フレーゲの算術導出の哲学的意義

田　畑　博　敏*

はじめに

フレーゲは『算術の基礎』（Frege [1884]）において，第二階述語論理にヒュームの原理を加えた体系から算術を導出するプログラムを示している。この体系からは実際にペアノの五つの公理を含む（自然数の）算術の基本的定理を導くことが出来る。われわれは，このフレーゲの方法による算術の導出をすでに遂行した(1)。本論文の目的は，このフレーゲの結果（「フレーゲの定理」という名で呼ばれることがある）のもつ哲学的意義について考察することである。ただし，決定的な結論を導くのではなく，フレーゲの結果に即して引き出しうる議論を示唆するに止めたい。

1　フレーゲ論理主義と第二階論理

フレーゲの論理主義のプログラム――すなわち数論と解析を論理に還元すること――が本格的に遂行されたのは，彼の『算術の基本法則』（Frege [1893−1903]，以下『基本法則』と略記）においてであった。通常，フレーゲの論理主義のプログラムは失敗に終わったと考えられている。というのは，『基本法則』の中に矛盾が発見され，さらに矛盾の原因とされた公理Vの修正版からも再び矛盾が出ることが示されたからである。しかし，もしわれわれが『算術の基礎』（以下『基礎』と略記）に視野を限定するならば，フレーゲの探究はささやかながら成功を収めている，と言える。すなわち，彼はヒュームの原理という，言わば集約された一つの公理だけから，ペアノ算術が導出可能であることを示している。実際，われわれが実行したように（田畑[2001]），ヒュームの原理といくつかの定義から，第二階論理を基礎にして，ペアノの五つの公理を含む算術の基本的定理が導出されるのである。一方で，ヒュームの原理（Hume's Principle）：

$$\#F = \#G \longleftrightarrow F \approx G$$

（Fである対象の数とGである対象の数が同一であるのは，概念Fと概念Gが同数的である（equinumerous），すなわち，Fである対象とGである対象の間に一対一対応が存在するとき，かつそのときに限る）

は数の文脈的定義（contextual definition）と見なしうる。もちろん，ヒュームの原理に現れる“＃F”は文脈的に「Fであるものの数」と読みうるが，この原理だけからは，「数とは何であるか」をわれわれは知ることができない。（構文論的には“＃”は，概念を表す一項述語をアーギュメントに取り，対象を表す項を生み出す関数記号である。）ただ，右辺の“≈”（同数性）によって，左辺の（数の間の）同一性の基準が与えられるにすぎない。他方で，フレーゲは，

$$\text{“}\#F = x\text{”}$$

のような形式の文の真理値を決定する（いわゆる「ユリウス・カエサル問題」）ためには，“＃F”

---

*鳥取大学教育地域科学部・地域設計学講座・哲学

の本質を決定するような定義の必要性を感じた。そのことによって，フレーゲは数の明示的定義：

$$\#F = 'X\ (F \approx X)$$

（Fであるものの数とは，“概念Fと同数的である”という概念の外延である）

を与えた（『基礎』§68)。しかし，この定義には概念の「外延」（またはクラス）というものが含まれている。よって，数をこの定義に従って理解するかぎり，数の同一性基準は，概念の外延の同一性という，より一般的な基準によって与えられねばならない。その基準は他ならぬ，公理Ｖ：

$$'X\ (F \approx X) = 'Y\ (G \approx X) \longleftrightarrow \forall H\ (F \approx H \longleftrightarrow G \approx H)$$

（“概念Fと同数的である”という概念の外延と“概念Gと同数的である”という概念の外延が同一であるのは，概念Fと同数的である任意の概念が概念Gとも同数的でありその逆も成り立つとき，かつそのときに限る）

である。

それゆえ，フレーゲの算術導出は，ささやかな形での（つまり数学の一部分に限定した形での）論理主義の成功を意味している，と考えられる。論理主義は(ⅰ)数学的概念の論理的定義と(ⅱ)数学の定理の論理的な（つまりギャップのない）導出を目指す。歴史的には，論理主義は19世紀数学の厳密化（具体的には算術化）に端を発した。多くの数学者が算術を数学の堅固な基盤とみなし，多くの分野を算術化することによって，数学の基礎の厳密化を試みた。しかし，算術そのものは未分析のままに残される傾向にあった。フレーゲの論理主義のモチベーションはここにあった。彼は，算術そのものにも論理的な基礎が必要であると考えた。『基礎』におけるフレーゲの算術プログラムは，自然数の算術が，（モデルの存在によって）無矛盾なヒュームの原理から第二階論理によって導出できることを示しているのである。

