

鉛直スロットにおける攪乱の非線形相互作用

(2017年度 博士論文)

鳥取大学大学院 工学研究科 博士後期課程 機械宇宙工学専攻
津野田 修平

1 要旨

異なる温度に保たれた 2 枚の無限に伸びる平行に置かれた鉛直平板間 (鉛直スロット) には, 温度差が 0 でない限り, 3 次関数の速度分布と 1 次関数の温度分布を有する自然対流が熱伝導状態として生じる. 温度差がある臨界値以上になると, この自然対流は不安定化する. さて, 流体のプラントル数 P には線形安定性解析により決定される. クロスオーバー値 $P_* = 12.45425644$ が存在し, $P < P_*$ ではせん断力駆動型の定常モード, $P > P_*$ では浮力駆動型の振動 (Hopf) モードが臨界条件を与えることが知られている. 線形臨界点に限ると, $10^{-7} < P < 10^8$ の広い範囲にわたって, これらのモードの分岐はつねに超臨界である. このとき, $P \simeq P_*$ では臨界 Hopf モードと臨界定常モード間の相互作用が生じ, 浮力の強さを特徴づけるグラシヨフ数の上昇と共に, $P < P_*$ では定常モードから混合モードが, $P > P_*$ では定在波から混合モードが安定な解として分岐することが知られている. さらに, $P < P_*$ では中立定常モード間で波数比 1:2 の相互作用 (1:2 共鳴) が, $P > P_*$ では 1:2 Hopf/定常モード間共鳴, 1:2:4 Hopf/定常/定常モード間共鳴が生じ, それらの場合に分岐解析も行われている.

本論文では, 「 $P \simeq P_*$ での臨界モード間の相互作用が実は 1:4 Hopf/定常モード間共鳴であることを見だし」中心多様体低減によって振幅方程式を導出して, 解の分岐特性を詳細に調べた. その結果, これまでの研究で求められていた定在波と混合モードが対称な 2 種類の混合モードに置き換わり, また, 2 種類の混合モードは非対称な混合モードによって橋渡しされていることが明らかになった. このことは, 流体方程式の直接数値シミュレーションによっても確認されたため, 4 次の共鳴項を有する 1:4 共鳴の重要性を示すことができた. また, 定常中立モード間の 1:2 共鳴相互作用に対して新たなパラメータを導入する目的で, 主流に対して鉛直方向の平面クエット流成分を重畳させた. その結果, 新たに浮力駆動型の定常モードが臨界モードとして発生可能であることを確認した. この定常モードは通常のせん断力駆動型の定常モードや浮力駆動型振動モードとは違って, クエット流の強さを特徴づけるレイノルズ数の減少に伴い, 線形臨界点において分岐は非線形縮退点を挟んで超臨界から亜臨界, そして超臨界へと変化することを見いだした. 中立定常モード間の 1:2 共鳴を記述する振幅方程式を多重尺度法によって導出し, それにもとづいた分岐解析を行った結果, 定常中立モード間の 1:2 共鳴として従来知られていた分岐特性に加え, 亜臨界分岐の影響を強く受けたバラエティに富んだ分岐特性が得られた. またそれらは分岐の数値解析によって得られた分岐図の中に局所分岐解として埋め込まれていることが確認された.

Contents

1 要旨	2
2 序論	5
3 $P = P_*$ 近傍における 1:4 Hopf/定常モード間共鳴	11
3.1 基礎モデルの数式化	11
3.1.1 Navier-Stokes 方程式と連続の式	11
3.1.2 エネルギー方程式	13
3.1.3 境界条件	14
3.1.4 攪乱の時間発展方程式	15
3.2 線形安定性解析	16
3.3 中立曲線	19
3.4 弱非線形解析	21
3.5 振幅方程式の解	38
3.6 振幅方程式の係数の収束性 (元は数値計算)	39
3.7 分岐図	41
3.8 α, G 平面上の分岐図	46
3.9 数値計算	49
3.10 結論	51
4 平面クエット流の影響	53
4.1 基礎モデルの数式化	53
4.2 線形安定性解析	54
4.3 弱非線形解析	63
4.4 1:2 共鳴に対する弱非線形解析	66
4.5 数値計算による非線形解の解析	68
4.6 数値結果	70
4.7 結論	80
5 参考文献	82
6 謝辞	90

A Appendix	91
A.1 固有関数と随伴関数との従直交関係	91
A.2 近恒等変換による不適切な時間項の除去	92
A.3 振幅方程式の解と安定性	97
A.4 同変分岐理論による結果との比較	101
A.5 1:2 共鳴に対する振幅方程式の定常解とその安定性	103

2 序論

下面より加熱, 上面より冷却された容器内に流体が満たされているレイリー・ベナール問題では, 温度差が臨界値を超えると, レイリー・ベナール対流とよばれる熱対流が発生することは広く知られている. レイリー・ベナール対流のような下部の流体の温度が高い場合, 上部より下部の流体の密度が低くなった結果浮力が発生し不安定成層を形成する. この結果, 熱対流(自然対流)が発生する. このような状況は, 広く自然界で観察されるため多くの研究が行われてきている. この鉛直方向の温度差による問題に対して, 水平方向に温度差があるような, 即ち異なる温度をもつ2枚の無限に広い平行平板が鉛直に置かれた場合にも, 平板間に満たされた流体には自然対流が発生することが知られている. その代表例として2重窓が挙げられる. これは温度が低い外側と温度が高い内側に各々ガラス板が1枚ずつ配置されて流体がその間隙に満たされたものである. このときガラスの温度が高い側の流体には鉛直上向き力が発生し, 反対にガラスの温度が低い側の流体は下向き力が働く. 温度差が小さい場合, 熱は伝導によって伝わるが, そのとき3次関数で表される鉛直方向の速度分布, 1次関数で表される温度分布をもつ. ガラス間の温度差が大きくなり臨界値を超えるとこの熱伝導状態は不安定化する. ガラス間に空気が満たされた場合, せん断力駆動型の定常モードが臨界条件を与えるようになる. その結果ガラス間の熱交換が活発に行われるようになり, 結露が発生する. この2重窓に結露が発生する問題は "double glazing problem" と呼ばれている. 1940年代以降空気を満たしてユニット化した2重窓が量産化され一般に普及しはじめると, 同問題は工学上の重要な問題として取り上げられるようになった.

本研究ではこのような温度差がある鉛直スロット間の問題に対して流れの安定性を調べた. ここでいう流れの安定性とは, 定常主流に攪乱が加えられ十分な時間が経過した場合に元の流れになるのか, または攪乱が成長した新たな流れになるのか見定めるものである. 攪乱には幾つかの種類が存在し本論文中においては, 主に時間的に流れが変化しない定常攪乱と流れが周期的に変化する振動攪乱を扱っている.

鉛直スロット内の自然対流に関しては, Boyarintsev[1]の実験を起点として多くの研究が行われてきている. 1950年 Boyarintsev[1]は惑星の大気の研究と称し両壁に温度差のある鉛直スロット内や円筒容器内, また温度差のある2重球殻間に満たされた流体にはどのような流れが発生するのかを実験によって調べた. この研究の一環として鉛直スロット内の自然対流に関する実験が行われた.

1953年 Gershuni [2] は $P = 7$ の場合の鉛直スロット内自然対流の問題に対しガラーキソ法を用いて線形安定性解析を行い, 定常攪乱に対して熱伝導状態が不安定になる臨界値 $G_*P = 13400$ (G_* は臨界グラシヨフ数) を算出した. Boyarintsev[1] の実験による臨界値は $G_cP \simeq 10000$ であったため当時の精度としては Gershuni [2] の結果は妥当性を持っていた. 1967年 Rudakov[3] によって $P = 0$ から $P = 10$ までの比較的広い P の範囲にわたって線形安定性解析が行われた. この研究によれば $P = 0$ から $P = 10$ の範囲では臨界攪乱は常に定常攪乱であることが確認された. しかしながら一方で二番目に大きい線形増幅率をもつモード (但し安定なモード) は振動攪乱であることも報告された.

1954年 Batchelor[4] は鉛直スロットの縦横比を有限に設定し研究をおこなった. 鉛直スロットの容器の縦横の長さを l と d とした場合, 熱コンダクタンス C を, $Q/l(T_1 - T_0)$ として定義した上で (Q は熱量, T_0, T_1 低温側と高温側の側壁の温度, k は熱伝導率) $l = 25\text{cm}, 50\text{cm}, 100\text{cm}, 200\text{cm}$ の各場合における C と d の関係を明らかにした. これに加え, 2次対流が発生していない熱伝導状態における理論曲線も $C - d$ 平面に描画した. その結果各 l において 1cm 未満の d の場合, 熱コンダクタンス C は熱伝導状態の理論曲線と良く一致することが確認された. 逆に各 l において 1cm を超えた d の場合, 熱コンダクタンス C は熱伝導状態の理論曲線とは一致しなかった. そのため Batchelor[4] は 1cm を超えない間隔で2重窓を作ることにより”double glazing problem”の問題は回避できると結論づけた.

この研究の流れは, Vest と Arpaci[5], Gill と Davey[6] によって引き継がれてゆく. Vest と Arpaci[5] は空気 ($P = 0.71$) を用いた縦横比 $H = 33$ の直方体容器と, シリコンオイル ($R \simeq 900$) を用いた $H = 20$ の直方体容器において, 前者ではたばこの煙, 後者はアルミ粉を懸濁することによる可視化実験を行い, 定常攪乱を観察した. Gill と Davey[6] の研究では $P = 0.72, 7, 1000$ の場合の H とレイリー数 Ra の関係を示した. この結果より H が小さい場合 ($\ln H < 2$) には臨界条件を与えるのは振動攪乱であり, 逆に H が大きい場合 ($\ln H > 2$) には臨界条件を与えるのは定常攪乱になるというものであった. しかしながら $\ln H = 2$ 付近で臨界条件を与える攪乱についての詳細は述べられていない. Gill と Kirkham[7] は $P = 1000$ の場合の $\ln H = 2$ 近傍での振動攪乱の中立曲線を求めた. また彼らは $\ln H \rightarrow \infty$ かつ $P = 1000$ の場合には, 振動攪乱が臨界条件を与えることを確認した.

その後 Korpela[8] は $0 \leq P \leq 1000$ という広範囲にわたって線形安定性の解析を行い,

$P_* = 12.7$ において臨界条件を与える攪乱が定常攪乱から振動攪乱に変わることを確認した.

四半世紀後になり Fujimura[9] がプラントル数の正確な臨界値を再計算した結果 $P_* = 12.45425644$ が求められた. $P \simeq P_*$ かつ $G \simeq G_*$ の場合どのような流れが安定であるのかを明らかにする目的で Fujimura と Mizushima[10], Kropp と Busse[11] がほぼ同時期にかつ独立に弱非線形解析を用いて振幅方程式を導出しその方程式の解析を行った. これらの研究によれば, $P < P_*$ の場合, 熱伝導状態により超臨界分岐によって発生した定常攪乱は, 臨界点近傍では安定である, G の増加と共に定常状態は安定性を失い定常攪乱成分と上下方向の伝播波成分が混ざった混合モードが安定になる. 反対に $P > P_*$ の場合, 熱伝導状態より Hopf 分岐によって発生した振動攪乱としては上下方向に同じ速度で伝播する振幅の等しい伝播波の重ね合わせ, すなわち定在波という形態が安定である. 定在波は, 臨界点近傍で安定であるが, G の増加に伴い混合モードが安定になる.

