

回転機械の軸振動解析モデルの高精度化

Improvement of analytical accuracy
of 1D finite element model
for rotor-dynamics

2015 年 1 月

長江 信顕

目次

主な記号	v
第1章 序論	1
1.1 緒言	1
1.2 従来の研究	3
1.2.1 軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化	4
1.2.2 嵌め合い部の曲げ剛性の高精度化	7
1.3 本研究の目的と概要	8
参考文献	10
第2章 ロータの曲げ振動解析とねじり振動解析のための1次元梁の有限要素モデル ..	12
2.1 緒言	12
2.2 曲げ振動の解析モデル	12
2.2.1 曲げ振動解析モデルの自由度	12
2.2.2 曲げ振動解析モデルの運動方程式	12
2.2.3 曲げ振動解析モデルにおける回転軸のモデル化	13
2.2.4 曲げ振動解析モデルにおけるディスクのモデル化	16
2.2.5 ロータ全体の曲げ振動解析モデル	17
2.3 ねじり振動の解析モデル	17
2.3.1 ねじり振動解析モデルの自由度	17
2.3.2 ねじり振動解析モデルの運動方程式	17
2.3.3 ねじり振動解析モデルにおける回転軸のモデル化	18
2.3.4 ねじり振動解析モデルにおけるディスクのモデル化	19
2.3.5 ロータ全体のねじり振動解析モデル	19

2.4	結言	19
	参考文献	19
第3章	軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化	20
3.1	緒言	20
3.2	適用範囲の検討	20
3.3	軸直径変化部断面の弾性変形による見かけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル化方法	23
3.3.1	軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性	23
3.3.2	回転ばねの直列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形による見かけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル	24
3.3.3	回転ばねの並列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル	29
3.3.4	曲げ剛性の等価軸径の検討	30
3.4	提案方法の妥当性の検証	32
3.4.1	3次元有限要素モデルの曲げ剛性の補正	32
3.4.2	曲げモードの固有振動数	34
3.4.3	静荷重による曲げ変形の評価	39
3.4.4	実験による曲げモードの固有振動数の評価	41
3.4.5	実機相当の解析モデルによる曲げモードの固有振動数の評価	45
3.5	結言	46
	参考文献	47
第4章	嵌め合い部の曲げ剛性の検討	48
4.1	緒言	48
4.2	嵌め合い部の曲げ剛性の評価	48
4.2.1	接触解析による嵌め合い強さと軸の曲げ剛性の関係の検討	48
4.2.2	嵌め合い部の曲げ剛性の実験による評価	56

4.3	結言	59
第5章	軸直径变化部のねじり剛性の高精度化	60
5.1	緒言	60
5.2	静的トルクによる外周固定円柱の弾性変形	60
5.3	適用範囲の検討	62
5.4	軸直径变化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル化方法	64
5.4.1	軸直径变化部断面の弾性変形の等価ねじり剛性	64
5.4.2	回転ばねの直列結合によって軸直径变化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル	64
5.4.3	回転ばねの並列結合によって軸直径变化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル	66
5.4.4	ねじり剛性の等価軸径の検討	68
5.5	提案方法の妥当性の検証	69
5.5.1	3次元有限要素モデルのねじり剛性の補正	69
5.5.2	ねじりモードの固有振動数	70
5.5.3	静的トルクによるねじり角の評価	72
5.5.4	実機相当の解析モデルによるねじりモードの固有振動数の評価	73
5.6	結言	77
	参考文献	77
第6章	振動試験結果に基づく軸振動解析モデルの高精度化	78
6.1	緒言	78
6.2	特性行列の同定の概要	78
6.3	特性行列の同定方法	79
6.4	未知パラメータの同定手順	79

6.5 剛体特性と弾性特性に関する模擬の実測値による誤差を持つ解析モデルの高精度化	83
6.5.1 振動解析モデル	83
6.5.2 特性行列の同定	84
6.6 結言	89
参考文献	90
第7章 総括	91
7.1 本研究により得られた成果	91
7.2 今後の展望	92
謝辞	93
関連報告	94
付録	95
A-1 軸要素の質量行列, 剛性行列, ジャイロ行列	96
A-2 断面一様梁の曲げ振動の固有振動数	98
参考文献	101
A-3 軸の製作図	102
A-4 タービン発電機ロータの曲げ振動解析モデルの諸元	103
A-5 タービン発電機ロータのねじり振動解析モデルの諸元	106

主な記号

- A : 軸の断面積 (m^2)
- D_{in} : ディスクの内径 (m)
- D_{out} : ディスクの外径 (m)
- E : ヤング率 (N/m^2)
- E' : 補正後のヤング率 (N/m^2)
- G : 横弾性係数 (N/m^2)
- G' : 補正後の横弾性係数 (N/m^2)
- I : 軸の断面 2 次モーメント (m^4)
- I_1 : 大径軸の断面 2 次モーメント (m^4)
- I_1' : 軸直径変化部の大径軸側断面の曲げ剛性の等価断面 2 次
モーメント (m^4)
- I_2 : 小径軸の断面 2 次モーメント (m^4)
- I_2' : 軸直径変化部の小径軸側断面の曲げ剛性の等価断面 2 次
モーメント (m^4)
- I_A : 断面 A-A における曲げ剛性の等価断面 2 次モーメント (m^4)
- I_d : 軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性の等価断面 2 次
モーメント (m^4)
- I_{eq} : 長さ $9d/32$ の小径軸要素の曲げ剛性の等価断面 2 次モーメント
(m^4)
- I_p : 回転軸要素の断面 2 次極モーメント (m^4)
- I_{p1} : 大径軸の断面 2 次極モーメント (m^4)
- I_{p2} : 小径軸の断面 2 次極モーメント (m^4)
- I_{peq} : 長さ $3\pi d / \{64(1+0.3382\beta^3+0.0815\beta^5+0.1144\beta^6+0.0125\beta^7)\}$ の小径梁
要素のねじり剛性の等価断面 2 次極モーメント (m^4)
- I_{pd} : 軸直径変化部断面の弾性変形によるねじり剛性の等価断面 2 次
極モーメント (m^4)
- I'' : 軸直径変化部断面の等価断面 2 次モーメント (m^4)
- J_{CG} : ロータの重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性
モーメント (kgm^2)
- J_{disc} : ディスクの直径軸周りの慣性モーメント (kgm^2)
- J_{pCG} : ロータの回転軸周りの主慣性モーメント (kgm^2)
- J_{pdisc} : ディスクの回転軸周りの極慣性モーメント (kgm^2)
- M : 曲げモーメント ($\text{N}\cdot\text{m}$)
- T : トルク ($\text{N}\cdot\text{m}$)

- a : 小径軸または剛体軸の半径 (m), $a=d/2$
 b : 円板または大径軸の半径 (m), $b=d_0/2$
 c_1, c_2, c_3 : たわみ曲線の 3 次多項式近似曲線の係数(切片を 0 とした場合)
 d : 小径軸の軸径 (m)
 d_0 : 円板または大径軸の軸径 (m)
 d_e : 等価な曲げ剛性を与える大径部の軸径 (m)
 d_{eq} : 等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 (m)
 d_{peq} : 等価なねじり剛性を与える小径部の軸径 (m)
 d_s : スリーブの内径 (m)
 f : 固有振動数 (Hz)
 h : 円板または大径部の厚さまたは軸方向長さ (m)
 k_1 : 大径軸要素の回転ばね定数 (N·m/rad)
 k_2 : 小径軸要素の回転ばね定数 (N·m/rad)
 k_d : 長さ $9d/32$ の要素の回転ばね定数 (N·m/rad)
 k_{eq} : 等価な曲げ剛性を与える長さ $9d/32$ の要素の回転ばね定数
(N·m/rad)
 l_e : 軸要素の長さ (m)
 l_2 : 小径軸要素の長さ (m)
 m_1 : 大径軸要素の慣性モーメント ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
 m_2 : 小径軸要素の慣性モーメント ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
 m_d : 長さ $9d/32$ の要素の慣性モーメント ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
 m_{disc} : ディスクの質量 (kg)
 m_R : ロータの全質量 (kg)
 n : 節点数
 n_{disc} : ディスクの数
 n_{f1} : 固有振動数の数
 n_{f2} : 固有モードの数
 p : 面圧荷重 (N)
 p_0 : 嵌め合いによる面圧荷重 (N)
 t_{disc} : ディスクの厚さ (m)
 z_{CG} : 軸方向の重心位置 (m)
 Δd : 締め代 (m)
 Δp : 曲げモーメントによる面圧荷重の変化分 (N)
 Φ : 固有モード
 α : 曲げモーメントと傾き角の比例係数
 α_i : 慣性係数

α_m	: 質量係数
β	: 軸直径比
γ	: 比例減衰定数
δ	: 梁のたわみ (m)
$\bar{\varepsilon}$: 固有角振動数の平均誤差
θ	: トルク T による小径軸または剛体軸の回転角 (rad)
κ	: せん断定数
μ	: 摩擦係数
ν	: ポアソン比
ρ	: 回転軸の密度 (kg/m^3)
ρ_{disc}	: ディスクの密度 (kg/m^3)
σ	: 標準偏差
τ	: せん断係数
ψ	: 曲げモーメントによる軸直径変化部断面の傾き角 (rad)
ω_n	: 固有角振動数 (rad/s)

第1章 序論

1.1 緒言

現在、広範な分野で多種多様な回転機械が、種々の振動問題を克服して、重要な役割を担っている。例えば、発電分野では、1960年代以降、高出力化のために蒸気タービンの大型化、長スパン化、多スパン化が進み、危険速度の低下と定格回転数以下に存在する危険速度の数の増大という問題に対応するために軸受の剛性と減衰を実用に足る精度で推定する技術や不釣り合い振動を低減する技術などが開発され、国内では2000年前後に1000MW級の蒸気タービンが稼働を開始している。また、石油・天然ガス分野では、流体圧送用の遠心圧縮機の高圧化、高速化が進み、シール部で発生する不安定化力を如何に抑えるかが設計上の重要課題となっており、1990年代から製品化が進んできた磁気軸受を制御して不安定化力を抑える技術が開発され、安定性向上のための更なる技術開発が継続されている。これらの他にも、回転機械の大型化、小型化、高速化などの要求に伴い開発段階で発生する様々な振動現象の発生メカニズムが研究され、その多くが解明されてきた。軸系の振動に関しては、不釣り合いやミスアライメント（那須田他，1983，斎藤，松本，1985，神吉他，2009）に起因する振動，剛性が非対称な回転軸の不安定振動，すべり軸受の動特性（染谷，1984，堀，加藤，1989），オイルホイップ（岡崎，堀，1955，船川，多々良，1964，田浦，田中，2007），スチームホワール，クラック軸の振動（石田他，1992，井上他，2010），ロータ基礎励振応答（田村他，1981，古池，石原，1983，岡本他，1992），ロータの内部減衰による自励振動（野波，宮下，1980），シールによる不安定振動（岩壺他，1983，滝田他，1988），液体内蔵ロータの不安定振動（斎藤，染谷，1978），玉軸受の非線形ばね特性に起因する非線形振動（山本他，1976），スクイズフィルムダンパ軸受の動特性（古池，石原，1987，神吉他，2004），磁気軸受（吉田他，1993，久永他，1996，岩壺他，1998，石田他，2003，高橋他，2003，神吉他，2004）などが研究されてきた。翼振動に関しては，タービン動翼に加わる流体励振力（石原他，1990）やミスチューン翼の振動（金子他，1992）などが研究されてきた。回転軸の曲げとねじりの連成振動（岩壺他，1983），回転軸のねじりと翼曲げの連成振動（飯島他，1991），回転軸の曲げと翼の曲げの連成振動（萩原，1982）についても研究がなされている。これらの研究の成果は，より高性能，高効率で環境負荷の低い，安全な回転機械の開発や設計に反映されている。

しかし，近年においても，回転軸の曲げ振動やねじり振動が事故に繋がった事例や，ターボ機械のブレードやインペラの振動が問題となった事例が報告されている。不具合の要因としては，実機の振動予測に用いる解析モデルの精度不足，軸受特性の変化，外力の見積精度の不足などに加えて，既存の解析モデルで表現できない非線形振動などの場合もある。

回転機械の振動は強制振動と不安定振動に大別され，これらの振動現象は，ロータの質量，剛性，減衰行列で表されるロータの解析モデルに支持部の質量，剛性，減衰の各行列を重ね合わせた全体系の解析モデルに，外力ベクトルを与えて表現することができる。通

常の回転機械では、ロータの減衰と支持部の質量は無視してモデル化がなされる。

強制振動はロータの任意の部位に作用する強制力によって引き起こされる振動であり、代表的なものとして不釣合い振動がある。不釣合い振動を低減するために行われる釣合わせに関する研究は古くから行われている（矢鍋, 田村, 1969, 三輪, 1971, 塩幡, 藤沢, 1979, 白木他, 1980, 松下他, 1992）。ロータを剛体として扱うことができる低速の回転機械では影響係数法による 2 面バラシングで比較的容易に釣合わせることができる。ロータを弾性体として扱う必要がある高速の回転機械では、固有モードを考慮したモード円バラシング法（吉本, 松下, 2004, 松下他, 2009）、ロータの軸振動低減だけでなく軸受反力をも低減する $n+2$ 面法（矢鍋, 田村, 1969）、前向き不釣合い振動成分のみに注目したバラシング法（松下他, 2012）、さらに、不釣合い修正面の制約がある中で残留振動の上限値や修正量の上限値を考慮した最適バラシング法が開発されている（神吉他, 1999）。回転機械の振動解析モデルにおける支持部の剛性と減衰の精度は、ロータのものとは比べて低い場合が多いため、釣合わせで使用する影響係数は、解析モデルから推定したものではなく、実測した振動値から求める方が精度面で有利である（岩壺, 1980）。

不安定振動は、ロータと支持部からなる全体系の複素固有値の実部が正となる、すなわち減衰が負となる条件で発生する自励振動である。例えば、ブレードが取り付けられた回転軸が、車室と呼ばれるケーシングに固定されたすべり軸受で支持された構造を持つ蒸気タービンでは、オイルホイップやスチームホワールなどの自励振動が発生する可能性があるため、想定される運転条件で回転軸系の減衰が負とならないような軸受仕様が決定される。すべり軸受については古くから研究がなされており、理論と実験で、真円軸受、多円弧軸受、ティルティングパッド軸受の剛性および減衰特性が求められている。高圧遠心圧縮機では、シール部の支持特性が不安定側に作用して自励振動を引き起こす場合があるため、シール部の支持特性の予測が技術的な課題となっている。そのため、CFD 解析によるシール部の流体力の予測に関する研究（西嶋他, 2014）や、磁気軸受によるシール部の動特性を同定する研究（Zutavern and Childs, 2008）がなされている。後者の研究ではロータと軸受のモデル化精度が保証されていることが前提となる。不安定振動の防止には、安定限界から十分余裕のある状態で運転する必要があるため、精度の高い複素固有値解析が必須である。

回転機械の振動を定量的に予測する技術についても古くから研究がなされており、伝達マトリックス法（Pestel and Leckie, 1963, 菊地, 1969, Ishida and Yamamoto, 2012）や有限要素法（松下他, 1984）が適用された実用的な軸振動およびねじり振動解析ソフトウェアが開発され、実際の設計現場で用いられている。有限要素法を用いた回転機械の解析環境は、回転軸を 1 次元の梁要素でモデル化する 1D モデル解析と 3 次元のソリッド要素で詳細にモデル化する 3D モデル解析に大別される。回転軸の振動形態は、曲げ振動（横振動）、回転軸方向の振動（縦振動）、ねじり振動、およびそれらが連成した振動に分類される。対象とする振動形態に的を絞った 1D モデル解析環境では、解析モデルによって扱うことができる

振動形態に制約が多いが、計算負荷が小さい。一方、3Dモデル解析環境では、扱うことができる振動形態の制約が少ないが、現在でも計算負荷が小さいとは言えない。回転機械の設計に必須の、危険速度マップやロータ形状の最適化などの複素固有値解析を繰り返し行う必要のある計算（内海他, 2013）では、計算負荷が時間コストに直結する。

振動問題の予兆を捉えて大事に至る前に対策、処置を行うために、回転機械の状態監視を行うための計測と診断に関する技術も研究開発され、実用されている。また、製作誤差、材料特性の誤差、モデル化誤差などによって、解析モデルによる軸振動の予測精度が低下する場合がある。そこで、回転機械の開発段階では、解析モデルの精度を確認するために、実機のロータについて実験モード解析（Ewins, 1984, 加川, 石川, 1987, 長松, 1993, Balmes, 1996, Maia and Silva, 1997）を行って振動特性として固有振動数、固有モード、モード減衰比を推定し、解析モデルの精度を確認する作業が行われている。特に、実験モード解析による固有振動数の推定精度は高いことが知られている。しかし、実験モード解析の結果は解析結果との比較のみに使用される場合が多く、ロータの振動解析モデルの高精度化に十分に活用されているとは言えない。

回転機械は、これからも種々な所で使用され続ける。そのため、振動問題を起こし難い回転機械の開発、設計を効率的に行うことが求められる。そこで、計算負荷が小さく高精度な軸振動（曲げ振動およびねじり振動）の解析手法を開発することと、実験モード解析結果に基づいてロータの振動解析モデルを高精度化する方法を開発することが課題である。

1.2 従来の研究

ロータの1Dモデルにおいて、曲げ振動解析モデルの高精度化に関する既存研究として、軸直径変化部断面の弾性変形（図1.1参照）によるみかけの軸の曲げ剛性低下を、大径部の有効直径の減少によって表現する方法（小堀, 1966）と、弾性変形相当の曲げ剛性を軸の曲げ剛性に直列結合する方法（高田他, 2009）が提案されている。

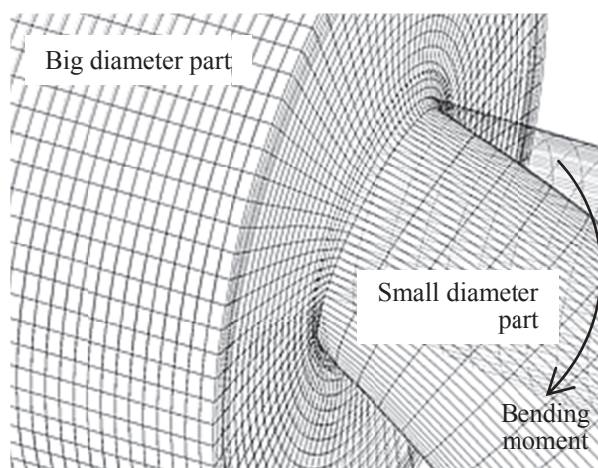


Fig. 1.1 Deformation of stepped cross-section surface due to bending moment

また、1D モデルにおいて、回転軸の嵌め合い部の曲げ剛性の有効直径を、嵌め合い部の軸方向長さと同軸外径を足し合わせた値とする方法が提案されている (Lalanne and Ferraris, 1998)。しかし、1D モデルにおいて、軸直径変化部断面の弾性変形によるねじり剛性低下を考慮してねじり振動解析モデルを高精度にする方法は、既存研究では見当たらない。

3D モデルによる振動解析の効率化を図る方法として、ブレードの周期性に着目して空間フーリエ級数の概念を適用したモデル縮約法が提案されている (A. Sternchuss, E. Balmes, 2006)。

軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化と嵌め合い部の曲げ剛性の高精度化に関する既存研究の概要を以下に示す。

1.2.1 軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化

1.2.1.1 大径部の有効直径でみかけの軸の曲げ剛性低下を表現する方法

1D モデルで、回転軸の軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮して曲げ振動解析モデルを高精度化する方法として、小堀は、大径部の曲げ剛性を適切に弱める方法を提案している。小堀は、図 1.2 に示される軸において、軸直径変化部の曲げ剛性の低下を、等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 d_e を用いて表した。式 (1.1) は、小堀によって提案された、幅径比 h/d の 3 次式によって d_e を与える式である。

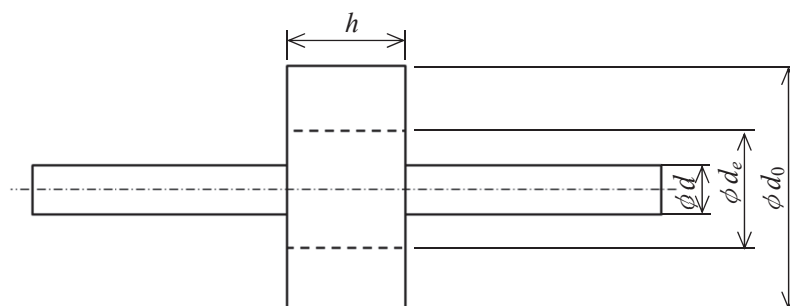


Fig. 1.2 Modeling of shaft with stepped cross-section using Kobori Method

$$d_e = d \left[1 + 0.4080 \left(\frac{h}{d} \right) + 0.04515 \left(\frac{h}{d} \right)^2 - 0.0099 \left(\frac{h}{d} \right)^3 \right] \quad (1.1)$$

大径部の等価軸径 d_e を与える式 (1.1) の妥当性は実験で評価されている。しかし、等価軸径 d_e は h/d のみの関数であり大径部の軸外径 d_0 が考慮されないため、等価軸径 d_e が大径部外径 d_0 より大きくなるという不適切な結果を与える場合がある。図 1.3 は h/d と d_e/d の関係

を示したものである。例えば、 h/d が1の場合では d_e が $1.443 d$ となり、 $d_0 < 1.443 d$ であればこの方法を適用することができない。

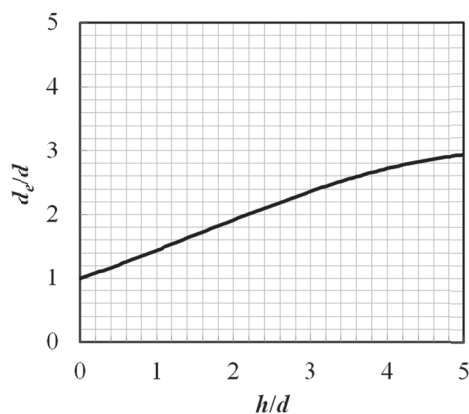


Fig. 1.3 Equivalent diameter of shaft on bending stiffness

1.2.1.2 弾性変形相当の曲げ剛性を梁の曲げ剛性に直列結合してみかけの軸の曲げ剛性低下を表現する方法

軸直径変化部を持つ弾性軸では、その弾性によって、曲げモーメントが作用すると、小径軸端部での中立軸の方向が、大径軸側断面の法線方向に対して傾く現象が起こる。つまり、大径軸側断面に対する小径軸端部の固定状態は完全固定ではないと言える。この現象は軸直径変化部において軸のみかけの曲げ剛性が低下する現象として扱うことができる。

1Dモデルで、回転軸の軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮して曲げ振動解析モデルを高精度化する方法として、高田らは、弾性変形に相当する回転ばねを直列結合によって表現する方法を提案している。

図1.4は、大径軸外周面が固定された軸直径変化部を持つ軸において、小径軸の先端に曲げモーメント M が作用した場合に軸直径変化部断面A-Aが弾性変形することによって断面A-Aの法線に角度 ψ の傾きが生じる様子を示したものである。なお、図1.4はMATLAB®のサードパーティToolboxであるSDTools社製のStructural Dynamics Toolboxを使用して作成した3Dモデルである。

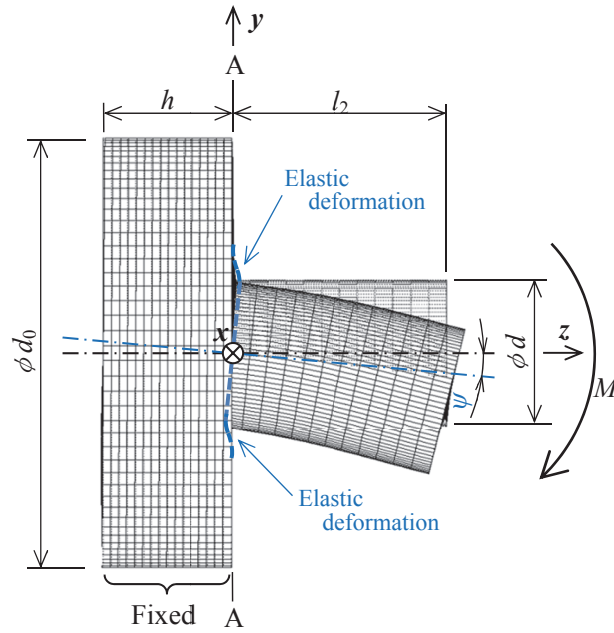


Fig. 1.4 Deformation of stepped cross-section due to bending moment

曲げモーメント M と傾き角 ψ の間には式 (1.2) の関係が成り立つ (Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1973).

$$M = \alpha E h^3 \psi \quad (1.2)$$

M : 曲げモーメント (Nm)

α : 曲げモーメントと傾き角の比例係数

ψ : 軸直径変化部断面の傾き角 (rad)

h : 円板の厚さ (大径軸の軸方向長さ) (m)

E : ヤング率 (N/m²)

式 (1.2) における α は、円板の厚さ h と直径 d_0 との比 h/d_0 がゼロに近付くと式 (1.3) で示され、 h/d_0 が大きくなると式 (1.4) で示される。

$$\alpha = \frac{\pi}{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1 - (\beta^2 + 1) \ln \beta}, \left(\frac{h}{d_0} \cong 0 \right) \quad (1.3)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{18} \cdot \left(\frac{\beta d_0}{h} \right)^3 \quad (1.4)$$

式 (1.3) は軸直径変化部の直径比 $\beta (=d/d_0)$ とポアソン比 ν のみの関数で表され (Darlow, et al., 1980), 式 (1.4) は円板の厚さ h , 大径軸直径 d_0 , 軸直径比 β で表される (高田他, 2009, 林他, 1990).

高田らは, 式 (1.4) と長さ l の片持ち梁の理論式の関係から求めた軸直径変化部断面の弾性変形分の曲げ剛性 EI_d は式 (1.5) で表され, 軸直径変化部の等価な曲げ剛性 EI' は EI_d と通常の梁の曲げ剛性 EI を直列結合した式 (1.6) で表されるとしている.

$$EI_d = E \frac{4}{9} \alpha h^3 l \quad (1.5)$$

$$EI' = \frac{EI \cdot EI_d}{EI + EI_d} \quad (1.6)$$

式 (1.3) が成り立つ $h/d_0 \cong 0$ の薄い円板の場合は, 円板が軸の曲げ剛性に及ぼす影響を無視できる. しかし, 式 (1.4) が成り立つ状況では, 軸直径変化部断面の弾性変形による曲げ剛性の低下が起こる. そこで, 高田らは, 式 (1.4) が成り立つ場合の軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を, 式 (1.6) の回転ばねの直列結合で表現している. また, 高田らは, 3次元有限要素法数値解析コード SAMCEF-ROTOR を用いて, 軸直径比 $\beta=0.3175$ の場合に式 (1.4) が成り立つ h/d_0 の範囲が $h/d_0 \geq 0.2$ であることを示している.

高田らの方法では, 式 (1.6) に示されるように, 長さを持たない回転ばね EI_d を軸要素の片側の節点の回転ばねに直列結合する必要がある. 1次元梁の有限要素モデルを用いた軸振動解析ソフトウェアでは, 有限長の軸要素でのみ回転ばねが定義され, 隣接する軸要素の回転ばねは重複節点において重ね合わせによって結合 (並列に結合) されるため, 特定の節点で回転ばねを直列に結合することが困難と思われる.

1.2.2 嵌め合い部の曲げ剛性の高精度化

図 1.5 は, Lalanne らによって示されている, 1D モデルにおける嵌め合い部の等価な曲げ剛性を与える直径を示したものである. (a) は 1 つのディスク要素が 1 つの節点に結合されたモデルであり, ディスク要素が曲げ剛性に影響を与えないモデルである. (b) は軸径 d にディスク幅 h を加えた $d+h$ を等価な曲げ剛性を与える軸径として中央の節点 2 にディスク要素が結合されたモデルである. (c) は (b) と同じく等価な曲げ剛性を与える軸径を $d+h$ とし て 3 つの節点 1, 2, 3 のそれぞれに幅 $h/4, h/2, h/4$ のディスク要素が結合されているモデルである.

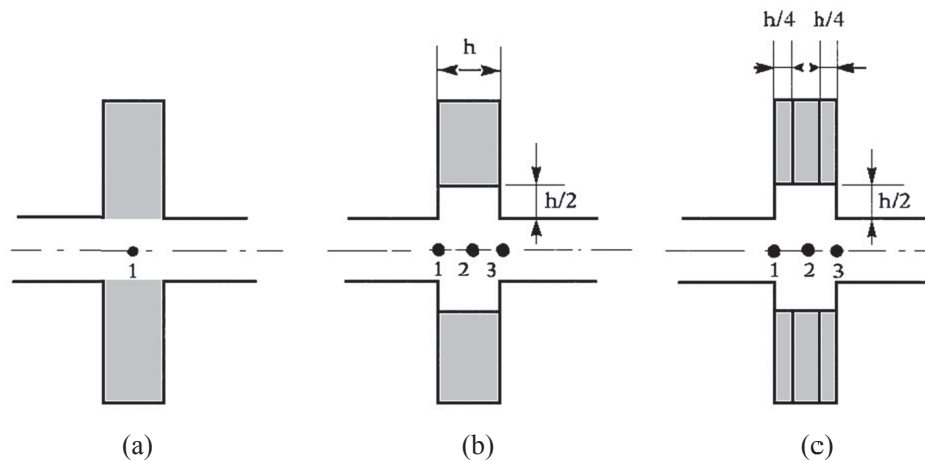


Fig. 1.5 Conventional method of considering shrink fit effect to the bending stiffness

ディスクやスリーブの嵌め合いによる軸の曲げ剛性の増大が無視できる場合は図 1.5 (a) のモデル化が妥当と考えられる。一方、嵌め合いによる軸の曲げ剛性の増大が無視できない場合は図 1.5 (b), (c)の方法でモデル化すれば、同図(a)のモデルより妥当な振動特性を得ることができると考えられる。しかし、図 1.5 (b), (c)の方法では嵌め合いによる等価軸径の増分がディスクやスリーブの幅 h のみで与えられることの理論的な背景が不明である。

1.3 本研究の目的と概要

本研究では、計算負荷の小さい 1 次元梁の有限要素法を適用する、ロータの軸振動解析モデルを用いた軸振動解析の高精度化を図るために、次の四つのモデル化方法を確認することを目的としている。最初の三つは曲げ振動解析に関するものであり、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法、嵌め合い部のモデル化方法、および振動試験結果に基づいて振動解析モデルを高精度化する方法である。残る一つはねじり振動解析に関するものであり、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法である(図 1.6 参照)。

なお、1 次元の軸要素でモデル化される円形断面の中実軸を持つ等方性ロータを対象とし、回転軸には回転軸方向の引張・圧縮力と回転方向のトルクが作用していないものとする。さらに、弾性範囲に制限がないものとする。

また、本研究では、曲げ振動とねじり振動を分けて議論するため、曲げとねじりの連成振動は考慮の対象外とする。

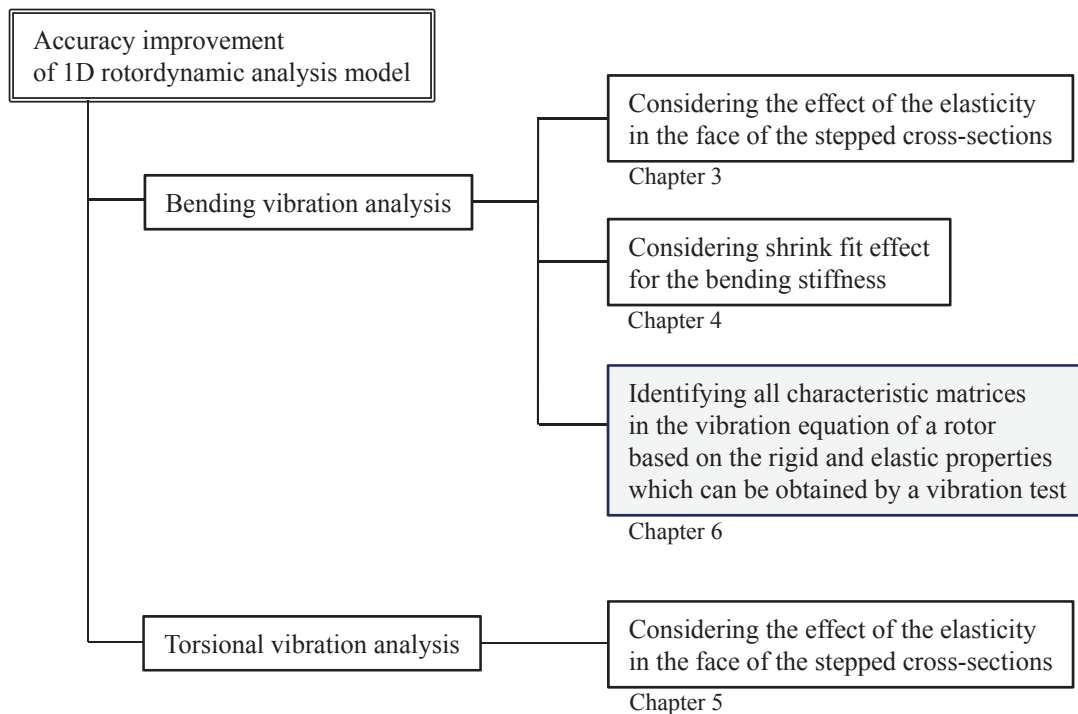


Fig. 1.6 Overview of the study

第2章では、1次元梁の有限要素法が適用されたロータの曲げ振動解析とねじり振動解析におけるモデル化の方法について述べる。

第3章では、軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化方法を提案する。まず、大径部と小径部の直径比および大径部の直径と軸方向長さに関する提案方法の適用範囲について検討する。次に、提案方法の詳細を示す。そして、提案方法の妥当性を検証するために、提案方法を適用した1次元梁モデルの解析結果を、3次元モデルの解析結果および実験結果と比較し、最後に、実機相当の回転機械として蒸気タービン発電機を取り上げて、提案方法を適用した場合と適用しない場合の固有値の差異を示して、提案方法による曲げ剛性の高精度化の効果を確認する。

第4章では、嵌め合い部の曲げ剛性をどの程度に見積もるのが妥当であるかについて検討した結果を述べる。まず、嵌め合い部の摩擦を考慮した有限要素解析によって嵌め合い部の曲げ剛性を検討する。次に、実験による検証結果を示す。

第5章では、軸直径変化部のねじり剛性の高精度化方法を提案する。まず、提案方法の適用範囲について検討する。次に、提案方法の詳細を示す。そして、提案方法の妥当性を検証するために、提案方法を適用した1次元梁モデルの解析結果を3次元モデルの解析結果と比較する。最後に、実機相当の回転機械として蒸気タービン発電機を取り上げて、提案方法を適用した場合と適用しない場合の固有値の差異を示し、提案方法によるねじり剛

性の高精度化の効果を確認する。

第6章では、振動試験結果に基づいた軸振動解析モデルの高精度化方法について述べる。まず、特性行列の同定方法の概要を述べ、次に具体的な同定手順を説明する。その次に、剛体特性と弾性特性に誤差を持つ解析モデルの具体的な高精度化例として、模擬の実測値によって4段の遠心圧縮機ロータのモデルの特性行列を同定した結果を示す。

一つ目の課題である、計算負荷が小さく高精度な軸振動（曲げ振動とねじり振動）解析手法の開発において、曲げ振動解析に関しては軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法と嵌め合い部のモデル化方法を確立し、ねじり振動解析に関しては軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法を確立した。曲げ振動解析モデルの高精度化では、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法として、軸直径変化部の小径軸側に適切な長さの要素を設けて、その要素の曲げ剛性を適切に弱める方法を確立し、嵌め合い部のモデル化方法としては、嵌め合い部の等価な曲げ剛性を与える軸の外径を、嵌め合わせるスリーブの外径とする方法を示した。ねじり振動解析モデルの高精度化では、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法として、軸直径変化部の小径軸側に適切な長さの要素を設けて、その要素のねじり剛性を適切に弱める方法を確立した。

二つ目の課題である、実験モード解析結果に基づいてロータの振動解析モデルを高精度化する方法の開発に対しては、曲げ振動解析モデルについて、質量、重心位置、慣性モーメントと、固有振動数、固有モードに関する情報から、誤差を含んだ全ての材料特性値を同時に高精度化して、振動方程式における全ての特性行列（質量行列、減衰行列、剛性行列、およびジャイロ行列）を同定する方法を確立した。

参考文献

- Balmes, E., Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization, International Modal Analysis Conference (1996).
- Ewins, D. J., Modal testing, theory, practice, and application, John Wiley and Sons, Inc. (1984).
- 林 巖, 岩附 信行, 牧 泰希, 軸一体円板の固有振動モードについて (第2報 円板と軸の境界部における弾性境界条件式のばね定数), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.56, No.524 (1990), pp. 952-957.
- Ishida, Y. and Yamamoto, T., Liner and nonlinear rotordynamics – A modern treatment with applications (2nd enlarged and improved edition), WILEY-VCH (2012), pp. 351-371.
- 石原 国彦, 田中 道雄, 山崎 洋文, タービン動翼に加わる流体励振力に関する研究 : 第1報, 実験方法と結果, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 56, No. 528 (1990), pp. 2390-2396.
- 岩壺 卓三, ロータ・軸受系の振動に及ぼす誤差の影響, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 46, No.405, (1980), pp. 493-500.
- 岩壺 卓三, 本岡 直人, 川井 良次, ラビリンスシールを有する回転軸の不安定振動 : 第1報, 液体モデルによるシール内流体力の実験および理論による解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 49, No.441, (1983), pp. 719-726.
- 加川 幸雄, 石川 正臣, モーダル解析入門, オーム社 (1987).
- 金子 康智, 間瀬 正隆, 藤田 勝久, 長嶋 利夫, ミスチューンがある翼・ディスク系の応答解析, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 58, No. 547 (1992), pp. 744-749.