ところで，現在「論理」として支配的であるのは，フレーゲが用いた第二階論理ではなく，それよりも狭いもの（第一階述語論理）である。クワインは，少なくとも二つの根拠から，「論理」の範囲を第一階述語論理とすることを薦めている(2)。その根拠の一つは完全性（completeness）である。もう一つは論理的真理の諸定義が，（第一階述語論理の形式において）一致することである。クワインは第二階論理を始めとする高階論理（higher-order logics）を「（論理という）羊の皮を被った集合論」ときめつけ，（彼の立場からの）哲学的難点(？)を指摘する。高階論理で述語文字が量化可能な変項として用いられることは，その変項の値が集合と解釈されようとも好ましくない，まして属性として解釈することは良くない，と彼は主張する。これは，表面的には構文論的観点からの難点の指摘に見えるが，その底にはクワインの反プラトニズム（的傾向）がある。彼はこう論じる：「述語にはその“意図”(intensions) または意味（meanings）として属性が対応する［…］，そしてその外延として集合が対応する。従って，量化に相応しい変項は述語の位置を占めることはない。そのような変項は名前の位置を占める。」(3)

このクワインによる第一階論理の「偏愛」の背後には，第一階論理が「論理」の典型として認められるに到った歴史的経緯が控えている(4)。ゲーデルによる第一階論理の完全性の証明（1930年）とともに，1920年代以降，集合論の公理化を第一階論理を用いて行うことがスコーレムによって提唱される。概念の外延としてのクラスはブールやフレーゲ以来，論理の領域に正当に属すると考えられていた。（フレーゲの場合，彼の第二階論理においては，概念の外延は対象とされ，量化可能な二階変項はその意味（Bedeutung）として概念を持った。）だが，公理的集合論の発展に伴って反復的な集合観が支配的になるにつれ，第二階の言語は曖昧であるというスコーレムの主張が，第二階の言語は十分に明確であるというツェルメロの主張を圧倒し始めた。ツェルメロは，ゲーデル

の算術の不完全性の証明は,「証明」に関する有限な概念と第一階の有限の言語の不十分さを背理法で示した，とすら解釈した。ゲーデルは，第一階言語で展開される集合論の持つ（スコーレムのパラドクスに代表されるような）ある種の相対化は認めず，ツェルメロの意見にも耳を傾けたが，しかし，彼も結局は第一階論理を支持した。こうして，スコーレム＝ゲーデル路線によって，第一階論理が1940年以降，論理の主流となる。クワインの主張も基本的には，この線に従っている。

だが，このような論理観は，フレーゲやラッセルの時代にまだ意識されていた論理と数学の結び付きを断ち切り，二つを完全に分離してしまう傾向を促進した。第一階論理は，表現力という観点からはすこぶる弱い。すなわち，第一階論理だけで数学の基本概念を定義することはできないし，定理を証明することもむずかしい。もちろん，論理の体系としての第一階論理には，完全性（文の集合からの意味論的な論理的帰結である文が同じ集合からの構文論的帰結でもあること），コンパクト性（文の集合の充足性がその集合の任意有限部分集合の充足性に帰着すること），下方および上方へのレーベンハイム＝スコーレムの定理（論理体系の任意のモデルに対して充足性を保存する可算モデルが存在し，文の集合が有限モデルを持つときその集合のモデルで任意の無限基数を持つものが存在すること）といった，好ましいとされる性質が備わっている。それに対して，第二階論理はそのような性質を欠いている。(ただし，非標準的なヘンキンモデルではこのような性質が再び確保される。）しかし，第二階論理はさまざまな体系に範疇性（categoricity）（任意のモデルが同型的であること，つまりモデル間に構造を保存する一対一対応が存在すること）を与えることができるので,「意図された」解釈を明確に表現でき，第一階論理に伴う「相対性」が解消される。これも，第二階論理の表現力の強さに起因する[5]。それに対して，第一階論理を基礎に取って数学を展開するときは，論理外の数学的概念とされる集合概念を用いて基本概念が定義され，公理が構成される。その結果，第一階論理そのものは，数学の基本的概念の説明には寄与しないことになる。例えば，第一階論理では関係の祖先をそれだけで表現することができない。それどころか，“ａ＝ａ”という同一性の基本原理すら導けない。