今回の研究では, この $P r_*$ 近傍の問題を再考するところから始めた. Figure 2(e) に示す中立曲線により, 左側の伝播波に対する中立曲線と右側の定常攪乱に対する中立曲線の極小点, すなわち臨界点を与える臨界波数はおおよそ 1:4 の比率の関係にある. より正確には $P_* = 12.45425644$ のとき臨界点の波数はそれぞれ $\alpha_c^{(T)} = 0.342411$, $\alpha_c^{(S)} = 1.383148$, $\alpha_c^{(T)} \times 4 = 1.369644$ であることから 1:4 の関係に近いことが確認される. Fujimura と Mizushima[10], Kropp と Busse[11], Fujimura[12] は弱非線形解析を用い振幅方程式を計算する際にこの波数比が 1:4 であることを見落としていた. そのため本研究では 1:4 の相互作用を取り入れ弱非線形解析を行い振幅方程式に含まれる係数値を数値的に決定することにより, $P \simeq P_*$ ではどのような流れが安定であるのかを数値計算も併用しながら理論的に説明したものである. そのため本論文が興味の対象としているのは臨界モード間の相互作用に対する 1:4 共鳴の効果である.

Hopf/定常モードの相互作用については 1980 年代 1990 年代に活発に研究された. 位相のカップリングが 3 次で起こる 1:1 の共鳴相互作用については, Taylor-クエット流の問題がよく研究されている. 例えば Golubitsky と Langford[13] と Golubitsky[14] などが存在する.

1:2 の Hopf/定常モードの相互作用は最も共鳴の影響が大きい. これは位相のカップリングが 2 次のオーダーであるためである. この問題に関する研究としては Fujimura と Renardy[15, 16] や Colinet 達[17] がある. また Hill と Stewart[18] は同変分岐理論を用いて一般の場合におけ

る $l:m$ の比の Hopf/定常共鳴相互作用の解析を行った.

位相のカップリングがそれぞれ 3 次, 2 次の 1:1 や 1:2 共鳴の影響の大きさに対して今回の 1:4 の共鳴の場合, 絶対値を通したカップリングは 3 次であるが位相のカップリングが 4 次であるため, 共鳴の効果は絶対値によるカップリングのみが存在する非共鳴時と比較してはるかに弱いと考えられるが, この考えが正しいことを結論するためには 1:4 の共鳴による効果が非常に小さいことを具体例を通して示さなければならない. したがって本研究 [23] の目的の 1 つは, 絶対値を通したカップリングのみをもつ非共鳴相互作用の場合と比較して, 1:4 共鳴の寄与は高次であり, たしかに無視できる程度であることを確認することにある. しかしながら解析を進めると 1:4 共鳴による位相のカップリングの寄与は無視できず, 分岐構造を正確に理解する上でこのカップリングを記述する 4 次の非線形項を無視することはできないことが明らかになった.

異なるモード間の共鳴ではなく同一モードの共鳴についてもいくつかの研究が存在する. Dangelmayr[24] によれば定常モード間の 1:2 共鳴方程式の非縮退条件は 3 つ存在し, 非縮退条件は振幅方程式の係数によって決定されることが確認された. (非縮退条件は後述する振幅方程式 (58) の係数が $\kappa_1 \neq 0$, $\kappa_2 \neq 0$, $\lambda_{22} \neq 0$ で与えられる) これら 3 つの非縮退条件は物理効果の取り込み方によっては 8 通りの状態の組み合わせが存在することを示している.

温度差のある鉛直スロット内の対流における 1:2 の定常モード間共鳴の研究については Fujimura and Mizushima[20] がある. また Fujimura and Nagata[31] は温度差のある鉛直スロットに対して水平磁場を印加した場合のプラントル数と動粘性係数, 電気伝導率, 透磁率の積である磁気プラントル数が共に 0 であるとした仮想的な状況を考えその場合において弱非線形解析を行った. その結果, 2 つの非線形縮退条件 (後述する振幅方程式 (58) の係数が $\kappa_2 = 0$ と $\lambda_{22} = 0$ となる場合) が発生可能であることを示し, 縮退点の近傍において 5 次の振幅方程式を導出して分岐構造を解析した.

本研究 [33] ではこれらの先行研究の結果を鑑みプラントル数が非 0 という仮想的ではない状態に設定した上で, 定常モード間の 1:2 の共鳴物理効果としてクエット流を重畳し新たなパラメータを追加した系の解析も行った. (その結果非縮退条件を満たす 4 種類の係数の符号の組み合わせに対する分岐構造を明らかにした) クエット流が重畳された系についての先行研究は数が少ないが次に紹介するものが存在する.

Lobov と Tarunin[21] の論文によれば無限に長い平行平板間の流れに対してクエット流を重畳した研究は3つ存在することが記載されている。この3つの論文 [22] は旧ソビエト連邦時代の国内誌に掲載されたもので今回入手することができなかった。Lobov と Tarunin[21] の論文にはこれらの研究が簡単に紹介されており、その内容は $P = 0$ の場合に存在する定常モードとは別に $P > 2.4, R < 0$ において不安定な定常モードが存在するようになるというものである。(R は各々反対方向に移動する側壁の速度に比例するレイノルズ数) Lobov と Tarunin[21] はこの不安定な定常モードに注目し周期6の周期境界条件のすなわち波数 $\alpha = 1.0472, P = 10, R = -50, 320 \leq G \leq 450$ の場合の数値計算を行った。その結果 $G \simeq 320$ において、単色モードの分岐は超臨界であり、 $G \simeq 450$ では単色モードの分岐は亜臨界であることがわかった。

ところで、本研究で扱う平面クエット流が重畳された無限に長い鉛直スロット内の対流問題は、高さが無限大という仮定に基づくために仮想のモデルという側面が非常に強いと考えられる。しかし鉛直スロットの縦横比が十分に縦に長いと想定できる場合には本研究のモデルから得られた結果も現実の系に応用できると考え本研究を進めた。実際のモデルでいえば、原子炉内における制御棒と燃料集合体間の流体があげられる。このとき燃料集合体側の温度が高温であり、制御棒側の温度が低いことから2つの棒の間に熱伝達が行われる。加えて、制御棒を挿入あるいは抜き取る場合を考えれば過渡的ではあるがクエット流が重畳された状態になる。

無限に長い鉛直スロットの問題においては、定常モードと Hopf モード (以後 $S^{(H)}$ と O_s モードと略記) はよく知られている。これらのモードとは対照的にクエット流を重畳した場合に発生する定常モード (以後 $S^{(C)}$ モードと略記) の分岐に関する研究は、我々が調べた限り $R = -50, P = 10, \alpha = 1.0472, 320 \leq G \leq 450$ の場合を除き行われていなかった。そのため、本研究では、 $S^{(C)}$ モードに関する最初の系統的な解析を目指し、可能な限り問題を複雑化する要素を排除して単純化した。鉛直スロットの縦横比は有限の値ではなく無限大に設定して鉛直スロットの系を解析するのはこのためである。

クエット流が重畳された系については、参考となる論文が少ないことから先ず P と R を変化させた場合における線形安定性解析、弱非線形解析、分岐の数値解析、数値シミュレーションを行った。線形安定性解析の結果、 $P \gtrsim 2.2$ で不安定な $S^{(C)}$ モードが存在することを確認したが、この $S^{(C)}$ モードは $R = 0$ の場合に起きるせん断力駆動型の $S^{(H)}$ モードとは対照的に

O_S モードと同様に浮力駆動型の不安定モードであることが分かった. RG -平面上に描いた臨界曲線に沿って弱非線形解析を行った結果, $S^{(C)}$ モードの解の分岐は, R が減少するにつれて亜臨界から超臨界に変化し, 特定の R において非線形縮退がおきることを明らかにした. さらに, この定常モードは波数方向に関して比較的広い増幅波数帯をもつため, 中立モード間に 1:2 共鳴が発生可能である. そこで, 弱非線形解析を適用して共鳴時の分岐構造を詳細に調べた. 加えて, 弱非線形解が大域的な解に埋め込まれている様子を理解する目的で非線形解の算出をニュートン-ラフソン法によって行い, 得られた 2 次元解の安定性を数値シミュレーションによる時間発展を用いて判定している.

3 $P = P_*$ 近傍における 1:4 Hopf/定常モード間共鳴

この章では, Figure 1 に示される温度差が存在する鉛直スロット内の自然対流の問題について述べる. 系を制御しているパラメータは流体の物性値である Prandtl 数 P , 及び温度差を示すグラシヨフ数 G だけである.

3.1 基礎モデルの数式化

この章ではモデルの数式化を行う. ここでは流体の圧縮性の影響が軽微だと考え非圧縮性流体を仮定する. この非圧縮性流体が入れられた鉛直に長い Figure 1 のような容器を考える. このとき重力方向は鉛直下向き, また容器の左右側壁間には温度差 $2\Delta T$ が存在する.

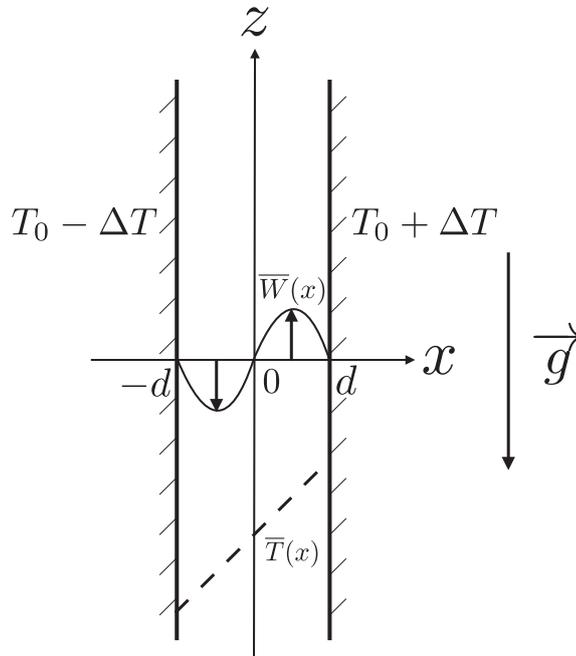


Figure 1: 系の概略図. $\bar{T}(x)$: 温度分布, $\bar{W}(x)$: 速度分布.

3.1.1 Navier-Stokes 方程式と連続の式

この系では温度変化が小さいと仮定して Boussinesq 近似が成り立つものとする. Navier-Stokes は次のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^* p^* + \nu \nabla^{2*} \mathbf{v}^* - g \{1 - \gamma(T^* - T_0)\} \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

\mathbf{x} , \mathbf{v} は位置 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ と速度 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ を示す変数, T は温度を表す. ∇ は微分演算子, t は時間, p は圧力, ρ は密度であり基準温度を T_0 とするとき $\rho = \rho_0 \{1 - \gamma(T - T_0)\}$ の関係に

ある.

γ は体積膨張率, g は重力加速度, \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトル, * 付きの文字は有次元の量である. なお, 基準温度として, ここでは $x = 0$ における温度を採用する. 次のような代表量を導入することによって, 方程式を無次元化する:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \frac{g\gamma\Delta T d^2}{\nu} \mathbf{v}, \\ P_* &= \frac{\rho_0 \nu^2}{d^2} p, \\ T^* - T_0 &= \Delta T \cdot T, \\ t^* &= \frac{\nu}{\gamma g \Delta T d} t, \\ \mathbf{x}^* &= d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

その結果, 次を得る

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\Gamma \nabla p + G^{-1} \nabla^2 \mathbf{v} + G^{-1} T \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

を得る. ただしグラシヨフ数 G と Γ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{g\gamma\Delta T d^3}{\nu^2}, \\ \Gamma &\equiv \frac{\nu^4}{g^2 \gamma^2 \Delta T^2 d^6}. \end{aligned}$$

式(2)に対して $\nabla \times$ を左からかけることによって圧力項を除去する.

