。さて，$x \neq n$を背理法で示すために，

$x=n$……⑥

と仮定する。④と⑥より，nP^*nが導かれる。しかし，①に含まれる$0P^*n$と，定理7：$0P^*n \rightarrow \neg nP^*n$から，$\neg nP^*n$が導かれるので，矛盾である。よって，

$x \neq n$……⑦

でなければならない。よって，⑤と⑦の連言から，

$x \leqq n \wedge x \neq n$……⑧

が導ける。⑧は仮定②の下で導かれたので，条件化により，以下の条件命題が帰結する：

$x \leqq m \rightarrow x \leqq n \wedge x \neq n$……⑨

次に，⑨の逆：$x \leqq n \wedge x \neq n \rightarrow x \leqq m$を示す。そのために，

$x \leqq n \wedge x \neq n$……⑩

と仮定する。⑩の前半の連言肢：$x \leqq n$から，定義5により，$xP^*n \vee x=n$が導かれるが，これと⑩の後半の連言肢：$x \neq n$から，命題論理（$A \vee B,\ \neg B / \therefore A$）により，

xP^*n……⑪

が導かれる。よって，⑪と，定理6：$xP^*n \rightarrow \exists m\, mPn \wedge \forall m\,(mPn \rightarrow xP^*m \vee x=m)$から，modus ponens によって，

$\exists m\, mPn \wedge \forall m\,(mPn \rightarrow xP^*m \vee x=m)$……⑫

が導かれる。⑫の後半の連言肢：$\forall m\,(mPn \rightarrow xP^*m \vee x=m)$から全称例化により，

$mPn \rightarrow xP^*m \vee x=m$……⑬

が導かれる。ところが，①の前半の連言肢により，mPnであるから，これと⑬から，$xP^*m \vee x=m$，すなわち，定義5により，

$x \leqq m$……⑭

が導かれる。この⑭は仮定⑩の下で導かれたから，条件化により，

$x \leqq n \wedge x \neq n \rightarrow x \leqq m$……⑮

が導ける。⑨と⑮の連言のxに全称化を施すことにより，

$\forall x\,(x \leqq m \leftrightarrow x \leqq n \wedge x \neq n)$……⑯

が得られる。この⑯は仮定①の下で導かれたので，条件化により，

$mPn \wedge 0P^*n \rightarrow \forall x\,(x \leqq m \leftrightarrow x \leqq n \wedge x \neq n)$

が導かれる。　　Q.E.D.

定理11：$mPn \wedge 0P^*n \rightarrow \#[x : x \leqq m]\ P\ \#[x : x \leqq n]$

この定理の意味はこうである。「もしmが，0に後続するnの前者であるならば，そのとき，概念“m以下である”に属する数は，概念“n以下である”に属する数の前者である。」

《証明》

$$mPn \wedge 0P^{*}n \cdots\cdots ①$$

と仮定する。①と，定理10：$mPn \wedge 0P^{*}n \rightarrow \forall x\,(x \leqq m \longleftrightarrow x \leqq n \wedge x \neq n)$ から，

$$\forall x\,(x \leqq m \longleftrightarrow x \leqq n \wedge x \neq n) \cdots\cdots ②$$

が導かれる。②と，補題2：$\forall x\,(x \leqq m \longleftrightarrow x \leqq n \wedge x \neq n) \rightarrow [x : x \leqq m] \approx [x : x \leqq n \wedge x \neq n]$ により，$[x : x \leqq m] \approx [x : x \leqq n \wedge x \neq n]$ が導かれるから，これとヒュームの原理から，

$$\#[x : x \leqq m] = \#[x : x \leqq n \wedge x \neq n] \cdots\cdots ③$$

が導かれる。ここで，

$$F = [x : x \leqq n] \cdots\cdots ④$$

とおくと，③より，

$$\#[x : x \leqq m] = \#[x : Fx \wedge x \neq n] \cdots\cdots ⑤$$

が導かれる。また，論理法則 $n = n$ から，命題論理により，$nP^{*}n \vee n = n$ が導かれるので，定義5により，$n \leqq n$ が成り立つ。よって，④より，

$$Fn \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つ。また，④より，トリヴィアルに，

$$\#[x : x \leqq n] = \#F \cdots\cdots ⑦$$

である。⑤，⑥，⑦の連言より，Fとnの存在化によって，

$$\exists F \exists y\,(Fy \wedge \#[x : x \leqq n] = \#F \wedge \#[x : x \leqq m] = \#[x : Fx \wedge x \neq y]) \cdots\cdots ⑧$$

が導ける。よって，定義2により，

$$\#[x : x \leqq m]\,P\,\#[x : x \leqq n] \cdots\cdots ⑨$$

である。⑨は仮定①の下に導かれたので，条件化により，

$$mPn \wedge 0P^{*}n \rightarrow \#[x : x \leqq m]\,P\,\#[x : x \leqq n]$$

が導かれる。　Q.E.D.