フレーゲの結果の特徴の一つは，彼が第二階論理という表現力の強い論理体系を用いていることである。その結果，フレーゲは，“（概念に属する）数”という数演算子を除いて，多くの算術の概念を論理的概念として表現し定義できた。さらに，ヒュームの原理により，数に関する存在論をあからさまに導入せず文脈的に処理する形で，自然数の算術を導出できた。こうして，フレーゲは，第二階論理という強い論理体系を採用することによって，数学の基礎の部分がどれほど論理的性格を持つか，を明確に説明できたのである。

2　数の無限性と本質

われわれは，フレーゲの方法によってペアノの第２公理（「すべての自然数はそれ自身も自然数である唯一の後者を持つ」）を論理的に導出できる[6]。この公理は,「もしｎが自然数であるならば，“ｎよりも小さいかｎに等しい”という概念に属する数はｎの後者である」という定理の系として導出される。フレーゲが論理的に定義した，自然数列での「前者の後者に対する関係」――すなわち，「数ｍが数ｎの前者であるのは，ｎが概念Ｆに属する数であり，ｍが概念“Ｆであるがｙと同一ではない”に属する数であるような，概念Ｆと，Ｆに帰属する対象ｙが存在するときかつそのときに限る」という関係――が一対一対応であること，および０（ゼロ）に前者がないことによって，自然数の系列は，分岐したりループしたりすることが禁じられている。よって，この系（ペアノの

第2公理）は無限に多くの自然数が存在する，ということを含意することになる。つまり，自然数の系列：０，１，２，３，…は数列をなしている。数列（progression）とは，ラッセルの定義によれば，「初項があり，各項には必ず後者があり（従って末項がなく），重複もなく，かつ各項には初項から出発して有限回のステップで到達することのできる系列」[7]のことである。自然数が何であるにせよ，フレーゲは自然数の数列を論理的に導出できることを示した。事実，「前者の後者に対する関係」が一対一対応であることや，「もしｎが自然数であるならば，“ｎよりも小さいかｎに等しい”という概念に属する数はｎの後者である」という定理は，対象または述語変項と論理結合子と（一階または二階の）量化子によって表現できるという意味で，論理的に表現できる。概念間の同数性，すなわち概念に帰属する対象間に一対一対応の関係が存在することも，上と同じ意味で，論理的に表現される。さらに，「自然数」，「より小さいか等しい」の概念は，同一性とＰ＊（前者の後者に対する関係Ｐの祖先）の概念に帰着され，それらは（上記と同様の第二階の）論理的概念を用いて定義される。対象を表す記号として数演算子＃［ｘ：…ｘ…］が用いられるが，実際の算術の導出において，フレーゲは数の明示的定義を用いていない。こうして，フレーゲは，論理的な概念のみを用いて，自然数という無限に多くの対象の存在を導出している。しかし，フレーゲは，数の本質に関する存在論を回避した形で，無限個の自然数が導出できることを示している。

タイプ理論の内部で展開されるラッセルの論理主義には，「無限公理」の提示に際して，論理外の要素が侵入している，としばしば指摘される。というのは，ラッセルは彼の無限公理を，「世界の中の個体から成るクラスの存在」（強調は筆者）を要請する形で提示しているからである。ラッセルによれば，「無限公理」（the axiom of infinity）はこう定式化される：「もしｎが任意の帰納的［有限の］基数（inductive cardinal number）ならば，ｎ個の事物という個体から成る少なくとも一つのクラスが存在する。」[8]ラッセルは数をクラスのクラスとして定義する。それゆえ，ラッセルは，自然数ｎを扱うとき，世界の個体であるところのｎ個の要素からなるクラスの存在を必要とした。彼はこう論じている。われわれが数をクラスのクラスとして定義するとき，ペアノの第1公理と第2公理は容易に証明できる。しかし，もし世界の中の個体の個数が有限ならば，ペアノの第4公理（異なる二つの自然数は異なる後者を持つという公理で，ラッセルの順序では第3公理となっている）は成立しなくなる。というのは，以下のような反例が構成できるからである。世界の中の個体の総数が例えば10であるとすると，数11と数12は空クラスとなる。空クラスは互いに区別できないから

$$11=12$$

である。言い換えると，

$$10の後者=11の後者$$

である。しかし，

$$10\neq 11$$

である。これは，ペアノの第4公理（ラッセルの第3公理）の不成立を意味する。なぜなら，異なる二つの自然数が同一の後者を持つからである。ラッセルはこう論じる：

> 「しかし，もし世界の中の個体の数が有限ではない［すなわち無限である］ならば，第3公理［われわれの第4公理］は必ず成り立つ。」[9]