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\Gamma \nabla \times \nabla p + G^{-1} \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v} + G^{-1} \nabla \times T \mathbf{e}_z, \\ \nabla \times \nabla p &= 0. \end{aligned}$$

式(2)y 軸方向の渦度は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} ((v \cdot \nabla) u) - \frac{\partial}{\partial x} ((v \cdot \nabla) w) = G^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial x} T \right),$$

によって支配される. ここで流れ場ならびに温度場を二次元的だと仮定し流れ関数 $\psi = \psi(x, z)$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

を導入することによって

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - J(\psi, \nabla^2 \psi) = G^{-1} \nabla^4 \psi - G^{-1} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

が導出される。ただしここでヤコビアン J は関数 $a(x, z)$, $b(x, z)$ を用いて

$$J(a, b) \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x},$$

で与えられる。この方程式の解を時間 t を引数に持たない定常解 $\bar{\psi}, \bar{T}$ と引数に持つ攪乱 $\hat{\psi}, \hat{T}$ に分けて考える。(攪乱についても二次元的と仮定)

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \bar{\psi}(x) + \hat{\psi}(x, z, t), \\ T(x, z, t) &= \bar{T}(x) + \hat{\theta}(x, z, t). \end{aligned} \quad (5)$$

(5) を (4) に代入し、主流を満足する方程式を引き去ることにより、攪乱を支配する次の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\psi} - \bar{\psi}' \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \hat{\psi} + \bar{\psi}''' \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} = G^{-1} \nabla^4 \hat{\psi} - G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\theta} + J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}), \quad (6)$$

ここで、 $\bar{W} = \bar{W}(x)$ は次の式で定義される式 (2) の定常解である。

$$\bar{W} = \frac{x}{6}(1 - x^2), \quad (7)$$

式 (7) の形式を用い、式 (6) を書き換えると次の攪乱の時間発展方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\psi} + \bar{W} \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} - \bar{W}'' \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} - G^{-1} \nabla^4 \hat{\psi} + G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\theta} = J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}). \quad (8)$$

連続の式と、無次元化した連続の式はそれぞれ下記の通りになる。

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

今回は流れ関数 ψ を導入するため、連続の式自体を自動的に満たすことになり連立して解く必要がなくなることに注意する。

3.1.2 エネルギー方程式

エネルギー方程式は、

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) T^* = \kappa \nabla^{2*} T^*, \quad (9)$$

である. ここで κ は温度拡散率である. この式に対して Navier-Stokes 方程式同様に無次元化を行えば,

$$\frac{\partial T}{\partial t} - J(\psi, T) = G^{-1} P^{-1} \nabla^2 T, \quad (10)$$

得る. 但し, プラントル数は下記のように定義した.

$$P \equiv \frac{\nu}{\kappa}. \quad (11)$$

Navier-Stokes 方程式の場合と同様の方法によって式 (11) と式 (10) より温度場の攪乱の時間発展方程式と温度場の定常解 \bar{T} は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + \bar{W} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} - G^{-1} P^{-1} \nabla^2 \hat{\theta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} &= J(\hat{\psi}, \hat{\theta}), \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} &= 1. \end{aligned} \quad (12)$$

ここでは $x = 0$ における温度を参照温度として採用しているため, 熱伝導状態としての定常温度分布は $\bar{T} = x$ と表すことができる.

3.1.3 境界条件

本研究では固定端の境界条件を仮定する.

$$\mathbf{v}^*(x^* = \pm d) = 0,$$

無次元化を行った境界条件は次の形で与えられる.

$$\mathbf{v}(x = \pm 1) = 0,$$

流れ関数の定義式 (3) から,

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = 0 \text{ at } x = \pm 1$$

が流れ関数の攪乱の境界条件として得られ, 更に温度場の攪乱 $\hat{\theta}$ の境界条件が

$$\hat{\theta}(x = \pm 1) = 0, \quad (13)$$

のように求められる.

3.1.4 攪乱の時間発展方程式

前節までの結果より攪乱の時間発展方程式と境界条件は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\psi} + \bar{W} \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} - \bar{W}'' \frac{\partial}{\partial z} \hat{\psi} - G^{-1} \nabla^4 \hat{\psi} + G^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\theta} &= J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}), \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + \bar{W} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} - G^{-1} P^{-1} \nabla^2 \hat{\theta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} &= J(\hat{\psi}, \hat{\theta}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = 0, \hat{\theta} = 0 \quad \text{on } x = \pm 1, \quad (15)$$

であることが確認された. この式を取り扱い易くするために次のような表記を導入する.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S} + \mathcal{L} \right] \hat{\Psi} &= \mathcal{N}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}) \quad \text{in } D, \\ \mathcal{H} \hat{\Psi} &= 0 \quad \text{on } \partial D. \end{aligned} \quad (16)$$

ここで \mathcal{S} , \mathcal{L} は線形演算子, \mathcal{N} は非線形関数, $\hat{\Psi}$ はベクトルであり次のように定義される,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} i j \alpha \bar{W} \mathcal{M} - i j \alpha \bar{W}'' - G^{-1} \mathcal{M}^2 & G^{-1} (d/dx) \\ i j \alpha & i j \alpha \bar{W} - (PG)^{-1} \mathcal{M} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N}(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}) &= \begin{pmatrix} J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}) \\ J(\hat{\psi}, \hat{\theta}) \end{pmatrix}, \\ \hat{\Psi} &= \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H} &= \begin{pmatrix} c_1 \frac{\partial}{\partial z} + c_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで c_1, c_2 は任意であり, また表記中の線形演算子 \mathcal{M} と領域 D と境界 ∂D は,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \nabla^2, \\ D &= \{(x, z) | x \in [-1, 1], z \in (-\infty, \infty)\}, \\ \partial D &= \{(x, z) | x = \pm 1, z \in (-\infty, \infty)\}, \end{aligned}$$

と定義する.

3.2 線形安定性解析

前章までの計算によって Figure 1 に示された系の時間発展方程式を導出した。この章では非線形項を無視した線形の方程式に基づき線形安定性解析を行う。線形安定性解析からは (α, G) 平面に描画される中立曲線と呼ばれる線形増幅領域の境界線が計算される。線形増幅領域の確認は熱伝導状態である一次対流が攪乱に対して不安定となる α や G を知ることに繋がるため重要である。線形安定性解析では、解をつぎのような任意のフーリエモードのみを取り出した形のノーマルモードを考える。

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_j^{(m)} \\ \tilde{\theta}_j^{(m)} \end{pmatrix} e^{ij\alpha z + \sigma_j^{(m)} t}, \quad (17)$$

ノーマルモード (17) を線形化した式 (16) に代入すれば、

$$(\sigma_j^{(m)} S_j + L_j) \Phi_j^{(m)} = 0, \quad H_j \Phi_j^{(m)} = 0 \text{ on } \partial D$$

線形固有値問題が導出される。ここで固有値は、

$$\text{Re } \sigma_j^{(1)} > \text{Re } \sigma_j^{(2)} > \dots,$$

のように順序付けをおこなう。線形作用素 S_j, L_j , 及び固有関数 $\Phi_j^{(m)}$ はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned} S_j &= \begin{pmatrix} M_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ L_j &= \begin{pmatrix} ij\alpha \bar{W} M_j - ij\alpha \bar{W}'' - G^{-1} M_j^2 & G^{-1}(d/dx) \\ ij\alpha & ij\alpha \bar{W} - (PG)^{-1} M_j \end{pmatrix}, \\ \Phi_j^{(m)} &= \begin{pmatrix} \phi_j^{(m)} \\ \tilde{\theta}_j^{(m)} \end{pmatrix}, \\ M_j &= d^2/dx^2 - (j\alpha)^2, \end{aligned}$$

線形作用素 M_j と S_j は自己随伴であり、線形作用素 L_j は非自己随伴である。(自己随伴及び非自己随伴については Appendix A.1 を参照) 式 (3.2) の随伴方程式は、

$$(\sigma_j^{(m)} S_j + L_j)^\dagger \Phi_j^{(m)\dagger} = 0,$$

である。また,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \Phi_j^{(m)*} (\sigma_j^{(m)} S_j + L_j)^\dagger \Phi_j^{(m)\dagger} dx = \int_{-1}^1 (\sigma_j^{(m)} S_j + L_j)^* \Phi_j^{(m)*} \Phi_j^{(m)\dagger} dx \\
& = \int_{-1}^1 \left\{ \phi^\dagger [\sigma^* \phi''^* - j^2 \alpha^2 \sigma^* \phi^* - ij\alpha \bar{W} \phi''^* + ij^3 \alpha^3 \bar{W} \phi^* + ij\alpha \bar{W}'' \phi^* - G^{-1} \phi^{(iv)*} \right. \\
& + 2j^2 \alpha^2 G^{-1} \phi''^* - G^{-1} j^4 \alpha^4 \phi^* + G^{-1} \tilde{\theta}'] \\
& + \tilde{\theta}^\dagger [\sigma^* \tilde{\theta}^* - ij\alpha \bar{W} \tilde{\theta}^* - ij\alpha \phi^* - (PG)^{-1} \tilde{\theta}''^* + (PG)^{-1} j^2 \alpha^2 \tilde{\theta}^*] \left. \right\} dx, \\
& = \int_{-1}^1 \left\{ \sigma^* \phi''^\dagger \phi^* - j^2 \alpha^2 \sigma^* \phi^\dagger \phi^* - ij\alpha \bar{W} \phi''^\dagger \phi^* + ij^3 \alpha^3 \bar{W} \phi^\dagger \phi^* - 2ij\alpha \bar{W}' \phi^\dagger \phi^* \right. \\
& - G^{-1} \phi^{(iv)\dagger} \phi^* + 2j^2 \alpha^2 G^{-1} \phi''^\dagger \phi^* - G^{-1} j^4 \alpha^4 \phi^\dagger \phi^* \\
& - G^{-1} \phi^\dagger \tilde{\theta}^* + \sigma^* \tilde{\theta}^\dagger \tilde{\theta}^* - ij\alpha \bar{W} \tilde{\theta}^\dagger \tilde{\theta}^* - ij\alpha \tilde{\theta}^\dagger \phi^* \\
& \left. - (PG)^{-1} \tilde{\theta}''^\dagger \tilde{\theta}^* + (PG)^{-1} j^2 \alpha^2 \tilde{\theta}^\dagger \tilde{\theta}^* \right\} dx, \\
& = \int_{-1}^1 \left\{ \phi^* [\sigma^* M_j \phi^\dagger - i\alpha \bar{W} M_j \phi^\dagger - 2ij\alpha \bar{W}' \phi^\dagger - G^{-1} M_j^2 \phi^\dagger - ij\alpha \tilde{\theta}^\dagger] \right. \\
& \left. + \tilde{\theta}^* [-G^{-1} \phi^\dagger + \sigma^* \tilde{\theta}^\dagger - ij\alpha \bar{W} \tilde{\theta}^\dagger - (PG)^{-1} S \tilde{\theta}^\dagger] \right\} dx = 0,
\end{aligned}$$

より L_j の随伴作用素 L_j^\dagger は次のようになる。

$$L_j^\dagger = \begin{pmatrix} -ij\alpha \bar{W} M_j - 2ij\alpha V'(d/dx) - G^{-1} M_j^2 & -ij\alpha \\ -G^{-1}(d/dx) & -ij\alpha V - (PG)^{-1} M_j \end{pmatrix}, \quad (18)$$

線形安定性解析では、式 (17) の ϕ と $\tilde{\theta}$ に関してチェビシエフ多項式展開する。

$$\phi_j^{(1)}(x, z) = \sum_{n=0}^N a_{j,n}^{(1)} F_n(x),$$

$$F_n(x) = (1 - x^2)^2 T_n(x),$$

$$T_n(x) = \cos n\theta, x = \cos \theta,$$

$$T_{n+1}(x) - 2x T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$$

ここで F_n は Chebyshev 多項式 T_n に対して境界条件を満たすように係数をかけたものである。Chebyshev 多項式 T_n は、

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ &\dots \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \end{aligned}$$