- 神吉 博, 川西 通裕, 小野 耕司, LMI 最適化を用いたロータバランシング法, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 65, No. 634 (1999), pp. 2218-2225.
- 菊地 勝昭, 多軸受多円板回転軸系の不つりあい振動の解析, 日本機械学会誌, Vol. 72, No.610 (1969), pp. 1556-1563.
- 小堀 与一, タービン車軸の曲げこわさと固有振動数の模型実験, 日本機械学会誌, Vol.32, No.243 (1966), pp.1675-1681.
- Lalanne, M. and Ferraris, G., Rotordynamics prediction in engineering (second edition), pp. 132-134, JOHN WILEY & SONS (1998).
- Maia, N. M. M., Silva, J. M. M., Theoretical and experimental modal analysis, John Wiley & Sons, Inc. (1997).
- 松下 修己, 井田 道秋, 弾性ロータの回転次数比応答解析, 日本機械学会論文 C 編, Vol. 50, No. 452 (1984), pp. 626-634.
- 松下 修己, 小林 正生, 古池 治孝, 神吉 博, 田中 正人, 続 回転機械の振動—実機の振動問題と振動診断, コロナ社 (2012), p. 287
- 松下 修己, 関口 浩一, 須藤 正庸, 芹沢 幸男, マルチバランス圧縮機の静粛化, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 58, No. 550 (1992), pp. 1848-1853.
- 松下 修己, 田中 正人, 神吉 博, 小林 正生, 回転機械の振動—実用的振動解析の基本, コロナ社 (2009), p. 97.
- 三輪 修三, 弾性ロータのつりあわせ, 日本機械学会論文集, Vol.37, No.297 (1971), pp. 949-958.
- 長松 昭男, モード解析入門, コロナ社 (1993).
- 西嶋 規世, 遠藤 彰, 山口 和幸, 回転機械の軸シールで発生する不安定流体力の数値解析 (シール長さギャップの影響), 日本機械学会論文集, Vol.80 (2014), No.816.
- Pestel, C. and Leckie, F. A., Matrix Method in Elasto Mechanics, McGraw-Hill (1963)
- 塩幡 宏規, 藤沢 二三夫, 多軸受回転軸系のつりあわせ法 : 第 1 報, 多面多速度つりあわせ, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 45, No.391 (1979), pp. 275-284.
- 白木 万博, 神吉 博, 安田千秋, 新コンピュータバランスシステムの開発, 三菱重工技報, 17 巻, 2 号 (1980), pp. 120-129.
- 高田 昌二, 舟竹 良雄, 稲垣 嘉之, 軸直径変化部を有するロータの曲げ振動モードに関する振動計算の高精度簡易モデルの提案, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.75, No.752 (2009), pp.824-829.
- 内海 政春, 川崎 聡, 瀧田 純也, 島垣 満, 安達 和彦, 井上 剛志, モンテカルロ法と実験計画法によるロケットターボポンプ用ロータの軸形状の最適設計, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2013 講演論文集 (2013).
- 矢鍋 重夫, 田村 章義, 2 円板弾性ロータの多面つりあわせ, 日本機械学会論文集, Vol.35, No.272 (1969), pp. 742-750.
- 吉本 堅一, 松下 修己, Mathematica で学ぶ振動とダイナミクスの理論, 森北出版 (2004), p. 31.
- Zutavern, Z. S. and Childs, D. W., Identification of rotordynamic forces in a flexible rotor system using magnetic bearings, Transactions of the ASME Vol. 130 (2008), pp. 022504/1-6.

第2章 ロータの曲げ振動解析とねじり振動解析のための1次元梁の有限要素モデル

2.1 緒言

本研究では、中実軸を対象とした、1次元梁の有限要素法を適用した曲げ振動解析モデルとねじり振動解析モデルの高精度化を目的としている。そこで、本章ではロータの曲げ振動とねじり振動の1次元梁の有限要素解析モデルのモデル化方法について概説する。

2.2節では、曲げ振動の解析モデルについて、対象とする自由度、運動方程式、回転軸の有限要素モデル、ディスクの有限要素モデル、ロータ全体の有限要素モデルについて説明する（長江, 後藤, 2013）。

2.3節では、ねじり振動の解析モデルについて、対象とする自由度、運動方程式、回転軸の有限要素モデル、ディスクの有限要素モデル、ロータ全体の有限要素モデルについて説明する。

2.2 曲げ振動の解析モデル

2.2.1 曲げ振動解析モデルの自由度

軸とディスクで構成されるロータは、 n 個の節点を持ち、各節点は図2.1の座標系において x , y 方向の並進変位と x , y 軸周りの回転角 θ_x , θ_y の計4つの自由度を持つものとする。なお、回転角は各座標軸の右ねじ方向を正とする。

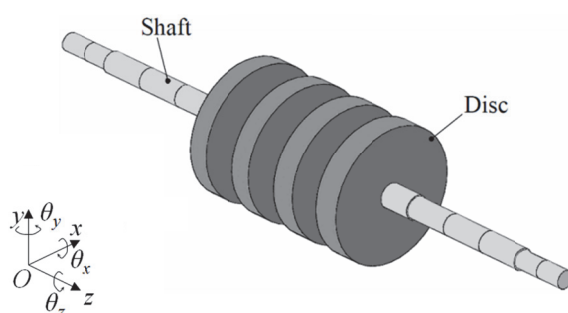


Fig. 2.1 Example of a rotor model and definition of coordinate system

2.2.2 曲げ振動解析モデルの運動方程式

本研究では、曲げ振動解析に用いるモデルとして Friswell, M. I.ら（Friswell, et al., 2010）のものを用いる。軸受やシール部の付加質量が無視できる場合、軸受で支持され、回転数 Ω で回転するロータの曲げ振動の運動方程式は式(2.1)で表される。ここで、 $[]$ は行列を表し、 $\{ \}$ はベクトルを表す。

$$[M_r]\{\ddot{X}\} + ([C_r] + [C_b] + \Omega[G_r])\{\dot{X}\} + ([K_r] + [K_b])\{X\} = \{F\} \quad (2.1)$$

$[M_r]$: ロータの質量行列, サイズ $4n \times 4n$, 対称行列

$[C_r]$: ロータの減衰行列, サイズ $4n \times 4n$, 対称行列

$[C_b]$: 軸受の減衰行列, サイズ $4n \times 4n$

$[G_r]$: ロータのジャイロ行列, サイズ $4n \times 4n$, 歪対称行列

$[K_r]$: ロータの剛性行列, サイズ $4n \times 4n$, 対称行列

$[K_b]$: 軸受の剛性行列, サイズ $4n \times 4n$

$\{X\}$: 変位ベクトル, サイズ $4n \times 1$,

$$\{X\} = \{x_1, y_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, x_2, y_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, x_n, y_n, \theta_{xn}, \theta_{yn}\}^T, \quad T \text{ は転置を表す記号}$$

$\{F\}$: 力ベクトル, サイズ $4n \times 1$,

$$\{F\} = \{f_{x1}, f_{y1}, M_{\theta_{x1}}, M_{\theta_{y1}}, f_{x2}, f_{y2}, M_{\theta_{x2}}, M_{\theta_{y2}}, \dots, f_{xn}, f_{yn}, M_{\theta_{xn}}, M_{\theta_{yn}}\}^T,$$

f は力 (N), M はモーメント (Nm)

軸受の剛性行列 $[K_b]$ と減衰行列 $[C_b]$ は, サイズ $4n \times 4n$ のゼロ行列の軸受の当該節点部分の要素にそれぞれ軸受の剛性と減衰が定義されたものである. 式 (2.1) で表されるローター軸受系の危険速度や安定性などを解析によって評価する場合, 解析結果の精度は, ロータの特性行列 $[M_r]$, $[C_r]$, $[K_r]$, $[G_r]$ と軸受特性 $[K_b]$, $[C_b]$ の精度に依存する.

自由支持された非回転時のロータの運動方程式は, 式 (2.1) から軸受剛性項 $[K_b]$, 軸受減衰項 $[C_b]$, ロータのジャイロ項 $[G_r]$ を取り除いて式 (2.2) で表される.

$$[M_r]\{\ddot{X}\} + [C_r]\{\dot{X}\} + [K_r]\{X\} = \{F\} \quad (2.2)$$

2.2.3 曲げ振動解析モデルにおける回転軸のモデル化

本研究では, せん断変形と回転慣性 (たわみ曲線の傾きに伴う慣性モーメント) を考慮したティモシェンコ梁で回転軸の要素をモデル化する. また, 一般に付録 A-1 に示されるように密度, ポアソン比, ヤング率などの材料特性値で定義される運動方程式における特性行列の要素を, 定義式の煩雑さを低減するために, 曲げ剛性と新たに導入した質量係数と慣性係数などによって定義する.

密度 ρ (kg/m³), ポアソン比 ν , 外径 d_e (m), 長さ l_e (m) の軸要素の質量係数 α_m と慣性係数 α_i をそれぞれ式 (2.3) と式 (2.4) で定義する.

$$\alpha_m = \frac{\rho A_e l_e}{840} = \frac{\rho \pi d_e^2 l_e}{3360} \quad (2.3)$$

A_e : 断面積 (m²), $A_e = \pi d_e^2 / 4$

$$\alpha_i = \frac{\rho I_e}{30 l_e} = \frac{\rho \pi d_e^4}{1920 l_e} \quad (2.4)$$

I_e : 断面 2 次モーメント (m⁴), $I_e = \pi d_e^4 / 64$

せん断係数 τ_e は式 (2.5) で定義される.

$$\tau_e = \frac{12 E I_e}{\kappa G A_e l_e^2} = \frac{(7 + 6\nu) d_e^2}{4 l_e^2} \quad (2.5)$$

E : ヤング率 (N/m²)

κ : せん断定数 (無次元), $\kappa = 6(1 + \nu) / (7 + 6\nu)$

ν : ポアソン比 (無次元)

G : 横弾性係数 (N/m²), $G = E / \{2(1 + \nu)\}$

式 (2.6) に示されるように, 軸要素の質量行列 $[M_{se}]$ はサイズ 8×8 の対称行列であり, $[M_{se}]$ の要素 m_{ij} ($i=1,2,\dots,8, j=1,2,\dots,8$) は質量係数 α_m , 慣性係数 α_i , せん断係数 τ_e , および長さ l_e の関数として定義される.

$$[M_{se}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{18} \\ & m_{22} & \cdots & m_{28} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{Sym.} & & & m_{88} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$m_{12} = m_{13} = m_{16} = m_{17} = m_{24} = m_{25} = m_{28} = m_{34} = m_{35} = m_{38} = m_{46} = m_{47} = m_{56} = m_{57} \\ = m_{68} = m_{78} = 0$$

$$m_{11} = m_{22} = m_{55} = m_{66} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (312 + 558\tau_e + 280\tau_e^2) + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot 36$$

$$m_{14} = -m_{23} = -m_{58} = m_{67} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (44 + 77\tau_e + 35\tau_e^2) \cdot l_e + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (3 - 15\tau_e) \cdot l_e$$

$$m_{15} = m_{26} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (108 + 252\tau_e + 140\tau_e^2) - \left\{ \alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot 36$$

$$m_{18} = -m_{27} = m_{36} = -m_{45} \\ = -\left\{ \alpha_m / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (26 + 63\tau_e + 35\tau_e^2) \cdot l_e + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (3 - 15\tau_e) \cdot l_e$$

$$m_{33} = m_{44} = m_{77} = m_{88} = \left\{ \alpha_m / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (8 + 14\tau_e + 7\tau_e^2) \cdot l_e^2 + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (4 + 5\tau_e + 10\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

$$m_{37} = m_{48} = -\left\{ \alpha_m / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (6 + 14\tau_e + 7\tau_e^2) \cdot l_e^2 + \left\{ \alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (-1 - 5\tau_e + 5\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

式 (2.7) に示されるように、軸要素の剛性行列 $[K_{se}]$ はサイズ 8×8 の対称行列であり、 $[K_{se}]$ の要素 k_{ij} はせん断係数 τ_e 、曲げ剛性 EI_e (ヤング率 E と断面 2 次モーメント I_e の積)、および長さ l_e の関数として定義される。

$$[K_{se}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ & k_{22} & \cdots & k_{28} \\ & & \ddots & \vdots \\ Sym. & & & k_{88} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$k_{12} = k_{13} = k_{16} = k_{17} = k_{24} = k_{25} = k_{28} = k_{34} = k_{35} = k_{38} = k_{46} = k_{47} = k_{56} = k_{57} = k_{68} = k_{78} = 0$$

$$k_{11} = k_{22} = k_{55} = k_{66} = -k_{15} = -k_{26} = 12EI_e / \left\{ (1 + \tau_e) \cdot l_e^3 \right\}$$

$$k_{14} = k_{18} = -k_{23} = -k_{27} = k_{36} = -k_{45} = -k_{58} = k_{67} = 6EI_e / \left\{ (1 + \tau_e) \cdot l_e^2 \right\}$$

$$k_{33} = k_{44} = k_{77} = k_{88} = EI_e (4 + \tau_e) / \left\{ (1 + \tau_e) \cdot l_e \right\}$$

$$k_{37} = k_{48} = EI_e (2 - \tau_e) / \left\{ (1 + \tau_e) \cdot l_e \right\}$$

式 (2.8) に示されるように、軸要素のジャイロ行列 $[G_{se}]$ はサイズ 8×8 の歪対称行列であり、 $[G_{se}]$ の要素 g_{ij} は慣性係数 α_i 、せん断係数 τ_e 、および長さ l_e の関数として定義される。

$$[G_{se}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{18} \\ & g_{22} & \cdots & g_{28} \\ & & \ddots & \vdots \\ Skew \ sym. & & & g_{88} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$g_{11} = g_{14} = g_{15} = g_{18} = g_{22} = g_{23} = g_{26} = g_{27} = g_{33} = g_{36} = g_{37} = g_{44} = g_{45} = g_{48} = g_{55} \\ = g_{58} = g_{66} = g_{67} = g_{77} = g_{88} = 0$$

$$g_{12} = -g_{16} = g_{25} = g_{56} = \left\{ 2\alpha_i / (1 + \tau) \right\} \cdot 36$$

$$g_{13} = g_{17} = g_{24} = g_{28} = g_{35} = g_{46} = -g_{57} = -g_{68} = -\left\{ 2\alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (3 - 15\tau) \cdot l_e$$

$$g_{34} = g_{78} = \left\{ 2\alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (4 + 5\tau_e + 10\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

$$g_{38} = -g_{47} = \left\{ 2\alpha_i / (1 + \tau_e)^2 \right\} \cdot (-1 - 5\tau_e + 5\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

軸要素の減衰行列 $[C_{se}]$ は比例減衰定数 γ を用いて式 (2.9) で近似されるものとする.

$$[C_{se}] = [C_r] = \gamma[K_{se}] \quad (2.9)$$

回転軸全体の質量行列 $[M_{shaft}]$ (サイズ $4n \times 4n$) は, 図 2.2 に示すように, 1 番目の質量行列 $[M_{se1}]$ から $n-1$ 番目の質量行列 $[M_{se(n-1)}]$ を重ね合わせることによって構成され, 回転軸全体の剛性行列 $[K_{shaft}]$, 減衰行列 $[C_{shaft}]$, およびジャイロ行列 $[G_{shaft}]$ も同様にして構成される. ここで, 重ね合わせとは単純和であり, ばねの結合方法では並列結合に相当する.

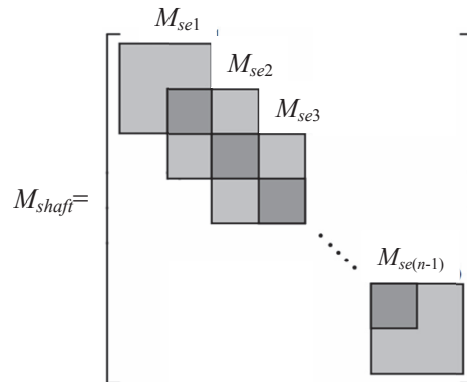


Fig. 2.2 Assembling mass matrix of beam element

2.2.4 曲げ振動解析モデルにおけるディスクのモデル化

ディスクは軸の曲げ剛性に影響を与えない剛体要素であり, 質量と慣性モーメントのみがロータの振動特性に影響を及ぼすものとして扱う.

1つのディスクの有限要素モデルはサイズ 4×4 の質量行列 $[M_{disc}]$ とサイズ 4×4 のジャイロ行列 $[G_{disc}]$ のみで定義される. 質量行列 $[M_{disc}]$ の要素は式 (2.10) で定義され, ジャイロ行列 $[G_{disc}]$ は式 (2.11) で定義される.

$$[M_{disc}] = \begin{bmatrix} m_{disc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{disc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{disc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{disc} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

m_{disc} : ディスクの質量 (kg)

J_{disc} : ディスクの直径軸周りの慣性モーメント (kgm^2)

$$[G_{disc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{pdisc} \\ 0 & 0 & -J_{pdisc} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

J_{pdisc} : ディスクの回転軸周りの極慣性モーメント (kgm^2)

ディスクの直径軸周りの慣性モーメント J_{disc} (kgm^2)とディスクの回転軸周りの極慣性モーメント J_{pdisc} (kgm^2)はそれぞれ式 (2.12) と式 (2.13) で表される.

$$J_{disc} = \frac{\pi}{64}(D_{out}^4 - D_{in}^4)\rho_{disc}t_{disc} + \frac{1}{12}m_{disc}t_{disc}^2 \quad (2.12)$$

D_{out} : ディスクの外径 (m)

D_{in} : ディスクの内径 (m)

m_{disc} : ディスクの質量 (kg), $m_{disc} = \pi\rho_{disc}(D_{out}^2 - D_{in}^2) \cdot t_{disc} / 4$

ρ_{disc} : ディスクの密度 (kg/m^3)

t_{disc} : ディスクの厚さ (m)

$$J_{pdisc} = \frac{\pi}{32}(D_{out}^4 - D_{in}^4)\rho_{disc}t_{disc} = 2J_{disc} - \frac{m_{disc}}{6}t_{disc}^2 \quad (2.13)$$

2.2.5 ロータ全体の曲げ振動解析モデル

ロータ全体の有限要素モデルの質量行列 $[M_r]$ は, 回転軸の質量行列 $[M_{shaft}]$ の当該節点部分にディスクの質量行列 $[M_{disc}]$ を足し合わせることで完成する. ロータ全体の有限要素モデルの剛性行列 $[K_r]$ は, 回転軸の剛性行列 $[K_{shaft}]$ と同一である. また, ロータ全体のジャイロ行列 $[G_r]$ は, 軸のジャイロ行列 $[G_{shaft}]$ の当該節点部分にディスクのジャイロ行列 $[G_{disc}]$ を足し合わせることで完成する.

2.3 ねじり振動の解析モデル

2.3.1 ねじり振動解析モデルの自由度

ねじり振動の解析モデルでは, z 軸周りの回転角 θ_z の 1 自由度のみを対象とする (図 2.1 参照).

2.3.2 ねじり振動解析モデルの運動方程式

減衰力が作用しない場合のねじり振動解析モデルは, 式 (2.14) で表される.

$$[J_p]\{\ddot{\theta}_z\} + [K_t]\{\theta_z\} = \{T\} \quad (2.14)$$

$[J_p]$: ロータの極慣性モーメント行列, サイズ $n \times n$, 対称行列

$[K_t]$: ロータのねじり剛性行列, サイズ $n \times n$, 対称行列

$\{\theta_z\}$: 角度変位ベクトル, サイズ $n \times 1$,

$$\{\theta_z\} = \{\theta_{z1}, \theta_{z2}, \dots, \theta_{zn}\}^T$$

$\{T\}$: トルクベクトル, サイズ $n \times 1$,

$$\{T\} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}^T, \quad T \text{ はトルク (Nm)}$$

2.3.3 ねじり振動解析モデルにおける回転軸のモデル化

軸要素の極慣性モーメント行列 $[J_{pe}]$ は, サイズ 2×2 の対称行列であり, $[J_{pe}]$ の要素は式 (2.15) で定義される (小松, 2009).

$$[J_{pe}] = \begin{bmatrix} \frac{\rho I_{pe} l_e}{3} & \frac{\rho I_{pe} l_e}{6} \\ \frac{\rho I_{pe} l_e}{6} & \frac{\rho I_{pe} l_e}{3} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ρ : 回転軸の密度 (kg/m^3)

I_{pe} : 回転軸要素の断面 2 次極モーメント (m^4), $I_{pe} = \pi d_e^4 / 32$

l_e : 回転軸要素の長さ (m)

軸要素のねじり剛性行列 $[K_{te}]$ は, サイズ 2×2 の対称行列であり, $[K_{te}]$ の要素は式 (2.16) で定義される (小松, 2009).

$$[K_{te}] = \begin{bmatrix} \frac{GI_{pe}}{l_e} & -\frac{GI_{pe}}{l_e} \\ -\frac{GI_{pe}}{l_e} & \frac{GI_{pe}}{l_e} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

G : 横弾性係数 (N/m^2)

回転軸全体の極慣性モーメント $[J_{pshaft}]$ (サイズ $n \times n$) は, 曲げ振動モデルの質量行列と同様に, 1 番目の極慣性モーメント行列 $[J_{pe1}]$ から $n-1$ 番目の極慣性モーメント行列 $[J_{pe(n-1)}]$ を重

ね合わせることによって構成される (図 2.2 参照). 回転軸全体のねじり剛性行列 $[K_I]$ も同様に構成される. ここで, 重ね合わせとは単純和であり, ばねの結合方法では並列結合に相当する.

2.3.4 ねじり振動解析モデルにおけるディスクのモデル化

1つのディスクの有限要素モデルはサイズ 2×2 の極慣性モーメント行列 $[J_{pdisc}]$ のみで定義される. 式 (2.17) に示されるように, 極慣性モーメント行列 $[J_{pdisc}]$ の要素は密度 ρ_{disc} , 回転軸周りの断面 2 次極モーメント I_{pdisc} , および厚さ t_{disc} の関数として定義される.

$$[J_{pdisc}] = \begin{bmatrix} \frac{\rho_{disc} I_{pdisc} t_{disc}}{3} & \frac{\rho_{disc} I_{pdisc} t_{disc}}{6} \\ \frac{\rho_{disc} I_{pdisc} t_{disc}}{6} & \frac{\rho_{disc} I_{pdisc} t_{disc}}{3} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ρ_{disc} : ディスクの密度 (kg/m^3)

I_{pdisc} : ディスクの回転軸周りの断面 2 次極モーメント (m^4), $I_{pdisc} = \pi(D_{out}^4 - D_{in}^4)/32$

t_{disc} : ディスクの厚さ (m)

2.3.5 ロータ全体のねじり振動解析モデル

ロータ全体の有限要素モデルの極慣性モーメント行列 $[J_p]$ は, 回転軸の極慣性モーメント行列 $[J_{pshaft}]$ の当該節点部分にディスクの極慣性モーメント行列 $[J_{pdisc}]$ を足し合わせることで完成する. ロータ全体の有限要素モデルのねじり剛性行列は, 回転軸のねじり剛性行列 $[K_I]$ と同一である.

2.4 結言

中実円形断面形状の回転軸を持つロータについて, 曲げ振動解析とねじり振動解析のための, 1次元梁の有限要素解析モデルのモデル化方法について概説した.

参考文献

- Friswell, M.I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D. and Lees, A. W., Dynamics of rotating machines, Cambridge University Press, (2010).
 小松 敬治, 機械構造振動学 MATLAB による有限要素法と応答解析, 森北出版 (2009).
 長江 信頭, 後藤 知伸, ロータの振動方程式における特性行列の実験同定 (理論とシミュレーション), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.803 (2013), pp.2314-2328.

第3章 軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化

3.1 緒言

既存の1次元梁の有限要素解析モデル（以下、1D FEMモデルと表記）のモデル化方法では、軸直径変化部における大径軸断面と小径軸との固定度低下が考慮されないため、その部分の曲げ剛性を過大評価することになる。1.2.1節で述べた1Dモデルにおける回転軸の軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化に関する既存研究のうち、高田ら（高田他, 2009）によって提案された、回転軸の軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を、弾性変形相当の曲げ剛性を梁の曲げ剛性に直列結合する方法を基にして、1次元梁の有限要素法が適用された軸振動解析環境に適用が容易な方法を提案する。

3.2節では、従来研究では示されていない軸直径比 β について、弾性変形を考慮すべき大径部の幅径比 h/d_0 の範囲を検討する。

3.3節では提案するモデル化方法について述べる。まず、軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性について検討し、次に、従来研究で示されている、回転ばねの直列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデルを、1D FEMモデルの場合について検討する。そして、回転ばねの並列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデルを提案する。最後に、等価な曲げ剛性を与える軸径について検討する。

3.4節では、提案方法の妥当性の検証を行う。まず、参照とする3次元有限要素モデル（以下、3D FEMモデルと表記）の精度を上げる方法を述べる。次に、曲げモードの固有振動数について、提案方法を適用した1D FEMモデルによる解析結果と、参照となる3D FEMモデルによる解析結果の比較を行う。そして、静荷重による曲げ変形について、3D FEMモデルに対する提案方法を適用した1D FEMモデルの解析精度を評価する。さらに、曲げモードの固有振動数の実験結果を参照値として提案方法の妥当性を評価する。最後に、具体例として実機相当の解析モデルについて、提案方法を適用した場合と適用しない場合の曲げモードの固有振動数を比較して、どの程度の差異が生じるかを示す。

3.2 適用範囲の検討

著者が提案する軸直径変化部の曲げ剛性の高精度化法は、既存研究である高田らの方法を基にしたものであるため、適用できる軸直径比 β と大径部の幅径比 h/d_0 の範囲は1.2.1.2節で示した $\beta=0.3175$ の場合は $h/d_0 \geq 0.2$ である。既存研究では、 β が0.3175と異なる場合の式(1.4)が成り立つ h/d_0 の範囲については検討されていないため、図1.4の3次元有限要素モデルを用いて、軸直径比 $\beta=0.3175$ 、 $\beta=0.5650$ 、および $\beta=0.7874$ の場合について検討を行った。

図1.3の3D FEMモデルの寸法は $d_0=25.4\text{mm}$ 、 $l_2=12.7\text{mm}$ とし、材料特性はヤング率 $E=2.050 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、横弾性係数 $G=7.880 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3008$ とした。

3D FEMモデルによる、式(1.2)における α と h/d_0 の関係の算出手順は次の通りである。

図 1.3 において座標原点を A-A 断面の軸中心におき， x 軸周りの曲げモーメント M が小径軸の先端の座標 $(0, 0, l_2)$ に作用したときの yz 平面における小径軸のたわみ曲線を求めて，式 (3.1) の 3 次式で近似する．

$$y(z) = c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z, \quad (0 \leq z \leq l_2) \quad (3.1)$$

c_1, c_2, c_3 : たわみ曲線の係数

A-A 断面の傾き角 ψ は，座標原点での傾き $dy(0)/dz=c_3$ から

$$\psi = \tan^{-1} c_3 \quad (3.2)$$

で与えられる．よって，大径部の軸方向長さ（円板の厚さ） h を変えて下記の (a) から (d) の手順を実施することで 1 つの β について α と h/d_0 の関係を求めることができる．

- (a) 図 1.3 の 3D FEM モデルで小径軸の先端に曲げモーメント M を与えて小径軸のたわみ曲線を求める．
- (b) 小径軸のたわみ曲線を式 (3.1) の 3 次式で曲線適合して原点での傾き c_3 を求める．
- (c) 式 (3.2) によって A-A 断面の傾き角 ψ を求める．
- (d) 式 (1.2) によって α を求める．

図 3.1，図 3.2，および図 3.3 はそれぞれ，軸直径比 $\beta=0.3175$ ， $\beta=0.5650$ ，および $\beta=0.7874$ の場合について α と h/d_0 の関係を求めた結果である．これらの図には式 (1.3) と式 (1.4) の値をそれぞれ青色と緑色の実線で示した．式 (1.4) が成り立つ h/d_0 の範囲は，いずれの β の場合にも，およそ $h/d_0 \geq 0.2$ である．また， β が大きくなる程，式 (1.4) による近似精度が低下している．

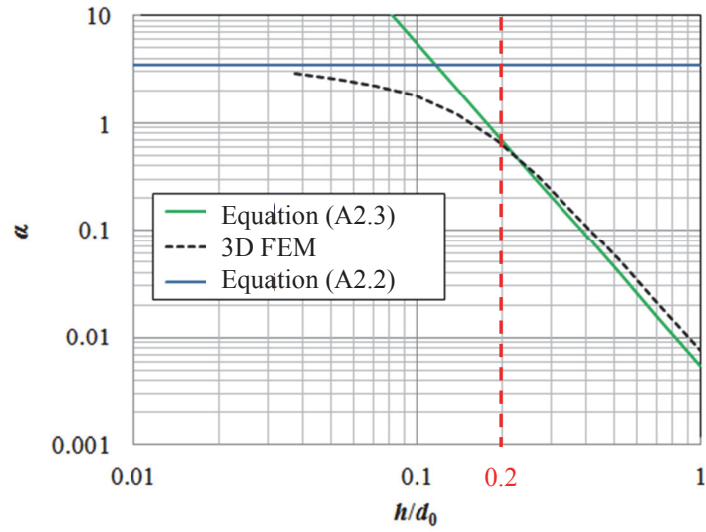


Fig. 3.1 Relationship between α and h/d_0 ($\beta= 0.3175$)

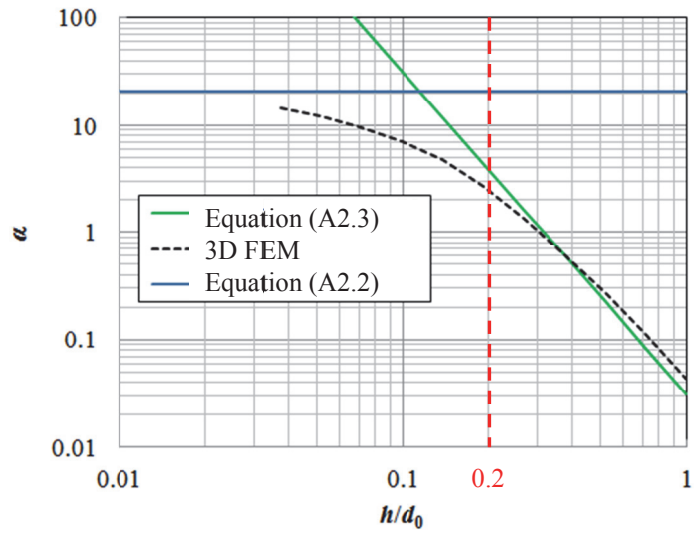


Fig. 3.2 Relationship between α and h/d_0 ($\beta= 0.5650$)

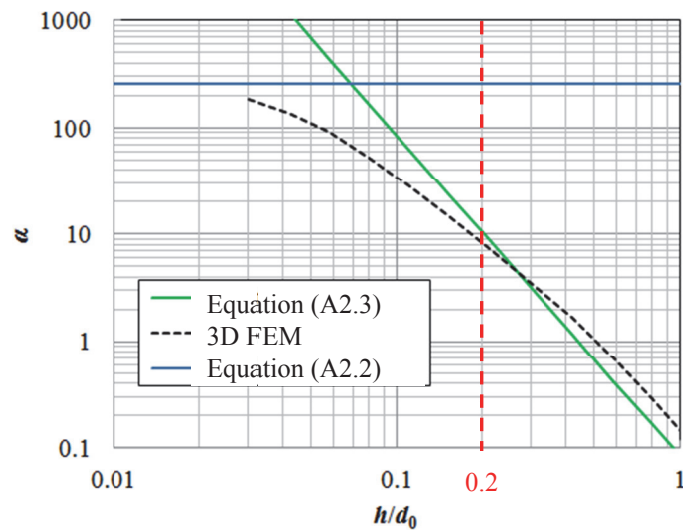


Fig. 3.3 Relationship between α and h/d_0 ($\beta=0.7874$)

以上の検討より，次節で提案する軸直径変化部のモデル化手法の適用範囲は， β によらず，およそ $h/d_0 \geq 0.2$ であることが明らかになった。

3.3 軸直径変化部断面の弾性変形による見かけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル化方法

本節では，一般的な1次元梁の有限要素モデル（1D FEM モデル）を用いた軸振動解析ソフトウェアに適用可能な，軸直径変化部断面のみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル化方法について述べる。

断面が一様な軸要素では，どの軸要素においても，その両端における曲げ剛性は等しいことが望ましい。しかし，軸直径変化部の要素においては，曲げ剛性の低下があるため，その両端における曲げ剛性が異なってしまう。そこで，小径側に有限長さの軸要素を設け，その要素の曲げ剛性を適切に設定することにより，軸直径変化部のみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮できるモデル化方法を提案する。

3.3.1 軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性

小径軸の先端に作用する曲げモーメント M によって生じる軸直径変化部断面の傾き角 ψ （図 1.3 参照）を，片持ち梁のたわみ角と等価とにおいて，軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性を求める。

曲げモーメント M と軸直径変化部断面のたわみ角 ψ の関係は式 (1.2) で与えられる。

図 3.4 に示される長さ l 、ヤング率 E 、断面 2 次モーメント I_d の一様断面の片持ち梁が先端に曲げモーメント M を受けたときの先端のたわみ角 ψ は、式 (3.3) で与えられる (中沢他, 1973a).