以上の定理10および定理11は，『基礎』§82でフレーゲが言及している次の定理（定理12）を導く補題の役目をしている。

定理12：$mPn \rightarrow (0 \leqq m \wedge mP\#[x : x \leqq m] \rightarrow 0 \leqq n \wedge nP\#[x : x \leqq n])$

《証明》

以下の二つの命題を仮定する。

$$mPn \cdots\cdots ①$$

$$0 \leqq m \wedge mP\#[x : x \leqq m] \cdots\cdots ②$$

②の前半の連言肢：$0 \leqq m$ から，定義5によって，

$$0P^{*}m \vee 0 = m \cdots\cdots ③$$

が導かれる。③の選言を考慮して，場合を二つに分ける。

（i）　$0P^{*}m$ の場合。このとき，①と定理4：$mPn \rightarrow mP^{*}n$ から，$mP^{*}n$ が導かれるから，$0P^{*}m \wedge mP^{*}n$。ここで，P^{*} の推移性（定理5）により，$0P^{*}n$ が導かれる。

（ii）　$0=m$の場合。①より，$0Pn$が導かれるので，定理4：$0Pn \rightarrow 0P^{*}n$により，今度も$0P^{*}n$が導かれる。よって，いずれにせよ，③から，

$0P^{*}n$……④

が導かれる。④から命題論理により，$0P^{*}n \lor 0=n$が導かれるので，定義5により，

$0 \leqq n$……⑤

が導かれる。①のmPnと，②の後半の連言肢：$mP\#[x : x \leqq m]$，および“P”が一対一対応であること（定理2）により，

$n=\#[x : x \leqq m]$……⑥

が導かれる。ところで，①と④の連言により，$mPn \land 0P^{*}n$が導かれるので，これと，定理11：$mPn \land 0P^{*}n \rightarrow \#[x : x \leqq m]P\#[x : x \leqq n]$から，modus ponensにより，

$\#[x : x \leqq m]P\#[x : x \leqq n]$……⑦

が導ける。よって，⑥と⑦から，同一性の法則により，

$nP\#[x : x \leqq n]$……⑧

が導ける。よって，⑤と⑧の連言を作ることにより，

$0 \leqq n \land nP\#[x : x \leqq n]$……⑨

が導かれる。⑨は仮定①と②の下に導かれたので，条件化を二度施すことにより，

$mPn \rightarrow (0 \leqq m \land mP\#[x : x \leqq m] \rightarrow 0 \leqq n \land nP\#[x : x \leqq n])$

が導かれる。　　Q.E.D.

定理13：$0P\#[x : x \leqq 0]$

この定理の意味は，表面的には，「概念“0と同一であるかまたは0より小さい”に属する数，すなわち1は0の後者である」である。だが，自然数論の展開という観点から見ると，『基礎』§82でフレーゲが述べているように，これは，定理12で主張されたことが，数0でも成り立つことを意味する。それゆえ，以後の定理15を数学的帰納法を用いて証明するための基礎の役割を果たす。

《証明》

$F=[x : x \leqq 0]$……①

とおく。論理法則$0=0$と命題論理により，$0P^{*}0 \lor 0=0$が導けるから，定義5により，$0 \leqq 0$　であるから，これと①から，

$F0$……②

が導ける。ところで，①と補題2とヒュームの原理により，

$\#F=\#[x : x \leqq 0]$……③

である。さて，もし任意の対象xに対して$xP^{*}0$ならば，定理6の帰結部分の前半部により，$\exists m\, mP0$が導かれるが，これは定理3の閉包：$\forall m \neg mP0$と矛盾するから，

$\neg xP^{*}0$……④

である。ところで，論理法則：$x \leqq 0 \longleftrightarrow x \leqq 0$と定義5より，$x \leqq 0 \longleftrightarrow xP^{*}0 \lor x=0$が導けるが，命題論理（$A \longleftrightarrow B / \therefore A \land C \longleftrightarrow B \land C$）により，