によって定義される。温度場に関しても同様に展開する。

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_j^{(1)}(x, z) &= \sum_{m=0}^N b_{j,n}^{(1)} G_n(x), \\ G_n(x) &\equiv (1 - x^2) T_n(x). \end{aligned}$$

解を展開したものを線形固有値問題に代入することにより次の式が得られる。

$$\sigma_j^{(1)} S_j \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^N a_{j,n}^{(1)} F_n(x) \\ \sum_{n=0}^N b_{j,n}^{(1)} G_n(x) \end{pmatrix} = -L_j \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^N a_{j,n}^{(1)} F_n(x) \\ \sum_{n=0}^N b_{j,n}^{(1)} G_n(x) \end{pmatrix}.$$

このままでは未知数 a_n, b_n について解くことはできないため、コロケーション法と呼ばれる方法で解く。次のように定義されたガウス-ロバット点で式を評価することにより、

$$z_m = \cos(m\pi/N + 2),$$

連立方程式の数を未知数と同数にすることによって未知数を計算する方法をコロケーション法とよび、 N は打ち切り項数である。コロケーション点で連立させた式を次のように書き下す。

$$\sigma_j^{(1)} A_j \chi_j^{(1)} = B_j \chi_j^{(1)}. \quad (19)$$

A と B は $2(N+1) \times 2(N+1)$ の行列であり、 χ は $2(N+1)$ 次元のベクトルである。この方程式は次元こそ大きいが単純な代数方程式であり、一般化固有値問題として数値的に解けば $2 \times (N+1)$ 個の固有値と固有関数を求めることができる。ここでの線形安定性解析の目

的は中立曲線を描画することにある。中立曲線とは、熱伝導状態が中立安定である点、すなわち、複素増幅率 σ の実部が 0 であるような点 (α, G) の集合である。中立曲線は一次対流が攪乱に対して不安定になる点を教えてくれるため、対流の構造が定性的に変化する重要な点を把握することができるようになる。中立曲線自体は複素増幅率を数値的に算出し σ の実部が 0 に近くなるように挟み撃ち法などの方法で計算もできるがチェビシェフ多項式展開の項数の増加と共に精度が悪化するため、ここでは次の方法を用いて直接中立曲線を計算した。まず $\sigma_j^{(1)}$ に対応する複素位相速度 c を次のように定義をおこなう。

$$c_j^{(1)} = \frac{i\sigma_j^{(1)}}{\alpha},$$

次に関数 \mathcal{G} を次のように定義する、

$$\mathcal{G}(\chi_j^{(1)}, \alpha, G; c_j^{(1)}) = -i\alpha c_j^{(1)} M_j \chi_j^{(1)} - L_j \chi_j^{(1)} = 0.$$

$\chi_j^{(1)}$ は次のように展開を行い、

$$\chi_j^{(1)} = \bar{\chi}_j^{(1)} + \delta\chi_j^{(1)}.$$

関数 \mathcal{G} を $\bar{\chi}_j^{(1)}$ のまわりで展開すれば、

$$\mathcal{G}(\bar{\chi} + \delta\chi, \alpha, G; c_j^{(1)}) = \mathcal{G}(\bar{\chi}, \alpha, G; c_j^{(1)}) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \chi}(\bar{\chi}, \alpha, G; c_j^{(1)}) \cdot \delta\chi + O(|\delta\chi|^2), \quad (20)$$

を得る。式 (20) を線形化すると、

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \chi}(\bar{\chi}, \alpha, G; c_j^{(1)}) \cdot \delta\chi = -\mathcal{G}(\bar{\chi}, \alpha, G; c_j^{(1)}), \quad (21)$$

が導出される。式 (21) をガウス消去法を用いて解くことにより指定した α に対して $G, \text{Re}[c]$, もしくは指定した G に対して $\alpha, \text{Re}[c]$ をもとめることにより中立曲線上の点を決定した。

3.3 中立曲線

線形安定性解析により中立曲線を計算すると次のようになった。

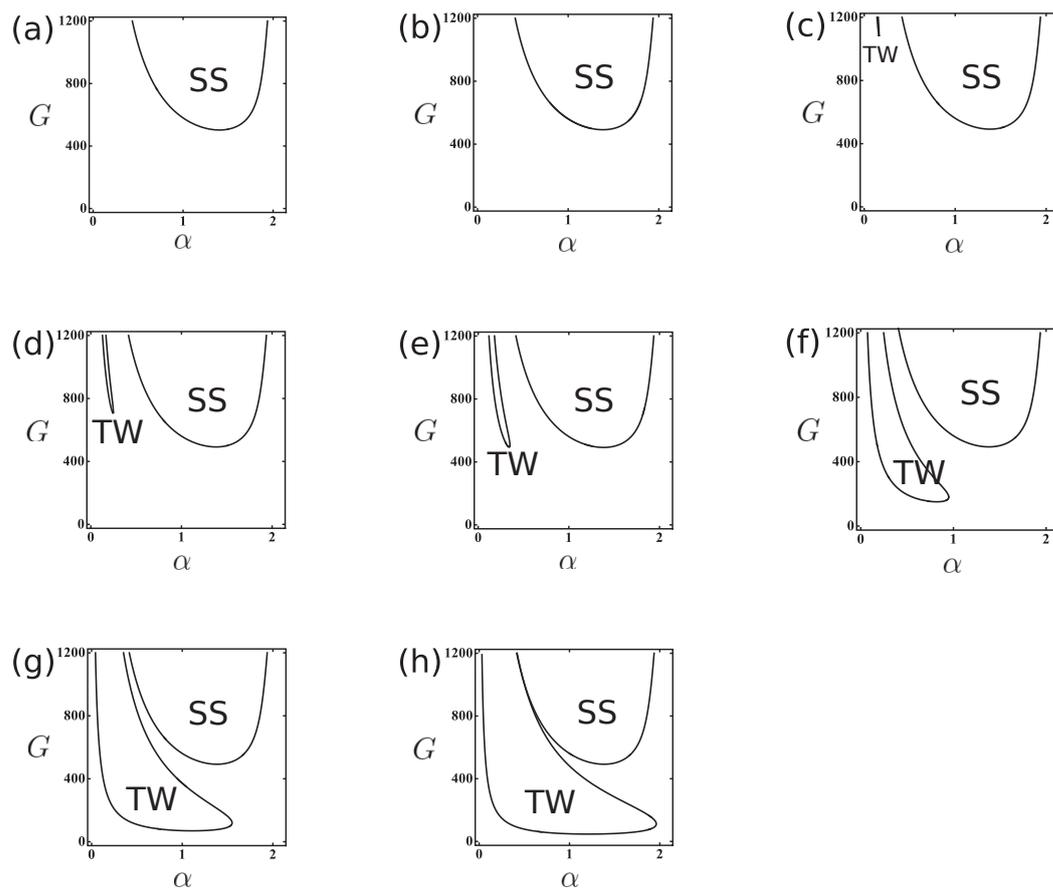


Figure 2: 中立曲線. (a) は $P = 0.7$, (b) は $P = 7$, (c) は $P = 11.75$, (d) は $P = 12$, (e) は $P = 12.45$, (f) は $P = 20$, (g) は $P = 50$, (h) は $P = 100$.

SS は定常攪乱 (定常ロール構造) に対する中立曲線, TW は伝播波攪乱に対する中立曲線を示している. 伝播波攪乱に対する中立曲線は 1 本に見えるが, 実際には鉛直上向き伝播波攪乱と下向き伝播波攪乱の中立曲線を表している 2 本の中立曲線が重なっている. これは原点に対する反転対称性. すなわち原点周りの π の回転に対する不変性によるものである. $P = 0.7, 7$ の場合には定常攪乱による中立曲線しか存在しない, しかしながら $P \geq 11.75$ の場合には伝播波攪乱と定常攪乱による 2 本の中立曲線が $G < 1200$ の領域に存在する. $P = 12.45$ より小さい場合には, 熱伝導状態が定常攪乱に対して不安定となり, $P = 12.45$ より大きい場合には熱伝導状態が伝播波攪乱に対して不安定になることがわかる. $P = 12.45$ では Gr の上昇に伴い熱伝導状態が定常攪乱と伝播波攪乱に対して同時に不安定となる.

3.4 弱非線形解析

弱非線形解析では線形安定性解析では解析できない, 準臨界領域もしくは準中立領域, すなわち, 臨界点の近傍もしくは中立曲線の近傍における攪乱の非線形発展と分岐構造を扱うことが可能である. しかしながら, 弱非線形解析の名の通り臨界点の近傍でのみ正しい議論ができる解析方法であるため, 臨界点から遠い強非線形領域に於いては取り扱いが行えない. ここでは中心多様体低減を用いて弱非線形解析をおこなう. 中心多様体低減は平たく言えば, 有限高次元常微分方程式をより次元の低い有限次元常微分方程式に数学的に矛盾なく帰着させる摂動法の一つである. 元の方程式が無限次元常微分方程式でも臨界点の近傍では, 有効な変数は限られている場合があり, そのような領域では有限次元常微分方程式に落とし込める. 他の摂動法である, 多重尺度法や漸減摂動法等と異なり, 数学的にも中心多様体定理としてバックグラウンドが確立されているため扱い易い. しかしながら, 多重尺度法や漸減摂動法が適用可能である包絡線方程式への低減に関しては厳密な意味では取り扱うことができない.

Figure 2(e) の $P = 12.45$ では, Hopf モードと定常モードに対する中立曲線の G の極小値がほとんど同じ値になる. この G の極小値が完全に一致するのは前述した通り $P_* = 12.45425644$ の場合である. $P = P_*$ の場合の Hopf モードと定常モードに対する臨界波数は (Figure 2(e) の TW の中立曲線の臨界波数に相当),

$$\alpha_H = 0.342411$$

$$\alpha_S = 1.383148$$

である. このとき α_H, α_S は伝播波と定常攪乱に対する臨界波数である. 今回の研究の目的は, Hopf/定常が 1:4 の共鳴相互作用をした結果どのような解が安定になるのかを調べることである. 実際に, $4\alpha_H$ と α_S , またその差, 及び差を波数で割ったものは次のようになる.

$$\frac{|4\alpha_H - \alpha_S|}{\alpha_S} = 0.009763$$

差を波数で割った値は 0.9763% であり, 共鳴条件からのずれ (detuning) は十分に小さい. すなわち, 波数比が 1:4 の近共鳴が生じるが, 本論文では簡単のために 1:4 共鳴が厳密に生じるとして解析を行う. 中心多様体定理にもとづく低減を行うために, まず解をフーリエ-固有関数展開して非線形偏微分方程式である (16) から無限次元力学系を導出する.