こうして，ペアノの第4公理を救うため，というよりペアノの公理系に体系化された自然数の算術を救うために，ラッセルは彼の「無限公理」というメタフィジカルな仮定が必要であった。

確かに，われわれは自然数の体系の基礎に無限個の自然数を前提している。最後の自然数，ある

いは最大の自然数といったものが存在するとは，通常，われわれは考えない。もしそのような自然数が存在するとすれば，名前は「自然数」でも，実際には別のものを考えていると見なすであろう。しかし，そのような無限個の存在が「世界の中にある」ということが論理的に言えるのか？フレーゲは，「無限公理」のような要請を予め立てることなく，第二階論理とヒュームの原理という道具のみを用いて，無限個の対象にのみあてはまる算術の定理群を導いた。フレーゲが『基礎』で実際に示した算術プログラムに含まれる存在論は穏やかなものと言える。“＃Ｆ”で示される，「Ｆである対象の数」という対象が無限に存在することになる，ということを，その対象の本質や構造を予め前提することなく，論理的な概念構成のみから導いているからである。

もちろん，哲学的・存在論的には「数とは何か？」という問いは残る。集合の概念が数学にとって枢要であるとされるのは，数学的な対象を「ある条件を満たす集合」として再構成し，それらの数学的対象についての理論を，集合論の中に埋め込むという形で展開できるからである。集合論の中で自然数を展開するときも，「自然数」はある形の集合と同一視される。自然数：０，１，２，３，…をツェルメロは ϕ，$\{\phi\}$，$\{\{\phi\}\}$，$\{\{\{\phi\}\}\}$，…と同一視し，フォン・ノイマンは ϕ，$\{\phi\}$，$\{\phi, \{\phi\}\}$，$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$，…と同一視した。どちらが「真の」自然数なのか？素朴な，直観的な自然数の体系にわれわれが期待する構造的性質が導かれるならば，どちらでもよい，とも言える。しかし，そのような機能主義ないし形式主義は，フォン・ノイマンの０が２の要素である（$0 \in 2$）のにツェルメロの０が２の要素でない（$0 \notin 2$）のは何故か，という問いには答えられないだろう。（どちらも正しいかどちらも間違っているという答えになるだろうか？しかし，その基準は何か？われわれの素朴な直観的数体系から導かれる数の性質と，そうではなく，言わば人工的な装置（集合論）に埋めこんだゆえに導かれる数の性質との間の境界設定が，形式主義にとってどのように可能なのか？これらの問いの追い討ちが待っている。）フレーゲが，数の文脈的定義には，結局の所，満足できなかったのは，彼が「数とは何か？」の問いが避けて通れない問いだと感じた何よりの証拠である。（ベナセラフは論文「数は何でありえないか」の中で，フレーゲを意識しながら，数とは何かの決定的な解答が見出しにくいゆえに，数を対象と見なすこと自体を撤回しようと結論しているが(10)，この結論の出し方は性急にすぎるように思われる。）

3　文脈原理と文脈的定義

ダメットは，『フレーゲ：数学の哲学』の中で，

> 「［…］プラトニズムの熱烈な支持と，数論と解析に関する無条件の論理主義とを結びつけたのは，フレーゲの側の離れ業であった。」

と論じた(11)。フレーゲは，『算術の基本法則』で彼の「無条件の」論理主義をプラトニズムと結びつけたとき，彼は，少なくとも公式的には，数の文脈的定義を捨てた。彼は，概念の外延を用いる数の明示的定義を正式に採用した。『基礎』での論理主義よりももっと強力なものにするため，彼の存在論の基礎を与える概念の外延（クラス）が必要だった。しかし，概念の外延と数の明示的定義で武装した『基本法則』でのフレーゲの論理主義は，体系の無矛盾性という必要最小限の条件を確保することもできなかった。

われわれは，『基礎』の論理主義の中に，控えめであるが無矛盾なフレーゲの論理主義のバージョンを見出す。フレーゲは『基礎』の中では文脈原理を保持した。確かに彼は，数の明示的定義：