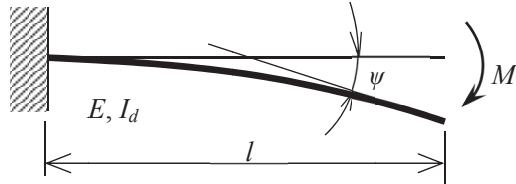


Fig. 3.4 Slope of cantilever beam due to bending moment

$$\psi = \frac{Ml}{EI_d} \quad (3.3)$$

式 (1.2) と式 (3.3) から、軸直径変化部断面の弾性変形の等価曲げ剛性 EI_d を表す式 (3.4) が得られる.

$$EI_d = Ech^3l \quad (3.4)$$

3.3.2 回転ばねの直列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形による見かけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル

1D FEM モデルにおいて、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデルを図 3.5 に示す.

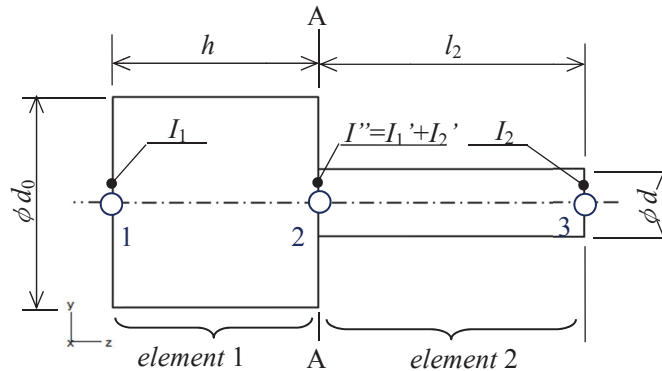


Fig. 3.5 1D beam model for bending in consideration for elasticity of stepped cross-section

3つの節点で2つの軸要素を定義し，大径軸右端の節点2の曲げ剛性 EI_1' と小径軸の左端の節点2の曲げ剛性 EI_2' をそれぞれ式 (3.5) と式 (3.6) の直列結合によって求める．

$$EI_1' = E \frac{I_1 I_d}{I_1 + I_d} \quad (3.5)$$

$$EI_2' = E \frac{I_2 I_d}{I_2 + I_d} \quad (3.6)$$

次に，大径軸と小径軸の結合部（節点2）の曲げ剛性を，通常の重ね合わせ，すなわち並列結合によって求める．

$$EI'' = EI_1' + EI_2' = E \left(\frac{I_1 I_d}{I_1 + I_d} + \frac{I_2 I_d}{I_2 + I_d} \right) \quad (3.7)$$

式 (3.5)，(3.6)，(3.7) を図 3.6(a) と図 3.6(b) を用いて説明する．

図 3.6(a) は，2つの軸要素について1つの回転自由度に着目した慣性モーメントと回転ばねの結合を模式的に示したものである．

式 (2.1) の運動方程式における変位ベクトル $\{X\}$ の x 軸周りの回転角 θ_x のみを考えると，式 (2.7) より，節点1と節点2で定義される要素1の回転ばね k_1 と節点2と節点3で定義される要素2の回転ばね k_2 はそれぞれ， $k_1 = EI_1(4+\tau)/\{(1+\tau) \cdot h\}$ と $k_2 = EI_2(4+\tau)/\{(1+\tau) \cdot l_2\}$ で与えられ，これらの回転ばねが図 2.2 に示される様に2つの要素が重複する節点2では重ね合わせ，すなわち並列結合されて k_1+k_2 となる．要素1と要素2の慣性モーメント m_1 と m_2 についても回転ばねと同様に重ね合わせられて2つの要素が重複する節点2では m_1+m_2 となる．また，一様断面の1つの軸要素の両端において質量，慣性モーメント，並進ばね，回転ばねは同一の値となる．但し，図 3.6(a) では軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下は考慮されていない．

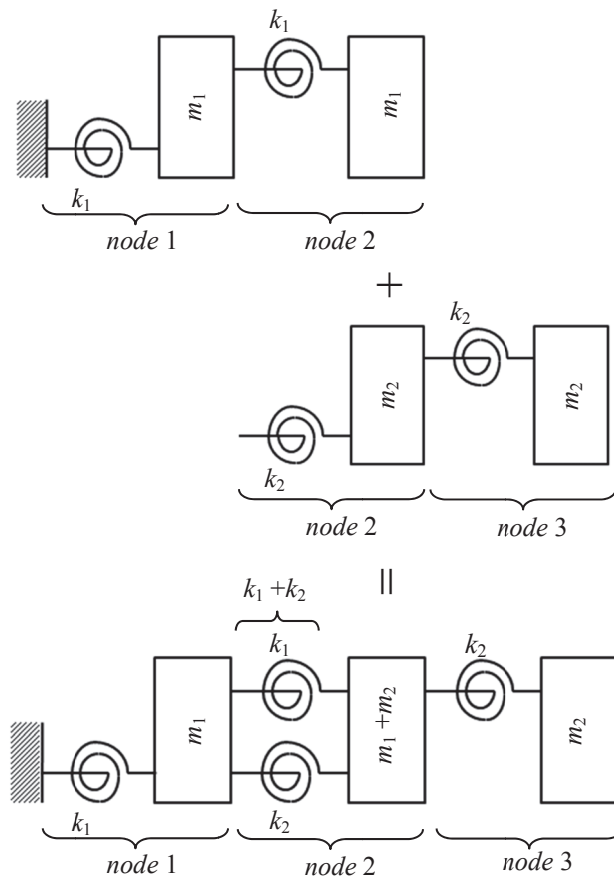


Fig. 3.6 (a) Assembling rotational springs for two adjacent elements in 1D FEM model
 - Parallel connection of each rotational springs for two beam elements

一方、図 3.6(b)は、軸直径変化部の節点 2 における断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を、断面の弾性変形を表す回転ばね k_d を用いて、 k_1 と k_d の直列結合ばね $k_1 k_d / (k_1 + k_d)$ と k_2 と k_d の直列結合ばね $k_2 k_d / (k_2 + k_d)$ を並列結合したモデルで表したものであり、節点 2 における回転ばねは図 3.6(b)中に示される様に $k_1 k_d / (k_1 + k_d) + k_2 k_d / (k_2 + k_d)$ となる。

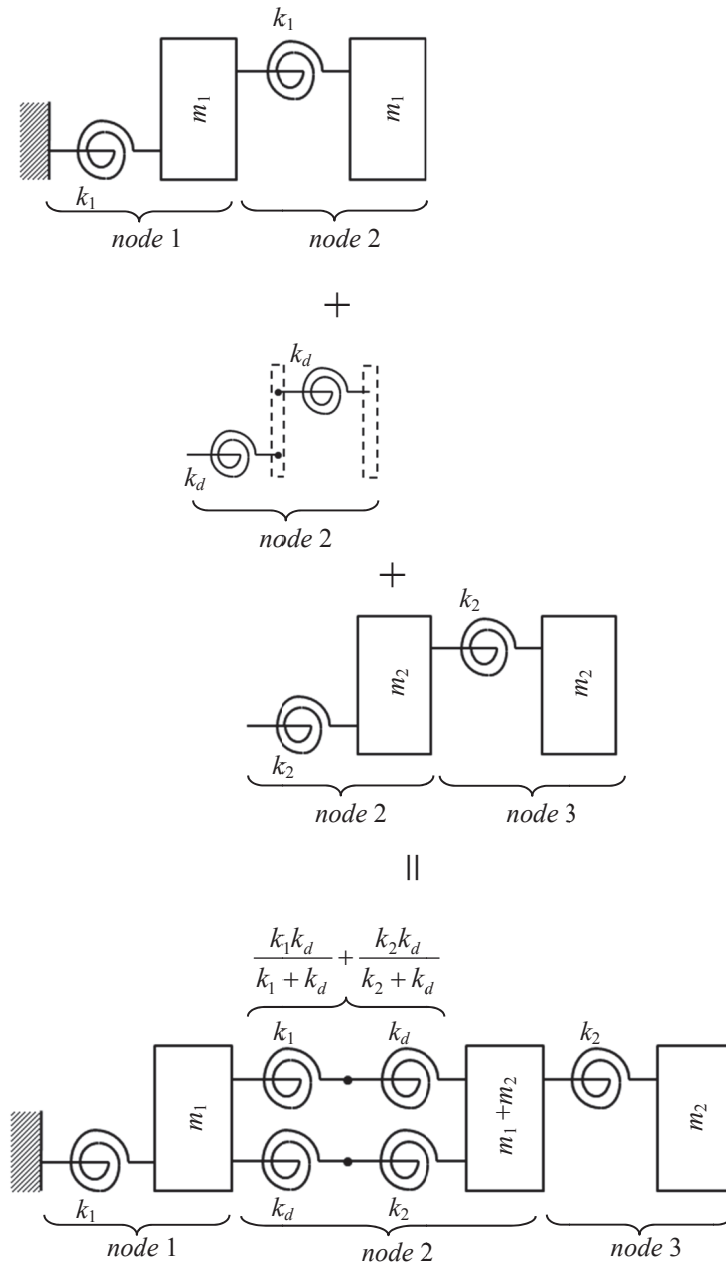


Fig. 3.6 (b) Assembling rotational springs for two adjacent elements in 1D FEM model
 - Parallel connection of each series-connected rotational springs for two beam elements

式 (3.7) において軸直径変化部断面の弾性変形を表す断面 2 次モーメント I_d は式 (3.4) で与えられるが、このままでは軸要素長 l によって I_d が変化してしまうため、妥当な l の値を検討する。式 (3.4) に式 (1.4) を代入すると円板の厚さ h が消去され、式 (3.8) に示される様に断面 2 次モーメント I_d は小径軸の要素の直径 d と長さ l のみで表される。

$$I_d = \frac{\pi}{18} d^3 l \quad (3.8)$$

断面 2 次モーメント I_d を小径軸の断面 2 次モーメント I_2 と等価とおくと、中実円形断面軸では

$$I_d = I_2 = \frac{\pi}{64} d^4 \quad (3.9)$$

となり、式 (3.8) と式 (3.9) より、軸直径変化部断面の弾性変形分と等価な曲げ剛性を与える小径軸の長さを表す式 (3.10) の条件が得られる。

$$l = \frac{9}{32} d \quad (3.10)$$

式 (3.10) は、曲げモーメントによる軸直径変化部断面の傾き角と小径軸のたわみ角が等価となる、小径軸の長さを示している。

式 (3.10) で与えられる長さを持つ直径 d の小径軸の要素の曲げ剛性 EI_2 が軸直径変化部断面の曲げ剛性 EI_d と等価であるため、

$$EI_d = EI_2 \quad (3.11)$$

とおくことができ、断面 A-A における曲げ剛性 EI_A を表す式 (3.7) は、式 (3.12) となる。

$$EI_A = EI'' = E \left(\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_2 I_2}{I_2 + I_2} \right) = E \left(\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \frac{I_2}{2} \right) \quad (3.12)$$

式 (3.12) によって、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮することができるが、大径軸要素、小径軸要素、共に軸要素の両端で曲げ剛性が異なるため ($EI_1 \neq EI_1'$, $EI_2 \neq EI_2'$)、一般的な 1D FEM モデルが適用された軸振動解析環境にこの方法を適用することは容易ではない。

3.3.3 回転ばねの並列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル

一般的な 1D FEM モデルで用いられている回転ばねの並列結合によって、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮することができるモデル化方法を提案する。

図 3.7 は、ここで提案する軸直径変化部のモデル化方法を示したものである。

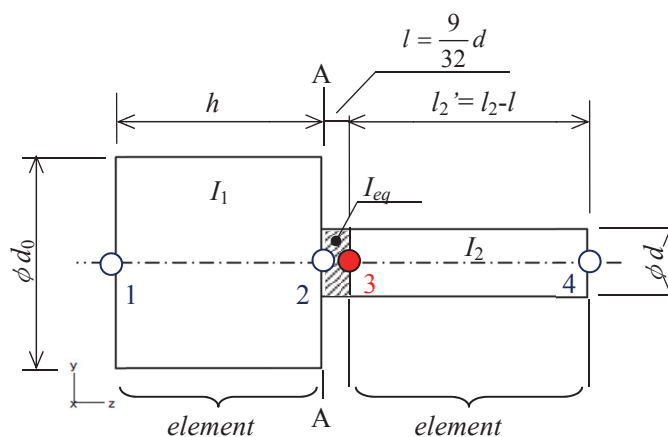


Fig. 3.7 1D beam model in consideration for elasticity of stepped cross-section using the method proposed by the author

まず、長さ $9d/32$ の軸要素を軸直径変化部の小径部に設ける。

次に、式 (3.12) で示される断面 A-A における曲げ剛性 EI_A を、一般的な 1D FEM モデルで用いられる重ね合わせ、すなわち並列結合で表すことを考える。図 3.7 において、長さ $9d/32$ の小径軸要素の等価曲げ剛性を EI_{eq} とおいて節点 2 と節点 3 で各々の曲げ剛性が並列結合され、節点 2, 3 の曲げ剛性が直列結合されたものが式 (3.13) であり、これは式 (3.12) と等価である。

$$EI_A = E \frac{(I_1 + I_{eq}) \cdot (I_2 + I_{eq})}{(I_1 + I_{eq}) + (I_2 + I_{eq})} \quad (3.13)$$

式 (3.13) について図 3.8 を用いて説明する。

図 3.8 は、図 3.7 の軸直径変化部の節点 2 における断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を、節点 2 と節点 3 で定義される長さ $9d/32$ の軸要素の回転ばね k_{eq} を用いて、節点 2 と節点 3 のトータルの回転ばねで表したモデルである。図 3.8 では、長さ $9d/32$ の軸要素の慣性モーメントを m_d で表している。節点 2 の回転ばねは要素 1 の回転ばね k_1 と長さ $9d/32$ の要素の回転ばね k_{eq} が並列結合されて $k_1 + k_{eq}$ となり、節点 3 の回転ばねは長さ $9d/32$

の要素の回転ばね k_{eq} と要素 2 の回転ばね k_2 が並列結合されて k_2+k_{eq} となる．節点 2 と節点 3 のトータルの回転ばねは，節点 2 の回転ばね k_1+k_{eq} と節点 3 の回転ばね k_2+k_{eq} が直列結合されて $(k_1+k_{eq}) \cdot (k_2+k_{eq}) / \{(k_1+k_{eq}) + (k_2+k_{eq})\}$ となる．

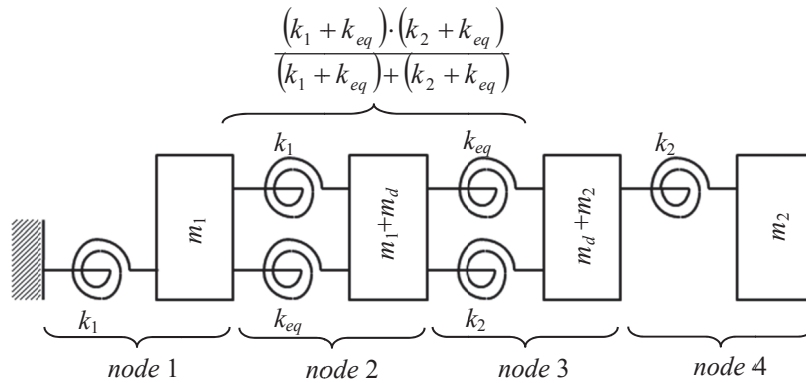


Fig. 3.8 Assembling rotational springs for tree adjacent elements in 1D FEM model

式(3.13)が式(3.12)と等価であるので，曲げ剛性の等価断面 2 次モーメント I_{eq} は式(3.14)となる．

$$I_{eq} = \frac{I_1 I_2 - I_1^2 + \sqrt{I_1^4 + 7I_1^2 I_2^2 + 6I_1 I_2^3 + 2I_2^4}}{2(I_1 + I_2)} \quad (3.14)$$

図 3.8 の節点 2 と節点 3 で定義される長さ $9d/32$ の軸要素を軸直径変化部の小径側に設けて，その部分の曲げ剛性を EI_{eq} とおくことで，断面 A-A の弾性変形を考慮した曲げ剛性を表現することができる．ただし，式 (3.14) が成立するのは，式 (1.4) が成立するおよそ $h/d_0 \geq 0.2$ の範囲においてである．また，小径軸の長さ l_2 が $9d/32$ に近くなるような短い軸要素を用いざるを得ないような場合は適用対象外となる．しかし，これらの制約を受けない形状の軸については，曲げ振動解析モデルのモデル化精度を向上させることができる．

3.3.4 曲げ剛性の等価軸径の検討

本節では，軸直径変化部のみかけの軸の曲げ剛性低下を把握し易くするために，等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} を定義し， d_{eq} が軸直径比 $\beta (=d/d_0)$ に対してどのように変化するかを検討する．

等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径を d_{eq} として，式 (3.14) で示される曲げ剛性の等価

断面 2 次モーメント I_{eq} を式 (3.9) の中実円形断面軸の断面 2 次モーメントの形で表すと、式 (3.15) となる。

$$I_{eq} = \frac{\pi}{64} d_{eq}^4 \quad (3.15)$$

式 (3.15) より、等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} は式 (3.16) で表される。

$$d_{eq} = \sqrt[4]{\frac{64}{\pi} I_{eq}} \quad (3.16)$$

式 (3.14) に $I_1 = \pi d_0^4 / 64$, $I_2 = \pi d^4 / 64$ を代入して I_{eq} を d_0 と d の関数で表し、軸直径比 $\beta (=d/d_0)$ と等価軸径比 d_{eq}/d の関係を求めると、図 3.9 の曲線が得られる。この関係の特徴は、軸直径比 β が小さくなると等価軸径比 d_{eq}/d が 0.8409 に漸近する点である。これより、式 (1.4) が成り立つ $h/d_0 \geq 0.2$ の範囲では、大径軸直径 d_0 が小径軸直径 d に対していくら大きくなっても、等価な曲げ剛性 EI_{eq} は小径軸の曲げ剛性 EI_2 の $0.8409^4 = 0.4979$ 倍を下回らないと言える。

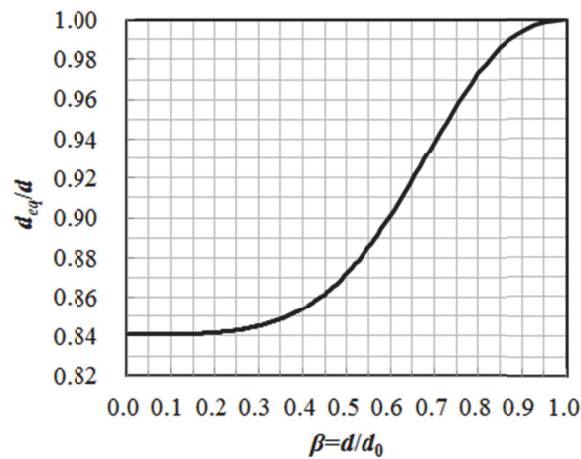


Fig. 3.9 Relationship between β and d_{eq}/d

以上により、長さ $9d/32$ の小径軸要素の曲げ剛性を EI_{eq} とする、あるいは、長さ $9d/32$ の小径軸要素の直径を式 (3.16) の等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} とすれば、一般的な一次元梁モデルが適用された軸振動解析ソフトウェアで、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した軸振動（曲げ振動）の解析を簡便に実現することができる。ただし、本提案

方法では長さ $9d/32$ の小径軸要素で軸直径変化部のみかけの軸の曲げ剛性低下を表現しているため、等価軸径 d_{eq} を用いたモデル化では軸の質量と軸の有効せん断面積を実際の軸より小さく見積もることになる。そこで、等価な曲げ剛性を与える小径部の軸径 d_{eq} を使って高精度なモデル化を行うには、小径軸の質量を維持するために長さ $9d/32$ の小径軸要素の部分に外径 d 、内径 d_{eq} のディスク要素を付加し、有効せん断面積を $\kappa \cdot \pi d_{eq}^2/4$ ではなく $\kappa \cdot \pi d^2/4$ とすれば良い (式 (2.5) 参照)。

3.4 提案方法の妥当性の検証

本節では、提案する軸直径変化部のモデル化方法を適用した 1D FEM モデルで求めた、自由支持状態の曲げモードの固有振動数と静荷重による曲げ変形を、3D FEM モデルと比較して、その妥当性を検証する。

3.4.1 3次元有限要素モデルの曲げ剛性の補正

検証に先立ち、参照する 3D FEM モデルの曲げ剛性をヤング率の修正により補正する。

詳細なモデル化がなされた軸の 3D FEM モデルは、節点自由度が 6 であるため、軸の曲げやねじりに加えて軸直径変化部断面の弾性変形も表現することができる。しかし、要素のタイプやメッシュサイズ等によって固有値解析結果が変化する。例えば、中実円形断面軸の 3D FEM モデルの簡便なモデル化方法として、高さを軸の半径、幅を軸の全長とした長方形の平面を任意の数の長方形要素に分割し、この平面を軸の中心軸周りに 360° 回転させて、六面体のソリッド要素を定義する方法がある。この場合、軸中心に近い要素が楔形に近い正六面体からかけ離れた形状となるため、固有値解析の精度が低下する恐れがある。1D FEM モデルでも要素分割数によって固有値解析結果が変化するが、着目する固有モードに対して十分な要素数を確保すれば特に一様断面軸では非常に高い精度で固有値を求めることができる (付録 A-2 参照)。そこで、ここでは一様断面軸の 1D FEM モデルの曲げ振動の固有振動数を参照して、3D FEM モデルのヤング率を修正する方法で高精度な 3D FEM モデルを作成する。以下にその手順を示す。

まず、全長 350mm、外径 20mm の図 3.10 に示した一様断面軸の 3D FEM モデルについて、自由支持状態の固有値解析を行って 4 次までの曲げ振動の固有振動数を求める。要素分割は後述の図 3.12 の小径部と同一とする。材料特性はヤング率 $E=2.09 \times 10^{11}$ N/m²、横弾性係数 $G=8.0335 \times 10^{10}$ N/m²、ポアソン比 $\nu=0.3008$ 、密度 $\rho=7846$ kg/m³ とした。

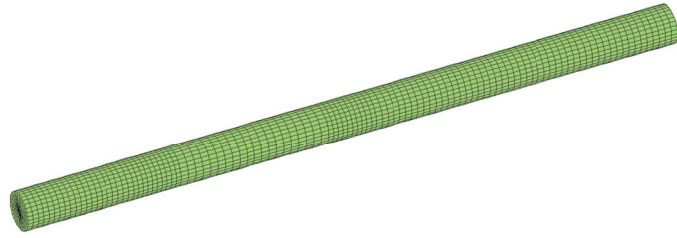


Fig. 3.10 3D FEM model of shaft with uniform cross-section

次に、図 3.10 の一様断面軸の 3D FEM モデルと同一寸法、同一材料特性の、図 3.11 の 1D FEM モデルについて自由支持状態の固有値解析を行って 4 次までの曲げ振動の固有振動数を求める。要素分割は後述の図 3.13 と同一とする。

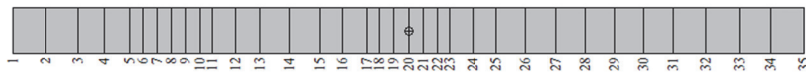


Fig. 3.11 1D FEM model of shaft with uniform cross-section

さらに、一様な中実円形断面軸の 1D FEM モデルの曲げ 1 次～4 次の固有振動数を参照して 3D FEM モデルのヤング率を補正する。ヤング率の補正には、式 (3.17) の固有角振動数 ω_n と曲げ剛性 EI の関係から得られる式 (3.18) を用いる。

$$\omega_n^2 \propto EI \quad (3.17)$$

$$E' = \left(\frac{1}{1 + \bar{\varepsilon}} \right)^2 \cdot E \quad (3.18)$$

E : 補正前のヤング率 (N/m²)

E' : 補正後のヤング率 (N/m²)

$\bar{\varepsilon}$: 曲げ 1 次～4 次の固有角振動数の平均誤差

表 3.1 は、図 3.11 の 1D FEM モデル (参照モデル) と図 3.10 の 3D FEM モデルの曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。3D Model 0 がヤング率を補正する前の $E=2.09 \times 10^{11}$ N/m² としたモデルあり、3D Model 1 がヤング率を式 (3.18) によって補正した

$E'=2.05175 \times 10^{11}$ N/m²としたモデルである。1D FEM モデルに対する、ヤング率を補正する前の 3D FEM モデルの固有振動数の誤差の絶対値は最大で 1.02%であるのに対して、ヤング率を補正した後の 3D FEM モデルの固有振動数の誤差の絶対値は最大で 0.09%と約 1/11 に低減している。

Table 3.1 Comparison of natural frequencies for bending modes of a shaft with uniform cross-section between 1D model and 3D model

Unit: Hz

Mode	1D Model	3D Model 0 (Error)		3D Model 1 (Error)	
1	743.69	750.04	(0.85%)	743.14	(0.07%)
2	2018.8	2037.6	(0.93%)	2018.84	(0.00%)
3	3873.7	3908.8	(0.90%)	3872.85	(0.02%)
4	6236.7	6300.5	(1.02%)	6242.59	(-0.09%)

3.4.2 曲げモードの固有振動数

ここでは、図 3.12 の(a)と(b)に示す 2 種類の軸を取り上げる。

軸 A は 2 箇所 to 同一径の大径部を持ち、軸 B は 2 箇所に異なる径の大径部を持つ。軸の寸法を以下に示す。

- Shaft A ; 全長 350mm, 小径部外径 $\phi 20$ mm,
大径部外径 $\phi 25.4$ mm ($\beta=0.7874$) と $\phi 25.4$ mm ($\beta=0.7874$)
大径部の位置 : 左端から 57.3mm~82.7mm ($h/d_0=1$),
162.3mm~187.7mm ($h/d_0=1$)
- Shaft B ; 全長 350mm, 小径部外径 $\phi 20$ mm,
大径部外径 $\phi 25.4$ mm ($\beta=0.7874$) と $\phi 35.4$ mm ($\beta=0.5650$)
大径部の位置 : 左端から 57.3mm~82.7mm ($h/d_0=1$),
162.3mm~187.7mm ($h/d_0=0.7175$)

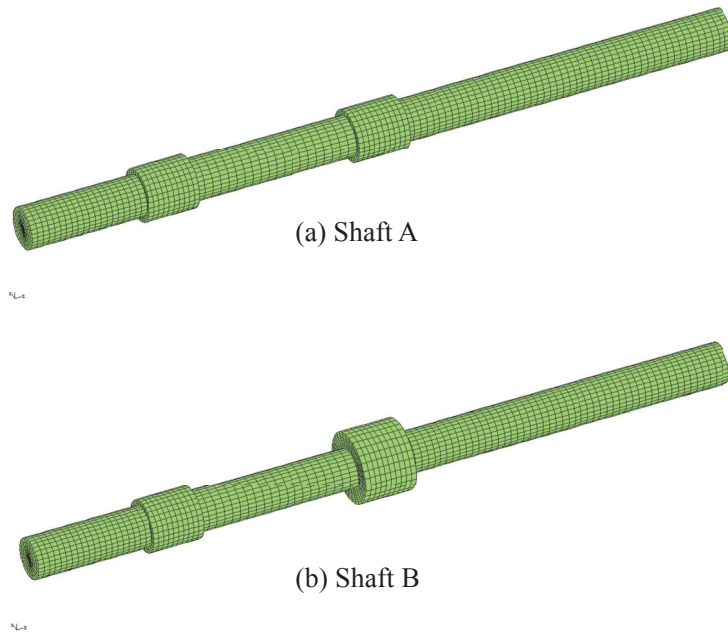


Fig. 3.12 3D FEM models of shafts with stepped cross-sections (Shaft A & B)

図 3.12 の 3D FEM モデルの自由支持状態の固有値解析結果（曲げ 1 次～4 次の固有振動数）を参照して，図 3.13 の 1D FEM モデルに提案方法を適用した場合の固有振動数を評価した．軸 A，軸 B 共に，3D FEM モデルの材料特性はヤング率 $E'=2.05175 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ （補正後），ポアソン比 $\nu=0.3008$ ，密度 $\rho=7846 \text{ kg/m}^3$ とし，1D FEM モデルの材料特性はヤング率 $E=2.09 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ，ポアソン比 $\nu=0.3008$ ，密度 $\rho=7846 \text{ kg/m}^3$ とした．なお，図 3.13 の 1D FEM モデルでは左端から 5，10，17，22 番目の要素長を式 (3.10) に従って $9d/32$ としている．

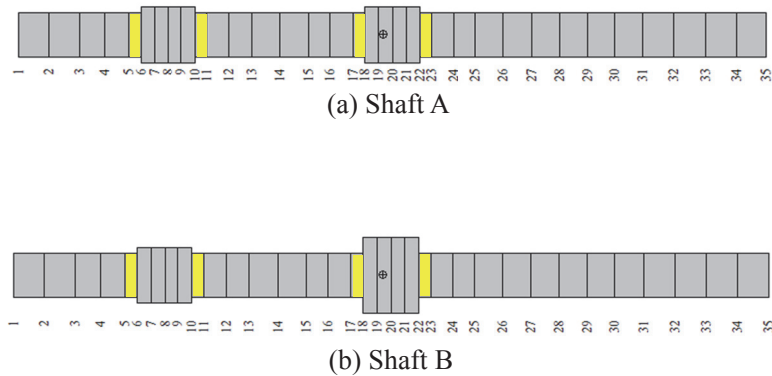


Fig. 3.13 1D FEM models of shafts with stepped cross-sections (Shaft A & B)

図 3.14 は軸 A の曲げ 1 次～4 次の固有モードを示したものである。

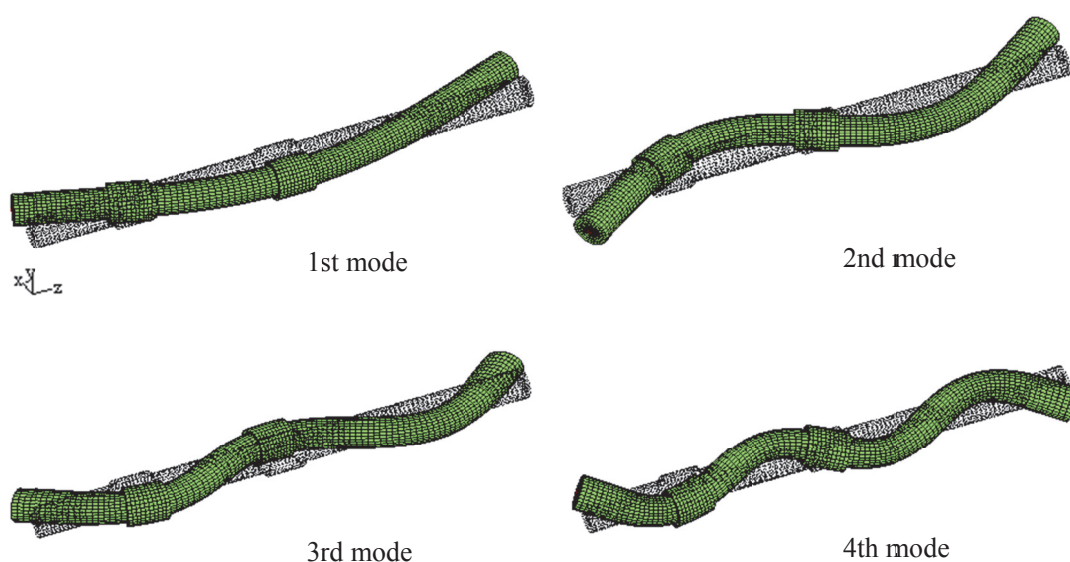


Fig. 3.14 Eigenmodes of Shaft A

表 3.2 は，図 3.12 (a)の軸直径変化部を有する軸 A の 3D FEM モデル（参照モデル）と，図 3.13 (a)の軸 A の下記の 3 つの 1D FEM モデルについて曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。

- 1D Model 1：軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しないモデル
- 1D Model 2：小堀の方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル
- 1D Model 3：提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル

Table 3.2 Comparison of natural frequencies of shaft A

Unit: Hz

Mode	3D Model	1D Model 1 (Error)	1D Model 2 (Error)	1D Model 3 (Error)
1	763.64	772.55 (1.17%)	772.55 (1.17%)	767.09 (0.45%)
2	2050.9	2064.1 (0.64%)	2064.1 (0.64%)	2055.0 (0.20%)
3	3964.3	4027.7 (1.60%)	4027.7 (1.60%)	3985.8 (0.54%)
4	6307.7	6382.3 (1.18%)	6382.3 (1.18%)	6323.7 (0.25%)