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(x, z, t) = & A_1^{(0)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(0)}(x) + A_1^{(1)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(1)}(x) + A_4^{(1)}(t)e^{4i\alpha cz}\Phi_4^{(1)}(x) \\ & + A_{-1}^{(0)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(0)}(x) + A_{-1}^{(1)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(1)}(x) + A_{-4}^{(1)}e^{-4i\alpha cz}\Phi_{-4}^{(1)}(x) \\ & + \sum_{k=\pm 1; m \geq 2} A_k^{(m)} e^{ik\alpha cz}\Phi_k^{(m)}(x) + \sum_{l=\pm 4; m \geq 2} A_l^{(m)} e^{il\alpha cz}\Phi_l^{(m)}(x) \\ & + \sum_{j \neq \pm 1, \pm 4; m \geq 1} A_j^{(m)} e^{ija cz}\Phi_j^{(m)}(x), \end{aligned} \quad (22)$$

$A_b^{(a)}$ と $\Phi_b^{(a)}$ の下添え字はフーリエモード数, 括弧内の上添え字は固有関数の次数を意味している. この展開において Hopf モードの振幅は $A_1^{(0)}, A_1^{(1)}$, 定常モードの振幅は $A_4^{(1)}$ である. $\phi_1^{(0)}, \phi_1^{(1)}$ は Hopf モードの第 1, 第 2 固有関数, $\phi_1^{(4)}$ は定常モードの第 1 線形固有関数である. 式 (22) を時間発展方程式 (16) にそのまま代入すれば,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S} + \mathcal{L} \right] \left(A_1^{(0)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(0)}(x) + A_1^{(1)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(1)}(x) + A_4^{(1)}(t)e^{4i\alpha cz}\Phi_4^{(1)}(x) \right. \\ & + A_{-1}^{(0)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(0)}(x) + A_{-1}^{(1)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(1)}(x) + A_{-4}^{(1)}e^{-4i\alpha cz}\Phi_{-4}^{(1)}(x) \\ & + \sum_{k=\pm 1; m \geq 2} A_k^{(m)} e^{ik\alpha cz}\Phi_k^{(m)}(x) + \sum_{l=\pm 4; m \geq 2} A_l^{(m)} e^{il\alpha cz}\Phi_l^{(m)}(x) + \left. \sum_{j \neq \pm 1, \pm 4; m \geq 1} A_j^{(m)} e^{ija cz}\Phi_j^{(m)}(x) \right) \\ & = \mathcal{N} \left(A_1^{(0)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(0)}(x) + A_1^{(1)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(1)}(x) + A_4^{(1)}(t)e^{4i\alpha cz}\Phi_4^{(1)}(x) \right. \\ & + A_{-1}^{(0)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(0)}(x) + A_{-1}^{(1)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(1)}(x) + A_{-4}^{(1)}e^{-4i\alpha cz}\Phi_{-4}^{(1)}(x) \\ & + \sum_{k=\pm 1; m \geq 2} A_k^{(m)} e^{ik\alpha cz}\Phi_k^{(m)}(x) + \sum_{l=\pm 4; m \geq 2} A_l^{(m)} e^{il\alpha cz}\Phi_l^{(m)}(x) + \sum_{j \neq \pm 1, \pm 4; m \geq 1} A_j^{(m)} e^{ija cz}\Phi_j^{(m)}(x), \\ & A_1^{(0)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(0)}(x) + A_1^{(1)}(t)e^{i\alpha cz}\Phi_1^{(1)}(x) + A_4^{(1)}(t)e^{4i\alpha cz}\Phi_4^{(1)}(x) \\ & + A_{-1}^{(0)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(0)}(x) + A_{-1}^{(1)}e^{-i\alpha cz}\Phi_{-1}^{(1)}(x) + A_{-4}^{(1)}e^{-4i\alpha cz}\Phi_{-4}^{(1)}(x) \\ & \left. + \sum_{k=\pm 1; m \geq 2} A_k^{(m)} e^{ik\alpha cz}\Phi_k^{(m)}(x) + \sum_{l=\pm 4; m \geq 2} A_l^{(m)} e^{il\alpha cz}\Phi_l^{(m)}(x) + \sum_{j \neq \pm 1, \pm 4; m \geq 1} A_j^{(m)} e^{ija cz}\Phi_j^{(m)}(x) \right) \end{aligned}$$

となる方程式が得られる. $j \neq j', m \neq m'$ を満たす固有関数 $\Phi_j^{(m)}$ と $\Phi_{j'}^{(m')}$ 間の内積 $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 q^* p dx$ は一般に 0 にならず固有関数同士が直交していない間に直交関係が成立しない. これは, \mathcal{L} が非自己随伴作用素であることによる. 一方で固有関数 $\Phi_j^{(m)}$ は随伴関数 $\Phi_{j'}^{(m')\dagger}$ と直交する.(Appendix A.1 を参照) この随伴関数との内積を用いることにより次の振幅方程式が導出される.

$$\frac{dA_j^{(m)}}{dt} = \sigma_j^{(m)} A_j^{(m)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,j-p}^{(m,u,v)} A_p^{(u)} A_{j-p}^{(v)}$$

係数 $\sigma_j^{(m)}, \lambda_{p,j-p}^{(m,u,v)}$ は次の式で定義される係数である.

$$\sigma_j^{(m)} = -\frac{\langle \tilde{\phi}_j^{(m)}, L_j \phi_j^{(m)} \rangle}{\langle \tilde{\phi}_j^{(m)}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle},$$

$$\lambda_{p,j-p}^{(m,u,v)} = \frac{\langle \tilde{\phi}_j^{(m)}, N(\phi_p^{(u)}, \phi_{j-p}^{(v)}) + (1 - \delta_{u,v} \delta_{p,j-p}) N(\phi_{j-p}^{(v)}, \phi_p^{(u)}) \rangle}{\langle \tilde{\phi}_j^{(m)}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle},$$

この無限次元振幅方程式のうち, 中心モードに対応している変数 $A_1^{(0)}, A_{-1}^{(0)}, A_1^{(1)}, A_{-1}^{(1)}, A_4^{(1)}, A_{-4}^{(1)}$ の振幅方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{dA_1^{(0)}}{dt} &= \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,1-p}^{(0,u,v)} A_p^{(u)} A_{1-p}^{(v)}, \\ \frac{dA_{-1}^{(0)}}{dt} &= \sigma_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,-1-p}^{(0,u,v)} A_p^{(u)} A_{-1-p}^{(v)}, \\ \frac{dA_1^{(1)}}{dt} &= \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,1-p}^{(1,u,v)} A_p^{(u)} A_{1-p}^{(v)}, \\ \frac{dA_{-1}^{(1)}}{dt} &= \sigma_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,-1-p}^{(1,u,v)} A_p^{(u)} A_{-1-p}^{(v)}, \\ \frac{dA_4^{(1)}}{dt} &= \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,4-p}^{(1,u,v)} A_p^{(u)} A_{4-p}^{(v)}, \\ \frac{dA_{-4}^{(1)}}{dt} &= \sigma_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,-4-p}^{(1,u,v)} A_p^{(u)} A_{-4-p}^{(v)}, \end{aligned}$$

である. 中心多様体の存在を仮定すれば $A_j^{(m)}$ は, 中心モードの変数 $A_1^{(0)}, A_{-1}^{(0)}, A_1^{(1)}, A_{-1}^{(1)}, A_4^{(1)}, A_{-4}^{(1)}$ によって記述される.

$$A_j^{(m)} = \bar{h}_j^{(m)}(A_1^{(0)}, A_{-1}^{(0)}, A_1^{(1)}, A_{-1}^{(1)}, A_4^{(1)}, A_{-4}^{(1)}), \quad (23)$$

中心多様体での原点において $\bar{h}_j^{(m)}, d\bar{h}_j^{(m)}$ は,

$$\begin{aligned} \bar{h}_j^{(m)}(0, 0, 0, 0, 0, 0) &= 0, \\ d\bar{h}_j^{(m)}(0, 0, 0, 0, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

である. $\bar{h}_j^{(m)}, d\bar{h}_j^{(m)}$ を中心多様体の原点を中心として展開を行うと次のようになる.

$$\begin{aligned}
\bar{h}_j^{(m)} = & \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} \\
& + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
& + \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} \\
& + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \\
& + \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& + \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} + \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
& + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \\
& + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + res.
\end{aligned}$$

ここでは便宜上 $\bar{h}_j^{(m)}$ の二次の近似した関数 $h_j^{(m)}$ を導入する. この関数は次のように定義される.

$$\begin{aligned}
h_j^{(m)} = & \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} \\
& + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
& + \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} \\
& + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \\
& + \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& + \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} + \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(1)}
\end{aligned}$$

ここで係数 $\gamma_{p,j-p}^{(m,\alpha,\beta)}, \kappa_{p,q,j-p-q}^{(m,\alpha,\beta,\delta)}$ は次の式で定義される. (γ や κ は体積膨張率や温度拡散率とは関係はないことに注意する)

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,j-p}^{(m,\alpha,\beta)} &= \frac{\lambda_{p,j-p}^{(m,\alpha,\beta)}}{\sigma_p^{(\alpha)} + \sigma_{j-p}^{(\beta)} - \sigma_j^{(m)}}, \\
\kappa_{p,q,j-p-q}^{(m,\alpha,\beta,\delta)} &= \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda_{p,j-p}^{(m,\alpha,k)} \gamma_{q,j-p-q}^{(k,\beta,\delta)} + \lambda_{q,j-q}^{(m,\beta,k)} \gamma_{p,j-p-q}^{(k,\alpha,\delta)} + \lambda_{j-p-q,p+q}^{(m,\delta,k)} \gamma_{p,q}^{(k,\alpha,\beta)}}{\sigma_p^{(\alpha)} + \sigma_q^{(\beta)} + \sigma_{j-p-q}^{(\delta)} - \sigma_j^{(m)}}
\end{aligned}$$

式中最後の res は残りの三次項と四次項以上の微小量のことである. E_+, E_-, E を次のように定義した場合,

$$\begin{aligned} E_+ &= e^{i\alpha_c z - \sigma t}, \\ E_- &= e^{-i\alpha_c z - \sigma t}, \\ E &= e^{4i\alpha_c z}. \end{aligned} \quad (24)$$

2つの(二次の)中心モードのフーリエ成分の組み合わせは次のようになる.

$$\begin{aligned} &E_+^2, |E_+|^2, \bar{E}_+^2, E_-^2, |E_-|^2, \bar{E}_-^2, E^2, |E|^2, \bar{E}^2, E_+E_-, E_+E, E_-E, \\ &\bar{E}_+E_-, \bar{E}_+E, E_+\bar{E}_-, \bar{E}_-E, \bar{E}_+\bar{E}_-, \bar{E}_+\bar{E}, \bar{E}_-\bar{E}, E_+\bar{E}, E_-\bar{E}, \end{aligned} \quad (25)$$

ここで E_+, E_- は Hopf モード, E は定常モードに対応している. この中で例えば E_+^2 は, 式(24)よりフーリエの次数2をもちまた Hopf モードのうち位相がプラスの振幅 $A_1^{(0)} A_1^{(0)}$ に対応している. そのため, 関数 $h_j^{(m)}$ のうちの一つの成分とみなすことができる. この操作を全ての式(25)についておこなうことによって, 中心モードを記述するために必要な二次の関数 $h_j^{(m)}$ は, 次のものだけあれば良いことがわかる.

$$\begin{aligned} h_2^{(m)} &= \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)}, \\ h_0^{(m)} &= \gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_4^{(1)}, \\ h_{-2}^{(m)} &= \gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)}, \\ h_8^{(m)} &= \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_4^{(1)}, \quad h_{-8}^{(m)} = \gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)}, \\ h_5^{(m)} &= \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)}, \quad h_3^{(m)} = \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)}, \\ h_{-3}^{(m)} &= \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} + \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)}, \quad h_{-5}^{(m)} = \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (26)$$