＃F＝'X（F≈X）

を与えた。これは，例えば「ガリアの征服者ユリウス・カエサルが数である」ということがどうして否定できるのか，言い換えると

＃F＝ユリウス・カエサル

という文の意味（真理値）はどのようにして決定できるのか，という問いに答えるためであった。ブール流の（そして一部その流れを汲む今日のモデル理論の）限定された対象領域（domain）を前提する，という立場を取らないフレーゲにとっては，世界のありとあらゆる対象が対象としての資格を有しているからである。そこで，一般に，

＃F＝x

という形の開放文の“x”に，対象を表示するどのような名前（個体定項）が代入されようとも，それによって形成される文の真理条件を与える必要があった。そのために，“＃F”の明示的定義（「概念Fに属する数」の本質を述べる定義）が必要とされた。

今日，フレーゲの文脈原理，すなわち「語の意味はそれだけで孤立させて求めてはならず，文という文脈においてのみ求められねばならない」（『基礎』導入）という原理は，余りに広く解釈されすぎているきらいがある。その原理は言語哲学または意味論の一般原理にまで高められてしまったからである。フレーゲの文脈原理が本来その役割を果たす，その本来の文脈の認識こそ重要であると思われる。『基礎』では，フレーゲは，文脈原理の使用を，数の文脈的定義を与える場面に限定しているように見受けられる。（フレーゲは，文脈原理を語の意味の一般的な規定原理であるように考えるとき，物理主義や心理主義の数学の哲学を批判するときの根拠にしている。（『基礎』§106））

いずれにせよ，フレーゲは文脈原理と数の文脈的定義に満足しなかった。しかし，われわれは，フレーゲの方法によって，すなわち数の文脈的定義であるヒュームの原理と第二階論理によって，自然数の算術が導出できることを知っている。第二階論理は本論第1節で見たように，論理として本来豊富な表現力を持っている。それだけにプラトニズムとの親近性も強い。だが同時に，矛盾を含む危険をも孕む。しかし，『基礎』の算術プログラムによれば，（モデルの存在により）無矛盾な，その意味で安全なヒュームの原理から算術の主要な定理が導けることは，特筆に値することである。ダメットの言うように，第二階論理を基礎とするフレーゲの論理主義は，数の本質を追究するという形で熱烈なプラトニズム支持と結びついていた。しかし，少なくとも『基礎』において，フレーゲの論理主義は，数の文脈的定義から算術を導出できる点において，プラトニズムからは独立に成立するものである。

註

(1) 本誌掲載の田畑［2001］参照。
(2) Quine［1970］ch. 5, 6 参照。
(3) Quine［1970］p.67（邦訳 102−3頁）参照。
(4) 第一階論理が論理の典型としての地位を得る歴史的経緯の記述として，Shapiro［1991］の7章を参照されたい。
(5) Shapiro［1991］ch. 4, 5 章参照。
(6) 田畑［2001］第4節参照。
(7) Russell［1919］p.8（邦訳18頁）参照。

(8) Russell［1919］p.131（邦訳 172頁）参照。
(9) Russell［1919］p.24（邦訳38頁）。
(10)Benacerraf［1965］参照。
(11)Dummett［1991］p.301.

参考文献

Benacerraf, P.［1965］：“What numbers could not be”, *Philosophical Rewiew,* vol.74, reprinted in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics,* 2-nd ed. 1983, Cambridge U. P.

Dummett, M.［1991］：*Frege : Philosophy of Mathematics,* Harvard U. P.

Frege, G.［1884］：*Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,* W. Köbner.

Frege, G.［1893－1903］：*Grundgesetze der Arithmetik,* Bd. I, 1893, Bd. II, 1903, H. Pohle. 邦訳（抄訳）『算術の基本法則』（野本和幸・横田榮一・金子洋之訳），野本和幸編訳『フレーゲ著作集』第３巻所収，2000，勁草書房。

Quine, W. V.［1970］：*Philosophy of Logic,* 2-nd ed. 1986, Harvard U. P. 邦訳：山下正男訳『論理学の哲学』，1972，培風館。

Russell, B.［1919］：*Introduction to Mathematical Philosophy,* 2-nd ed. 1920, Dover, 邦訳：平野智治訳『数理哲学序説』，1954，岩波書店。

Shapiro, S.［1991］：*Foundations without Foundationalism, A Case for Second-order Logic,* Oxford U. P.

田畑博敏［2001］：「フレーゲの方法による算術の導出」，鳥取大学教育地域科学部紀要，地域研究，第２巻第２号，pp.141-163。