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 1.60%の誤差がある。図 3.13 (a)の軸 A のモデルでは、式 (1.1) の等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 d_e が大径部外径 d_0 より大きくなるため、小堀の方法は適用できない。そのため、1D Model 2 の固有振動数は 1D Model 1 と同一の値となっている。提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の誤差は 0.54%以下である。

表 3.3 は、図 3.12 (b)の軸直径変化部を有する軸 B の 3D FEM モデル（参照モデル）と、図 3.13 (b)の軸 B の前述の 3 つの 1D FEM モデルについて曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。

Table 3.3 Comparison of natural frequencies of shaft B

Unit: Hz

Mode	3D Model	1D Model 1 (Error)		1D Model 2 (Error)		1D Model 3 (Error)	
1	733.33	754.86	(2.94%)	739.64	(0.86%)	731.99	(-0.18%)
2	2034.8	2049.8	(0.74%)	2047.6	(0.63%)	2036.1	(0.06%)
3	3804.9	3924.8	(3.15%)	3841.9	(0.97%)	3812.8	(0.21%)
4	6161.8	6245.6	(1.36%)	6226.5	(1.05%)	6160.2	(-0.03%)

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 3.15%の誤差がある。図 3.13 (b)の軸 B のモデルにおいて、左端から 57.3mm～82.7mm の位置にある大径部では図 3.13 (a)の軸 A のモデルと同様に式 (1.1) の等価曲げ剛性を与える大径部の軸径 d_e が大径部外径 d_0 より大きくなるため小堀の方法は適用できないが、左端から 162.3mm～187.7mm の位置（中央部）にある大径部では d_e が d_0 より小さくなるため、小堀の方法を適用することができる ($d_{eq}=31.41$ mm)。小堀の方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 2 では、最大で 1.05%の誤差がある。提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の誤差は 0.21%以下である。

なお、軸 A の 1D Model 3 より、軸 B の 1D Model 3 の方が固有振動数の誤差が小さい理由は、軸直径比 β の影響によるものと考えられる。3.2 節に示したように、軸直径比 β が大きいほど式 (1.4) による近似精度が低下する。そのため、提案方法を適用した 1D Model 3 では、 $\beta=0.7874$ の軸直径変化部を 4 箇所持つ軸 A より、 $\beta=0.7874$ と $\beta=0.5650$ の軸直径変化部を 2 箇所ずつ持つ軸 B の方が精度の高いモデルとなっている。

以上、図 3.13 の軸直径変化部を有する 2 つの軸、軸 A と軸 B の 1D FEM モデルについて、図 3.12 の 3D FEM モデルを参照して、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない場合、小堀の方法で考慮した場合、提案方法で考慮した場合の 3 ケースで曲げ 1 次～4 次の固有振動数を比較し、提案方法が妥当であることを確認した。

軸 A, 軸 B 共に 2 箇所の軸直径変化部を有するが, 軸 A では軸直径変化部のどちらについても小堀の方法が適用できず, 軸 B では軸直径変化部の一方について小堀の方法が適用できないため, 同一条件で小堀の方法と比較したことになる。そこで, 小堀の方法を適用できる軸直径変化部を有する軸として図 3.15 に示す軸 C と軸 D を用いて, 小堀の方法と提案方法について固有振動数の精度の比較を行った。

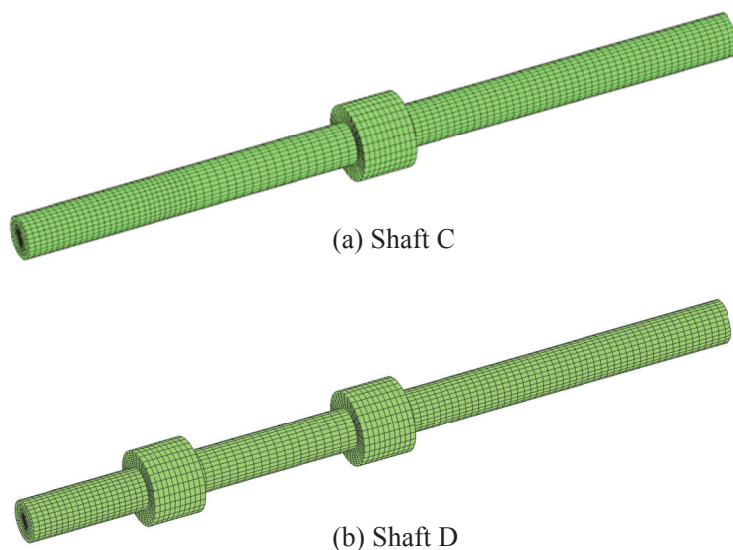


Fig. 3.15 3D FEM models of shafts with stepped cross-sections (Shaft C & D)

軸 C は, 図 3.12 の軸 B の左側の直径 $\phi 25.4$ の大径部を無くして, 大径部を中央の直径 $\phi 35.4$ の部分のみとした軸である。軸 D は, 図 3.12 の軸 B の左側の直径 $\phi 25.4$ の大径部の直径を, 中央の大径部と同一の $\phi 35.4$ とした軸である。

表 3.4 は, 図 3.15 (a)の軸直径変化部を有する軸 C の 3D FEM モデル (参照モデル) と, 図 3.13 と同様のモデル化を行った前述の 3 つの 1D FEM モデルについて, 曲げ 1 次~4 次の固有振動数の比較を示したものである。軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 2.72%の誤差があるが, 小堀の方法を適用した 1D Model 2 の誤差の絶対値の最大値は 0.56%, 提案方法を適用した 1D Model 3 の誤差の絶対値の最大値は 0.28%であり, どちらも良好な精度が得られている。

Table 3.4 Comparison of natural frequencies of shaft C

Unit: Hz

Mode	3D Model	1D Model 1 (Error)	1D Model 2 (Error)	1D Model 3 (Error)
1	730.28	750.15 (2.72%)	729.84 (-0.06%)	728.62 (-0.23%)
2	2001.2	2005.6 (0.22%)	2003.1 (0.10%)	1999.2 (-0.10%)
3	3743.2	3832.4 (2.38%)	3722.2 (-0.56%)	3740.5 (-0.07%)
4	6080.9	6121.4 (0.67%)	6096.5 (0.26%)	6063.6 (-0.28%)

表 3.5 は、図 3.15 (b)の軸直径変化部を有する軸 D の 3D FEM モデル（参照モデル）と、図 3.13 と同様のモデル化を行った前述の 3 つの 1D FEM モデルについて、曲げ 1 次～4 次の固有振動数の比較を示したものである。軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 3.65%の誤差があるが、小堀の方法を適用した 1D Model 2 の誤差の絶対値の最大値は 1.01%、提案方法を適用した 1D Model 3 の誤差の絶対値の最大値は 0.38%であり、明らかに提案方法の方が精度が良好である。小堀の方法では大径部の軸径を減じて軸直径変化部断面のみかけの軸の曲げ剛性低下を表現しているのに対して、提案方法では軸小径部に設けた長さ $9d/32$ の要素の曲げ剛性を弱めることによって直径変化部のみかけの軸の曲げ剛性低下を表現している。そのため、両者の固有振動数の予測精度の差異は、軸直径変化部断面のみかけの軸の曲げ剛性低下を表現する部位が異なることに起因すると考えらる。

提案方法を用いることによって、小堀の方法より高精度に固有振動数を予測できることが確認されたが、小堀の方法も軸直径変化部のみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮しない場合と比べると十分高精度といえる。

Table 3.5 Comparison of natural frequencies of shaft D

Unit: Hz

Mode	3D Model	1D Model 1 (Error)	1D Model 2 (Error)	1D Model 3 (Error)
1	728.39	750.15 (2.99%)	729.84 (0.20%)	725.61 (-0.38%)
2	2007.2	2005.6 (-0.08%)	2003.1 (-0.20%)	2002.0 (-0.26%)
3	3697.5	3832.4 (3.65%)	3722.2 (0.67%)	3705.8 (0.22%)
4	6035.3	6121.4 (1.43%)	6096.5 (1.01%)	6035.8 (0.01%)

3.4.3 静荷重による曲げ変形の評価

ここでは、図 3.13 (b)の軸 B の中央の大径部と右側の小径部からなる軸、すなわち図 3.13 の軸 B の節点 18 から節点 35 までの軸を取り上げる。大径部外周面を拘束して小径部先端

に曲げモーメントを与えたときのたわみ曲線を，図 3.16 の 3D FEM モデルと図 3.17 の 1D FEM モデルについて求めて比較を行った．図 3.17 の 1D FEM モデルでは左端から 5 番目の要素長を $9d/32$ としている．

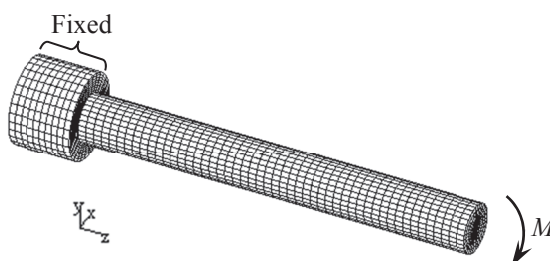


Fig. 3.16 3D FEM model of shaft with stepped cross-section for bending deflection analysis

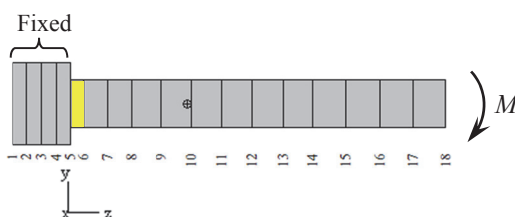


Fig. 3.17 1D FEM model of shaft with stepped cross-section for bending deflection analysis

1D FEM モデルでは，軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1，小堀の方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した提案方法を適用した 1D Model 2，提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の 3 つのモデルについてたわみ曲線を求めた．ここで，小径部先端に与える曲げモーメントは $M=100 \text{ N}\cdot\text{m}$ とした．ヤング率とポアソン比は，3.4.2 節と同じ値を用いた．

図 3.18 は各モデルのたわみ曲線を示したものである．同図には $z=20\text{mm}$ までの部分の拡大図に加えて先端に生じる最大たわみの値を凡例の順に示した．3D FEM モデルに対する 1D Model 1, 1D Model 2, 1D Model 3 の最大たわみの絶対値の誤差はそれぞれ， -3.92% ， -1.33% ， -0.10% であり，提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮することによってたわみ量の誤差を大幅に低減できることが確認された．

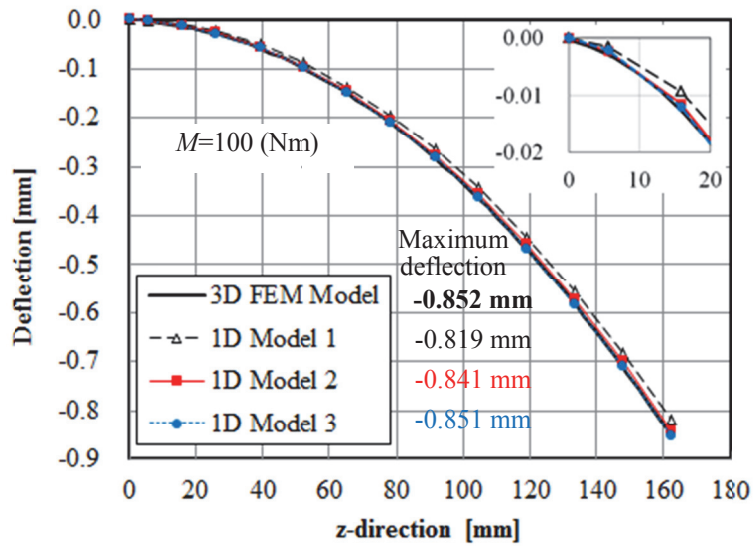


Fig. 3.18 Deflection of shaft with stepped cross-section due to bending moment

3.4.4 実験による曲げモードの固有振動数の評価

図 3.12 (a)に示される軸直径変化部を持つ軸 A を，同一部材から切り出して切削加工によって 16 本製作した．この軸の製作図を付録 A-3 に示す．図 3.19 は衝撃加振試験の状況を示したものである．軸受台に置かれた軸を水平方向に衝撃加振したときの加振力と軸端の振動加速度応答から得られる周波数応答関数を，周波数領域法が適用された実験モード解析ソフトウェア (Balmes, E, 1996) を用いて極一留数モデル (Allemang, R. J., 1994) に曲線適合して不減衰固有振動数を求めた．式 (3.19) に r 次のモードに関する，複素固有値 λ_r と不減衰固有角振動数 ω_{nr} の関係を示す．

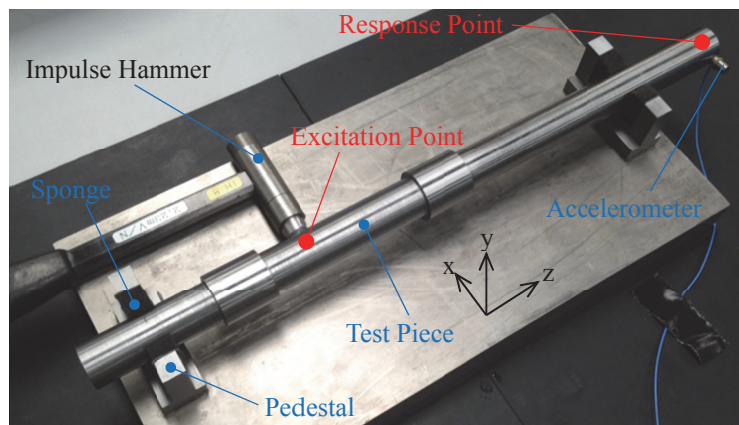


Fig. 3.19 Impact test configuration of experimental modal analysis of a shaft with stepped cross-section

$$\lambda_r = -\zeta_r \omega_{nr} + j\omega_{dr} \quad (3.19)$$

ω_{nr} : r 次の不減衰固有角振動数 (rad/s)

ζ_r : r 次のモード減衰比

ω_{dr} : r 次の減衰固有角振動数 (rad/s), $\omega_{dr} = \sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_{nr}$

軸の支持方法は、軸直角水平方向のみの運動を許容するために軸が水平方向にスポンジで弾性支持される構造とし、摩擦の影響を低減するために軸と軸受台の接触面にはグリスを塗布した (図 3.20 参照).

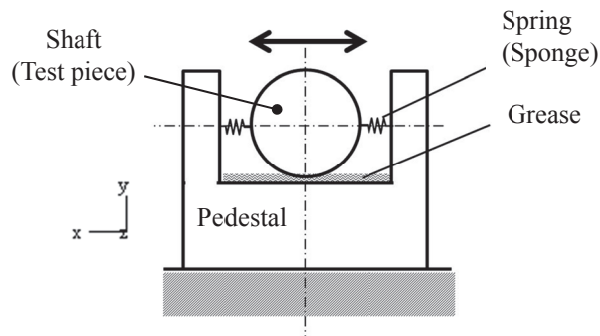


Fig. 3.20 Support method of a shaft

表 3.6 に計測機器の一覧を示す. 実験モード解析ソフトウェアとしては, MATLAB®のサードパーティ Toolbox である SDTools 社製の Structural Dynamics Toolbox を使用した.

Table 3.6 Measuring instruments

Item	Manufacturer	Type	Quantity	Serial Number	Notes
Impulse Hammer	PCB	T086C03	1	24130	Steel Tip
Accelerometer	PCB	352A10	1	10335	0.7g
Dynamic Signal Analyzer	Crystal Instruments	Coco-80	1	36678	24bit $\Sigma\Delta$ ADC

図 3.21 に衝撃加振試験によって得られた周波数応答関数とカーブフィット結果の例を示す。同図において、青色の実線が実測された周波数応答関数であり、緑色の実線がカーブフィットによって得られた周波数応答関数である。

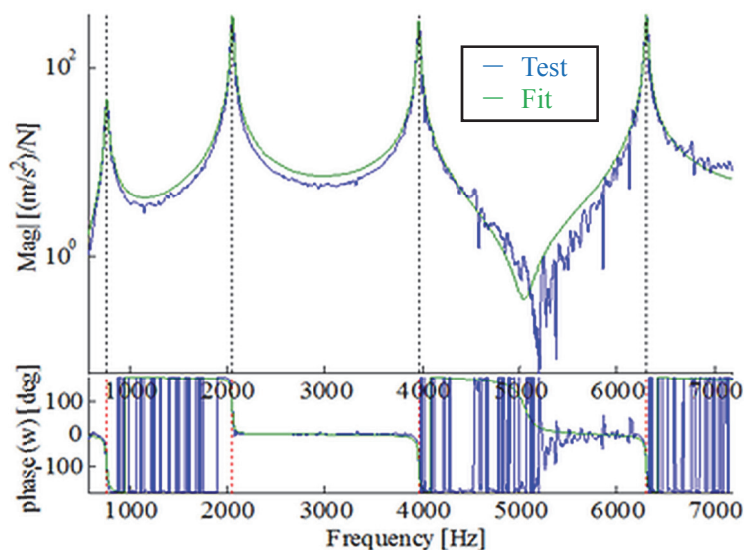


Fig. 3.21 An example for curve fitting of frequency response function

表 3.7 に、図 3.12 (a)に示される軸直径変化部を持つ軸 A の、1 次～4 次の曲げモードの固有振動数の実験結果を示す。同表には、各モードの固有振動数の平均値、分散 σ^2 、 3σ の値についても示し、 3σ の値については固有振動数の平均値に対する百分率の値も併記した。実験で得られた固有振動数は、16 本の軸の製作誤差、周波数応答関数の計測誤差、カーブフィットの誤差を含んだものと考えられるが、16 本の軸の固有振動数の平均値 764.56 Hz, 2053.9 Hz, 3966.7 Hz, 6313.7 Hz は、表 3.2 の 3D Model の固有振動数 763.64Hz, 2050.9Hz, 3964.3Hz, 6307.7Hz に対して、高々 0.12%, 0.15%, 0.06%, 0.10% の差異があるに過ぎない。1 次～4 次の曲げモードの固有振動数の 3σ は 0.5% 未満である。

Table 3.7 Identified natural frequencies of a shaft with stepped corss-section under free-free support condition

Unit : Hz

	1st mode	2nd mode	3rd mode	4th mode
Rotor 1	764.23	2052.2	3963.9	6309.0
Rotor 2	762.59	2050.1	3960.6	6304.4
Rotor 3	764.37	2054.0	3966.0	6313.3
Rotor 4	765.77	2055.0	3968.1	6313.5
Rotor 5	763.97	2052.2	3964.5	6307.5
Rotor 6	764.52	2054.5	3968.0	6316.8
Rotor 7	765.19	2054.9	3970.1	6315.6
Rotor 8	765.64	2055.0	3967.5	6314.0
Rotor 9	762.50	2048.7	3958.8	6302.0
Rotor10	766.25	2058.2	3973.6	6324.7
Rotor11	765.56	2055.3	3970.3	6318.1
Rotor12	764.20	2055.0	3970.0	6322.2
Rotor13	764.74	2054.5	3967.1	6315.0
Rotor14	765.26	2058.1	3973.8	6324.7
Rotor15	763.59	2049.5	3957.9	6300.9
Rotor16	764.59	2054.7	3967.3	.06316.8
Mean	764.56	2053.9	3966.7	6313.7
σ^2	1.140	7.380	21.90	53.74
3σ (Percentage against mean value)	3.203	8.150	14.04	21.99
	(0.42%)	(0.40%)	(0.35%)	(0.35%)

表 3.8 は、軸 A の 1 次～4 次の曲げモードの固有振動数を実験結果（平均値）と 1D FEM モデルについて示したものである。同表は、表 3.2 の参照値を 3D FEM モデルの値から表 3.7 の実験結果の平均値に変更したものである。ここで、軸 A に小堀の方法は適用できないため 1D Model 2 は省いた。実験結果（平均値）に対する、提案する軸直径変化部のモデル化方法を適用した 1D Model 3 の固有振動数の誤差は最大で 0.48%であり、実験結果からも、提案する軸直径変化部のモデル化方法が妥当であることが確認された。

Table 3.8 1st to 4th natural frequencies of bending modes for shaft A
(Test and 1D FEM)

Unit : Hz

Mode	Test (Mean)	1D Model 1 (Error)	1D Model 3 (Error)
1	764.56	772.55 (1.05%)	767.09 (0.33%)
2	2053.9	2064.1 (0.50%)	2055.0 (0.05%)
3	3966.7	4027.7 (1.54%)	3985.8 (0.48%)
4	6313.7	6382.3 (1.09%)	6323.7 (0.16%)

3.4.5 実機相当の解析モデルによる曲げモードの固有振動数の評価

本節では、図 3.22 に示すタービン-発電機ロータの実機相当モデルを用いて、軸直径変化部断面の弾性変形を提案方法によって考慮した場合と考慮しない場合について、曲げモードの固有値解析結果を比較する。

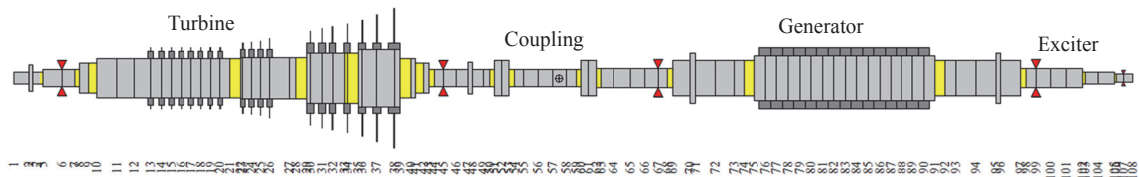


Fig. 3.22 Bending vibration analysis model of turbine – generator rotor

図 3.22 のモデルは、タービンロータと発電機ロータがカップリングで剛結合された 1 軸ロータが節点番号 6, 45, 67, 99, 107 の位置でピン支持された構造を持っている。タービン-発電機ロータは全長 29,614mm, 節点数 108, 軸の要素数 107 の回転軸と、ブレード等のディスク要素で構成されている。黄色で示した、要素番号 4, 7, 9, 21, 28, 33, 39, 41, 43, 50, 53, 59, 62, 68, 74, 91, 97, 102, 105 の要素は、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮すべき要素であるため、要素長を $9d/32$ としている。ここで、要素番号 33 については、要素番号 33 と 34 の要素長を足し合わせた値が $9d/32$ となるように設定している。付録 A-4 にタービン-発電機ロータの曲げ振動解析モデルの諸元を示す。

表 3.9 は、黄色で示した要素の曲げ剛性を $E I_{eq}$ (式 (3.14) 参照) とする提案方法と軸直径変化部のみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮しない通常の方法について、曲げ 1 次～5 次の固有振動数の計算結果を示したものである。同表には、提案方法と通常の方法の差異につ

いても示した. 提案法による曲げ3次の固有振動数は, 通常の方法より約5%高い値である. 参考に, 曲げ1次~5次の固有モードを図3.23に示す.

Table 3.9 Natural frequencies of bending modes for turbine – generator rotor

Mode	Proposed method	Unit: Hz	
		Ordinary method	
1	17.026	17.250	(1.32%)
2	17.509	17.708	(1.13%)
3	42.803	44.759	(4.57%)
4	62.921	64.389	(2.33%)
5	65.090	67.220	(3.27%)

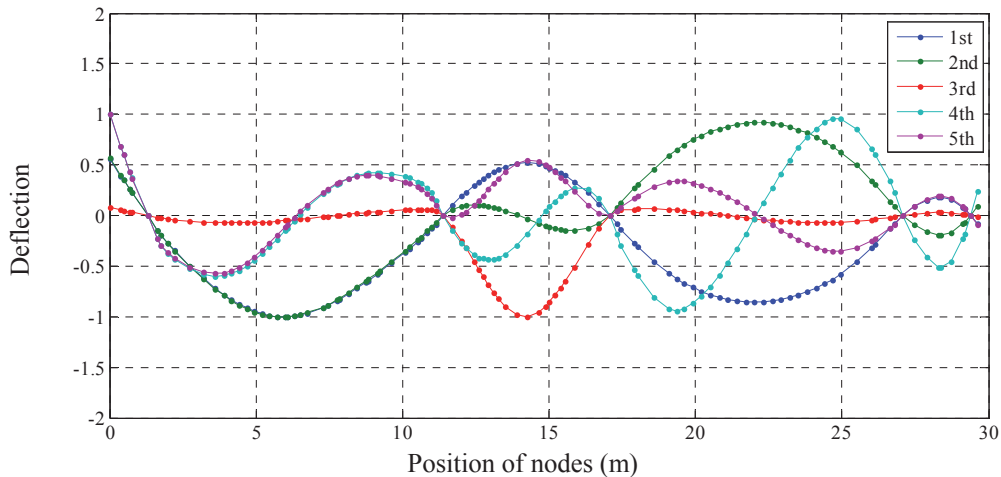


Fig. 3.23 Eigenmodes of bending vibration for turbine – generator rotor

3.5 結言

1次元梁の有限要素モデルへの適用が容易な, 軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を考慮したモデル化方法について検討し, 以下の結論を得た.

- (1) 大径部が厚板とみなせる, 弾性変形を考慮すべき大径部の幅径比 h/d_0 の範囲, すなわち提案方法の適用範囲は, 軸直径比 β によらずおよそ $h/d_0 \geq 0.2$ である.
- (2) 小径部に長さ $9d/32$ の軸要素を設け, その部分の曲げ剛性を式 (3.20) で与えられる等価な曲げ剛性 I_{eq} とすることによって, 軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸

の曲げ剛性低下を表現することができる。

$$I_{eq} = \frac{I_1 I_2 - I_1^2 + \sqrt{I_1^4 + 7I_1^2 I_2^2 + 6I_1 I_2^3 + 2I_2^4}}{2(I_1 + I_2)} \quad (3.20)$$

I_1 : 大径軸の断面 2 次モーメント (m^4)

I_2 : 小径軸の断面 2 次モーメント (m^4)

- (3) 大径部が厚板とみなせる，弾性変形を考慮すべき範囲では，大径軸直径 d_0 が小径軸直径 d に対していくらか大きくなっても，等価な曲げ剛性 EI_{eq} は小径軸の曲げ剛性 EI_2 の 0.4979 倍を下回らない。
- (4) 提案方法による固有振動数の解析結果は，従来用いられてきた小堀の方法より高精度である。
- (5) 提案方法を適用することによって，動的現象である固有振動特性だけでなく，静的な曲げ変形についても高精度な解析結果を得ることができる。
- (6) 実機相当のタービン発電機ロータが 5 箇所ピン支持されたモデルにおける，低次モードの固有振動数に関する通常の方法と提案方法の差異は，最大で約 5%であった。

参考文献

- Allemang, R. J., Vibrations: experimental modal analysis, UC-SDRL-CN-20-263-662 (1994).
- Balmes, E., Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization, International Modal Analysis Conference, (1996).
- 中沢 一, 長屋 二郎, 加藤 博, 最新機械工学講座 材料力学, 産業図書 (1973), p. 111.
- 高田 昌二, 舟竹 良雄, 稲垣 嘉之, 軸直径変化部を有するロータの曲げ振動モードに関する振動計算の高精度簡易モデルの提案, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.75, No.752 (2009), pp.824-829.

第4章 嵌め合い部の曲げ剛性の検討

4.1 緒言

一般にディスク要素として扱われるブレードやインペラなどが軸に嵌め合いによって取り付けられたロータの軸振動解析を行う場合、嵌め合い部の曲げ剛性の評価方法によって、曲げモードの固有振動数と固有モードが変わってしまう。例えば、嵌め合わされるディスク要素が軸の曲げ剛性に全く寄与しないと考える場合は、等価な曲げ剛性を与える軸径は軸直径に一致する。一方、嵌め合わされるディスク要素が軸の曲げ剛性に寄与すると考える場合は、等価な曲げ剛性を与える軸径は軸直径より大きくなる。しかし、軸直径に対して等価な曲げ剛性を与える軸径をどの程度大きくすれば良いかについて検証した例は著者の知る限り見当たらない。そこで、本章では、嵌め合いによって軸の曲げ剛性がどの程度増大するかについて、解析と実験で評価した結果を示す。

4.2 嵌め合い部の曲げ剛性の評価

4.2.1 接触解析による嵌め合い強さと軸の曲げ剛性の関係の検討

軸にスリーブが嵌め合わされた構造物について、嵌め合い強さと軸の曲げ剛性の関係を、嵌め合い部の摩擦を考慮した非線形静解析によって計算した。

長さ 350mm、直径 $\phi 25.4\text{mm}$ の中実円形断面の軸の中央部に、軸方向長さ 25.4mm、厚さ 5.0mm のスリーブが嵌め合いによって取り付けられている構造物を想定し、荷重と形状の対称性を考慮して、図 4.1 の 1/2 モデルを解析モデルとした。

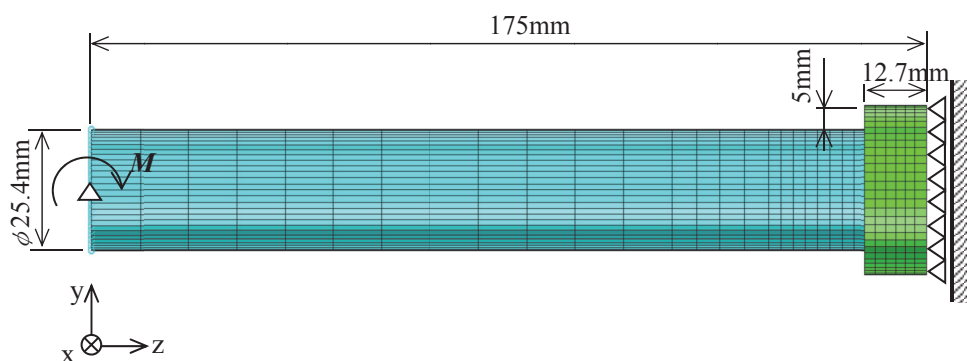


Fig. 4.1 Analysis model for investigating the influence of fit on bending stiffness

解析ツールとしては ABAQUS 6.12-2 を使用し、軸とスリーブの材料特性値は共にヤング率 $E=2.05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3008$ とした。

荷重条件は、左端軸中心に x 軸周りのモーメント M を与えるものとし、拘束条件は、図

4.1 の左端軸中心の節点の並進自由度を拘束（ピン支持）、右端の対称面の軸方向（z 方向）変位を拘束した。このモデルは、両端がピン支持された長さ 350mm の軸の 1/2 モデルである。

このモデルにおける左端と右端の y 方向の相対変位は、自由端にモーメント M を受ける片持ち梁のたわみと一致するため、嵌め合い部の等価曲げ剛性 EI_{eq} は、図 4.2 に示されるスリーブ端部の相対たわみ $\delta_0 - \delta_1$ を片持ち梁のたわみの式に適用して得られる、式(4.1)によって求めることができる。

$$EI_{eq} = \frac{Ml^2}{2(\delta_0 - \delta_1)} \quad (4.1)$$

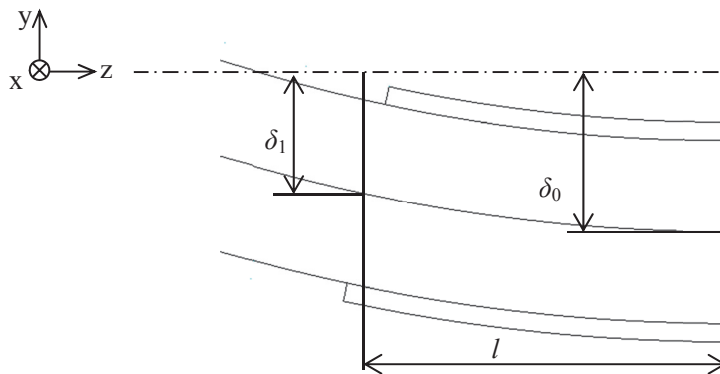


Fig. 4.2 Deflection of shaft with a sleeve

また、嵌め合い部の等価な曲げ剛性を与える軸径 d_{eq} は、式(4.1)の等価断面 2 次モーメント I_{eq} から式(3.16)によって求めることができる。

締め代 Δd は、軸の外径 d と嵌め合わせるスリーブの内径 d_s との差である（式 (4.2) 参照）。

$$\Delta d = d - d_s \quad (4.2)$$

以上の準備の下、摩擦係数、締め代を解析パラメータとして、嵌め合い部の曲げ剛性を解析によって評価した。また、正負の曲げモーメントを繰り返し作用させた場合の嵌め合い部の曲げ剛性についても解析によって評価した。

(1) 摩擦係数を解析パラメータとした解析

締め代 Δd を直径で 0.024mm の一定値とし、摩擦係数 μ を 0.05, 0.2, 0.5 の 3 通りに変化させた場合の、曲げモーメント M と等価直径 d_{eq} の関係を図 4.3 に示す。同図には、嵌め合い部の最小等価軸径 25.4mm と最大等価軸径 35.4mm をそれぞれ赤色の破線と実線で示した。静解析では、摩擦係数が大きいほど嵌め合い部の等価軸径が大きな値となる結果が得られた。

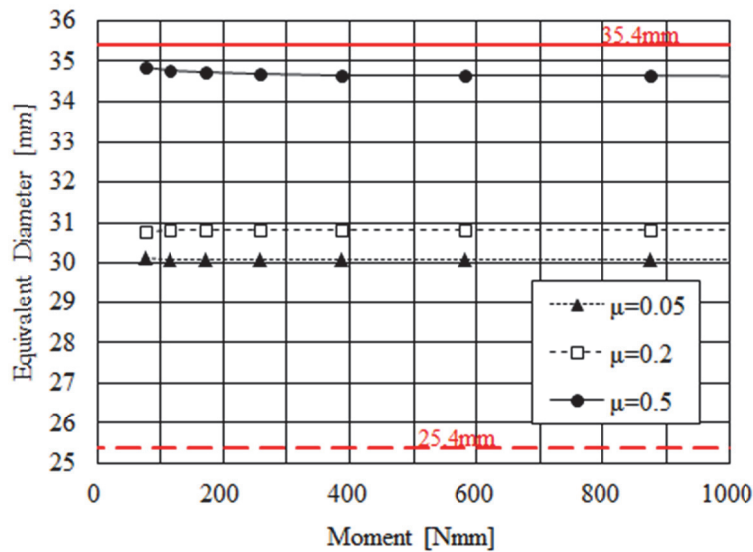


Fig. 4.3 Equivalent diameter versus bending moment in case of interference $\Delta d=0.024\text{mm}$ (friction coefficient $\mu=0.05, 0.2, \text{ and } 0.5$)

(2) 締め代を解析パラメータとした解析

摩擦係数 μ を 0.1 の一定値とし、締め代 Δd を 0.01mm, 0.024mm, 0.041mm の 3 通りに変化させた場合の曲げモーメントと等価直径 d_{eq} の関係を図 4.4 に示す。同図には、嵌め合い部の最小等価軸径 25.4mm と最大等価軸径 35.4mm をそれぞれ赤色の破線と実線で示した。静解析では、締め代によって嵌め合い部の等価軸径は殆ど変化しない結果が得られた。

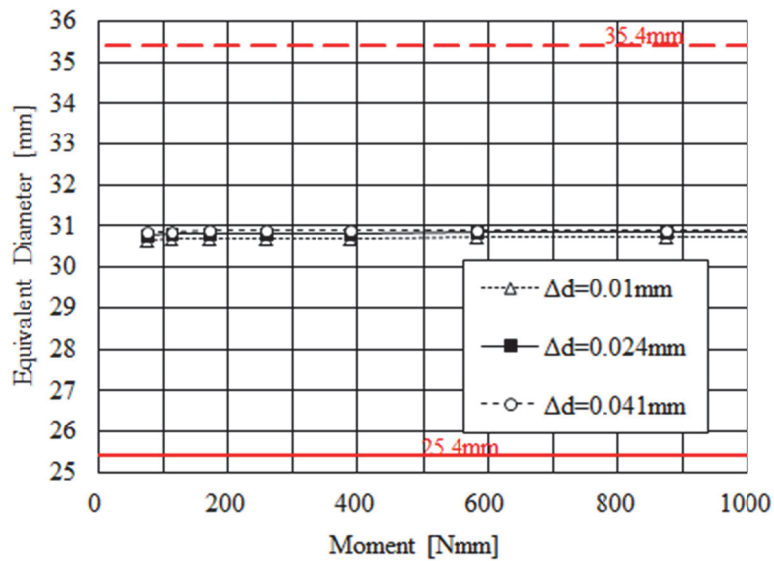


Fig. 4.4 Equivalent diameter versus bending moment in case of friction coefficient $\mu=0.1$ (interference $\Delta d=0.01, 0.024, \text{ and } 0.041 \text{ mm}$)

(3) 正負の繰り返し曲げモーメントを与えた解析

摩擦係数 μ を 0.1, 締め代 Δd を 0.01mm として, 図 4.5 に示した $\pm 200 \text{ Nmm}$ の曲げモーメントを繰り返し負荷し, 変位の履歴を調べた. 曲げモーメントと相対たわみ $\delta_0-\delta_1$ (図 4.2 参照) の関係を図 4.6 に示す. 同図より, 1 回目のサイクルと 2 回目以降のサイクルでみかけの曲げ剛性が変化し, ゼロ点 (荷重 0 での変位) にずれが生じることが分かった.