これらの関数 $h_j^{(m)}$ について中心モードの変数で偏微分した結果を次に示す.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} &= 2\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(1)}, & \frac{\partial h_2^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} &= \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} + 2\gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)}, \\ \frac{\partial h_0^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} &= \gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)}, & \frac{\partial h_0^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} &= \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)}, \\ \frac{\partial h_0^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} &= \gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(1)}, & \frac{\partial h_0^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} &= \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)}, \\ \frac{\partial h_{-2}^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} &= 2\gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(1)}, & \frac{\partial h_{-2}^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} &= \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} + 2\gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_8^{(1)}}{\partial A_4^{(1)}} &= 2\gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)}, & \frac{\partial h_0^{(m)}}{\partial A_4^{(1)}} &= \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)}, \\
\frac{\partial h_0^{(m)}}{\partial A_{-4}^{(1)}} &= \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)}, & \frac{\partial h_{-8}^{(m)}}{\partial A_{-4}^{(1)}} &= 2\gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)}, \\
\frac{\partial h_5^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} &= \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_4^{(1)}, & \frac{\partial h_5^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} &= \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)}, & \frac{\partial h_5^{(m)}}{\partial A_4^{(1)}} &= \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)}, \\
\frac{\partial h_3^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} &= \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_4^{(1)}, & \frac{\partial h_3^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} &= \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)}, & \frac{\partial h_3^{(m)}}{\partial A_4^{(1)}} &= \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)}, \\
\frac{\partial h_{-3}^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} &= \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)}, & \frac{\partial h_{-3}^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} &= \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)}, & \frac{\partial h_{-3}^{(m)}}{\partial A_{-4}^{(1)}} &= \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)}, \\
\frac{\partial h_{-5}^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} &= \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)}, & \frac{\partial h_{-5}^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} &= \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)}, \\
\frac{\partial h_{-5}^{(m)}}{\partial A_{-4}^{(1)}} &= \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_j^{(m)}}{dt} &= \sigma_j^{(m)} A_j^{(m)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,j-p}^{(m,u,v)} A_p^{(u)} A_{j-p}^{(v)}, \\
\frac{dA_{-j}^{(m)}}{dt} &= \sigma_{-j}^{(m)} A_{-j}^{(m)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,-j-p}^{(m,u,v)} A_p^{(u)} A_{-j-p}^{(v)},
\end{aligned} \tag{28}$$

式 (26) を式 (23) に代入したもの式を式 (29) に代入する. 一方で,

$$\begin{aligned}
\frac{dA_l^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial h_l^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} \frac{dA_1^{(0)}}{dt} + \frac{\partial h_l^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} \frac{dA_{-1}^{(0)}}{dt} + \frac{\partial h_l^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} \frac{dA_1^{(1)}}{dt} + \frac{\partial h_l^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} \frac{dA_{-1}^{(1)}}{dt} \\
&+ \frac{\partial h_l^{(m)}}{\partial A_4^{(1)}} \frac{dA_4^{(1)}}{dt} + \frac{\partial h_l^{(m)}}{\partial A_{-4}^{(1)}} \frac{dA_{-4}^{(1)}}{dt}
\end{aligned} \tag{29}$$

式 (27) を, 次の方程式 (29) に代入をすることにより, 係数 $\gamma_{1,1}^{(m,0,0)}$, $\gamma_{1,1}^{(m,0,1)}$, $\gamma_{1,1}^{(m,1,1)}$ が導出される.

$$\begin{aligned}
\frac{dA_2^{(m)}}{dt} &= \sigma_2^{(m)} \left[\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right] \\
&+ \lambda_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \lambda_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \lambda_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + O(3) \\
&= \left[2\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(1)} \right] \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \left[\gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} + 2\gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} \right] \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + O(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} &= \frac{\lambda_{1,1}^{(m,0,0)}}{2\sigma_1^{(0)} - \sigma_2^{(m)}}, \\ \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} &= \frac{\lambda_{1,1}^{(m,0,1)}}{\sigma_1^{(0)} + \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(m)}}, \\ \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{1,1}^{(m,1,1)}}{2\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(m)}}.\end{aligned}$$

以降同様の操作によって係数

$$\begin{aligned}&\gamma_{-1,1}^{(m,0,0)}, \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)}, \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)}, \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)}, \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)}, \gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)}, \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)}, \gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)}, \gamma_{4,4}^{(m,1,1)}, \gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)}, \gamma_{1,4}^{(m,0,1)}, \gamma_{1,4}^{(m,1,1)}, \\ &\gamma_{-1,4}^{(m,0,1)}, \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)}, \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)}, \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)}, \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)}, \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)}\end{aligned}$$

が決定する.

$$\begin{aligned}\frac{dA_0^{(m)}}{dt} &= \sigma_0^{(m)} \left[\gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_4^{(1)} \right] \\ &\quad + \lambda_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(0)} + \lambda_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_1^{(1)} + \lambda_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(0)} \\ &\quad + \lambda_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_1^{(1)} + \lambda_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_4^{(1)} + O(3) \\ &= \left[\gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \left[\gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} \\ &\quad + \left[\gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \left[\gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\ &\quad + \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} \sigma_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + O(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{-1,1}^{(m,0,0)} &= \frac{\lambda_{-1,1}^{(m,0,0)}}{\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_1^{(0)} - \sigma_0^{(m)}}, \\ \gamma_{-1,1}^{(m,0,1)} &= \frac{\lambda_{-1,1}^{(m,0,1)}}{\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_1^{(1)} - \sigma_0^{(m)}}, \\ \gamma_{-1,1}^{(m,1,0)} &= \frac{\lambda_{-1,1}^{(m,1,0)}}{\sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_1^{(0)} - \sigma_0^{(m)}}, \\ \gamma_{-1,1}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{-1,1}^{(m,1,1)}}{\sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_1^{(1)} - \sigma_0^{(m)}}, \\ \gamma_{-4,4}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{-4,4}^{(m,1,1)}}{\sigma_{-4}^{(1)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_0^{(m)}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{-2}^{(m)}}{dt} &= \sigma_{-2}^{(m)} \left[\gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right] \\
&+ \lambda_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \lambda_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \lambda_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + O(3) \\
&= \left[2\gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \left[\gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} + 2\gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + O(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{-1,-1}^{(m,0,0)} &= \frac{\lambda_{-1,-1}^{(m,0,0)}}{2\sigma_{-1}^{(0)} - \sigma_{-2}^{(m)}}, \\
\gamma_{-1,-1}^{(m,0,1)} &= \frac{\lambda_{-1,-1}^{(m,0,1)}}{\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_{-1}^{(1)} - \sigma_{-2}^{(m)}}, \\
\gamma_{-1,-1}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{-1,-1}^{(m,1,1)}}{2\sigma_{-1}^{(1)} - \sigma_{-2}^{(m)}}.
\end{aligned}$$

$$\frac{dA_8^{(m)}}{dt} = \sigma_8^{(m)} \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_4^{(1)} + O(3) = 2\gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + O(3)$$

$$\gamma_{4,4}^{(m,1,1)} = \frac{\lambda_{4,4}^{(m,1,1)}}{2\sigma_4^{(1)} - \sigma_8^{(m)}}.$$

$$\frac{dA_{-8}^{(m)}}{dt} = \sigma_{-8}^{(m)} \gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + \lambda_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + O(3) = 2\gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} \sigma_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + O(3)$$

$$\gamma_{-4,-4}^{(m,1,1)} = \frac{\lambda_{-4,-4}^{(m,1,1)}}{2\sigma_{-4}^{(1)} - \sigma_{-8}^{(m)}}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_5^{(m)}}{dt} &= \sigma_5^{(m)} \left[\gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} \right] + \lambda_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \lambda_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} + O(3) \\
&= \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_4^{(1)} \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \left[\gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} \right] \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + O(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,4}^{(m,0,1)} &= \frac{\lambda_{1,4}^{(m,0,1)}}{\sigma_1^{(0)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_5^{(m)}}, \\
\gamma_{1,4}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{1,4}^{(m,1,1)}}{\sigma_1^{(1)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_5^{(m)}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_3^{(m)}}{dt} &= \sigma_3^{(m)} \left[\gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right] + \lambda_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + O(3) \\
&= \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_4^{(1)} \sigma_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} \sigma_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \left[\gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + O(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} &= \frac{\lambda_{-1,4}^{(m,0,1)}}{\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_3^{(m)}}, \\ \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{-1,4}^{(m,1,1)}}{\sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_3^{(m)}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dA_{-3}^{(m)}}{dt} &= \sigma_{-3}^{(m)} \left[\gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} + \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)} \right] + \lambda_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} + \lambda_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)} + O(3) \\ &= \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \left[\gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \left[\gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} A_1^{(0)} + \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} \right] \sigma_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + O(3) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} &= \frac{\lambda_{-4,1}^{(m,1,0)}}{\sigma_{-4}^{(1)} + \sigma_1^{(0)} - \sigma_{-3}^{(m)}}, \\ \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{-4,1}^{(m,1,1)}}{\sigma_{-4}^{(1)} + \sigma_1^{(1)} - \sigma_{-3}^{(m)}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dA_{-5}^{(m)}}{dt} &= \sigma_{-5}^{(m)} \left[\gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right] + \lambda_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \lambda_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + O(3) \\ &= \gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-4}^{(1)} \sigma_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-4}^{(1)} \sigma_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \left[\gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} \right] \sigma_{-4}^{(1)} A_{-4}^{(1)} + O(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{-4,-1}^{(m,1,0)} &= \frac{\lambda_{-4,-1}^{(m,1,0)}}{\sigma_{-4}^{(1)} + \sigma_{-1}^{(0)} - \sigma_{-5}^{(m)}}, \\ \gamma_{-4,-1}^{(m,1,1)} &= \frac{\lambda_{-4,-1}^{(m,1,1)}}{\sigma_{-4}^{(1)} + \sigma_{-1}^{(1)} - \sigma_{-5}^{(m)}}.\end{aligned}$$

これらの γ が全て決定されたということは、式 (26) と式 (23) を通じて、

$$A_2^{(m)}, A_0^{(m)}, A_{-2}^{(m)}, A_8^{(m)}, A_5^{(m)}, A_{-3}^{(m)} \quad (30)$$

が決定されたことを意味する. 式 (30) を用いると中心モードの振幅 $A_1^{(0)}, A_1^{(1)}, A_4^{(1)}$ を記述する方程式は,

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1^{(0)}}{dt} &= \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,1-p}^{(0,u,v)} A_p^{(u)} A_{1-p}^{(v)}, \\
&= \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \sum_m \lambda_{2,-1}^{(0,m,0)} \left(\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} \\
&+ \sum_m \lambda_{2,-1}^{(0,m,1)} \left(\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} \\
&+ \sum_m \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_1^{(0)} \\
&+ \sum_m \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_1^{(1)} \\
&+ \sum_m \left(\lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(0,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} \right) A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} \\
&+ \sum_m \left(\lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(0,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} \right) A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1^{(1)}}{dt} &= \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,1-p}^{(1,u,v)} A_p^{(u)} A_{1-p}^{(v)}, \\
&= \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} + \sum_m \lambda_{2,-1}^{(1,m,0)} \left(\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} \\
&+ \sum_m \lambda_{2,-1}^{(1,m,1)} \left(\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} \\
&+ \sum_m \lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_1^{(0)} \\
&+ \sum_m \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_1^{(1)} \\
&+ \sum_m \left(\lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(1,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)} \right) A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(0)} \\
&+ \sum_m \left(\lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(1,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} \right) A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_4^{(1)}}{dt} &= \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + \sum_{p,u,v} \lambda_{p,4-p}^{(1,u,v)} A_p^{(u)} A_{4-p}^{(v)}, \\
&= \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} + \sum_m \lambda_{8,-4}^{(1,m,1)} \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} + \sum_m \lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} A_4^{(1)} \\
&+ \sum_m \lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_4^{(1)} \\
&+ \sum_m \left[\lambda_{1,3}^{(1,0,m)} \left(\gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) A_1^{(0)} \right. \\
&+ \left. \lambda_{1,3}^{(1,1,m)} \left(\gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) A_1^{(1)} \right] \\
&+ \sum_m \left[\lambda_{-1,5}^{(1,0,m)} \left(\gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} \right. \\
&+ \left. \lambda_{-1,5}^{(1,1,m)} \left(\gamma_{1,4}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} \right].
\end{aligned}$$

になる.