$x \leqq 0 \land x \neq 0 \longleftrightarrow (xP^{*}0 \lor x=0) \land x \neq 0$……⑤

である。ところが，命題論理（$((A \lor B) \land \neg B \longleftrightarrow A \land \neg B)$）により，⑤の右辺は，$xP^{*}0 \land x \neq 0$と同値である。よって，このことと⑤から，

$x \leqq 0 \land x \neq 0 \longleftrightarrow xP^{*}0 \land x \neq 0$……⑥

が導ける。しかし，④から命題論理（$\neg A / \therefore \neg (A \wedge B)$）によって，$\neg (x P^* 0 \wedge x \neq 0)$ が導けるので，これと⑥から，命題論理（$A \longleftrightarrow B, \neg B / \therefore \neg A$）によって，

$\neg (x \leqq 0 \wedge x \neq 0)$ ……⑦

が導ける。①より，$F x \longleftrightarrow x \leqq 0$ であるから，これと⑦から，$\neg (F x \wedge x \neq 0)$ が導ける。最後の式に全称化を施すことにより，

$\forall x \neg (F x \wedge x \neq 0)$ ……⑧

が導ける。定理1の“$F x$”に“$F x \wedge x \neq 0$”を代入することにより，$\# [x : F x \wedge x \neq 0] = 0 \longleftrightarrow \forall x \neg (F x \wedge x \neq 0)$ が導けるので，これと⑧より，

$\# [x : F x \wedge x \neq 0] = 0$ ……⑨

が導ける。②，③，⑨の連言により，

$F 0 \wedge 0 = \# [x : F x \wedge x \neq 0] \wedge \# [x : x \leqq 0] = \# F$ ……⑩

が導かれる。⑩から存在化を二度ほどこして，

$\exists F \exists y [F y \wedge 0 = \# [x : F x \wedge x \neq y] \wedge \# [x : x \leqq 0] = \# F]$

すなわち，定義2により，$0 P \# [x : x \leqq 0]$ が導ける。　Q.E.D.

定理14：$0 \leqq n \rightarrow 0 \leqq n \wedge n P \# [x : x \leqq n]$

《証明》

$0 \leqq n$ ……①

と仮定する。①から，定義5によって $0 P^* n \vee 0 = n$ が導かれるから，これの選言を考慮して場合を二つに分ける。

（i）　$0 = n$ の場合。定理13より，$0 P \# [x : x \leqq 0]$ であるから，$n P \# [x : x \leqq n]$ が導ける。これと，①の連言を作れば，

$0 \leqq n \wedge n P \# [x : x \leqq n]$ ……②

が導ける。

（ii）　$0 P^* n$ の場合。$0 P^* n \rightarrow 0 \leqq n \wedge n P \# [x : x \leqq n]$ を証明するために，方法（※）を用いる。そのために，

$F = [z : 0 \leqq z \wedge z P \# [x : x \leqq z]]$ ……③

とおく。任意の対象 a，b に対して，

$(a = 0 \vee F a) \wedge a P b$ ……④

と仮定する。示すべきことは，$F b$，すなわち，③より，$0 \leqq b \wedge b P \# [x : x \leqq b]$ である。④の前半の連言肢：$a = 0 \vee F a$ の選言を考慮して，場合を二つに分ける。

（ii－1）　$a = 0$ のとき。論理法則 $0 = 0$ から，$0 P^* 0 \vee 0 = 0$ が導かれるので，定義5により，$0 \leqq 0$。よって，これから $a = 0$ により，$0 \leqq a$。ところが定理13：$0 P \# [x : x \leqq 0]$ から $a = 0$ により，$a P \# [x : x \leqq a]$。よって，これらの連言により，$0 \leqq a \wedge a P \# [x : x \leqq a]$ すなわち $F a$ が導かれる。

（ii－2）　$F a$ のとき。トリヴィアルに $F a$。

いずれにせよ，

$F a$ ……⑤

が導かれる。ところで，定理12：$a P b \rightarrow (0 \leqq a \wedge a P \# [x : x \leqq a] \rightarrow 0 \leqq b \wedge b P \# [x : x \leqq b])$ が成り立ち，③から $F a \longleftrightarrow 0 \leqq a \wedge a P \# [x : x \leqq a]$ および $F b \longleftrightarrow 0 \leqq b \wedge b$

P＃［x：x≦b］であるから，

aPb→（Fa→Fb）……⑥

である。⑥と，④の後半の連言肢：aPbと，⑤から，modus ponens を二度用いて，

Fb……⑦

が導かれる。こうして，方法（※）により，0P* n→0≦n∧nP＃［x：x≦n］が証明されたので，仮定0P* nによって，

0≦n∧nP＃［x：x≦n］……⑧

が帰結する。こうして，（i）と（ii）のどちらの場合も　0≦n∧nP＃［x：x≦n］が導かれるから，仮定①の条件化によって，

0≦n→0≦n∧nP＃［x：x≦n］

が導かれる。　　Q.E.D.