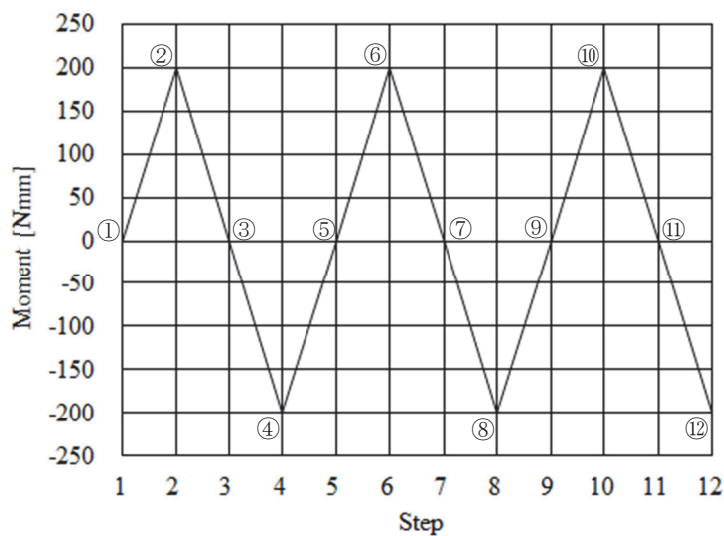


Fig. 4.5 Alternating bending moment

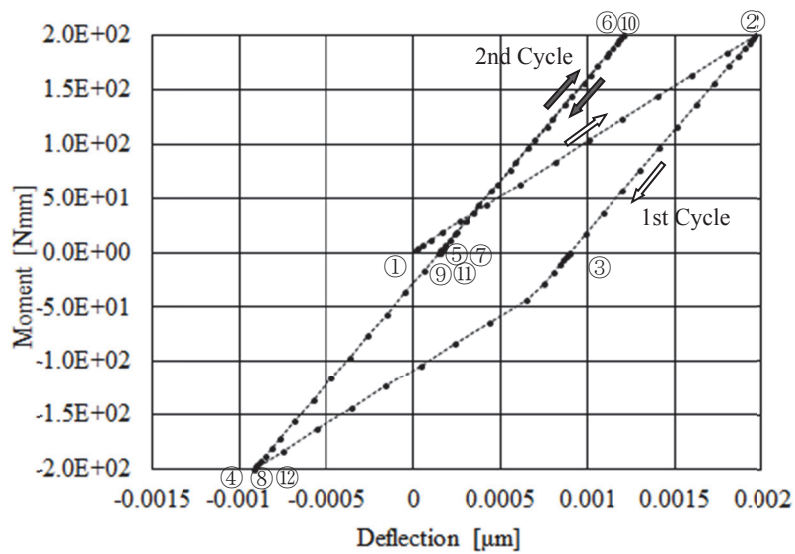


Fig. 4.6 Bending moment versus relative deflection in case of interference $\Delta d=0.024\text{mm}$ and friction coefficient $\mu=0.1$

曲げモーメントと相対たわみ $\delta_0-\delta_1$ の関係が収束したところでゼロ点を補正して求めた、曲げモーメントと等価直径の関係を図 4.7 に示す. 同図には、摩擦係数 μ を 0.2 とした場合と、スリーブが軸と一体となったソリッドモデルの場合の曲げモーメントと等価直径の関係についても示した. $\mu=0.1$ と $\mu=0.2$ の場合の等価軸径は、どちらも荷重の値によって変化せず、ソリッドモデルのものと同一の 35.09mm (最大等価軸径の 99.12%) という値となった.

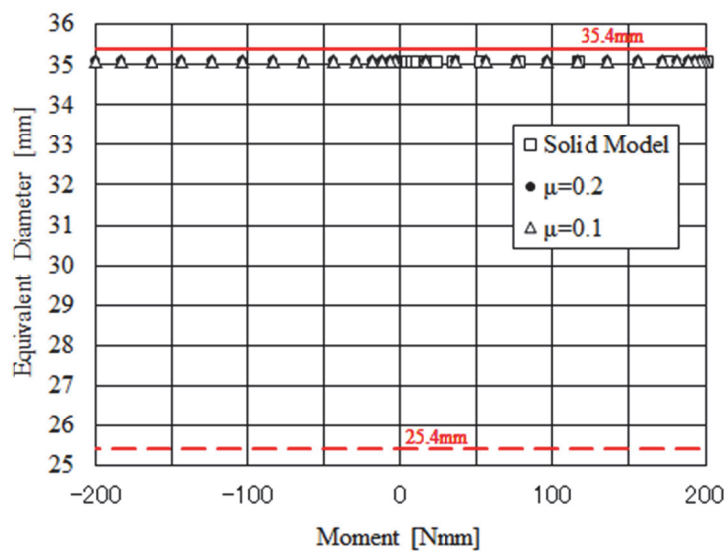


Fig. 4.7 Equivalent diameter versus bending moment in case of interference $\Delta d=0.001\text{mm}$ (friction coefficient $\mu=0.1$ and 0.2, solid model)

図 4.8 にすべり範囲分布図を示す。すべりなしの領域が赤色，すべりありの領域が青色で示されている。同図における右端断面の外周近傍の着色された部分は，解析プログラムの表示上の問題によるものであり，すべりとは無関係である。この分布図から，曲げモーメントの繰り返しに伴ってすべり範囲が小さくなり，ほぼすべての領域で滑りがなくなる状態に収束していることが分かる。

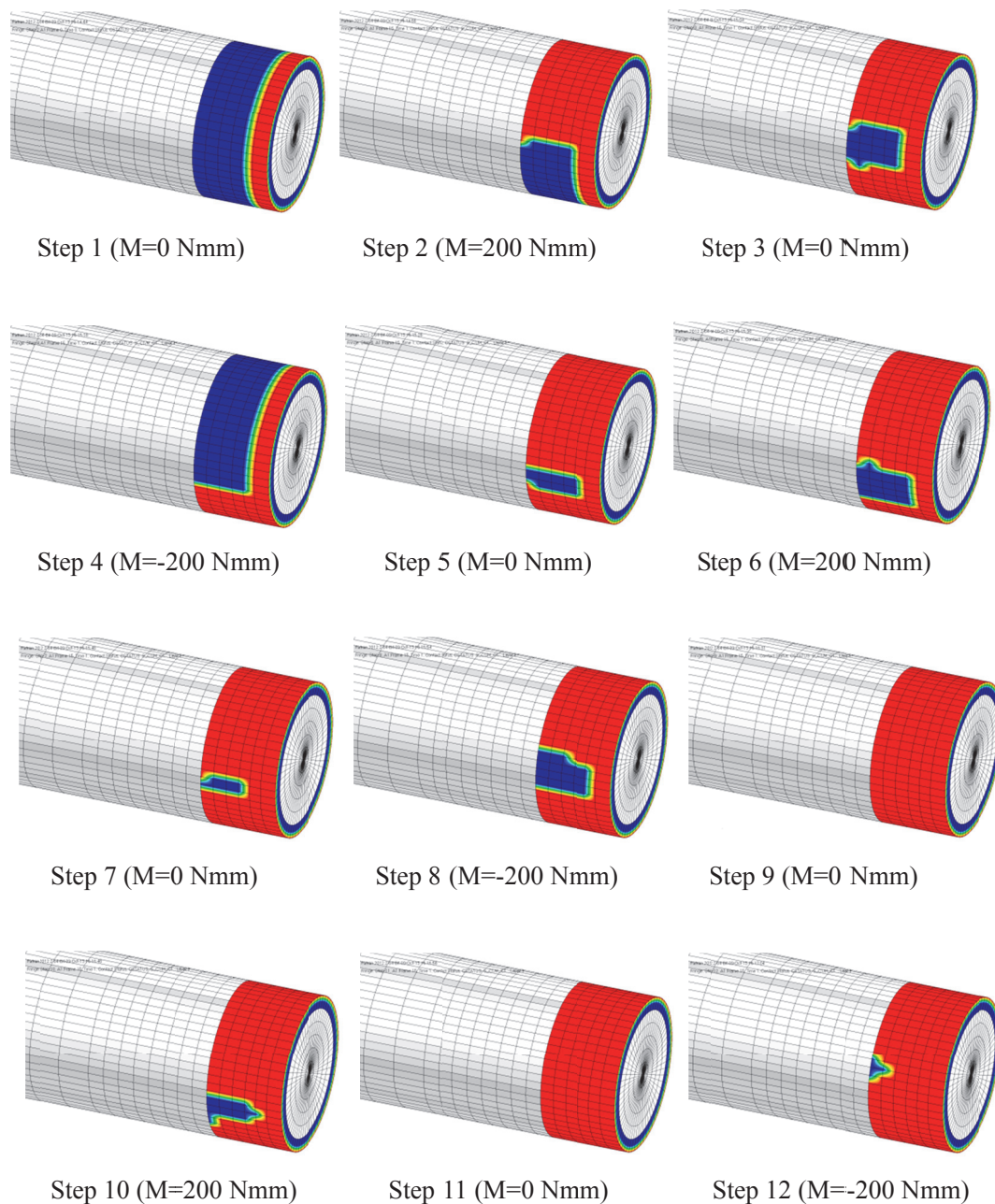


Fig. 4.8 Sliding area map in case of interference $\Delta d=0.01\text{mm}$ and friction coefficient $\mu=0.1$

曲げモーメントを繰り返し負荷した場合の嵌め合い部の状態は、曲げモーメントの大きさによって異なるため、図 4.8 の曲げモーメントが小さい場合と後述する曲げモーメントが大きい場合に分けて説明する。

- (a) ステップ 1 は、軸に曲げモーメントが作用していない軸に、軸の外径より小さい内径を持つスリーブを嵌め合わせた状態であり、スリーブの内径が広がられるのに伴ってスリーブが軸方向に圧縮されるためすべりが生じている。摩擦力 q はスリーブの縮みを緩和する方向に発生し、その大きさ $|q|$ は式 (4.3) で表される。

$$|q| = \mu p \quad (4.3)$$

μ : 摩擦係数

p : 面圧荷重 (N)

ここで、面圧荷重 p は、軸に作用する曲げモーメントに依存する、嵌め合い部の軸の弾性変形の形状によって変化するため、式 (4.4) で表すことができる。

$$p = p_0 + \Delta p \quad (4.4)$$

p_0 : 嵌め合いによる面圧荷重 (N)

Δp : 曲げモーメントによる面圧荷重の変化分 (N)

Δp は、軸が凸となる側のスリーブ端部では負となり、軸が凹となる側のスリーブ端部では正となる。式 (4.3) と式 (4.4) より、摩擦力 q の大きさ $|q|$ は式 (4.5) で表される。

$$|q| = \mu(p_0 + \Delta p) \quad (4.5)$$

ステップ 1 では曲げモーメントが作用していないため、摩擦力 q の大きさ $|q|$ は μp_0 である。

- (b) 曲げモーメントが小さい場合は、ステップ 2 では、軸の凸側（下面）のスリーブ端部の面圧が低下するのに伴い軸が軸方向に伸びるため、摩擦力が曲げモーメントによる軸の引張方向のせん断力と同一方向に作用して伸び方向のすべりが生じ、軸の凹側（上面）のスリーブ端部では曲げモーメントによる軸の圧縮方向のせん断力が面圧上昇に伴って増大した限界摩擦力を下回るためすべりは生じない。ステップ 3 では、ステップ 2 で下面に生じたすべりが保持され、上面ではすべり無しの状態が保持されるため、曲げの中立面に近い側面はステップ 1 から状態が変化しない。ステップ 4 では、

ステップ 2 と同様に、軸の凸側（上面）でのみ伸び方向のすべりが生じる。ステップ 5 では、ステップ 3 と同様に上面と下面にすべりは生じない。ステップ 6 以降は、面圧が低下する軸の凸側においても、曲げモーメントによる軸の引張方向のせん断力が限界摩擦力を上回らないため、上下面共すべりが生じない状態となる。

- (c) 曲げモーメントが大きい場合は、ステップ 2 では、曲げモーメントが小さい場合と同様に、軸の凸側（下面）のスリーブ端部の面圧が低下するのに伴いスリーブ端部の内径側が軸方向に縮もうとするため、摩擦力が曲げモーメントによる軸の引張方向のせん断力と同一方向に作用して伸び方向のすべりが生じる。軸の凹側（上面）のスリーブ端部では曲げモーメントによる軸の圧縮方向のせん断力が、面圧上昇に伴って増大した限界摩擦力を上回り縮み方向のすべりが生じる。ステップ 3 では、下面に縮み方向のすべりが生じる。ステップ 4 では、軸の凸側（上面）では伸び方向のすべりが生じ、軸の凹側（下面）では縮み方向のすべりが生じる。ステップ 5 では、上面に縮み方向のすべりが生じる。ステップ 6 以降は、ステップ 2 からステップ 5 と同様に、軸の凸側のスリーブ端部では、曲げモーメントの大きさが増大する過程では伸び方向のすべりが生じ、減少する過程では縮み方向のすべりが生じる。軸の凹側のスリーブ端部では、軸の凸側と逆向きのすべりが生じる。

次に、繰り返し作用する曲げモーメントが大きい場合について、滑りが生じる場合の見かけの曲げ剛性について検討する。例として、図 4.1 において嵌め合わせるスリーブの厚さを 1.0mm として嵌め合いによる面圧荷重 p_0 を小さくし、摩擦係数 μ を 0.05、締め代 Δd を 0.01mm、負荷する繰り返しの曲げモーメントを図 4.5 の 100 倍の $\pm 20000\text{Nmm}$ とした場合の、曲げモーメントと相対たわみ $\delta_0-\delta_1$ （図 4.2 参照）の関係を図 4.9 に示す。同図より、滑りが生じる場合は、1 回目の 1/4 サイクル以降は同一のヒステリシスループを描いてみかけの曲げ剛性が変化せず、みかけの曲げ剛性は図 4.3 に示された摩擦係数に依存する値とほぼ同一となることが分かった。

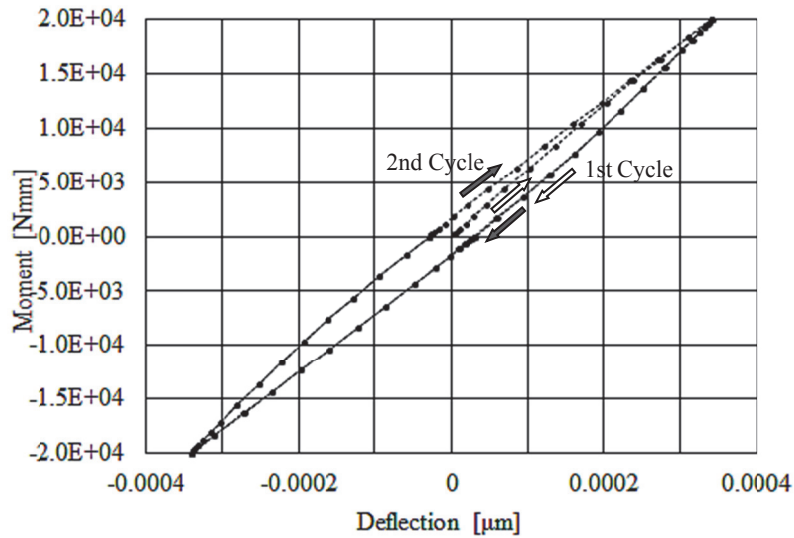


Fig. 4.9 Bending moment versus relative deflection in case of interference $\Delta d=0.01\text{mm}$ and friction coefficient $\mu=0.1$ (sleeve thickness: 1.0mm)

以上の検討の結果、締め代 Δd が正であれば、面圧荷重 p に対して曲げモーメント M が小さい場合は、摩擦係数 μ が小さな値でもすべりが生じないため曲げ剛性が等価となる軸径はスリーブ外径に近い値となり、面圧に対して曲げモーメント M が大きい場合は、摩擦係数 μ が小さいと滑りが生じるため曲げ剛性が等価となる軸径は摩擦係数に依存したスリーブ外径より小さな値となることが確認された。

4.2.2 嵌め合い部の曲げ剛性の実験による評価

4.2.1 節の接触解析による検討によって、嵌め合い部を持つ軸において、締め代が正であれば曲げ剛性が等価となる軸径はスリーブ外径にほぼ一致するという結果が得られた。また、締め代が正であれば曲げ剛性が等価となる軸径は軸の外径に一致すると推測される。そこで、スリーブをしまりばめで嵌め合わせた軸について、3.4.4 節と同様の衝撃加振試験を実施して自由支持状態の軸の曲げモードの固有振動数を求め、第 3 章で提案した軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D FEM モデルで求めた固有振動数と比較して、嵌め合い部の等価曲げ剛性を評価した。

スリーブを嵌め合わせる軸は、図 3.13 (a)に示した軸直径変化部を持つ軸 A とした。スリーブの軸方向長さは 25.4 mm、スリーブの厚さは 5 mm、嵌め合い強さはしまりばめとした。

図 4.10 (a)にスリーブ付きの軸の 1D FEM モデルを示し、図 4.10 (b)に同図(a)のスリーブ付き軸と同一形状の中実軸の 1D FEM モデルを示す。同図(a), (b)共に、直径変化部の弾性変形を考慮したモデル (1D Model 3) である。

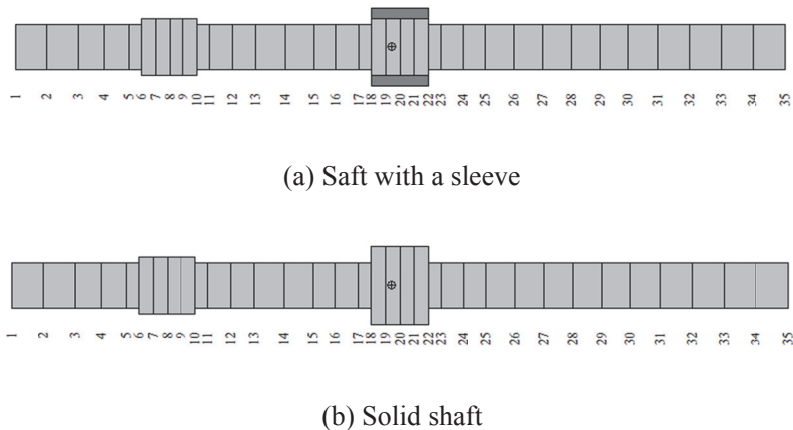


Fig. 4.10 1D FEM models of shaft with a sleeve and solid shaft

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D FEM モデルによる嵌め合い部の等価曲げ剛性の評価に先立ち、1D FEM モデルによって、図 4.10 (a)のすきまばめのスリーブ付き軸と図 4.10 (b)のソリッド軸との固有振動数の差異を、3D FEM モデルと同様に表現できることを確認する。

実験による図 4.10 (a)のしまりばめスリーブ付き軸の嵌め合い部の曲げ剛性の評価に先立ち、図 4.10 (b)のソリッド軸の曲げモードの固有振動数が、図 4.10 (a)の軸においてスリーブの嵌め合い強さをすきまばめとした軸の曲げモードの固有振動数と、明確に識別できることを確認するために、解析による検討を行った。

表 4.1 は、図 4.10 (b)のソリッド軸の 3 次元モデル (3D Model) と図 4.10 (a)のすきまばめのスリーブ付き軸の 1 次元モデル (1D Model 3) について曲げモードの固有振動数の解析値の比較を示したものであり、表 4.2 は、図 4.10 (b)のソリッド軸の 1 次元モデル (1D Model 3) と図 4.10 (a)のすきまばめのスリーブ付き軸の 1 次元モデル (1D Model 3) について曲げモードの固有振動数の解析値の比較を示したものである。すきまばめのスリーブ付き軸の 1D Model 3 による 1 次と 3 次の曲げモードの固有振動数の解析値は、ソリッド軸の 3D Model, 1D Model 3 の何れと比べても 1%以上低い値となっており、ソリッド軸とすきまばめのスリーブ付き軸では 1 次と 3 次の曲げモードの固有振動数が明確に異なることが分かる。

Table 4.1 Comparison between analytical natural frequencies of 3D Model of solid shaft and analytical natural frequencies of 1D Model 3 of shaft with a sleeve set on it by clearance fit

Unit: Hz

Mode	Analytical value of 3D Model of solid shaft	Analytical value of 1D Model 3 of shaft with a sleeve on it by clearance fit (difference)
1	733.33	724.34 (-1.23%)
2	2034.8	2038.2 (0.17%)
3	3804.9	3753.9 (-1.34%)
4	6161.8	6174.5 (0.21%)

Table 4.2 Comparison between analytical natural frequencies of 1D Model 3 of solid shaft and analytical natural frequencies of 1D Model 3 of shaft with a sleeve set on it by clearance fit

Unit: Hz

Mode	Analytical value of 1D Model 3 of solid shaft	Analytical value of 1D Model 3 of shaft with a sleeve on it by clearance fit (difference)
1	731.99	724.34 (-1.05%)
2	2036.1	2038.2 (0.10%)
3	3812.8	3753.9 (-1.54%)
4	6160.2	6174.5 (0.23%)

表 4.3 は、図 4.10 (b)のソリッド軸の 3 次元モデル (3D Model) の曲げモードの固有振動数の解析値と図 4.10 (a)のしまりばめのスリーブ付き軸の曲げモードの固有振動数の実験値の比較を示したものであり、表 4.4 は、図 4.10 (b)のソリッド軸の 1 次元モデル(1D Model 3) の曲げモードの固有振動数の解析値と図 4.10 (a)のしまりばめのスリーブ付き軸の曲げモードの固有振動数の実験値の比較を示したものである。ソリッド軸の 3D Model および 1D Model 3 の 1 次～4 次の曲げモードの固有振動数の解析値と、しまりばめのスリーブ付き軸の曲げモードの固有振動数の実験値との差異は、それぞれ 0.2%以下および 0.4%以下と小さな値となっており、上述した、解析によるすきまばめのスリーブ付き軸との比較で確認されたモード次数による顕著な差異も認められない。よって、しまりばめのスリーブ付き軸の嵌め合い部の曲げ剛性は、スリーブ外径と同一径のソリッド軸とほぼ同一と扱って良いと言える。

Table 4.3 Comparison between analytical natural frequencies of 3D Model of solid shaft and measured natural frequencies of shaft with a sleeve set on it by interference fit

Unit: Hz

Mode	Analytical value of 3D Model of solid shaft	Measured value of shaft with a sleeve set on it by shrink fit (Error)
1	733.33	731.84 (-0.20%)
2	2034.8	2035.1 (0.01%)
3	3804.9	3797.4 (-0.20%)
4	6161.8	6160.2 (-0.20%)

Table 4.4 Comparison between analytical natural frequencies of 1D Model 3 of solid shaft and measured natural frequencies of shaft with a sleeve set on it by interference fit

Unit: Hz

Mode	Analytical value of 1D Model 3 of solid shaft	Measured value of shaft with a sleeve set on it by shrink fit (Error)
1	731.99	731.84 (-0.02%)
2	2036.1	2035.1 (-0.05%)
3	3812.8	3797.4 (-0.40%)
4	6160.2	6160.2 (0.00%)

4.3 結言

嵌め合いによって軸の曲げ剛性がどの程度増大するかを把握するため、スリーブの嵌め合い部の摩擦を考慮した非線形静解析と、スリーブをしまりばめで嵌め合わせた軸について自由支持状態の曲げモードの固有振動数計測を実施した。

解析の結果、摩擦係数と締め代が小さい場合でも締め代が正であれば、面圧荷重に対して曲げモーメントが小さい場合は摩擦係数が小さな値でもすべりが生じないため、曲げ剛性が等価となる軸径がほぼスリーブ外径に一致することが確認され、実験においても、スリーブをしまりばめで嵌め合わせた軸の曲げモードの固有振動数は、スリーブ外径と同一径のソリッドな軸の固有振動数とほぼ一致するという結果が得られた。

したがって、嵌め合い部をもつ軸の曲げ振動を考える場合、嵌め合い部に過大な曲げモーメントが作用しなければすべりが生じないため、嵌め合い部をスリーブ外径と同一径のソリッドな軸として扱えばよいことが明らかになった。

第5章 軸直径変化部のねじり剛性の高精度化

5.1 緒言

第3章では、高田らの既存研究を基にして、1D FEM モデルにおいて、軸直径変化部の小径部に $9d/32$ の要素を設け、その部分の曲げ剛性を弱めることによって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性の低下を表現する方法を示した。本章では、軸直径変化部のねじり剛性の高精度化を目的として、曲げの場合と同様の考え方をを用いて、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性の低下について検討する。ロータのねじり振動を扱う上で、軸直径変化部のねじり剛性低下に関する研究は著者の知る限り見当たらない。

5.2 節では、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を、どのような問題として扱うことができるかを示す。端面中央部に固定された剛体軸によって静的トルクを受ける、外周面を固定された円柱の弾性変形の理論式を、薄板と厚板のそれぞれについて示す。

5.3 節では、提案する軸直径変化部のねじり剛性を高精度化する方法の適用範囲について検討する。3D FEM モデルによる解析結果を、剛体軸によって端面中央部に静的トルクを受ける外周面を固定された薄板および厚板の弾性変形の理論式と比較して、提案方法の適用範囲を明らかにする。

5.4 節では、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル化方法について検討する。まず、軸直径変化部断面の弾性変形と等価なねじり剛性について検討する。次に、回転ばねの直列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデルを検討する。そして、回転ばねの並列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデルを検討する。さらに、等価なねじり剛性を与える軸径について検討する。

5.5 節では、提案方法の妥当性を検証するために、ねじり剛性を高精度化した 3D FEM モデルを参照して、ねじりモードの固有振動数と静的トルクによるねじり角を評価する。さらに、具体例として実機相当の解析モデルについて、提案方法を適用した場合と適用しない場合のねじりモードの固有振動数を比較して、どの程度の差異が生じるかを示す。

5.2 静的トルクによる外周固定円柱の弾性変形

図 5.1 は、端面中央部に固定された剛体軸によって静的トルクを受ける、外周面を固定された円柱の弾性変形の様子を示したものである。ここで、剛体軸の半径は a 、弾性円柱の半径は b 、弾性円柱の厚さは h 、剛体軸に作用するトルクは T 、剛体軸の回転角は θ である。このモデルでは、半径 b (直径 $2b=d_0$) の弾性円柱が軸直径変化部の大径軸に相当し、半径 a (直径 $2a=d$) の剛体軸が軸直径変化部の小径軸に相当する。剛体軸の回転角 θ がトルク T による軸直径変化部断面の弾性変形である。なお、図 5.1 は MATLAB®のサードパーティ Toolbox である SDTools 社製の Structural Dynamics Toolbox を使用して作成した 3D FEM モデ

ルである.

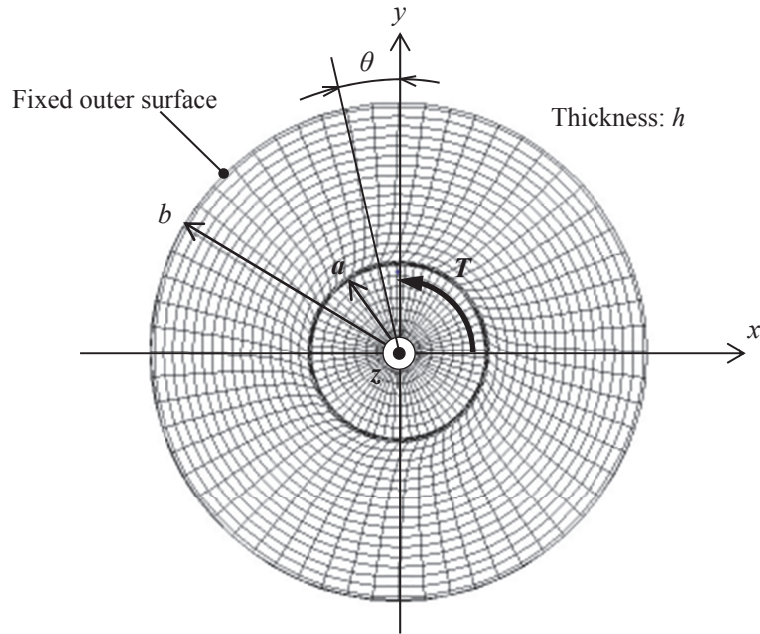


Fig. 5.1 Deformation of a elastic cylinder which has fixed outer surface due to applied torque on its end surface by a rigid shaft fixed on it

弾性円柱の厚さ h が薄い場合は, 2次元の弾性変形問題として扱うことができ, トルク T と剛体軸の回転角 θ の関係は式 (5.1) で表される (中原, 1977).

$$\theta = \frac{T}{4\pi Gh} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (5.1)$$

G : 横弾性係数 (N/m^2)

弾性円柱の厚さ h が厚い場合は, 3次元の弾性変形問題として扱う必要がある. Sneddon, I. N.は, $b \gg a$ の場合のトルク T_∞ が式 (5.2) で表され, トルク T と T_∞ の比 T/T_∞ が式 (5.3) の逐次近似解として表されることを示している (Sneddon, I. N., 1966).

$$T_\infty = \frac{16}{3} Ga^3 \theta \quad (5.2)$$

$$\frac{T}{T_{\infty}} = 1 + 0.3382\beta^3 + 0.0815\beta^5 + 0.1144\beta^6 + 0.0125\beta^7 + O(\beta^8) \quad (5.3)$$

β : 軸直径比, $\beta = a/b = d/d_0$

本研究では, 式 (5.2) と式 (5.3) の $O(\beta^8)$ の項を省いた式から得られる, 式 (5.4) をトルク T と剛体軸の回転角 θ の関係式とする.

$$\theta = \frac{3T}{16Ga^3(1 + 0.3382\beta^3 + 0.0815\beta^5 + 0.1144\beta^6 + 0.0125\beta^7)} \quad (5.4)$$

5.3 適用範囲の検討

次節以降に示す提案方法は, 式(5.4)が成立する, 大径部を厚板として扱うことができる場合を想定している. そこで, 大径部を厚板として扱うことができる範囲を検討するために, 図 5.1 に示した 3次元有限要素モデルを用いて, 軸直径比 $\beta=0.1500, 0.3175, 0.5650, 0.7874$ の場合について, 剛体軸に作用させるトルクを $T=1000 \text{ Nm}$ とし, 大径部の幅径比 h/d_0 を 0.01 から 1 まで変化させた場合の剛体軸の回転角 θ を求めた. その結果を図 5.2 に示す. 同図には, 薄板のトルク T と回転角 θ の関係式 (5.1) の値を青色の実線で示し, 厚板のトルク T と回転角 θ の関係式 (5.4) の値を赤色の実線で示した.