次に $\bar{h}_j^{(m)}$ の三次の項を記述する関数 $H_j^{(m)}$ を導入する.

$$\begin{aligned}
H_j^{(m)} &= \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
&+ \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
&+ \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} \\
&+ \kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)}
\end{aligned}$$

3つの(三次の)中心モードのフーリエ成分の組み合わせは,

$$\begin{aligned}
&|E_+|^2 E_+, |E_-|^2 E_+, |E|^2 E_+, |E_+|^2 E_-, |E_-|^2 E_-, |E|^2 E_-, \\
&|E_+|^2 E, |E_-|^2 E, |E|^2 E
\end{aligned}$$

である. この組み合わせにより三次関数 $H_j^{(m)}$ は次のように記述される.

$$\begin{aligned}
H_2^{(m)} &= \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
H_{-3}^{(m)} &= \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
&\quad + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
H_3^{(m)} &= \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \\
&\quad + \kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)}
\end{aligned} \tag{31}$$

中心モードの変数で $H_j^{(m)}$ を偏微分したものは次のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_2^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} &= 2\kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
\frac{\partial H_2^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} &= \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + 2\kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
\frac{\partial H_2^{(m)}}{\partial A_4^{(1)}} &= \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \\
&\quad + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
\frac{\partial H_{-3}^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} &= 3\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + 2\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \\
&\quad + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
\frac{\partial H_{-3}^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} &= \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + 2\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \\
&\quad + 3\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \\
\frac{\partial H_3^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} &= 3\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + 2\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} \\
&\quad + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \\
\frac{\partial H_3^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} &= \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + 2\kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} \\
&\quad + 3\kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)}
\end{aligned} \tag{32}$$

二次項の場合と同じくチェインルールより,

$$\begin{aligned} \frac{dA_l^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial H_l^{(m)}}{\partial A_1^{(0)}} \frac{dA_1^{(0)}}{dt} + \frac{\partial H_l^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(0)}} \frac{dA_{-1}^{(0)}}{dt} + \frac{\partial H_l^{(m)}}{\partial A_1^{(1)}} \frac{dA_1^{(1)}}{dt} + \frac{\partial H_l^{(m)}}{\partial A_{-1}^{(1)}} \frac{dA_{-1}^{(1)}}{dt} \\ &+ \frac{\partial H_l^{(m)}}{\partial A_4^{(1)}} \frac{dA_4^{(1)}}{dt} + \frac{\partial H_l^{(m)}}{\partial A_{-4}^{(1)}} \frac{dA_{-4}^{(1)}}{dt} \end{aligned} \quad (33)$$

が導出される. 振幅 $A_2^{(m)}, A_{-3}^{(m)}, A_3^{(m)}$, に関して三次の関数で記述される場合を仮定すれば, 式 (31) を式 (23) に代入ものと, 式 (32) を式 (33) に代入したものは同じ式になるため, 次のようにして係数 $\kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)}, \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)}, \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)}$ を求めることが可能である.

$$\begin{aligned} \frac{dA_2^{(m)}}{dt} &= \sigma_2^{(m)} \left(\kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) \\ &+ \sum_{j \geq 1} \lambda_{-2,4}^{(m,j,1)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_4^{(1)} \\ &+ \sum_{j \geq 1} \left[\lambda_{-1,3}^{(m,0,j)} \left(\gamma_{-1,4}^{(j,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(j,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} \right. \\ &+ \left. \lambda_{-1,3}^{(m,1,j)} \left(\gamma_{-1,4}^{(j,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,4}^{(j,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} \right] + O(4) \\ &= \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} \left(2\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} \left(\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\ &+ \kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} \left(2\sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_4^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \end{aligned}$$

$$\kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,0,1)} = \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,4}^{(m,j,1)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} + \lambda_{-1,3}^{(m,0,j)} \gamma_{-1,4}^{(j,0,1)}}{2\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_2^{(m)}},$$

$$\kappa_{-1,-1,4}^{(m,1,1,1)} = \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,4}^{(m,j,1)} \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} + \lambda_{-1,3}^{(m,1,j)} \gamma_{-1,4}^{(j,1,1)}}{2\sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_2^{(m)}},$$

$$\kappa_{-1,-1,4}^{(m,0,1,1)} = \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,4}^{(m,j,1)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} + \lambda_{-1,3}^{(m,0,j)} \gamma_{-1,4}^{(j,1,1)} + \lambda_{-1,3}^{(m,1,j)} \gamma_{-1,4}^{(j,0,1)}}{\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_{-1}^{(1)} + \sigma_4^{(1)} - \sigma_2^{(m)}}.$$

全く同様の方法で、他の係数 $\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)}$, $\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)}$, $\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)}$, $\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)}$, $\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)}$, $\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)}$, $\kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)}$, $\kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)}$ についても計算を行いその値を確定する.

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{-3}^{(m)}}{dt} &= \sigma_{-3}^{(m)} \left(\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \right. \\
&+ \left. \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) \\
&+ \sum_{j \geq 1} \lambda_{-2,-1}^{(m,j,0)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} \\
&+ \sum_{j \geq 1} \lambda_{-2,-1}^{(m,j,1)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} + O(4), \\
&= 3\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} \sigma_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} \left(2\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_{-1}^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} \\
&+ \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} \left(\sigma_{-1}^{(0)} + 2\sigma_{-1}^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + 3\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)} \sigma_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} + O(4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,-1}^{(m,j,0)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)}}{3\sigma_{-1}^{(0)} - \sigma_{-3}^{(m)}}, \\
\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,-1}^{(m,j,0)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} + \lambda_{-2,-1}^{(m,j,1)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)}}{2\sigma_{-1}^{(0)} + \sigma_{-1}^{(1)} - \sigma_{-3}^{(m)}}, \\
\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,-1}^{(m,j,0)} \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} + \lambda_{-2,-1}^{(m,j,1)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)}}{\sigma_{-1}^{(0)} + 2\sigma_{-1}^{(1)} - \sigma_{-3}^{(m)}}, \\
\kappa_{-1,-1,-1}^{(m,1,1,1)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{-2,-1}^{(m,j,1)} \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)}}{3\sigma_{-1}^{(1)} - \sigma_{-3}^{(m)}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_3^{(m)}}{dt} &= \sigma_3^{(m)} \left(\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} \right. \\
&+ \left. \kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) \\
&+ \sum_{j \geq 1} \lambda_{1,2}^{(m,0,j)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_1^{(0)} \\
&+ \sum_{j \geq 1} \lambda_{1,2}^{(m,1,j)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_1^{(1)} + O(4) \\
&= 3\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)} \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} \left(2\sigma_1^{(0)} + \sigma_1^{(1)} \right) A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} \\
&+ \kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} \left(\sigma_1^{(0)} + 2\sigma_1^{(1)} \right) A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + 3\kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)} \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + O(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,0)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{1,2}^{(m,0,j)} \gamma_{1,1}^{(j,0,0)}}{3\sigma_1^{(0)} - \sigma_3^{(m)}}, \\
\kappa_{1,1,1}^{(m,0,0,1)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{1,2}^{(m,0,j)} \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} + \lambda_{1,2}^{(m,1,j)} \gamma_{1,1}^{(j,0,0)}}{2\sigma_1^{(0)} + \sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(m)}}, \\
\kappa_{1,1,1}^{(m,0,1,1)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{1,2}^{(m,0,j)} \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} + \lambda_{1,2}^{(m,1,j)} \gamma_{1,1}^{(j,0,1)}}{\sigma_1^{(0)} + 2\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(m)}}, \\
\kappa_{1,1,1}^{(m,1,1,1)} &= \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda_{1,2}^{(m,1,j)} \gamma_{1,1}^{(j,1,1)}}{3\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(m)}}.
\end{aligned}$$

最後に 4 次の近似により振幅方程式が導出される.

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1^{(0)}}{dt} &= \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right. \\
&+ \lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
&+ \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
&+ \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
&+ \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \Big) \\
&+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{-2,3}^{(0,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right. \right. \\
&+ \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
&\left. \left. + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) \right], \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1^{(1)}}{dt} = & \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right. \\
& + \lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,0,0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,1,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \Big) \\
& + \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{-2,3}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right. \right. \\
& + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \\
& \left. \left. + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} A_{-1}^{(0)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_{-1}^{(1)} A_4^{(1)} \right) \right], \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dA_4^{(1)}}{dt} &= \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} \right. \\
&+ \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,1,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \\
&+ \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \\
&+ \left. \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,1,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) \\
&+ \sum_{j \leq k} \left[\lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) \right] \\
&+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right. \right. \\
&+ \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \\
&+ \left. \left. \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) \right]. \quad (36)
\end{aligned}$$

(34), (35), (36) には, 不適切な時間依存性を示す項が多数含まれている. たとえば, (36) 右辺第 1 項の $A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)}$ は $e^{-4i\omega t}$ に比例した振動的な振る舞いを意味するが, 左辺の $A_4^{(1)}$ は明らかに定常モードの時間発展を意味している. こういった項は近恒等変換を用いることで除去することができる. (具体的な近恒等変換については Appendix A.2 参照) 近恒等変換の結果求められた振幅方程式は 4 次までの近似で打ち切ると次の式になる.

$$\begin{aligned}
\frac{ds_0}{dt} &= \sigma_1 s_0 + (\mu_{1,1}|s_0|^2 + \mu_{1,2}|s_1|^2 + \mu_{1,3}|s_4|^2) s_0 + \nu_1 \bar{s}_0 \bar{s}_1^2 s_4, \\
\frac{ds_1}{dt} &= \sigma_2 s_1 + (\mu_{2,1}|s_0|^2 + \mu_{2,2}|s_1|^2 + \mu_{2,3}|s_4|^2) s_1 + \nu_2 \bar{s}_0^2 \bar{s}_1 s_4, \\
\frac{ds_4}{dt} &= \sigma_3 s_4 + (\mu_{3,1}|s_0|^2 + \mu_{3,2}|s_1|^2 + \mu_{3,3}|s_4|^2) s_4 + \nu_3 s_0^2 s_1^2.
\end{aligned}$$

Golubitsky, Stewart, Schaeffer[14] と Hill and Stewart[18] が用いた表記に従い

$$(s_0, s_1, s_4) \rightarrow (\zeta_0, \zeta_1, \bar{\zeta}_2),$$

のように再変換を行う。ただし,

$$\zeta_0 = z_0, \quad \zeta_1 = z_1 e^{i(1+\tau)\hat{t}}, \quad \zeta_2 = z_2 e^{i(1+\tau)\hat{t}}$$

である。Birkhoff ノーマルフォームの 4 次の近似による振幅方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_0}{dt} &= \sigma_4 \zeta_0 + (\mu_{3,1} |\zeta_2|^2 + \mu_{3,2} |\zeta_1|^2 + \mu_{3,3} |\zeta_0|^2) \zeta_0 + \nu_3 \zeta_1^2 \bar{\zeta}_2, \\ \frac{d\zeta_1}{dt} &= \sigma_2 \zeta_1 + (\mu_{2,1} |\zeta_2|^2 + \mu_{2,2} |\zeta_1|^2 + \mu_{2,3} |\zeta_0|^2) \zeta_1 + \nu_2 \bar{\zeta}_1 \zeta_2^2 \zeta_0, \\ \frac{d\zeta_2}{dt} &= \bar{\sigma}_1 \zeta_2 + (\bar{\mu}_{1,1} |\zeta_2|^2 + \bar{\mu}_{1,2} |\zeta_1|^2 + \bar{\mu}_{1,3} |\zeta_0|^2) \zeta_2 + \bar{\nu}_1 \zeta_1^2 \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_1, \mu_{2,1} = \bar{\mu}_{1,2}, \mu_{2,2} = \bar{\mu}_{1,1}, \mu_{2,3} = \bar{\mu}_{1,3}, \mu_{3,2} = \bar{\mu}_{3,1}, \nu_2 = \bar{\nu}_1, \quad (38)$$

但し $\sigma_4, \mu_{3,3}, \nu_3 \in \mathbb{R}$ である。

3.5 振幅方程式の解

ここでは $\hat{t} = \omega_c t$ により時間スケールの変換を行う。 ω_c は Hopf 分岐の臨界周波数 $\omega_c = \omega(G_c)$ である。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_k &= \frac{\sigma_k}{\omega_c}, \\ \hat{\mu}_{l,m} &= \frac{\mu_{l,m}}{\omega_c}, \\ \hat{\nu}_n &= \frac{\nu_n}{\omega_c}. \end{aligned}$$

振幅方程式 (38) は次の不変部分空間を有する。

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{C}\{(0, 0, 1)\}, I'_1 = \mathbb{C}\{(1, 0, 0)\} \text{ or } \mathbb{C}\{(0, 1, 0)\}, \\ I_2 &= \mathbb{C}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \text{ or } \mathbb{C}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \\ I_3 &= \mathbb{C}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

ここで $\zeta_0 = z_0$ と $\zeta_j = z_j e^{i(1+\tau)\hat{t}}$ ($j = 1, 2$) と仮定する。 τ は周期を記述するスケールパラメータである。微小パラメータ ϵ を次のように導入する。

$$\epsilon = \frac{G - G_c}{G_c}.$$

周期を記述するパラメータ τ は,

$$\tau = \tau(\epsilon) = O(\epsilon),$$

と仮定する. ここではのちの利便性のため次のようにおく. $\kappa_0 = \hat{\sigma}_4 \in \mathcal{R}$ と $\kappa_2 = \text{Re}\hat{\sigma}_2 \in \mathcal{R}$ 方程式 (37) の解としては次のものが存在する.