定理15：Numn→nP＃［x：x≦n］

この定理の意味は「nが自然数ならば，概念“nであるかまたはnより小さい”に属する数はnの後者である」となる。二種類の証明を与える。

《証明1》

Numnと仮定する。定義6により，0≦nである。これと，定理14：0≦n→0≦n∧nP＃［x：x≦］から，命題論理（A，A→A∧B／∴B）により，nP＃［x：x≦n］が導かれる。よって，条件化により，Numn→nP＃［x：x≦n］が示された。　　Q.E.D.

《証明2》

定理14ではなく，数学的帰納法（定理9）によって証明する。そのために，

F＝［z：0≦z∧zP＃［x：x≦z］］……①

とおく。0＝0と命題論理と定義5より　0≦0が導かれるが，これと，定理13：0P＃［x：x≦0］との連言により，0≦0∧0P＃［x：x≦0］，すなわち，

F0……②

が導かれる。ところで，定理12：xPy→（0≦x∧xP＃［z：z≦x］→0≦y∧yP＃［z：z≦y］）は①によって，xPy→（Fx→Fy）である。よって，命題論理により，Fx∧xPy→Fyが導かれるので，これを二度全称化して，

∀x∀y（Fx∧xPy→Fy）……③

が導かれる。②と③の連言により，

F0∧∀x∀y（Fx∧xPy→Fy）……④

が得られる。ここで，定理9（数学的帰納法）：∀F［F0∧∀x∀y（Fx∧xPy→Fy）→∀n（Numn→Fn）］と④から，∀n（Numn→Fn），すなわち，

∀n（Numn→0≦n∧nP＃［x：x≦n］）……⑤

が導ける。⑤から全称例化により，Numn→0≦n∧nP＃［x：x≦n］が得られ，定義6と命題論理（A→A∧B／∴A→B）により，Numn→nP＃［x：x≦n］が導ける。

Q.E.D.

系（ペアノの第2公理）：∀x（Numx→∃y（Numy∧xPy∧∀z（xPz→z＝y)))

《証明》

任意の対象mに対して，

Numm……①

と仮定する。①と定理15：Numm→mP＃［x：x≦m］からmodus ponensにより，

mP＃［x：x≦m］……②

が導かれる。②と定理４：mP＃［x：x≦m］→mP＊＃［x：x≦m］からmodus ponensにより

mP＊＃［x：x≦m］……③

が導かれる。①から定義６により，０≦mであるが，これから定義５により，

０P＊m∨０＝m……④

が帰結する。④の選言を考慮して，場合を二つに分ける。

（ｉ）０P＊mの場合。この仮定と③により，０P＊m∧mP＊＃［x：x≦m］であるが，定理５（P＊の推移性）により，０P＊＃［x：x≦m］が導かれる。

（ii）０＝mの場合。このとき，③より，０P＊＃［x：x≦m］が導かれる。いずれにせよ，

０P＊＃［x：x≦m］……⑤

が導かれる。⑤から命題論理（A／∴A∨B）により，０P＊＃［x：x≦m］∨０＝＃［x：x≦m］が導かれるが，これは定義５により，０≦＃［x：x≦m］であり，さらに定義６により，

Num＃［x：x≦m］……⑥

である。ここで，任意の対象zに対して，

mPz……⑦

と仮定する。②と⑦との連言により，

mPz∧mP＃［x：x≦m］……⑧

が導かれる。ところが，定理２（関係Pの一対一対応）から，mPz∧mP＃［x：x≦m］→z＝＃［x：x≦m］が導けるから，これと⑧から，modus ponensにより，

z＝＃［x：x≦m］……⑨

が導かれる。⑨は仮定⑦から導かれたので，条件化と全称化により，

∀z（mPz→z＝＃［x：x≦m］……⑩

が導かれる。そこで，⑥，②，⑩の連言から，Num＃［x：x≦m］∧mP＃［x：x≦m］∧∀z（mPz→z＝＃［x：x≦m］）が導ける。これを存在化して，

∃y（Numy∧mPy∧∀z（mPz→z＝y））……⑪

が導ける。⑪は仮定①の下で導かれたので，条件化と（mの）全称化により，

∀x（Numx→∃y（Numy∧xPy∧∀z（xPz→z＝y）））

が導ける。　　Q.E.D.