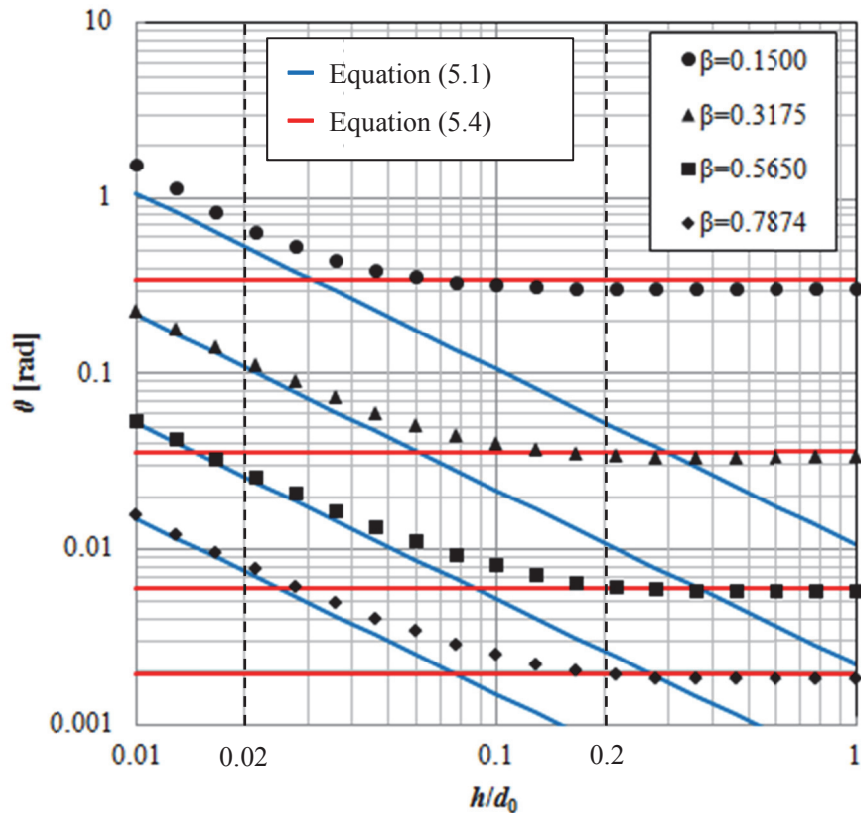


Fig. 5.2 Relationship between the rotation angle of rigid shaft and the width – diameter ratio on elastic cylinder which has fixed outer surface in case that applied torque $T=1000$ Nm

幅径比 h/d_0 が約 0.02 以下の範囲では、解析結果は、どの軸直径比 β においても薄板のトルク T と回転角 θ の関係が式 (5.1) と良く一致していることを示している。これより、薄板とみなせる h/d_0 の範囲は軸直径比 β によらず $h/d_0 \leq 0.02$ であることが分かる。

幅径比 h/d_0 が約 0.2 以上の範囲では、解析結果は、どの軸直径比 β においても厚板のトルク T と回転角 θ の関係が式 (5.4) と良く一致していることを示している。これより、厚板とみなせる h/d_0 の範囲は軸直径比 β によらず $h/d_0 \geq 0.2$ であることが分かる。また、式(5.4)からも明らかであるが、厚板とみなせる範囲では、一定のトルクに対する剛体軸の回転角 θ は h/d_0 によらず一定となる。

実際の回転軸では、大径部が薄板とみなせる場合はねじり剛性低下は無視できるが、大径部が厚板とみなせる場合はねじり剛性低下が起こる。よって、大径部が厚板とみなせる場合についてのみ、軸直径変化部断面の弾性変形によるねじり剛性低下を考慮すればよい。その範囲は、軸直径比 β によらず、大径部を厚板とみなすことができる $h/d_0 \geq 0.2$ である。

5.4 軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル化方法

5.4.1 軸直径変化部断面の弾性変形の等価ねじり剛性

剛体軸に作用するトルク T によって生じる剛体軸の回転角 θ (図 5.1 参照) を, 片側の端面が固定された中実円柱のねじり角と等価とにおいて, 軸直径変化部断面の弾性変形の等価ねじり剛性を求める.

大径部が厚板の場合は, 剛体軸に作用するトルク T によって生じる剛体軸の回転角 θ の関係は式 (5.4) で与えられる.

図 5.3 に示される, 長さ l , 横弾性係数 G , 断面 2 次極モーメント I_p の, 一方の端面が固定された中実円柱が, もう一方の端面にトルク T を受けたときの先端のねじり角 θ は, 式 (5.5) で与えられる (中沢他, 1973b).

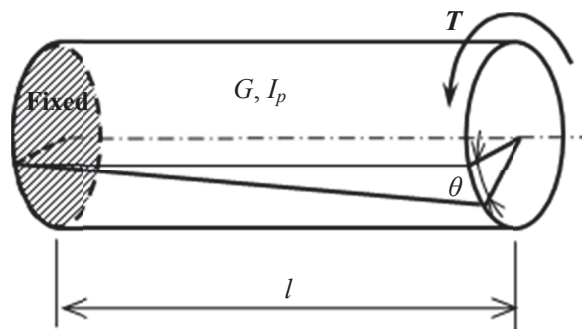


Fig. 5.3 Torsional angle of cantilever beam due to torque

$$\theta = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{32Tl}{G\pi d^4} \quad (5.5)$$

式 (5.4) と式 (5.5) から, 軸直径変化部断面の弾性変形の等価ねじり剛性 GI_{pd} を表す式 (5.6) が得られる.

$$GI_{pd} = \frac{16}{3} Ga^3 (1 + 0.3382\beta^3 + 0.0815\beta^5 + 0.1144\beta^6 + 0.0125\beta^7) \cdot l \quad (5.6)$$

5.4.2 回転ばねの直列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル

1D FEM モデルにおいて, 軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低

下を考慮したモデルを図 5.4 に示す.

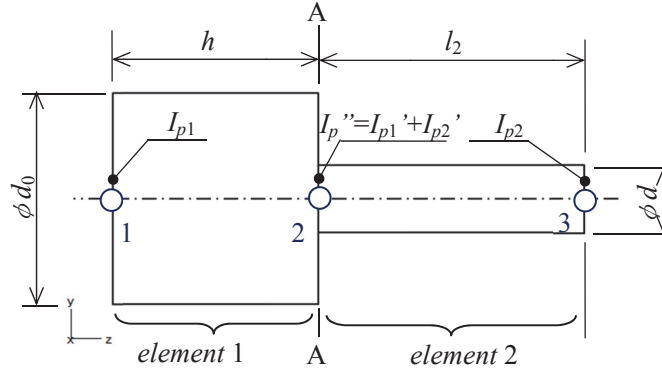


Fig. 5.4 1D beam model for torsion in consideration for elasticity of stepped cross-section

3.3.2 節で示した曲げの場合と同様に、3 つの節点で 2 つの軸要素を定義し、大径軸右端の節点 2 のねじり剛性 GI'_{p1} と小径軸の左端の節点 2 のねじり剛性 GI'_{p2} をそれぞれ式 (5.7) と式 (5.8) の直列結合によって求める。

$$GI'_{p1} = G \frac{I_{p1} I_{pd}}{I_{p1} + I_{pd}} \quad (5.7)$$

$$GI'_{p2} = G \frac{I_{p2} I_{pd}}{I_{p2} + I_{pd}} \quad (5.8)$$

次に、大径軸と小径軸の結合部（節点 2）のねじり剛性を、通常の重ね合わせ、すなわち並列結合によって求める。

$$GI''_p = GI'_{p1} + GI'_{p2} = G \left(\frac{I_{p1} I_{pd}}{I_{p1} + I_{pd}} + \frac{I_{p2} I_{pd}}{I_{p2} + I_{pd}} \right) \quad (5.9)$$

式(5.9)において軸直径変化部断面の弾性変形を表す断面 2 次極モーメント I_{pd} は式(5.6) で与えられる。

その次に、曲げの場合と同様にして、ねじり剛性を弱める小径軸要素の長さ l の妥当な値を検討する。式 (5.4) と式 (5.5) より、軸直径変化部断面の弾性変形と等価なねじり剛性を与える小径軸の長さ l を表す式 (5.10) の条件が得られる。

$$l = \frac{3\pi a}{32(1 + 0.3382\beta^3 + 0.0815\beta^5 + 0.1144\beta^6 + 0.0125\beta^7)} \quad (5.10)$$

$$= \frac{3\pi d}{64(1 + 0.3382\beta^3 + 0.0815\beta^5 + 0.1144\beta^6 + 0.0125\beta^7)}$$

式 (5.10) で与えられる長さ l を持つ直径 d の小径軸の要素のねじり剛性 GI_{p2} が軸直径変化部断面のねじり剛性 GI_{pd} と等価であるため、

$$GI_{pd} = GI_{p2} \quad (5.11)$$

とおくことができ、断面 A-A におけるねじり剛性 GI_{pA} を表す式 (5.9) は、式 (5.12) となる。

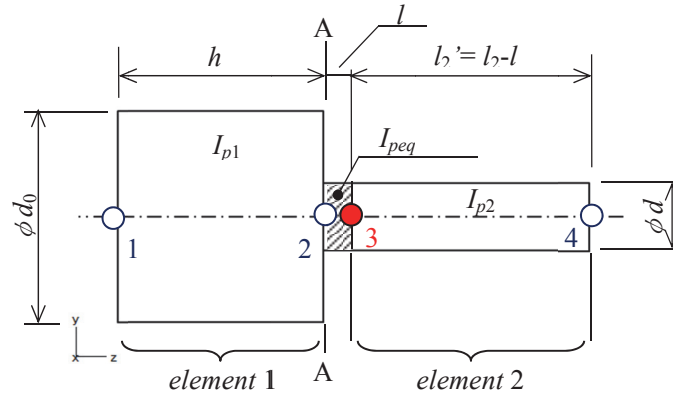
$$GI_{pA} = GI_p'' = G \left(\frac{I_{p1}I_{p2}}{I_{p1} + I_{p2}} + \frac{I_{p2}I_{p2}}{I_{p2} + I_{p2}} \right) = G \left(\frac{I_{p1}I_{p2}}{I_{p1} + I_{p2}} + \frac{I_{p2}}{2} \right) \quad (5.12)$$

式 (5.12) によって、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮することができるが、大径軸要素、小径軸要素、共に軸要素の両端でねじり剛性が異なるため ($GI_{p1} \neq GI_{p1}'$, $GI_{p2} \neq GI_{p2}'$)、一般的な 1D FEM モデルが適用されたねじり振動解析環境にこの方法を適用することは容易ではない。

5.4.3 回転ばねの並列結合によって軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル

一般的な 1D FEM モデルで用いられているねじりばねの並列結合によって、軸直径変化部断面の弾性変形によるねじり剛性低下を考慮することができるモデル化方法を提案する。

図 5.5 は、ここで提案する軸直径変化部のモデル化方法を示したものである。



$$l = \frac{3\pi d}{64(1 + 0.3382\beta^3 + 0.0815\beta^5 + 0.1144\beta^6 + 0.0125\beta^7)}$$

Fig. 5.5 1D beam model for torsion in consideration for elasticity of stepped cross-section using the method proposed by the author

まず、式 (5.10) で与えられる長さの軸要素を軸直径変化部の小径部に設ける。

次に、式 (5.12) で示される断面 A-A におけるねじり剛性 GI_{pA} を、一般的な 1D FEM モデルで用いられる重ね合わせ、すなわち並列結合で表すことを考える。図 5.5 において、式 (5.10) で与えられる長さの小径軸要素の等価ねじり剛性を GI_{peq} とおいて節点 2 と節点 3 で各々のねじり剛性が並列結合され、節点 2, 3 のねじり剛性が直列結合されたものが式 (5.13) であり、これは式 (5.12) と等価である。

$$GI_{pA} = G \frac{(I_{p1} + I_{peq}) \cdot (I_{p2} + I_{peq})}{(I_{p1} + I_{peq}) + (I_{p2} + I_{peq})} \quad (5.13)$$

よって、式 (5.13) と式 (5.12) から、ねじり剛性の等価断面 2 次モーメント I_{peq} は式 (5.14) となる。

$$I_{peq} = \frac{I_{p1}I_{p2} - I_{p1}^2 + \sqrt{I_{p1}^4 + 7I_{p1}^2I_{p2}^2 + 6I_{p1}I_{p2}^3 + 2I_{p2}^4}}{2(I_{p1} + I_{p2})} \quad (5.14)$$

図 5.5 の節点 2 と節点 3 で定義される、式 (5.10) で与えられる長さの軸要素を軸直径変化部の小径側に設けて、その部分のねじり剛性を GI_{peq} とおくことで、断面 A-A の弾性変形を考慮したねじり剛性を表現することができる。ただし、式 (5.14) が成立するのは、式 (5.4)

が成立するおよそ $h/d_0 \geq 0.2$ の範囲においてである。

5.4.4 ねじり剛性の等価軸径の検討

本節では、軸直径変化部のみかけの軸のねじり剛性低下を把握し易くするために、等価なねじり剛性を与える小径部の軸径 d_{peq} を定義し、 d_{peq} が軸直径比 $\beta (=d/d_0)$ に対してどのように変化するかを検討する。

等価なねじり剛性を与える小径部の軸径を d_{peq} として、式 (5.14) で示されるねじり剛性の等価断面 2 次極モーメント I_{peq} を中実円形断面軸の断面 2 次極モーメントの形で表すと、式 (5.15) となる。

$$I_{peq} = \frac{\pi}{32} d_{peq}^4 \quad (5.15)$$

式 (5.15) より、等価なねじり剛性を与える小径部の軸径 d_{peq} は式 (5.16) で表される。

$$d_{peq} = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} I_{peq}} \quad (5.16)$$

式 (5.14) に $I_{p1} = \pi d_0^4 / 32$, $I_{p2} = \pi d^4 / 32$ を代入して I_{peq} を d_0 と d の関数で表し、軸直径比 $\beta (=d/d_0)$ と等価軸径比 d_{peq}/d の関係を求めると、曲げの場合の軸直径比 β と等価軸径比 d_{eq}/d の関係 (図 3.9 参照) と同一の図 5.6 の曲線が得られる。同図より、式 (5.4) が成り立つ $h/d_0 \geq 0.2$ の範囲では、大径軸直径 d_0 が小径軸直径 d に対していくら大きくなっても、等価なねじり剛性 GI_{peq} は小径軸のねじり剛性 GI_{p2} の $0.8409^4 = 0.4979$ 倍を下回らないと言える。

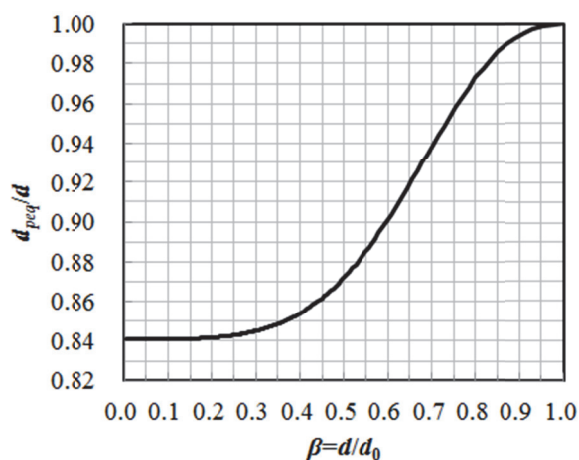


Fig. 5.6 Relationship between β and d_{peq}/d

以上により，式 (5.10) で与えられる長さの小径軸要素のねじり剛性を GI_{peq} とする，あるいは，式 (5.10) で与えられる長さの小径軸要素の直径を式 (5.16) の等価なねじり剛性を与える小径部の軸径 d_{peq} とすれば，一般的な一次元梁モデルが適用された軸振動解析ソフトウェアで，軸直径変化部の弾性変形を考慮した軸振動（ねじり振動）の解析を簡便に実現することができる。

5.5 提案方法の妥当性の検証

5.5.1 3次元有限要素モデルのねじり剛性の補正

検証に先立ち，曲げの場合と同一の 3D FEM モデル（図 3.10 参照）のねじり振動特性を 3.4.1 節と同様の方法で高精度化する．材料特性は，曲げの場合と同一の横弾性係数 $G=8.0335 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ，ポアソン比 $\nu=0.3008$ ，密度 $\rho=7846 \text{ kg/m}^3$ とする．着目するモード回数については，一般に，ねじりモードの固有振動数は曲げと比べて高いため，ここでは 3 次までとする．ねじり振動特性が高精度である一様断面の 1D FEM モデルについても曲げの場合と同一のモデル（図 3.11 参照）とする．

一様な中実円形断面軸の 1D FEM モデルのねじり 1 次～3 次の固有振動数を参照して 3D FEM モデルの横弾性係数を補正する．横弾性係数の補正には，式 (5.17) の固有角振動数 ω_n とねじり剛性 GI_p の関係から得られる式 (5.18) を用いる．

$$\omega_n^2 \propto GI_p \quad (5.17)$$

$$G' = \left(\frac{1}{1 + \bar{\varepsilon}} \right)^2 \cdot G \quad (5.18)$$

G : 補正前の横弾性係数 (N/m^2)

G' : 補正後の横弾性係数 (N/m^2)

$\bar{\varepsilon}$: ねじり 1 次～3 次の固有角振動数の平均誤差

表 5.1 は，図 3.11 の 1D FEM モデル（参照モデル）と図 3.10 の 3D FEM モデルのねじり 1 次～3 次の固有振動数の比較を示したものである．3D Model 0 が横弾性係数を補正する前の $G=8.0335 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ としたモデルであり，3D Model 1 が横弾性係数を式 (5.18) によって補正した $G'=8.0726 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ としたモデルである．1D FEM モデルに対する，横弾性係数を補正する前の 3D FEM モデルの固有振動数の誤差の絶対値は最大で 0.48% であるのに対して，横弾性係数を補正した後の 3D FEM モデルの固有振動数の誤差の絶対値は最大で 0.24% と 1/2 に低減している．

Table 5.1 Comparison of natural frequencies for torsional modes of a shaft with uniform cross-section between 1D model and 3D model

Mode	1D Model	3D Model 0 (Error)		3D Model 1 (Error)	
		Value	Error (%)	Value	Error (%)
1	4573.8	4571.4	(-0.05%)	4582.5	(0.19%)
2	9161.5	9143.7	(-0.19%)	9165.9	(0.05%)
3	13785	13718	(-0.48%)	13752	(-0.24%)

Unit: Hz

5.5.2 ねじりモードの固有振動数

ここでは、3.4.2 節の軸 B を取り上げる (図 5.7 参照).
軸 B の寸法を以下に再掲する.

- Shaft B ; 全長 350mm, 小径部外径 $\phi 20\text{mm}$,
大径部外径 $\phi 25.4\text{mm}$ ($\beta=0.7874$) と $\phi 35.4\text{mm}$ ($\beta=0.5650$)
大径部の位置 : 左端から 57.3mm~82.7mm ($h/d_0=1$),
162.3mm~187.7mm ($h/d_0=0.7175$)

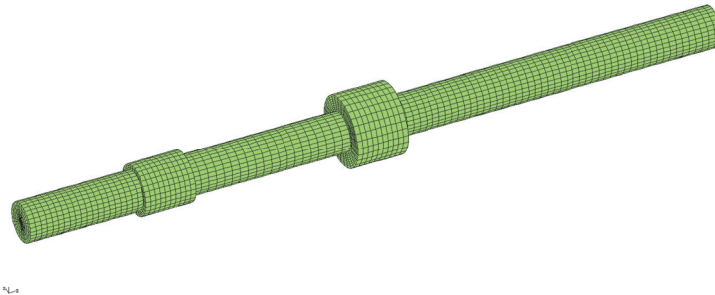


Fig. 5.7 3D FEM model of Shaft B

図 5.7 の 3D FEM モデルの自由支持状態の固有値解析結果 (ねじり 1 次~3 次の固有振動数) を参照して, 図 5.8 の 1D FEM モデルに提案方法を適用した場合の固有振動数を評価した. 3D FEM モデルの材料特性は横弾性係数 $G=8.0726 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ (補正後), ポアソン比 $\nu=0.3008$, 密度 $\rho=7846 \text{ kg/m}^3$ とし, 1D FEM モデルの材料特性は横弾性係数 $G=8.0335 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3008$, 密度 $\rho=7846 \text{ kg/m}^3$ とした. なお, 図 5.8 の 1D FEM モデルでは左端から 5, 10, 17, 22 番目の要素長を式 (5.10) で与えられる長さとしている.

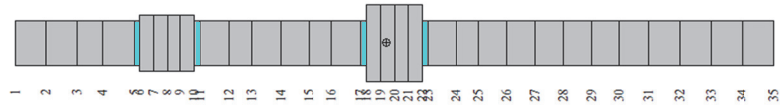


Fig. 5.8 1D FEM model of Shaft B

図 5.9 は軸 B のねじり 1 次～3 次の固有モードを示したものである。

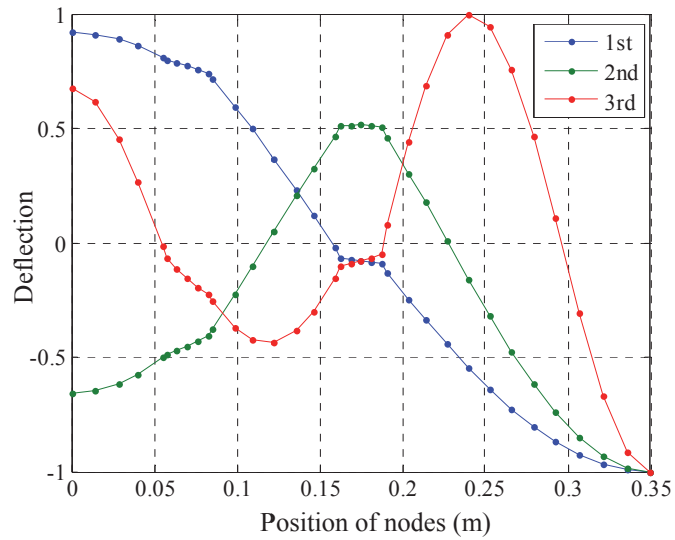


Fig. 5.9 Eigenmodes for torsion of Shaft B

表 5.2 は、図 5.7 の軸直径変化部を有する軸 B の 3D FEM モデル (参照モデル) と、図 5.8 の軸 B の下記の 2 つの 1D FEM モデルについてねじり 1 次～3 次の固有振動数の比較を示したものである。

- 1D Model 1 : 軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しないモデル
- 1D Model 3 : 提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル

Table 5.2 Comparison of natural frequencies for torsion of Shaft B
Unit: Hz

Mode	3D Model	1D Model 1 (Error)	1D Model 3 (Error)
1	4591.0	4650.7 (1.30%)	4598.1 (0.16%)
2	6538.3	6593.0 (0.84%)	6543.6 (0.08%)
3	14780	15030 (1.70%)	14880 (0.68%)

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 では最大で 1.70%の誤差があるが、提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の誤差は 1D Model 1 の 1/2 未満の 0.68%以下である。

以上、図 5.8 の軸直径変化部を有する軸の 1D FEM モデルについて、図 5.7 の 3D FEM モデルを参照して、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない場合と提案方法で考慮した場合についてねじり 1 次～3 次の固有振動数を比較し、提案方法の妥当性を確認した。

5.5.3 静的トルクによるねじり角の評価

ここでは、図 5.8 の軸 B の中央の大径部と右側の小径部からなる軸、すなわち図 5.8 の軸 B の節点 18 から節点 35 までの軸を取り上げる。大径部外周面を拘束して小径部先端にトルクを与えたときの小径部の回転角の分布を、図 5.10 の 3D FEM モデルと図 5.11 の 1D FEM モデルについて求めて比較を行った。図 5.11 の 1D FEM モデルでは左端から 5 番目の要素長を式 (5.10) で与えられる長さとしている。

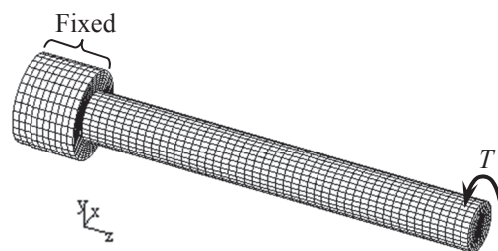


図 5.10 3D FEM model of shaft with stepped cross-section for torsional deflection analysis

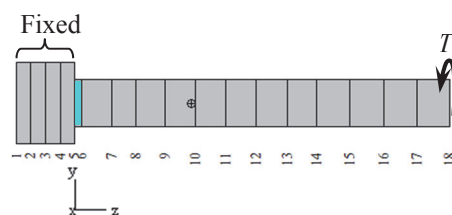


図 5.11 1D FEM model of shaft with stepped cross-section for torsional deflection analysis

1D FEM モデルでは、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮しない 1D Model 1 と提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮した 1D Model 3 の 2つのモデルについて回転角を求めた。ここで、小径部先端に与えるトルクは $T=100 \text{ N}\cdot\text{m}$ とした。横弾性係数は、5.5.2 節と同じ値を用いた。

図 5.12 は各モデルの小径部の回転角の分布を示したものである。同図には先端部の拡大図に加えて先端部の回転角の値を凡例の順に示した。3D FEM モデルに対する 1D Model 1 と 1D Model 3 の先端部の回転角の誤差はそれぞれ、 -1.46% と -0.47% であり、提案方法によって軸直径変化部断面の弾性変形を考慮することによって先端部の回転角の誤差を大幅に低減できることが確認された。

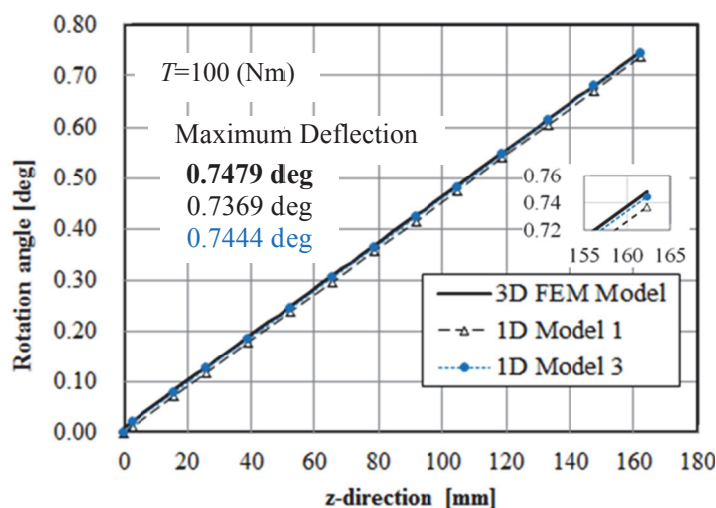


Fig. 5.12 Deflection of shaft with stepped cross-section due to torque

5.5.4 実機相当の解析モデルによるねじりモードの固有振動数の評価

本節では、図 5.13 に示すタービン発電機ロータの実機相当モデルを用いて、軸直径変化部断面の弾性変形を提案方法によって考慮した場合（提案法）と考慮しない場合（従来法）について、ねじりモードの固有値解析結果を比較する。

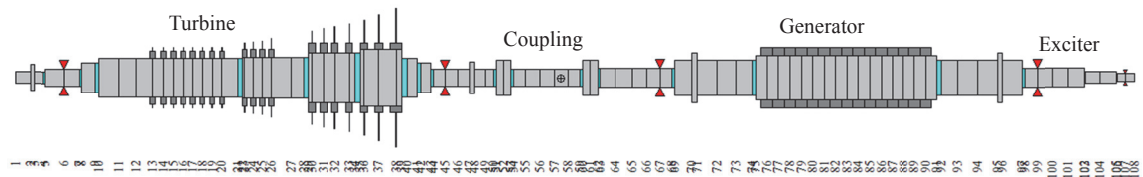


Fig. 5.13 Torsional vibration analysis model of turbine – generator rotor

図 5.13 のモデルは、タービンロータと発電機ロータがカップリングで剛結合された 1 軸ロータが節点番号 6, 45, 67, 99, 107 の位置の軸受で支持された構造を持っている。タービン-発電機ロータは、全長 29,614mm, 節点数 108, 軸の要素数 107 の回転軸と、ブレード等のディスク要素で構成されている。水色で示した、要素番号 4, 7, 9, 21, 28, 34, 39, 41, 43, 50, 53, 59, 62, 68, 74, 91, 97, 102, 105 の要素は、軸直径変化部断面の弾性変形によるねじり剛性低下を考慮すべき要素であるため、要素長を式 (5.10) で与えられる長さとしている。付録 A-5 にタービン-発電機ロータのねじり振動解析モデルの諸元を示す。

表 5.3 は、水色で示した要素のねじり剛性を GI_{peq} (式 (5.14) 参照) とする提案方法と、軸直径変化部のねじり剛性低下を考慮しない通常の方法について、ねじり 1 次～3 次の固有振動数の計算結果を示したものである。同表には、提案方法と通常の方法の差異についても示した。提案法によるねじり 1 次と 2 次の固有振動数は、通常の方法より約 2%低い値である。参考に、ねじり 1 次～3 次の固有モードを図 5.14 に示す。

Table 5.3 Natural frequencies of torsional modes for turbine – generator rotor

Unit: Hz

Mode	Proposed method	Ordinary method
1	16.873	17.253 (2.25%)
2	132.38	134.94 (1.93%)
3	166.78	167.14 (0.21%)

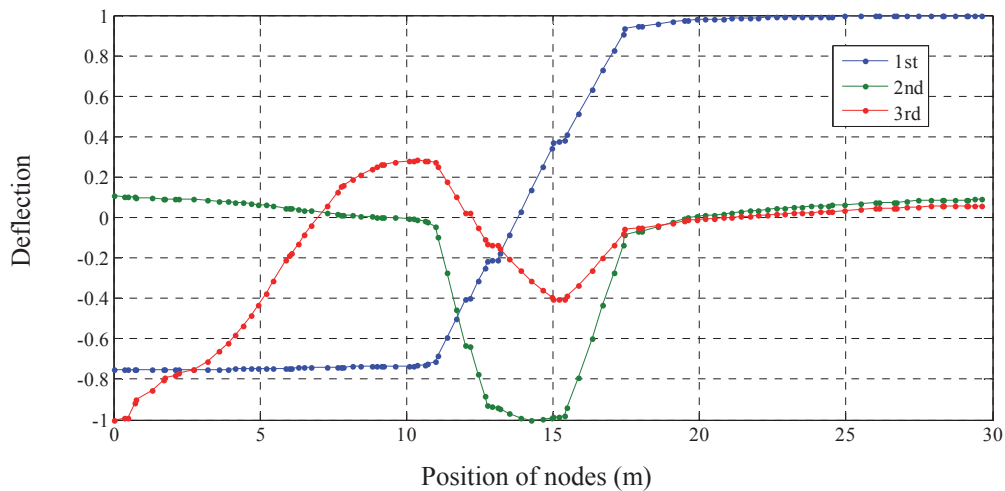
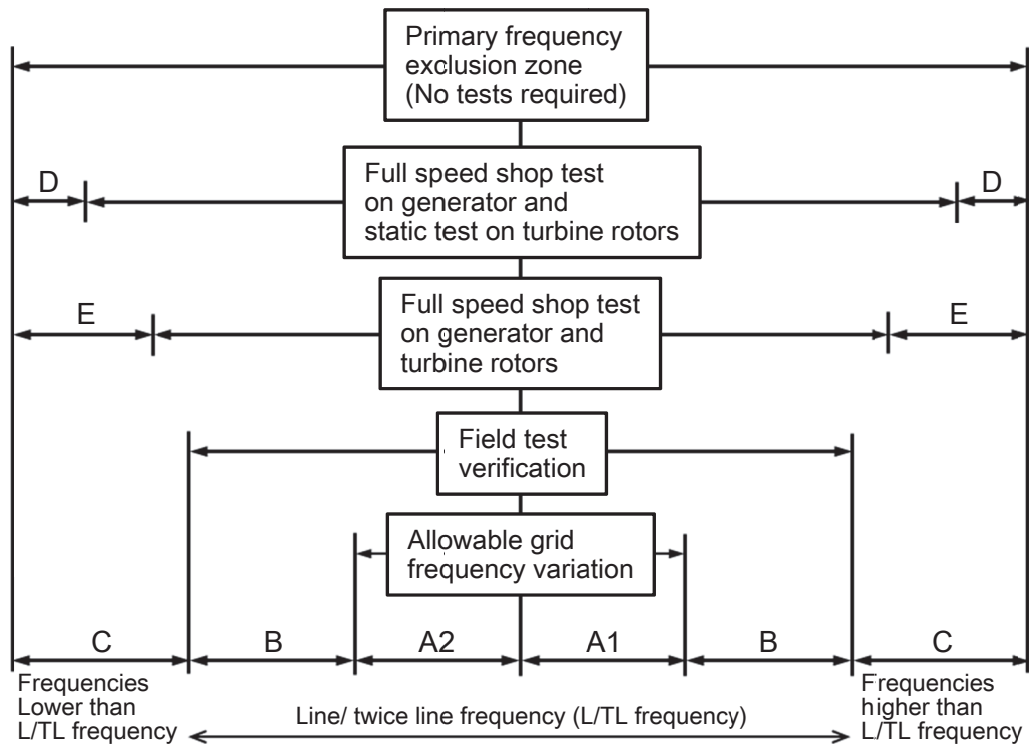


Fig. 5.14 Eigenmodes of torsional vibration for turbine – generator rotor

図 5.13 の解析モデルに関する、提案方法と通常の方法による 1 次と 2 次のねじりモードの固有値解析結果の差異 約 2%が、どの程度の大きさであるかを評価するために、この差異を規格で示されている値と比較した。

図 5.15 は、50 MW 以上の陸用タービン発電機ロータに関するねじり振動に関する設計指針に関する規格 ISO 22266-1: 2009 (International Organization for Standardization, 2009) で示されている、保つべき、同期周波数とねじり固有振動数との差異、すなわち離調の度合いを示したものである。同規格では、A1, A2, B, C, D, E の値をそれぞれ、2.5%, 2.5%, 1%, 2.5%, 1%, 2%とすることが一般指針として示されている。さらに、ねじり振動の解析または計測が常温で実施される場合は、1%の余裕を追加で見込む必要があることが示されている。



- A1: Allowable upper grid frequency deviation
- A2: Allowable lower grid frequency deviation
- B : Margin between maximum/minimum allowable grid frequency and resonance peak
- C : Calculation uncertainty
- D: Reduction in calculation uncertainty if a full-speed (dynamic) shop test carried out on generator rotor and static shop test (e.g. modal testing) carried out on LP rotor
- E : Reduction in calculation uncertainty if full-speed shop tests carried out on the rotor(s) of concern, e.g. the generator, exciter, LP rotor, or if successful operating experience is available for a similar shaft system
- F : Temperature effects
This compensates for the change in shaft stiffness in those cases where calculations or tests are carried out at room temperature instead of the normal operating temperature. F is zero if temperature effects have been taken into account.

Fig. 5.15 Definition of torsional frequency exclusion zone (ISO 22266-1: 2009)

図 5.13 のロータの解析モデルにおいて生じた提案法と通常の方法とのねじりモードの固有値解析結果の差異 約 2%は、ISO 22266-1: 2009 で一般指針として示されている、考慮すべき解析誤差の大きさ 2.5%と同程度であると言える。ここで取り上げた軸直径変化部断面の弾性変形によるねじり剛性低下に加えて、無視できない大きさのねじり振動解析モデルのモデル化誤差が存在する場合は、解析誤差が規格で一般指針として示された値を上回る恐れがある。

5.6 結言

1次元梁の有限要素モデルへの適用が容易な、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を考慮したモデル化方法について検討し、以下の結論を得た。

- (1) 大径部が厚板とみなせる、弾性変形を考慮すべき h/d_0 の範囲、すなわち提案方法の適用範囲は、軸直径比 β によらずおよそ $h/d_0 \geq 0.2$ である。これは曲げの場合と同様である。
- (2) 小径部に長さ $3\pi d / \{64(1+0.3382\beta^3+0.0815\beta^5+0.1144\beta^6+0.0125\beta^7)\}$ の軸要素を設け、その部分のねじり剛性を曲げの場合と同様の式 (5.19) で与えられる等価なねじり剛性 I_{peq} とすることによって、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を表現することができる。

$$I_{peq} = \frac{I_{p1}I_{p2} - I_{p1}^2 + \sqrt{I_{p1}^4 + 7I_{p1}^2I_{p2}^2 + 6I_{p1}I_{p2}^3 + 2I_{p2}^4}}{2(I_{p1} + I_{p2})} \quad (5.19)$$

I_{p1} : 大径軸の断面 2 次極モーメント (m^4)

I_{p2} : 小径軸の断面 2 次極モーメント (m^4)

- (3) 大径部が厚板とみなせる、弾性変形を考慮すべき範囲では、大径軸直径 d_0 が小径軸直径 d に対していくらか大きくなっても、等価なねじり剛性 GI_{peq} は曲げの場合と同様に小径軸のねじり剛性 GI_{p2} の 0.4979 倍を下回らない。
- (4) 提案方法を適用することによって、動的現象である固有振動特性だけでなく、静的なねじり変形についても高精度な解析結果を得ることができる。
- (5) 実機相当のタービン発電機ロータのモデルにおける、低次モードの固有振動数に関する通常の方法と提案方法の差異は、最大で約 2%であった。この値は、ISO 22266-1: 2009 で一般指針として示されている、考慮すべき解析誤差の大きさ 2.5%と同程度である。

参考文献

- 中原 一郎, 応用弾性学, 実教出版 (1977), p. 91.
中沢 一, 長屋 二郎, 加藤 博, 最新機械工学講座 材料力学, 産業図書 (1973), p. 46.
Sneddon, I. N., The Reissner-Sagoci problem, Proceedings of The Glasgow Mathematical Association, Vol. 7, No. 3 (1966)
ISO 22266-1: 2009, Mechanical vibration - torsional vibration of rotating machinery - part 1: Land-based steam and gas turbine generator sets in excess of 50 MW, International Organization for Standardization (2009).

第6章 振動試験結果に基づく軸振動解析モデルの高精度化

6.1 緒言

ロータの動的挙動の予測精度は、ロータの振動解析モデル、軸受やシール部などの支持部の剛性と減衰特性、および外力の精度に依存する。特に、高速回転のロータでは回転数依存項を含めた振動解析モデルの精度が重要となる。そのため、開発段階のロータではしばしば、実機ロータの振動試験で得られる、周波数応答関数、固有振動、および固有モードなどの弾性特性のうち、周波数応答関数に基づいて振動解析モデルを高精度化する方法 (Okuma and Heylen, 2000) や、固有振動数と固有モードに基づいて解析者が選定した材料特性値を最適化する方法などによって、振動解析モデルの高精度化がなされる。しかし、固有振動数と固有モードのみに着目して高精度化された振動解析モデルでは、気体軸受や磁気軸受で支持されたロータなどで重要となる剛体ロータ (軸の弾性変形が無視できるロータ) として扱うことができる低回転数域の固有振動数と固有モードの精度は保証されない。さらに、後者の方法ではトライアンドエラーを要するため、高精度化の作業効率は必ずしも良いとはいえない。

そこで、ティモシェンコ梁でモデル化される軸と剛体ディスクで構成されるロータの振動解析モデルについて、非回転時の振動試験で得られる質量、重心位置、慣性モーメント (これらを剛体特性と呼ぶ) と、固有振動数、固有モード (これらを弾性特性と呼ぶ) に関する情報から、誤差を含んだ全ての材料特性値を同時に高精度化して、振動方程式における全ての特性行列 (質量行列、減衰行列、剛性行列、およびジャイロ行列) を同定する方法を示す (長江, 後藤, 2013)。

6.2 節では特性行列の同定について概説する。

6.3 節では振動方程式における特性行列の同定方法を概説する。

6.4 節では未知パラメータの具体的な同定手順を示す。

6.5 節では、剛体特性と弾性特性に関する模擬の実測値による誤差を持つ解析モデルの高精度化の具体例として、4 段の遠心圧縮機ロータのモデルの特性行列を同定した結果を示す。

6.2 特性行列の同定の概要

第2章で述べた様に、軸要素の質量係数 α_m 、慣性係数 α_i 、せん断係数 τ 、曲げ剛性 EI 、長さ l_e 、および比例減衰定数 γ (これらを総称して軸の構成パラメータと呼ぶことにする) と、ディスクの質量 m_{disc} 、直径軸周りの慣性モーメント J_{disc} 、および厚さ t_{disc} (これらを総称してディスクの構成パラメータと呼ぶことにする) が定まれば、ロータ全体の振動方程式における全ての特性行列、すなわち質量行列 $[M_r]$ 、剛性行列 $[K_r]$ 、減衰行列 $[C_r]$ 、およびジャイロ行列 $[G_r]$ を定めることができる。

自由支持された非回転時のロータにおいて、質量、剛性、および減衰の各行列が定まれば、ロータの質量、重心位置、ロータの重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント、およびロータの回転軸周りの極慣性モーメント (これらを総称して剛体特性と呼

ぶことにする)と固有振動数および固有モード(これらを総称して弾性特性と呼ぶことにする)が一意に定まる。逆に、ロータの寸法と形状が決まっていれば、剛体特性と弾性特性から、質量、剛性、および減衰の各行列に加えてロータのジャイロ行列と剛性行列の回転速度依存項を一意に定めることができる。これが理論上の主幹をなす部分であり、ロータの剛体特性と弾性特性が実測可能である場合は実験に基づいたロータの特性行列の同定を実現することができる。

以下に、振動解析モデルの節点と計測点が同一の場合について、特性行列の同定理論の詳細を示す。

6.3 特性行列の同定方法

振動解析モデルの全ての節点を計測点とすることができる場合は、軸要素の長さ l_e 、外径 d_e 、および比例減衰定数 γ とディスクの質量 m_{disc} と厚さ t_{disc} が既知であれば、実測されたロータの剛体特性と弾性特性から、全ての特性行列を同定することができる。未知の軸の構成パラメータは、各軸要素の質量係数 α_m と慣性係数 α_i のどちらか一方、せん断係数 τ 、および曲げ剛性 EI の3つであり、同一材料の軸では、軸全体についてこれら3つのみを求めればよい。未知の軸の構成パラメータを求める問題は軸要素の密度 ρ 、ポアソン比 ν 、およびヤング率 E を求める問題と等価である。未知のディスクの構成パラメータは各ディスクの直径軸周りの慣性モーメント J_{disc} である。

実際のものとは一致すべきロータの剛体特性は、全質量 m 、重心位置 z_{CG} 、重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント J_{CG} であり、極慣性モーメント(回転軸周りの主慣性モーメント) J_{pCG} は、軸とディスクの構成パラメータによって定まるため考慮する必要はない。

ロータの質量とディスクの質量は精度良く測定可能であり、重心位置 z_{CG} 、重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント J_{CG} 、固有振動数 f 、固有モード φ 、および比例減衰比 γ は非回転時のロータの振動試験から求めることができる。ロータの剛体特性は周波数応答関数から求めることができ(Fareed, Wahl, 2001, 大熊, Heylen, 2000)、ロータの弾性特性も周波数応答関数を用いる一般的な実験モード解析によって求めることができる。なお、固有モードについては計測の容易さと計測精度を考慮して並進自由度のみを考えれば良い。

6.4 未知パラメータの同定手順

既知の軸とディスクの構成パラメータと実測された剛体特性と弾性特性から、未知の軸とディスクの構成パラメータを求める手順を以下に示す。

振動解析モデルから求めた剛体特性(質量、重心位置、および重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント)と弾性特性(固有振動数、固有モード)の値と、非回転時のロータの振動試験から求めたこれらの値との誤差を求め、誤差の二乗和が最小となるような軸の質量係数 α_m または慣性係数 α_i 、せん断係数 τ 、曲げ剛性 EI (或いは密度 ρ 、ポア

ソン比 ν , ヤング率 E) と, ディスクの直径軸周りの慣性モーメント J_{disc} を求め, 特性行列を再構成することによって同定が完了する. 同一材料の軸では, 未知変数は $3+n_{disc}$ 個 (n_{disc} はディスクの数) であり, 誤差関数は $3+n_{f1}+n_{f2} \times n$ 個 (n_{f1} は固有振動数の数, n_{f2} は固有モードの数, n は節点数) 設定することができ, n_{disc} は n 以下であるため $3+n_{disc} < 3+n_{f1}+n_{f2} \times n$ となり, 最小二乗解が定まる. なお, 実験では, 固有振動数は精度良く求めることができるが固有モードは固有振動数に比べると精度良く求めることができない場合がある. そこで, 誤差関数の参照値として採用する固有モードとして精度の良いもののみを選択することを考慮して, 固有振動数に関する誤差関数の数 n_{f1} と固有モードに関する誤差関数の数 n_{f2} を分けている.

実測値に対する振動解析モデルによる計算値の誤差関数を, 以下に示すように実測値に対する比として定義する. 添え字の c と m はそれぞれ計算値 (calculated value) と実測値 (measured value) を示すものとする. なお, 本論文では理論的妥当性のみに着目し, 剛体特性と弾性特性の実測データに含まれる誤差を考慮しないものとする.

- (1) 質量 (ロータの全質量) m_R (kg)に関する誤差関数, 1 個

$$e_m = \frac{m_{Rc} - m_{Rm}}{m_{Rm}} \quad (6.1)$$

- (2) 重心位置 (軸方向の重心位置) z_{CG} (m) に関する誤差関数, 1 個

$$e_{z_{CG}} = \frac{z_{CGc} - z_{CGm}}{z_{CGm}} \quad (6.2)$$

- (3) 重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント J_{CG} (kgm^2) に関する誤差関数, 1 個

$$e_{J_{CG}} = \frac{J_{CGc} - J_{CGm}}{J_{CGm}} \quad (6.3)$$

- (4) 固有振動数 f (Hz) に関する誤差関数, n_{f1} 個

$$\{e_f\} = \{e_{f1}, e_{f2}, \dots, e_{fn_{f1}}\}^T = \left\{ \frac{f_{c1} - f_{m1}}{f_{m1}}, \frac{f_{c2} - f_{m2}}{f_{m2}}, \dots, \frac{f_{cn_{f1}} - f_{mn_{f1}}}{f_{mn_{f1}}} \right\}^T \quad (6.4)$$

(5) 固有モード Φ に関する誤差関数, $n_{f2} \times n$ 個

$$\begin{aligned} \{e_\Phi\} &= \left\{ \{e_{\Phi1}\}, \{e_{\Phi2}\}, \dots, \{e_{\Phi n_{f2}}\} \right\}^T \\ &= \left\{ \left\{ \frac{\{\Phi_{c1}\} - \{\Phi_{m1}\}}{\{\Phi_{m1}\}} \right\}^T, \left\{ \frac{\{\Phi_{c2}\} - \{\Phi_{m2}\}}{\{\Phi_{m2}\}} \right\}^T, \dots, \left\{ \frac{\{\Phi_{cn_{f2}}\} - \{\Phi_{mn_{f2}}\}}{\{\Phi_{mn_{f2}}\}} \right\}^T \right\}^T \end{aligned} \quad (6.5)$$

$3 + n_{disc}$ 個の未知変数を設計変数 x とし, 上述の誤差関数に実測値の信頼性を考慮した重みを付けたものの二乗和を目的関数 $g(x)$ として, $g(x)$ を最小化する非線形最小二乗問題への定式化を行う. 目的関数 $g(x)$ を次式で定義する.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n_e} \{W_i e_i(x)\}^2 \quad (6.6)$$

$e_i(x)$: i 番目の誤差関数, $i=1, 2, \dots, n_e$, $\{e(x)\} = \{e_m, e_{z_{CG}}, e_{J_{CG}}, \{e_f\}^T, \{e_\Phi\}^T\}^T$

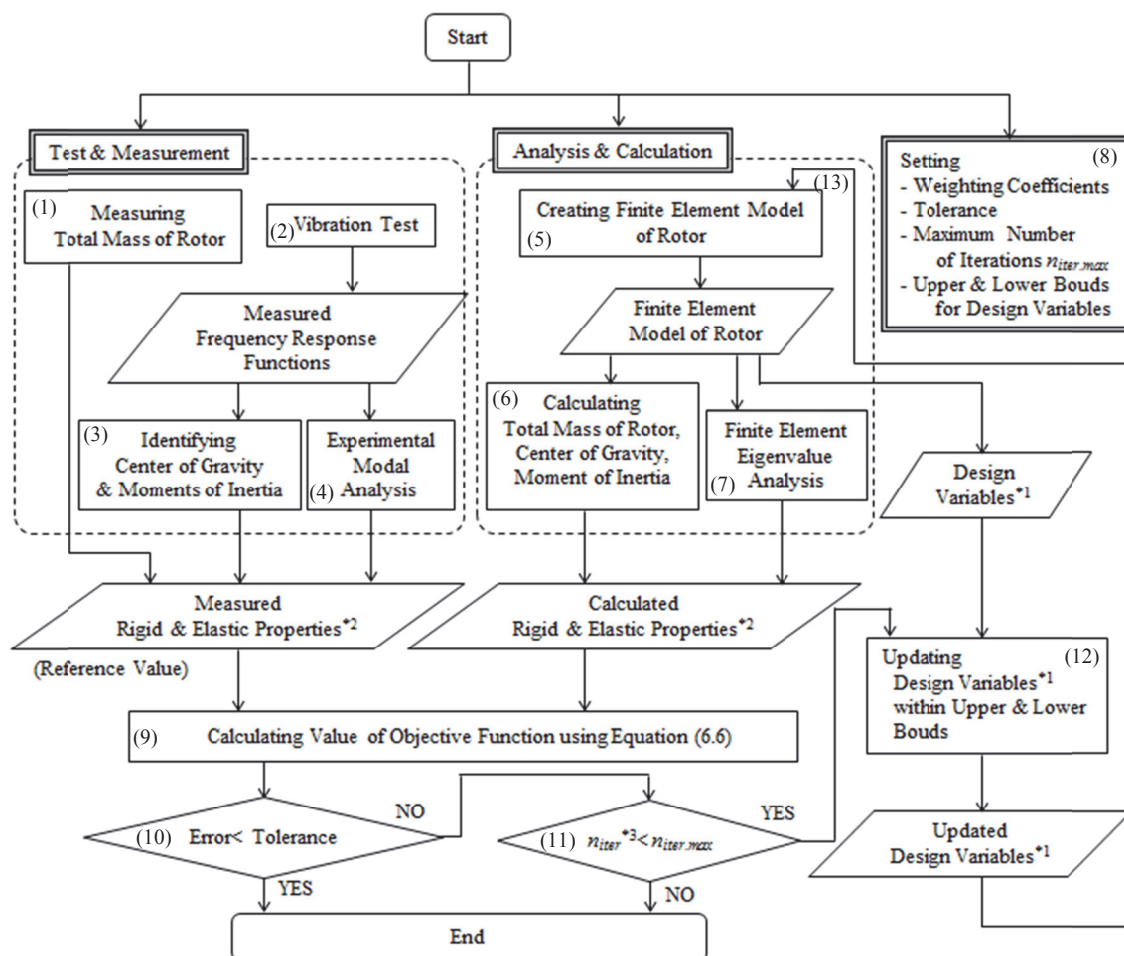
W_i : i 番目の重み係数, $i=1, 2, \dots, n_e$, $\{W\} = \{W_1, W_2, \dots, W_{n_e}\}^T$

n_e : 誤差関数の数, $n_e = 3 + n_{f1} + n_{f2} \times n$

ここで, 重み係数 W_i の値は, それぞれの誤差関数について, 実測値の信頼性や逐次計算の収束性などを考慮して決定する.

以上の準備の下, Trust Region Reflective Newton Method (Coleman and Li, 1996) などの制約条件付き最小二乗法や Simplex Search Method (Lagarias, et al., 1998) などの制約なし最小二乗法を適用して, 目的関数 $g(x)$ を最小化する未知変数の最適値を求めることによって, 最適化パラメータの選定に解析者の意思が介在しない振動解析モデルの高精度化を実現することができる. なお, 制約条件の有無に関わらず, 最小二乗解を得るために逐次計算回数や許容誤差などの条件を予め指定しておく必要がある. その他に, 制約条件付き最小二乗法では推測される未知変数の誤差範囲を制約条件 (上下限值) として事前に設定する必要があり, 制約なし最小二乗法では未知変数の推定誤差と比較するなどして得られた解の妥当性を確認する必要がある.

図 6.1 は, 制約条件付き最小二乗法による設計変数の最適化のフローを示したものである.



*1 Design Variables:
 Mass coefficients α_m , Inertia coefficients α_i , Shear coefficients τ , Bending stiffness EI , and Moments of inertia about diameter of discs J_{disc}
 or Density of shaft ρ , Poisson ratio ν , Young's modulus E , and Moments of inertia about diameter of discs J_{disc}
 *2 Rigid & Elastic Properties:
 Rigid properties: Total mass of rotor m_R , Center of gravity z_{CG} , Principal moment of inertia J_{CG}
 Elastic properties: Natural frequencies f , Eigenmodes Φ
 *3 n_{iter} : number of iterations

Fig. 6.1 Flow chart of optimizing design variables by least squares method with constraint

以下に図 6.1 のフローを説明する。

- (1) ロータの全質量 m_{Rm} を測定する.
- (2) 自由支持を模擬した状態のロータの振動試験を行って周波数応答関数を計測する.
- (3) 周波数応答関数から, 重心位置 z_{CGm} と重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント J_{CGm} を求める.
- (4) 周波数応答関数から, 固有振動数 f_m と固有モード Φ_m を求める (実験モード解析).
- (5) ロータの曲げ振動解析モデルを作成し, 設計変数 (各軸要素の質量係数 α_m または慣性係数 α_i , せん断係数 τ , 曲げ剛性 EI , 各ディスク要素の直径軸周りの慣性モーメント J_{disc}) を求める.
- (6) ロータの曲げ振動解析モデルの全質量 m_{Rc} と重心位置 z_{CGc} を求める.
- (7) 固有値解析を行って固有振動数 f_c と固有モード Φ_c を求める.
- (8) 重み係数 W , 目的関数の許容値, 最大逐次計算回数, 設計変数の上下限値を決める.
- (9) 質量 m_R , 重心位置 z_{CG} , 重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント J_{CG} , 固有振動数 f , 固有モード Φ に関する誤差関数と重み係数 W から, 式 (6.6) の目的関数 $g(x)$ を設定する.
- (10) 目的関数 $g(x)$ の値が許容値未満であるかを判定する.
- (11) 目的関数 $g(x)$ の値が許容値以上であれば, 逐次計算回数が最大逐次計算回数未満であるかを判定する.
- (12) 逐次計算回数が逐次計算回数未満であれば, 上下限値内で設計変数を変化させる.
- (13) 新たな設計変数から, ロータの曲げ振動解析モデルを求める.
- (14) 以下, (6), (7), (9), (10), (11), (12), (13) の手順を, 目的関数が許容値未満となるまで, 或いは逐次計算回数が最大逐次計算回数以上となるまで繰り返し, 設定した条件において最適なロータの曲げ振動解析モデルを求める.

6.5 剛体特性と弾性特性に関する模擬の実測値による誤差を持つ解析モデルの高精度化

ここでは, 高精度化の対象として 4 段の遠心圧縮機ロータのモデルを扱い, 曲げ振動のみに着目する. 第 3 章で示した軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下については無視する.

6.5.1 振動解析モデル

遠心圧縮機ロータの振動解析モデルを図 6.2 に示す. ロータは 19 の節点を持つ長さ 350mm の軸と節点 7, 9, 11, 13 に取り付けられた 4 枚のディスクで構成されており, 軸とディスクはそれぞれ表 6.1 と表 6.2 に示す寸法を持つ. 軸の材料特性値は密度 7800kg/m^3 , ヤング率 211GPa , ポアソン比 0.3 (横弾性係数 81.154GPa) である. ディスクの密度はディスク 1 から順にそれぞれ 2600kg/m^3 , 2600kg/m^3 , 2437.5kg/m^3 , 2294.1kg/m^3 である. 以下, このモデルをオリジナルモデルと呼ぶことにする.

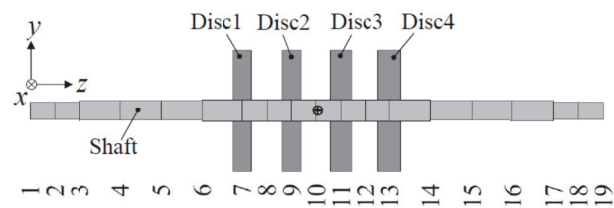


Fig. 6.2 1D FEM model of a centrifugal compressor

Table 6.1 Dimensions of shaft elements

Shaft element	Length (mm)	Outer diameter (mm)
1, 2, 17, 18	15.0	10.0
3-5, 14-16	25.0	12.0
6, 13	25.0	13.5
7-12	15.0	13.5

Table 6.2 Dimensions of discs

Disc	Width (mm)	Outer diameter (mm)	Inner diameter (mm)
1	11.0	75.0	13.5
2	11.5	75.0	13.5
3	13.0	75.0	13.5
4	14.0	75.0	13.5

6.5.2 特性行列の同定

オリジナルモデルに対して軸の密度，ヤング率，ポアソン比にそれぞれ -10%，+10%，+10%の誤差を持ち全てのディスクの直径軸周りの慣性モーメントに+10%の誤差を持つモデルを初期モデルとした．表 6.3 にオリジナルモデルと初期モデルに関する設計変数（軸の密度，ヤング率，ポアソン比，ディスクの慣性モーメント）の値を示す．

Table 6.3 Design variables of original and initial model

	ρ (kg/m ³)	E (Pa)	ν	J_{disc1} (kgm ²)	J_{disc2} (kgm ²)	J_{disc3} (kgm ²)	J_{disc4} (kgm ²)
Original model	7800	2.110×10 ¹¹	0.30	4.56064×10 ⁵	4.77992×10 ⁵	5.10716×10 ⁵	5.20738×10 ⁵
Initial model	7020	2.321×10 ¹¹	0.33	5.01670×10 ⁵	5.25791×10 ⁵	5.61788×10 ⁵	5.72812×10 ⁵

オリジナルモデルからシミュレートした、剛体特性と弾性特性に関する誤差を持たない模擬の実測値とディスクの質量に関する情報から、提案手法によって初期モデルの軸の密度 ρ 、ポアソン比 ν 、およびヤング率 E とディスクの直径軸周りの慣性モーメント J_{disc} の最適値を求めて同定した特性行列から計算される剛体特性と弾性特性を、オリジナルモデルのものと比較した。ここで、 $3+n_{disc}=7$ 個の未知変数（ディスクの数 $n_{disc}=4$ ）に対して、固有振動数の数を $n_{f1}=3$ 、固有モードの数を $n_{f2}=1$ とし、 $3+n_{f1}+n_{f2} \times n=25$ 個（節点数 $n=19$ ）の誤差関数を設定した。また、重み係数 W は、質量 m_R 、重心位置 z_{CG} 、重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント J_{CG} 、固有振動数 f 、固有モード Φ についてそれぞれ、1000, 1000, 2000, 1000, 50 とした。同定された振動解析モデルを同定モデルと呼ぶことにする。

オリジナルモデル、初期モデル、および同定モデルに関する剛体特性と固有振動数を、オリジナルモデルに対する誤差と共にそれぞれ表 6.4 と表 6.5 に示す。また、オリジナルモデルに対する固有モードの MAC 値 (Balmes and Leclere, 2006) は、初期モデルでは第 1 次モードから順にそれぞれ 0.9998, 0.9993, 0.9989, 0.9990 であり、同定モデルではそれぞれ 1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000 である。これらの結果から、同定モデルの剛体特性と弾性特性はオリジナルモデルと一致していることが分かる。

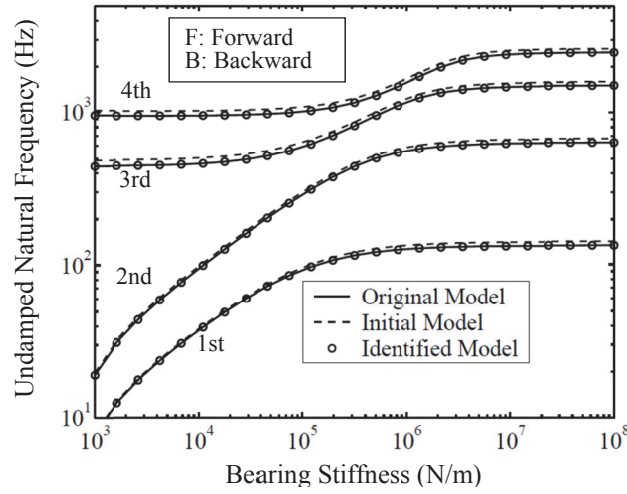
Table 6.4 Rigid properties for centrifugal compressor

	m_c (kg)	z_{CGc} (m)	J_{CGc} (kgm ²)	J_{pCGc} (kgm ²)
Original Model	0.84821	0.17593	3.574×10 ⁻³	3.859×10 ⁻⁴
Initial Model (Error)	0.81559 (-3.836%)	0.17597 (0.023%)	3.314×10 ⁻³ (-7.269%)	4.246×10 ⁻⁴ (10.020%)
Identified Model (Error)	0.84821 (0.000%)	0.17593 (0.000%)	3.574×10 ⁻³ (0.000%)	3.859×10 ⁻⁴ (0.000%)

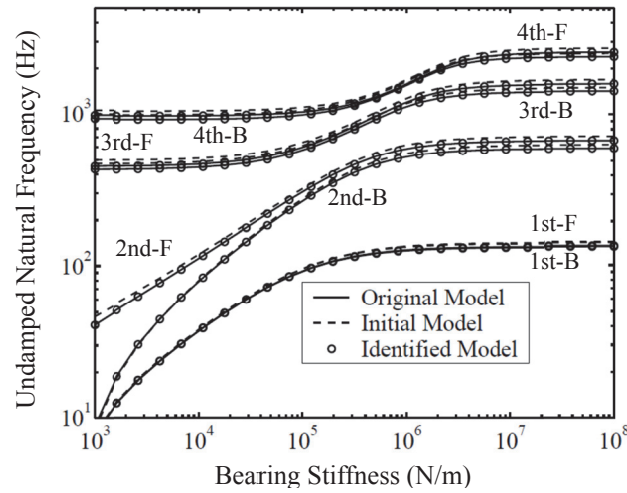
Table 6.5 Natural frequencies for centrifugal compressor rotor

	1st Mode (Hz)	2nd Mode (Hz)	3rd Mode (Hz)	4th Mode (Hz)
Original Model	444.87	954.00	1773.9	2741.9
Initial Model (Error)	486.15 (9.279%)	1025.5 (7.495%)	1878.2 (5.880%)	2886.5 (5.274%)
Identified Model (Error)	444.87 (0.000%)	954.00 (0.000%)	1773.9 (0.000%)	2741.9 (0.000%)

節点 2 と節点 18 に同一の等価支持剛性を持つ軸受を配したローター軸受系において、ジャイロ効果が現れないローターの回転数 $N \cong 0$ rpm の場合とジャイロ効果が現れる $N = 18,000$ rpm の場合における第 4 次モードまでの危険速度マップを、オリジナルモデル、初期モデル、および同定モデルについて比較したものを図 6.3 に示す。初期モデルの不減衰固有振動数は、非回転時とジャイロ作用が働く高速回転時の双方において、オリジナルモデルと明確な差異が認められる。一方、同定モデルの不減衰固有振動数は、非回転時だけでなく高速回転時においてもオリジナルモデルと一致していることが分かる。



(a) $N \cong 0$ rpm



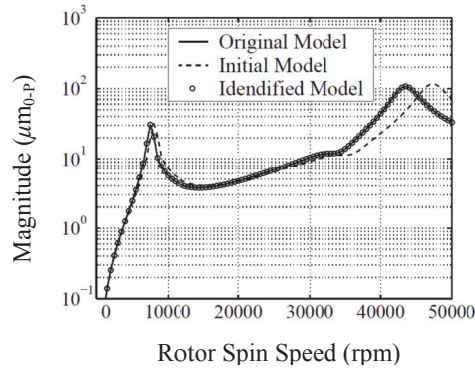
(b) $N = 18,000$ rpm

Fig. 6.3 Critical speed maps of centrifugal compressor rotor – bearing system

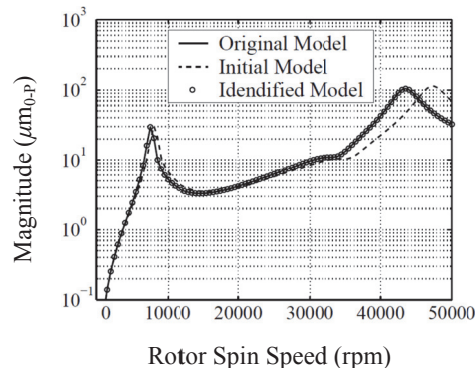
表 6.6 の仕様の軸受を配し，ディスク 1 に $10 \text{ gmm}/0^\circ$ ，ディスク 4 に $10 \text{ gmm}/90^\circ$ の不釣り合いを与えた場合の軸受位置での不釣り合い応答振幅を図 6.4 に示す．初期モデルの不釣り合い応答振幅はオリジナルモデルと明確な差異が認められるのに対して，同定モデルの不釣り合い応答振幅はオリジナルモデルと一致している．

Table 6.6 Bearing parameters for centrifugal compressor rotor

Bearing	Node	k_{xx} (N/m)	k_{xy} (N/m)	k_{yx} (N/m)	k_{yy} (N/m)	c_{xx} (Ns/m)	c_{xy} (Ns/m)	c_{yx} (Ns/m)	c_{yy} (Ns/m)
#1	2	2.0×10^6	1.5×10^6	1.0×10^6	3.0×10^6	2.0×10^3	1.5×10^3	1.0×10^3	3.0×10^3
#2	18	2.0×10^6	1.5×10^6	1.0×10^6	3.0×10^6	2.0×10^3	1.5×10^3	1.0×10^3	3.0×10^3



(a) Bearing #1



(b) Bearing #2

Fig. 6.4 Unbalance response at bearings for centrifugal compressor rotor – bearing system

表 6.6 の仕様の軸受を配した場合の、6,000rpm から 90,000rpm までの回転数範囲における、最低次から 2 番目の複素固有値を、オリジナルモデル、初期モデル、および同定モデルについて比較したものを図 6.5 に示す。初期モデルの複素固有値はオリジナルモデルと明確な差異が認められるのに対して、同定モデルの複素固有値はオリジナルモデルと一致していることが分かる。特に、安定性を評価する上で重要な複素固有値の実部が負から正となる、すなわち減衰が正から負となる回転数は、初期モデルではオリジナルモデルと同定モデルの約 72,000rpm より約 6,000rpm 高い約 78,000rpm となっており、初期モデルの誤差が安定限界の予測精度に及ぼす影響が無視できないことが分かる。

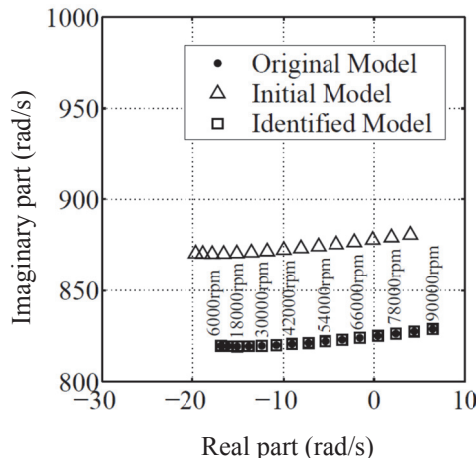


Fig. 6.5 2nd complex eigenvalues for centrifugal compressor rotor

6.6 結言

一般に、実験によって材料特性値に誤差を含んだロータの振動解析モデルを高精度化する場合、非回転、自由支持状態のロータの振動試験で得られる弾性特性（周波数応答関数、固有振動数、固有モード）に基づいて、材料特性値を最適化する方法が採られている。これに対して、弾性特性（固有振動数、固有モード）に加えて剛体特性（質量、重心位置、慣性モーメント）の実測値に基づいて、全ての材料特性値を同時に最適化する方法を提案した。

軸の各特性行列を、新たに導入した質量係数と慣性係数、せん断係数、曲げ剛性などで定義し、ディスクの特性行列を質量、直径軸周りの慣性モーメント、厚さで定義することによって、各特性行列の要素の物理的な意味の明確化を図った。

4段遠心圧縮機ロータを取り上げて、誤差の無い模擬の剛体特性と弾性特性に関する情報から、実際に全ての特性行列の同定を行った。同定精度については、以下のものを誤差の無い振動解析モデルの値と比較することによって検証した。

- ・ ロータの全質量、重心位置、重心を通り回転軸に直交する軸周りの主慣性モーメント、極慣性モーメント
- ・ 非回転時のロータの固有振動数と固有モード
- ・ 剛性と減衰特性が既知の軸受で支持されたロータの、極低速回転時と高速回転時における危険速度マップ、不釣合い応答、複素固有値

その結果、同定誤差を無視できるほど高い精度で特性行列を同定することができることを確認した。

特徴を以下にまとめる。

- 振動試験は、非回転、自由支持状態で実施すればよい。
- 回転速度依存項を含む全ての特性行列を同定可能である。
- 弾性特性だけでなく剛体特性も利用するため、高精度な特性行列が同定される。
- 重み係数によって計測誤差を考慮することができる。
- 重み係数と許容誤差を設定すれば、自動で複数の未知パラメータが同時に最適化されるため、最適化するパラメータの選定が不要である。

参考文献

- Balmes, E. and Leclere, J. M., Structural Dynamics Toolbox / FEMLink user's guide version 5.3, SDTools (2006), pp.416 – 417.
- Coleman, T.F. and Li, Y., An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds, SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, No. 2 (1996), pp. 418–445.
- Fareed, A.M. and Wahl, F., Identification of Rigid Body Parameters Using Experimental Modal Analysis Data, Technische Mechanik, Band 21, Heft 1 (2001), pp. 63-75.
- Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., and Wright, P. E., Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions, SIAM Journal of Optimization, Vol. 9, No. 1 (1998), pp. 112-147.
- 長江 信顕, 後藤 知伸, ロータの振動方程式における特性行列の実験同定（理論とシミュレーション）, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.803 (2013), pp.2314-2328.
- Okuma, M. and Heylen, W., MCK 同定法による 3 次元構造物の剛体特性の同定, 日本機械学会 D&D2000 講演論文集, No. 301 (2000).