こうして，われわれは，フレーゲの方法に従って，算術の主要な定理を導いたが，このフレーゲの結果の持つ哲学的意義については，稿を改めて論じたい[(8)]。

註

(1) Boolos［1990］の付録で，ブーロスは，算術導出の概略を示している。本論文もこのブーロスの仕事に負っている。本論文に新しさがあるとすれば，可能なかぎり詳しく証明を書いたことと，以下で示すように，ペアノの五つの公理の導出を目標にしたことである。

(2) $\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, \aleph_0\}$ を対象領域Dとし，各概念変項にDの部分集合を，各n項関係変項にD^nの部分集合を振り当て，＃F（「Fであるものの数」）をFの値の基数とし，F≈Gが真であるのは，Fの値の基数とGの値の基数が等しいときかつそのときに限る，と解釈することにより，ヒュームの原理：$\#F=\#G \longleftrightarrow F \approx G$（「Fであるものの数とGであるものの数が同一であるのは，概念Fと概念Gが同数的であるときかつそのときに限る」）がこのモデルで真となる。よって，第二階述語論理＋ヒュームの原理という体系は二階算術に相対的に無矛盾である。Boolos［1987］参照。

(3) ゼロ，自然数，後者を未定義な原始概念として，ペアノの公理系から自然数の定理を導き，それを基礎に有理数・実数・複素数の数論を展開するやり方の典型がLandau［1951］にある。他方集合概念を使って「最小の帰納的集合（空集合ϕを含み後者$x^+=x\cup\{x\}$に関して閉じている集合」として自然数（の集合）を定義することにより，自然数論を展開するやり方はEnderton［1977］4章に見られる。

(4) 例えば，自然数0，1，2，3，…を，Zermeloはϕ，$\{\phi\}$，$\{\{\phi\}\}$，$\{\{\{\phi\}\}\}$，…と定義し，von Neumannはϕ，$\{\phi\}$，$\{\phi, \{\phi\}\}$，$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$，…と定義する。通常の自然数論はどちらのシステムでも展開できるが，では，どちらの自然数が「真の」自然数なのか？また，von Neumannのシステムでは，$0\in1\in2\in3\in\cdots$，および$0\subseteq1\subseteq2\subseteq3\subseteq\cdots$が成り立つ（Enderton［1977］4章）が，これらは通常の「自然数の性質」としては期待されない。このような問題に関する「決定的な解答」は未だ見出されていないような思われる。

(5) なぜ最後の項“$-\{\langle y, z\rangle\}$”が必要であるかを理解するために，関係ϕが有限の簡単な例で考える。$F=\{a, b, c, \delta\}$，$G=\{a', b', c', \beta\}$とする。

ケース1：$\phi=\{\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle, \langle c, c'\rangle, \langle \delta, \beta\rangle\}$，$x_0=y=\delta$，$w_0=z=\beta$。

このとき，$\langle \delta, \beta\rangle=\langle x_0, z\rangle=\langle y, w_0\rangle=\langle x_0, w_0\rangle=\langle y, z\rangle$であるから，

$$
\begin{aligned}
((\phi-\{\langle x_0, z\rangle, \langle y, w_0\rangle\})\cup\{\langle x_0, w_0\rangle\})-\{\langle y, z\rangle\} &= ((\phi-\{\langle \delta, \beta\rangle\})\cup\{\langle \delta, \beta\rangle\})-\{\langle \delta, \beta\rangle\} \\
&= \phi-\{\langle \delta, \beta\rangle\} \\
&= \{\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle, \langle c, c'\rangle\} \\
&= \phi
\end{aligned}
$$