第7章 総括

7.1 本研究により得られた成果

1次元梁の有限要素法が適用されたロータの軸振動解析モデルにおいて、曲げ振動解析モデルの高精度化に寄与する、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法、嵌め合い部のモデル化方法、および振動試験結果に基づいて振動解析モデルを高精度化する方法と、ねじり振動解析モデルの高精度化に寄与する、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮したモデル化方法を確立した。

曲げ振動解析モデルの高精度化では、軸直径変化部の小径軸側に設けた長さ $9d/32$ (d は小径軸の直径) の要素の曲げ剛性を適切に弱めることによって、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸の曲げ剛性低下を表現する方法を開発し、3次元解析モデルと実験によって高精度化の効果を確認した。また、嵌め合い部の等価な曲げ剛性を与える軸の外径が、嵌め合わせるスリーブの外径とほぼ一致することを、嵌め合い部の摩擦を考慮した非線形静解析接触と実験によって示した。さらに、振動試験結果に基づいて振動解析モデルを高精度化する方法としては、質量、重心位置、慣性モーメント、固有振動数、および固有モードに関する情報を参照データとして、誤差を含んだ全ての材料特性値を同時に高精度化し、振動方程式における全ての特性行列（質量行列、減衰行列、剛性行列、およびジャイロ行列）を同定する方法を開発し、参照データに誤差が無い場合には、誤差が無視できるほど高精度に特性行列を同定できることを示した。

ねじり振動解析モデルの高精度化では、軸直径変化部の小径軸側に設けた長さ $3\pi d / \{64(1+0.3382\beta^3+0.0815\beta^5+0.1144\beta^6+0.0125\beta^7)\}$ (β は小径軸と大径軸の直径比, $\beta < 1$) の要素のねじり剛性を適切に弱めることによって、軸直径変化部断面の弾性変形によるみかけの軸のねじり剛性低下を表現する方法を開発し、3次元解析モデルによって高精度化の効果を確認した。

曲げ振動解析モデルとねじり振動解析モデルのそれぞれにおいて、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮する方法は、広く普及している1次元梁の軸振動解析環境に、計算負荷を犠牲にすることなく容易に適用でき、回転機械の設計や振動問題の対策検討で重要な固有振動数の予測精度を高めることができる。また、具体例として実機相当のタービン発電機ロータを取り上げて、その曲げ振動解析モデルに開発した方法を適用することによって、低次モードの固有振動数が従来法に対して最大で約5%低下することを確認し、ねじり振動解析モデルに開発した方法を適用することによって、低次モードの固有振動数が従来法に対して最大で約2%低下することを確認した。

軸直径変化部断面の弾性変形を考慮する方法と嵌め合い部の曲げ剛性をスリーブ外径とする方法を、1次元梁の軸振動解析環境に適用することによって、計算負荷が小さく高精度な曲げ振動解析とねじり振動解析を実現できる。また、質量、重心位置、慣性モーメント、固有振動数、および固有モードに関する情報から振動方程式における全ての特性行列を同定する方法は、実験モード解析結果に基づいたロータの振動解析モデルの高精度化を実現

するために有効に活用できる。

7.2 今後の展望

回転機械の振動解析の方法として現在普及しつつある、3次元のソリッド要素で詳細にモデル化する3Dモデル解析が、今後のコンピュータの性能上昇に伴って、普及の度合いを増すものと推測される。しかし、より簡便な1次元梁モデルによる解析も、1.1節で述べた繰り返しの複素固有値解析を行う必要のある場合などでは時間コスト面から有利である状況は当分の間には変わらないと思われる。したがって、1次元梁モデルによる計算精度を高めることは今後も有効と判断される。

第3章と第5章で示した、軸直径変化部断面の弾性変形を考慮する方法の基礎となる3次元弾性論は、1940年代から1960年代までにほぼ完成された理論であり、境界条件と偏微分方程式で表される既知の応力、ひずみ、変位の関係式から、任意の座標位置の応力、ひずみ、変位の厳密解を得ることができるが、形状や境界条件が複雑になると扱いが著しく難しくなる。そのため、3次元モデルの有限要素解析が普及して、形状と材料特性を定義すれば数値解を得ることができる現在では、工学分野で3次元弾性論そのものを扱う機会は少なくなっている。本研究では、この3次元弾性論から導かれる結果を1次元梁モデルに適用することによって解析精度を高めることができることを示した。また、5.2節で示した、3次元弾性論から導かれたトルク T と剛体軸の回転角 θ の関係式 (5.4) は、これまでにロータのねじり振動解析に適用されていないものである。この例が示す様に、ロータダイナミクス分野で採用されていない、有用な既存研究が存在する可能性があるため、今後も幅広い年代と分野の知見を有効活用できるよう視野を広げた研究活動を進めるつもりである。

また、第6章で示した、質量、重心位置、慣性モーメント、固有振動数、および固有モードを入力パラメータとして振動方程式における全ての特性行列を同定する方法を、実際のロータに適用するには、入力パラメータの精度を考慮して重み係数を適切な値に設定する必要がある。この点を今後の課題として捉え、簡便に使用できるものにするための研究を進めるつもりである。

謝辞

本研究は、著者が鳥取大学大学院工学研究科博士後期課程在学中に、同大学院機械宇宙工学専攻 後藤知伸教授の指導のもとに行ったものである。研究の遂行にあたり、後藤教授からは幅広い視点から懇切丁寧な御指導を賜りました。謹んで感謝の意を表します。学位論文作成にあたり、貴重な御助言を頂きました。同大学院社会基盤工学専攻 谷口朋代教授と同大学院機械宇宙工学専攻 小出隆夫教授に感謝の意を表します。また、履修科目にてご指導頂きました。同大学院機械宇宙工学専攻 西村正治教授と故 宮近幸逸教授に感謝の意を表します。

本研究の機会を与えて頂きました。元 川重テクノロジー株式会社 小林秀和理事（現 秀和応理事務所代表）、元 川重テクノロジー株式会社 吉田秀則取締役、元 川重テクノロジー株式会社 仁瓶寛太郎部長（現 川重テクノロジー株式会社 主幹）に感謝の意を表します。特に、元の上司である小林秀和様には、多大なるご指導を頂きました。ここに改めて感謝申し上げます。岡山大学産学官融合センター 古池治孝客員教授からは、在学中お会いする度に激励のお言葉を頂き、大変励みになりました。ここに改めて感謝申し上げます。

また、嵌め合い部の曲げ剛性の検討にあたり、解析面で協力して頂きました。川重テクノロジー株式会社 設計ソリューション部の玉木利裕部長、山地成一主幹、村山知章主幹、佐岡俊次郎主査に感謝の意を表します。特に解析を実行して頂きました村山知章主幹には、深く感謝申し上げます。研究の遂行にあたり、幾度となくスケジュール面で協力して頂いた所属部門である振動技術課の方々に感謝の意を表します。

関連報告

【第3章】

論文

題目 ロータの1次元梁モデルの計算精度向上のための軸直径変化部のモデル化

著者名 長江 信顕, 後藤 知伸

学術雑誌名 (巻, 号, 頁) 日本機械学会論文集 (80, 816, DR0237)

発行年月日 平成 26 年 8 月 25 日

【第4章】

学術講演

題目 嵌合部を持つロータの剛性行列の同定

著者名 長江 信顕, 後藤 知伸

学術雑誌名 Dynamics and Design Conference 2013

発行年月日 平成 25 年 8 月 29 日

【第6章】

論文

題目 ロータの振動方程式における特性行列の実験同定 (理論とシミュレーション)

著者名 長江 信顕, 後藤 知伸

学術雑誌名 (巻, 号, 頁) 日本機械学会論文集 (C 編) (79, 803, 2314~2328)

発行年月日 平成 25 年 7 月 25 日

学術講演

題目 実験によるディスク付きロータの振動方程式における特性行列の同定
(理論とシミュレーション)

著者名 長江 信顕, 後藤 知伸

学術雑誌名 Dynamics and Design Conference 2012

発行年月日 平成 24 年 9 月 19 日

付録

A-1 軸要素の質量行列, 剛性行列, ジャイロ行列

密度 $\rho(\text{kg/m}^3)$, 断面積 $A_e (\text{m}^2)$, 断面 2 次モーメント $I_e (\text{m}^4)$, 長さ $l_e(\text{m})$, せん断係数 τ_e の軸要素の質量行列, 剛性行列, ジャイロ行列はそれぞれ式 (A.1), 式 (A.2), 式 (A.3) で定義される.

(1) 質量行列

$$M_{se} = \frac{\rho A_e l_e}{840(1 + \tau_e)^2} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & m_4 \\ 0 & m_1 & -m_2 & 0 & 0 & m_3 & -m_4 & 0 \\ 0 & -m_2 & m_5 & 0 & 0 & m_4 & m_6 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 & m_5 & -m_4 & 0 & 0 & m_6 \\ m_3 & 0 & 0 & -m_4 & m_1 & 0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & 0 \\ 0 & -m_4 & m_6 & 0 & 0 & m_2 & m_5 & 0 \\ m_4 & 0 & 0 & m_6 & -m_2 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho I_e}{30l_e(1 + \tau_e)^2} \begin{bmatrix} m_7 & 0 & 0 & m_8 & -m_7 & 0 & 0 & m_8 \\ 0 & m_7 & -m_8 & 0 & 0 & -m_7 & -m_8 & 0 \\ 0 & -m_8 & m_9 & 0 & 0 & m_8 & m_{10} & 0 \\ m_8 & 0 & 0 & m_9 & -m_8 & 0 & 0 & m_{10} \\ -m_7 & 0 & 0 & -m_8 & m_7 & 0 & 0 & -m_8 \\ 0 & -m_7 & m_8 & 0 & 0 & m_7 & m_8 & 0 \\ 0 & -m_8 & m_{10} & 0 & 0 & m_8 & m_9 & 0 \\ m_8 & 0 & 0 & m_{10} & -m_8 & 0 & 0 & m_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$m_1 = 312 + 588\tau_e + 280\tau_e^2$$

$$m_2 = (44 + 77\tau_e + 35\tau_e^2) \cdot l_e$$

$$m_3 = 108 + 252\tau_e + 140\tau_e^2$$

$$m_4 = -(26 + 63\tau_e + 35\tau_e^2) \cdot l_e$$

$$m_5 = (8 + 14\tau_e + 7\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

$$m_6 = -(6 + 14\tau_e + 7\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

$$m_7 = 36$$

$$m_8 = (3 - 15\tau_e) \cdot l_e$$

$$m_9 = (4 + 5\tau_e + 10\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

$$m_{10} = (-1 - 5\tau_e + 5\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

(2) 剛性行列

$$K_{se} = \frac{EI_e}{(1+\tau_e) \cdot l_e^3} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & k_2 & -k_1 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & k_1 & -k_2 & 0 & 0 & -k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_3 & 0 & 0 & k_2 & k_4 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & k_3 & -k_2 & 0 & 0 & k_4 \\ -k_1 & 0 & 0 & -k_2 & k_1 & 0 & 0 & -k_2 \\ 0 & -k_1 & k_2 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_4 & 0 & 0 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & k_4 & -k_2 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$k_1 = 12$$

$$k_2 = 6l_e$$

$$k_3 = (4 + \tau_e) \cdot l_e^2$$

$$k_4 = (2 - \tau_e) \cdot l_e^2$$

(3) ジャイロ行列

$$G_{se} = -\frac{\rho l_e}{15l_e(1+\tau_e)^2} \begin{bmatrix} 0 & -g_1 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & g_2 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & g_2 & -g_1 & 0 & 0 & g_2 \\ -g_2 & 0 & 0 & -g_3 & g_2 & 0 & 0 & -g_4 \\ 0 & -g_2 & g_3 & 0 & 0 & g_2 & g_4 & 0 \\ 0 & g_1 & -g_2 & 0 & 0 & -g_1 & -g_2 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & -g_2 & g_1 & 0 & 0 & -g_2 \\ -g_2 & 0 & 0 & -g_4 & g_2 & 0 & 0 & -g_3 \\ 0 & -g_2 & g_4 & 0 & 0 & g_2 & g_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$g_1 = 36$$

$$g_2 = (3 - 15\tau_e) \cdot l_e$$

$$g_3 = (4 + 5\tau_e + 10\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

$$g_4 = (-1 - 5\tau_e + 5\tau_e^2) \cdot l_e^2$$

A-2 断面一様梁の曲げ振動の固有振動数

断面一様梁の曲げ振動の固有振動数を、オイラー・ベルヌーイ梁理論、ティモシェンコ梁理論、およびティモシェンコ梁理論を適用した 1 次元梁の有限要素法の 3 つの方法について比較する。オイラー・ベルヌーイ梁理論とティモシェンコ梁理論との差異は、ティモシェンコ梁理論では、オイラー・ベルヌーイ梁理論では考慮されない、せん断変形と回転慣性が考慮される点である。

(1) 計算対象

ここでは、第 3 章の図 3.10 に示される、両端自由の支持条件の様な中実円形断面軸を取り上げて、上述の 3 つの方法で求めた 1 次から 4 次までの曲げ振動モードの固有振動数を比較する。以下に中実円形断面軸の材料特性値と寸法を示す。

材料特性：ヤング率 $E=2.09 \times 10^{11}$ N/m²，横弾性係数 $G=8.0335 \times 10^{10}$ N/m²，
ポアソン比 $\nu=0.3008$ ，密度 $\rho=7846$ kg/m³
寸法：全長 $L=350$ mm，直径 $d=20$ mm

ティモシェンコ梁理論を適用した 1 次元梁の有限要素法では、図 3.11 に示される節点数 35 のモデルを用いる。各節点の軸方向の座標は

0, 14.35, 28.7, 40.1875, 51.675, 57.3, 63.65, 70, 76.35, 82.7, 88.325, 98.7625, 109.2, 122.5, 135.8, 146.2375, 156.675, 162.3, 168.65, 175, 181.35, 187.7, 193.325, 203.562, 213.8, 226.9, 240, 253.05, 266.1, 279.15, 292.2, 306.65, 321.1, 335.55, 350

である (単位: mm)。

(2) 固有振動数の導出

オイラー・ベルヌーイ梁理論において、境界条件が両端自由の断面一様梁の曲げ振動の振動数方程式は式 (A.4) で表され、固有振動数 f_n は式 (A.5) で与えられる (Seon, M., et al., 1999)。

$$\cos k_a \cdot \cosh k_a - 1 = 0 \quad (\text{A.4})$$

k_a : 無次元波数

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} k_a^2 \text{ (Hz)} \quad (\text{A.5})$$

I : 断面 2 次モーメント(m^4), $I = \pi d^4/64$

A : 断面積(m^2), $A = \pi d^2/4$

ティモシェンコ梁理論において、境界条件が両端自由の断面一様梁の曲げ振動の振動数方程式は式 (A.6) で表され、式 (A.6) 中の k_a と k_b の関係は式 (A.7) で与えられる。固有振動数 f_n は式 (A.8) で与えられる (Seon, M., et al., 1999)。

$$\frac{(k_a^2 - k_b^2)(k_a^2 + k_b^2 + \xi^2 k_a k_b - k_a k_b)(k_a^2 + k_b^2 - \xi^2 k_a k_b + k_a k_b)}{2k_a k_b (k_b^2 + \xi^2 k_a^2)(k_a^2 + \xi^2 k_b^2)} \cdot \sin k_a \cdot \sinh k_b - \cos k_a \cdot \cosh k_b + 1 = 0$$

k_b : 計算上の無次元波数 (A.6)

$$\xi^2 : \text{係数}, \quad \xi^2 = \frac{E}{\kappa G} = \frac{2(1+\nu)(7+6\nu)}{6(1+\nu)}$$

$$\frac{(\xi^2 k_b^2 + k_a^2)(k_a^2 \xi^2 + k_b^2)}{(k_a^2 - k_b^2)(1 + \xi^2)} = s^2 \quad (\text{A.7})$$

s : 縦横比, $s = \sqrt{A/I} \cdot L$

$$f_n = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{E(k_a^2 - k_b^2)}{\rho(1 + \xi^2)}} \text{ (Hz)} \quad (\text{A.8})$$

ティモシェンコ梁理論を適用した 1 次元梁の有限要素法では、付録 A-1 に示された方法で質量行列 $[M]$ と剛性行列 $[K]$ が定義され、式 (A.9) の実固有値問題を解くことによって固有振動数 f_n を求めることができる。

$$([K] - \lambda[M])\{\Phi\} = \{O\} \quad (\text{A.9})$$

λ : 固有値, $\lambda = (2\pi f_n)^2$

$\{\Phi\}$: 固有ベクトル

(3) 計算結果

オイラー・ベルヌーイ梁理論において、式 (A.4) の振動数方程式から得られる 1 次から 4 次までの k_a の値は、

$$k_{a1}=4.7300407$$

$$k_{a2}=7.8532046$$

$$k_{a3}=10.995608$$

$$k_{a4}=14.137165$$

である（添え字の数字はモード次数を示す）。

ティモシェンコ梁理論において、式（A.6）の振動数方程式から得られる1次から4次までの k_a と k_b の値は、

$$k_{a1}=4.7306384, k_{b1}=4.6886925$$

$$k_{a2}=7.8526405, k_{b2}=7.6650678$$

$$k_{a3}=10.994838, k_{b3}=10.496361$$

$$k_{a4}=14.135824, k_{b4}=13.118302$$

である（添え字の数字はモード次数を示す）。

ティモシェンコ梁理論，オイラー・ベルヌーイ梁理論，ティモシェンコ梁理論を適用した1次元梁の有限要素法の3つの方法で求めた，中実円形断面軸の1次から4次までの曲げ振動の固有振動数を以下に示す．オイラー・ベルヌーイ梁理論とティモシェンコ梁理論を適用した1次元梁の有限要素法による固有振動数の計算結果には，ティモシェンコ梁理論による計算結果との差異を百分率で併記した．

Natural frequencies of bending vibration modes of uniform beam

Unit: Hz

Mode	Timoschenko beam theory	Euler-Bernoulli beam theory (Error)	1D FEM (Error)
1	743.68	750.12 (0.87%)	743.69 (0.00%)
2	2018.5	2067.7 (2.44%)	2018.8 (0.01%)
3	3872.4	4053.6 (4.68%)	3873.7 (0.03%)
4	6230.5	6700.8 (7.55%)	6236.7 (0.10%)

ティモシェンコ梁理論に対するオイラー・ベルヌーイ梁理論の固有振動数の差異は，モード次数が高くなるほど大きくなり，4次モードでは7.55%の差異が生じている．一方，ティモシェンコ梁理論を適用した1次元梁の有限要素法では，ティモシェンコ梁理論に対して4次モードまででたかだか0.1%の固有振動数の差異が生じるにすぎない．

また、ティモシェンコ梁理論を適用した 1 次元梁の有限要素モデルの節点数 35 は、着目した最大のモード次数 4 の 8.75 倍である。

よって、一様断面の軸の曲げ振動の固有振動数を扱う場合、着目する最大モード次数の 10 倍程度の数の節点をできるだけ均等に設けた、ティモシェンコ梁理論を適用した 1 次元梁の有限要素モデルを用いることによって、ティモシェンコ梁理論によるものとほぼ同一の結果を得ることができると言える。

参考文献

Seon, M., Han, H. B., and Timothy, W., Dynamics of transversely vibrating beams using for engineering theories, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No.5 (1999), pp. 935-988.

A-4 タービン-発電機ロータの曲げ振動解析モデルの諸元

Coordinate of nodes for bending vibration analysis model of turbine – generator rotor

Node	z (m)	Node	z (m)	Node	z (m)
1	0.000	41	10.628	81	21.408
2	0.390	42	10.847	82	21.708
3	0.481	43	11.001	83	22.009
4	0.692	44	11.133	84	22.310
5	0.780	45	11.375	85	22.610
6	1.300	46	11.700	86	22.911
7	1.623	47	12.025	87	23.212
8	1.755	48	12.155	88	23.512
9	1.991	49	12.448	89	23.813
10	2.210	50	12.608	90	24.113
11	2.730	51	12.740	91	24.414
12	3.185	52	12.935	92	24.670
13	3.614	53	13.130	93	24.947
14	3.900	54	13.262	94	25.480
15	4.160	55	13.507	95	26.000
16	4.420	56	13.884	96	26.130
17	4.680	57	14.261	97	26.650
18	4.940	58	14.638	98	26.785
19	5.200	59	14.883	99	27.060
20	5.460	60	15.015	100	27.469
21	5.705	61	15.210	101	27.879
22	5.990	62	15.405	102	28.288
23	6.058	63	15.540	103	28.379
24	6.292	64	15.860	104	28.711
25	6.526	65	16.328	105	29.133
26	6.760	66	16.705	106	29.188
27	7.280	67	17.076	107	29.374
28	7.447	68	17.311	108	29.614
29	7.755	69	17.446	-	-
30	7.839	70	17.914	-	-
31	8.151	71	18.044	-	-
32	8.450	72	18.564	-	-
33	8.767	73	19.084	-	-
34	8.840	74	19.348	-	-
35	9.133	75	19.604	-	-
36	9.230	76	19.905	-	-
37	9.620	77	20.205	-	-
38	10.075	78	20.506	-	-
39	10.231	79	20.807	-	-
40	10.524	80	21.107	-	-

Dimensions of shaft for bending vibration analysis model of turbine – generator rotor
 (Density 7850 kg/m³, Young's modulus 7850 Pa, Shear modulus 7.9192×10^{10} Pa)

Node	Outer Diameter (m)	Node	Outer Diameter (m)	Node	Outer Diameter (m)
1 to 2	0.312	41 to 42	0.780	81 to 82	1.170
2 to 3	0.689	42 to 43	0.780	82 to 83	1.170
3 to 4	0.312	43 to 44	0.468	83 to 84	1.170
4 to 5	0.312	44 to 45	0.468	84 to 85	1.170
5 to 6	0.468	45 to 46	0.468	85 to 86	1.170
6 to 7	0.468	46 to 47	0.468	86 to 87	1.170
7 to 8	0.468	47 to 48	0.858	87 to 88	1.170
8 to 9	0.780	48 to 49	0.468	88 to 89	1.170
9 to 10	0.780	49 to 50	0.468	89 to 90	1.170
10 to 11	1.014	50 to 51	0.468	90 to 91	1.170
11 to 12	1.014	51 to 52	0.910	91 to 92	0.910
12 to 13	1.014	52 to 53	0.910	92 to 93	0.910
13 to 14	1.014	53 to 54	0.468	93 to 94	0.910
14 to 15	1.014	54 to 55	0.468	94 to 95	0.910
15 to 16	1.014	55 to 56	0.468	95 to 96	1.300
16 to 17	1.014	56 to 57	0.468	96 to 97	0.910
17 to 18	1.014	57 to 58	0.468	97 to 98	0.481
18 to 19	1.014	58 to 59	0.468	98 to 99	0.481
19 to 20	1.014	59 to 60	0.468	99 to 100	0.481
20 to 21	1.014	60 to 61	0.910	100 to 101	0.481
21 to 22	1.014	61 to 62	0.910	101 to 102	0.481
22 to 23	1.092	62 to 63	0.481	102 to 103	0.325
23 to 24	1.092	63 to 64	0.481	103 to 104	0.325
24 to 25	1.092	64 to 65	0.481	104 to 105	0.325
25 to 26	1.092	65 to 66	0.481	105 to 106	0.195
26 to 27	1.092	66 to 67	0.481	106 to 107	0.195
27 to 28	1.092	67 to 68	0.481	107 to 108	0.195
28 to 29	1.092	68 to 69	0.481	-	-
29 to 30	1.300	69 to 70	0.910	-	-
30 to 31	1.300	70 to 71	1.300	-	-
31 to 32	1.300	71 to 72	0.910	-	-
32 to 33	1.300	72 to 73	0.910	-	-
33 to 34	1.300	73 to 74	0.910	-	-
34 to 35	1.300	74 to 75	0.910	-	-
35 to 36	1.508	75 to 76	1.170	-	-
36 to 37	1.508	76 to 77	1.170	-	-
37 to 38	1.508	77 to 78	1.170	-	-
38 to 39	1.508	78 to 79	1.170	-	-
39 to 40	1.040	79 to 80	1.170	-	-
40 to 41	1.040	80 to 81	1.170	-	-

Specification of disc elements for bending vibration analysis model of turbine – generator rotor

Node	Density (kg/m ³)	Thick-ness (m)	Outer diameter (m)	Outer diameter (m)	Node	Density (kg/m ³)	Thick-ness (m)	Outer diameter (m)	Outer diameter (m)
13	7850	0.130	1.404	1.014	78	7222	0.301	1.580	1.170
14	7850	0.130	1.404	1.014	79	7222	0.301	1.580	1.170
15	7850	0.130	1.404	1.014	80	7222	0.301	1.580	1.170
16	7850	0.130	1.404	1.014	81	7222	0.301	1.580	1.170
17	7850	0.130	1.404	1.014	82	7222	0.301	1.580	1.170
18	7850	0.130	1.404	1.014	83	7222	0.301	1.580	1.170
19	7850	0.130	1.404	1.014	84	7222	0.301	1.580	1.170
20	7850	0.130	1.404	1.014	85	7222	0.301	1.580	1.170
23	7850	0.135	1.508	1.092	86	7222	0.301	1.580	1.170
24	7850	0.135	1.508	1.092	87	7222	0.301	1.580	1.170
25	7850	0.135	1.508	1.092	88	7222	0.301	1.580	1.170
26	7850	0.135	1.508	1.092	89	7222	0.301	1.580	1.170
30	7850	0.169	1.820	1.300	90	7222	0.301	1.580	1.170
31	7850	0.169	1.820	1.300	-	-	-	-	-
32	7850	0.169	1.820	1.300	-	-	-	-	-
34	7850	0.169	1.820	1.300	-	-	-	-	-
36	7850	0.195	1.820	1.508	-	-	-	-	-
37	7850	0.195	1.820	1.508	-	-	-	-	-
38	7850	0.312	1.820	1.508	-	-	-	-	-
13	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
14	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
15	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
16	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
17	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
18	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
19	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
20	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
23	7850	0.009	1.820	1.508	-	-	-	-	-
24	7850	0.009	1.872	1.508	-	-	-	-	-
25	7850	0.009	1.950	1.508	-	-	-	-	-
26	7850	0.009	2.080	1.508	-	-	-	-	-
30	7850	0.012	2.444	1.820	-	-	-	-	-
31	7850	0.012	2.600	1.820	-	-	-	-	-
32	7850	0.012	2.691	1.820	-	-	-	-	-
34	7850	0.012	2.860	1.820	-	-	-	-	-
36	7850	0.016	3.055	1.820	-	-	-	-	-
37	7850	0.017	3.315	1.820	-	-	-	-	-
38	7850	0.019	3.640	1.820	-	-	-	-	-
76	7222	0.301	1.580	1.170	-	-	-	-	-
77	7222	0.301	1.580	1.170	-	-	-	-	-

A-5 タービン-発電機ロータのねじり振動解析モデルの諸元

Coordinate of nodes for torsional vibration analysis model of turbine – generator rotor

Node	z (m)	Node	z (m)	Node	z (m)
1	0.000	41	10.628	81	21.408
2	0.390	42	10.725	82	21.708
3	0.481	43	11.001	83	22.009
4	0.739	44	11.065	84	22.310
5	0.780	45	11.375	85	22.610
6	1.300	46	11.700	86	22.911
7	1.691	47	12.025	87	23.212
8	1.755	48	12.155	88	23.512
9	2.114	49	12.448	89	23.813
10	2.210	50	12.674	90	24.113
11	2.730	51	12.740	91	24.414
12	3.185	52	12.935	92	24.525
13	3.614	53	13.130	93	24.947
14	3.900	54	13.196	94	25.480
15	4.160	55	13.507	95	26.000
16	4.420	56	13.884	96	26.130
17	4.680	57	14.261	97	26.650
18	4.940	58	14.638	98	26.717
19	5.200	59	14.949	99	27.060
20	5.460	60	15.015	100	27.469
21	5.884	61	15.210	101	27.879
22	5.990	62	15.405	102	28.288
23	6.058	63	15.472	103	28.330
24	6.292	64	15.860	104	28.711
25	6.526	65	16.328	105	29.133
26	6.760	66	16.705	106	29.159
27	7.280	67	17.076	107	29.374
28	7.629	68	17.379	108	29.614
29	7.755	69	17.446	-	-
30	7.839	70	17.914	-	-
31	8.151	71	18.044	-	-
32	8.450	72	18.564	-	-
33	8.840	73	19.084	-	-
34	8.986	74	19.493	-	-
35	9.133	75	19.604	-	-
36	9.230	76	19.905	-	-
37	9.620	77	20.205	-	-
38	10.075	78	20.506	-	-
39	10.231	79	20.807	-	-
40	10.366	80	21.107	-	-

Dimensions of Shaft for torsional vibration analysis model of turbine – generator rotor
 (Density 7850 kg/m³, Shear modulus 7.9192 × 10¹⁰ Pa)

Node	Outer Diameter (m)	Node	Outer Diameter (m)	Node	Outer Diameter (m)
1 to 2	0.312	41 to 42	0.780	81 to 82	1.170
2 to 3	0.689	42 to 43	0.780	82 to 83	1.170
3 to 4	0.312	43 to 44	0.468	83 to 84	1.170
4 to 5	0.312	44 to 45	0.468	84 to 85	1.170
5 to 6	0.468	45 to 46	0.468	85 to 86	1.170
6 to 7	0.468	46 to 47	0.468	86 to 87	1.170
7 to 8	0.468	47 to 48	0.858	87 to 88	1.170
8 to 9	0.780	48 to 49	0.468	88 to 89	1.170
9 to 10	0.780	49 to 50	0.468	89 to 90	1.170
10 to 11	1.014	50 to 51	0.468	90 to 91	1.170
11 to 12	1.014	51 to 52	0.910	91 to 92	0.910
12 to 13	1.014	52 to 53	0.910	92 to 93	0.910
13 to 14	1.014	53 to 54	0.468	93 to 94	0.910
14 to 15	1.014	54 to 55	0.468	94 to 95	0.910
15 to 16	1.014	55 to 56	0.468	95 to 96	1.300
16 to 17	1.014	56 to 57	0.468	96 to 97	0.910
17 to 18	1.014	57 to 58	0.468	97 to 98	0.481
18 to 19	1.014	58 to 59	0.468	98 to 99	0.481
19 to 20	1.014	59 to 60	0.468	99 to 100	0.481
20 to 21	1.014	60 to 61	0.910	100 to 101	0.481
21 to 22	1.014	61 to 62	0.910	101 to 102	0.481
22 to 23	1.092	62 to 63	0.481	102 to 103	0.325
23 to 24	1.092	63 to 64	0.481	103 to 104	0.325
24 to 25	1.092	64 to 65	0.481	104 to 105	0.325
25 to 26	1.092	65 to 66	0.481	105 to 106	0.195
26 to 27	1.092	66 to 67	0.481	106 to 107	0.195
27 to 28	1.092	67 to 68	0.481	107 to 108	0.195
28 to 29	1.092	68 to 69	0.481	-	-
29 to 30	1.300	69 to 70	0.910	-	-
30 to 31	1.300	70 to 71	1.300	-	-
31 to 32	1.300	71 to 72	0.910	-	-
32 to 33	1.300	72 to 73	0.910	-	-
33 to 34	1.300	73 to 74	0.910	-	-
34 to 35	1.300	74 to 75	0.910	-	-
35 to 36	1.508	75 to 76	1.170	-	-
36 to 37	1.508	76 to 77	1.170	-	-
37 to 38	1.508	77 to 78	1.170	-	-
38 to 39	1.508	78 to 79	1.170	-	-
39 to 40	1.040	79 to 80	1.170	-	-
40 to 41	1.040	80 to 81	1.170	-	-

Specification of disc elements for torsional vibration analysis model of turbine – generator rotor

Node	Density (kg/m ³)	Thick-ness (m)	Outer diameter (m)	Outer diameter (m)	Node	Density (kg/m ³)	Thick-ness (m)	Outer diameter (m)	Outer diameter (m)
13	7850	0.130	1.404	1.014	78	7222	0.301	1.580	1.17
14	7850	0.130	1.404	1.014	79	7222	0.301	1.580	1.17
15	7850	0.130	1.404	1.014	80	7222	0.301	1.580	1.17
16	7850	0.130	1.404	1.014	81	7222	0.301	1.580	1.17
17	7850	0.130	1.404	1.014	82	7222	0.301	1.580	1.17
18	7850	0.130	1.404	1.014	83	7222	0.301	1.580	1.17
19	7850	0.130	1.404	1.014	84	7222	0.301	1.580	1.17
20	7850	0.130	1.404	1.014	85	7222	0.301	1.580	1.17
23	7850	0.135	1.508	1.092	86	7222	0.301	1.580	1.17
24	7850	0.135	1.508	1.092	87	7222	0.301	1.580	1.17
25	7850	0.135	1.508	1.092	88	7222	0.301	1.580	1.17
26	7850	0.135	1.508	1.092	89	7222	0.301	1.580	1.17
30	7850	0.169	1.820	1.300	90	7222	0.301	1.580	1.17
31	7850	0.169	1.820	1.300	-	-	-	-	-
32	7850	0.169	1.820	1.300	-	-	-	-	-
33	7850	0.169	1.820	1.300	-	-	-	-	-
36	7850	0.195	1.820	1.508	-	-	-	-	-
37	7850	0.195	1.820	1.508	-	-	-	-	-
38	7850	0.312	1.820	1.508	-	-	-	-	-
13	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
14	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
15	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
16	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
17	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
18	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
19	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
20	7850	0.006	1.612	1.404	-	-	-	-	-
23	7850	0.009	1.820	1.508	-	-	-	-	-
24	7850	0.009	1.872	1.508	-	-	-	-	-
25	7850	0.009	1.950	1.508	-	-	-	-	-
26	7850	0.009	2.080	1.508	-	-	-	-	-
30	7850	0.012	2.444	1.820	-	-	-	-	-
31	7850	0.012	2.600	1.820	-	-	-	-	-
32	7850	0.012	2.691	1.820	-	-	-	-	-
33	7850	0.012	2.860	1.820	-	-	-	-	-
36	7850	0.016	3.055	1.820	-	-	-	-	-
37	7850	0.017	3.315	1.820	-	-	-	-	-
38	7850	0.019	3.640	1.820	-	-	-	-	-
76	7222	0.301	1.580	1.170	-	-	-	-	-
77	7222	0.301	1.580	1.170	-	-	-	-	-