ケース2：$\phi=\{\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle, \langle c, \beta\rangle, \langle \delta, c'\rangle\}$，$x_0=c$, $y=\delta$，$w_0=c'$, $z=\beta$。このとき，

$$
\begin{aligned}
((\phi-\{\langle x_0, z\rangle, \langle y, w_0\rangle\})\cup\{\langle x_0, w_0\rangle\})-\{\langle y, z\rangle\} &= ((\phi-\{\langle c, \beta\rangle, \langle \delta, c'\rangle\}) \\
&\quad \cup\{\langle c, c'\rangle\}-\{\langle \delta, \beta\rangle\} \\
&= \{\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle\}\cup\{\langle c, c'\rangle\}-\{\langle \delta, \beta\rangle\} \\
&= \{\langle a, a'\rangle, \langle b, b'\rangle, \langle c, c'\rangle\} \\
&= \phi
\end{aligned}
$$

(6) “F”を$[x : x=0]$とすれば，$\forall x\neg(x=0\wedge x\neq0)$だから，$\forall x\neg(Fx\wedge x\neq0)$が導ける。よって，定理1により，$0=\#[x : Fx\wedge x\neq0]$となる。$0=0$だから$F0$，ゆえに，$F0\wedge0=\#[x : Fx\wedge x\neq0]\wedge1=\#[x : Fx]$。

$$\therefore \exists F\exists y\,(Fy\wedge0=\#[x : Fx\wedge x\neq y]\wedge1=\#[x : Fx])$$

すなわち，定義2により，0P1が成り立つ。

(7) 示すべきことは，∀a∀b｛(a＝x∨Fa)∧aRb→Fb｝⟷∀b(xRb→Fb)∧∀a∀b(Fa∧aRb→Fb)である。まず，"→"が成り立つことを示す。∀a∀b｛(a＝x∨Fa)∧aRb→Fb｝……①を仮定して，任意の対象bについて，xRb……②とする。仮定①から，全称例化により，(x＝x∨Fx)∧xRb→Fb……③。論理法則x＝xからx＝x∨Fxが導かれるから，②との連言により，(x＝x∨Fx)∧xRb。これと③より，Fb。以上より，∀b(xRb→Fb)……④。さらに，任意の対象a，bに対して，Fa∧aRb……⑤と仮定する。①から全称例化により，(a＝x∨Fa)∧aRb→Fb……⑥。Faからa＝x∨Faが出るから，⑤から(a＝x∨Fa)∧aRb。これと⑥より，Fb。仮定⑤を条件化して，Fa∧aRb→Fb，これを全称化して，∀a∀b(Fa∧aRb→Fb)……⑦。④と⑦より，∀b(xRb→Fb)∧∀a∀b(Fa∧aRb→Fb)が導かれる。これで，"→"が成り立つことが示された。逆に，"←"が成り立つことを示すために，∀b(xRb→Fb)∧∀a∀b(Fa∧aRb→Fb)……⑧と仮定する。いま，任意の対象a，bに対して，(a＝x∨Fa)∧aRb……⑨と仮定する。(i)a＝xのとき，⑨よりxRb，⑧よりxRb→Fbだから，Fb。(ii)Faのとき，⑨よりFa∧aRb。⑧よりFa∧aRb→Fbだから，Fb。いずれにせよ，Fb。∴仮定⑨を条件化して，(a＝x∨Fa)∧aRb→Fb，これを全称化して，∀a∀b｛(a＝x∨Fa)∧aRb→Fb｝。こうして，"←"も成り立つことが示された。

(8) 本誌第2巻第2号掲載の拙論：田畑［2001］参照。

参考文献

Boolos, G.［1987］："The consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*", in J. J. Thomson (ed.), *On Being and Saying : Essays for Richard Cartwright*, The MIT Press, pp.3−20. Boolos［1998］に再録。

Boolos, G.［1990］："The standard of equality of numbers", in G. Boolos (ed.), *Meaning and Method : Essays in Honor of Hilary Putnam*, Cambridge U.P., pp.261−277. Boolos［1998］に再録。

Boolos, G.［1998］：*Logic, Logic, and Logic*, Harvard U.P.

Enderton, H.［1977］：*Elements of Set Theory*, Academic Press.

Frege, G.［1879］：*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, L. Nebert. 邦訳：『概念記法』(藤村龍雄訳)，『フレーゲ著作集第1巻』所収，勁草書房，1999.

Frege, G.［1884］：*Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, W.Köbner. 英訳：*The Foundations of Arithmetic*, English translation by J.L. Austin, 1st ed. 1950, 2nd ed. 1953, Blackwell.

Landau, E.［1951］：*Foundations of Analysis*, Chelsea.

田畑博敏［2001］：「フレーゲの算術導出の哲学的意義」，鳥取大学教育地域科学部紀要，地域研究，第2巻第2号，pp.165−171.