1. 自明解 (T) : $(z_1, z_2, z_0) = (0, 0, 0)$
2. 定常解 (SS) : $(z_1, z_2, z_0) = (0, 0, r_0) \in I_1$
3. 伝播波 (TW) : $(z_1, z_2, z_0) = (r_1 e^{i\theta_1 \hat{t}}, 0, 0) \in I'_1$
4. 二次元非対称混合モード (AM₂): $(z_1, z_2, z_0) = (r_1 e^{i\theta_1 \hat{t}}, 0, r_0 e^{i\theta_0 \hat{t}}) \in I_2$
5. 三次元混合モード $(z_1, z_2, z_0) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, r_0 e^{i\theta_0}) \in I_3$
 - (a) 対称混合モード (SM) : $(r_1 = r_2 \neq 0, r_0 \neq 0, \Theta = n\pi)$ ここで Θ は $\Theta(t) = 2\theta_1 - 2\theta_2 - \theta_0$ で定義される位相差である.
 - (b) 三次元非対称混合モード (AM₃) : $(r_1 \neq r_2, r_1 r_2 r_0 \neq 0, \Theta \neq n\pi)$

解 2,3,4,5(a),5(b) 及びそれらの安定条件は Appendix A.3 で述べることにする.

3.6 振幅方程式の係数の収束性 (元は数値計算)

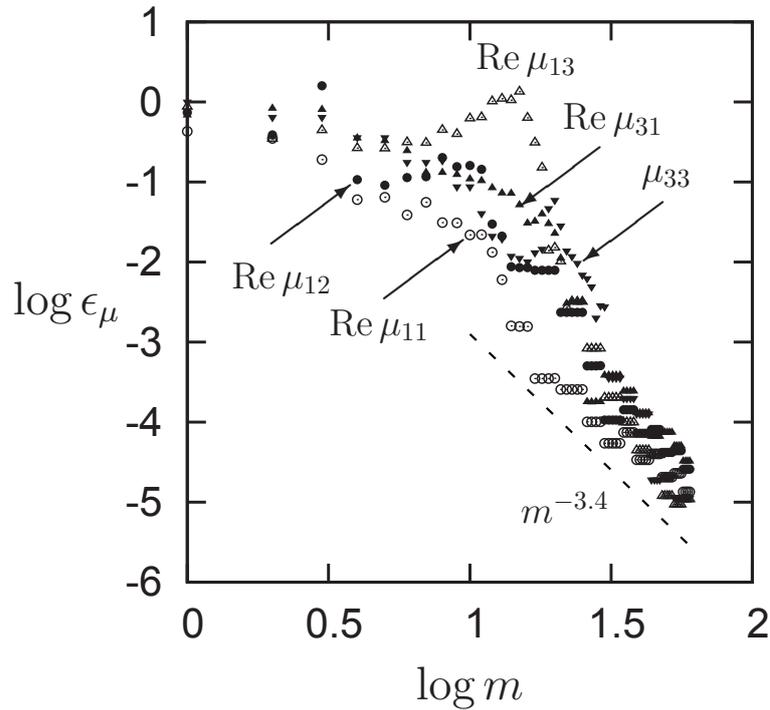


Figure 3: 振幅方程式の各係数 $\text{Re } \mu_{1,1}$, $\text{Re } \mu_{1,2}$, $\text{Re } \mu_{1,3}$, $\text{Re } \mu_{3,1}$, $\text{Re } \mu_{3,3}$ における収束の様子. m は固有関数展開の打ち切り項数.

Table 1: 多重尺度法と中心多様体低減の係数の比較. 係数は $P = P_*, G = G^*, \alpha = \alpha_c^{(H)}, \alpha = 4\alpha_c^{(H)}$ の値を用い数値計算はチェビシェフ展開項数=180, 固有関数展開項数=60 で評価.

係数	多重尺度法		中心多様体低減	
	実部	虚部	実数	虚数
$\mu_{1,1}$	-2.91750×10^2	2.13535×10^2	-2.91748×10^2	2.13539×10^2
$\mu_{1,2}$	3.28426×10^1	-1.87620×10^1	3.28424×10^1	-1.87629×10^1
$\mu_{1,3}$	1.02969×10^3	2.40807×10^3	1.03118×10^3	2.42165×10^3
$\mu_{2,1}$	3.28426×10^1	1.87620×10^1	3.28424×10^1	1.87629×10^1
$\mu_{2,2}$	-2.91750×10^2	-2.13535×10^2	-2.91748×10^2	-2.13539×10^2
$\mu_{2,3}$	1.02969×10^3	-2.40807×10^3	1.03120×10^3	-2.42164×10^3
$\mu_{3,1}$	4.83742×10^2	5.51502×10^2	4.83716×10^2	5.51503×10^2
$\mu_{3,2}$	4.83742×10^2	-5.51502×10^2	4.83717×10^2	-5.51502×10^2
$\mu_{3,3}$	-2.06686×10^4	0	-2.07171×10^4	0
ν_1			4.66580×10^4	-1.06090×10^4
ν_2			4.66574×10^4	1.06115×10^4
ν_3			-5.08996×10^3	0

Figure 3 は振幅方程式の各係数 $\text{Re } \mu_{1,1}, \text{Re } \mu_{1,1}, \text{Re } \mu_{1,3}, \text{Re } \mu_{3,1}, \text{Re } \mu_{3,3}$ を正しく評価するにはどれほど固有関数展開の項数 m をとればよいのかを示した図である. Figure 3 の点線は $m^{-3.4}$ の傾きを示している.

中心多様体低減によれば, 固有関数展開の収束性は極めて重要である. Figure 3 は打ち切り項数 m の増加と共に急速に収束する様子を紹介している. ここでは相対誤差 ϵ_μ を次のように定義する.

$$\epsilon_\mu = \frac{|\text{Re}\mu^{cm} - \text{Re}\mu^{ms}|}{|\text{Re}\mu^{ms}|} \quad (39)$$

ここで μ^{cm} は中心多様体低減によって得られる係数値, また, μ^{ms} は Fujimura と Mizushima[10], Fujimura[12] によって求められた多重尺度法にもとづく値である. Fujimura[19] の研究によれば, 鉛直スロット内の自然対流では, $P = 0$ の場合 $m^{-3.4}$ であった. 打ち切りが $m = 60$ の場合のデータを Table1 に掲載した. この結果から多重尺度法及び中心多様体低減の係数値は元の値に対して 10^{-2} の程度の差をもつことがわかる. これは固有関数展開がまだ十分に収束しきっていないことを意味する.

3.7 分岐図

Hopf/定常モード間の相互作用は余次元 2 の問題である. そのために分岐の構造を知るために 2 つのパラメーターが必要である. このような観点のもと, 極形式のパラメーターを導入する.

$$\kappa_2 = R \cos \varphi, \kappa_0 = R \sin \varphi \quad (40)$$

ただし, $-0.75\pi < \phi < 1.25\pi$. Figure 4 は典型的な $R = 10^{-2}$ の場合の分岐図である. この分岐図では, 太い線でかつ括弧がない解分枝は安定であり, 細い線でかつ括弧の表記がない解分枝は不安定である. 分岐点は点で示している. また分岐図が入り組んで煩雑になるのを避けるために, リミットポイントは点で表記していない. 自明解の分枝から $\phi = 0$ で分岐した定常状態 SS の分枝は自明解の $\phi = \pi$ で終わる. TW の解分枝は自明解の $\phi = -\pi/2$ より分岐し再び自明解上の $\phi = \pi/2$ で終わる. 2次元非対称混合モード AM_2 は TW と SS を結ぶように存在する. ここで, 対称混合モード SM のうち $\theta = \pi$ のものを SM_π と表記する. この解は $\phi = -\pi/2$ で自明解より分岐する. 一方 $\theta = 0$ の SM は SM_0 と表記し, $\phi = \pi/2$ の自明解から分岐し左方向に伸びてゆくが, リミットポイントにおいて右に折り返し, 結局 SS の分枝に戻ってゆく. 3次元非対称混合モード AM_3 は SM_0 と SM_π の分枝を橋渡ししている.

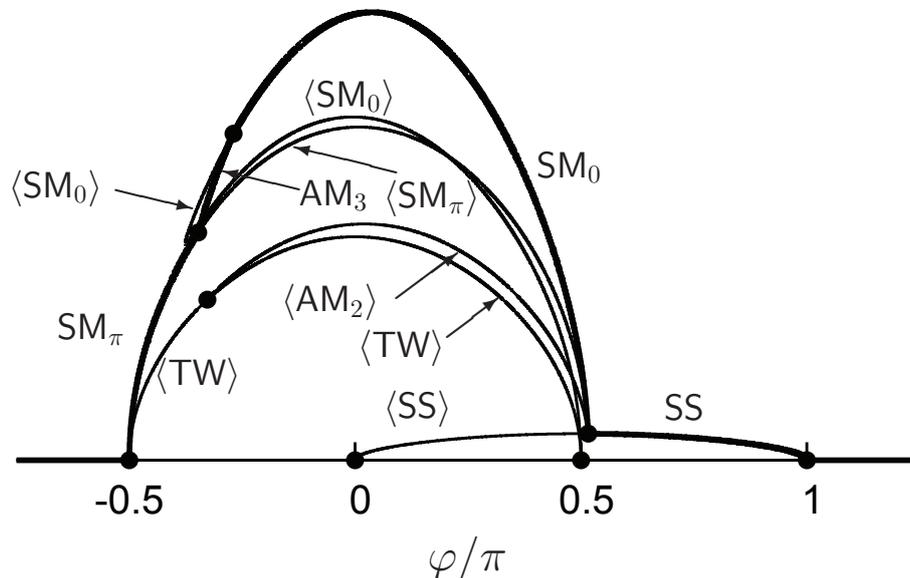


Figure 4: $R = 10^{-2}$ の場合の分岐図. 鉤括弧が付いている分枝は不安定であり, 鉤括弧が無い分枝は安定である. SM は対称混合モードの解を示しており, 下添え字の 0 と π は位相差を表している.

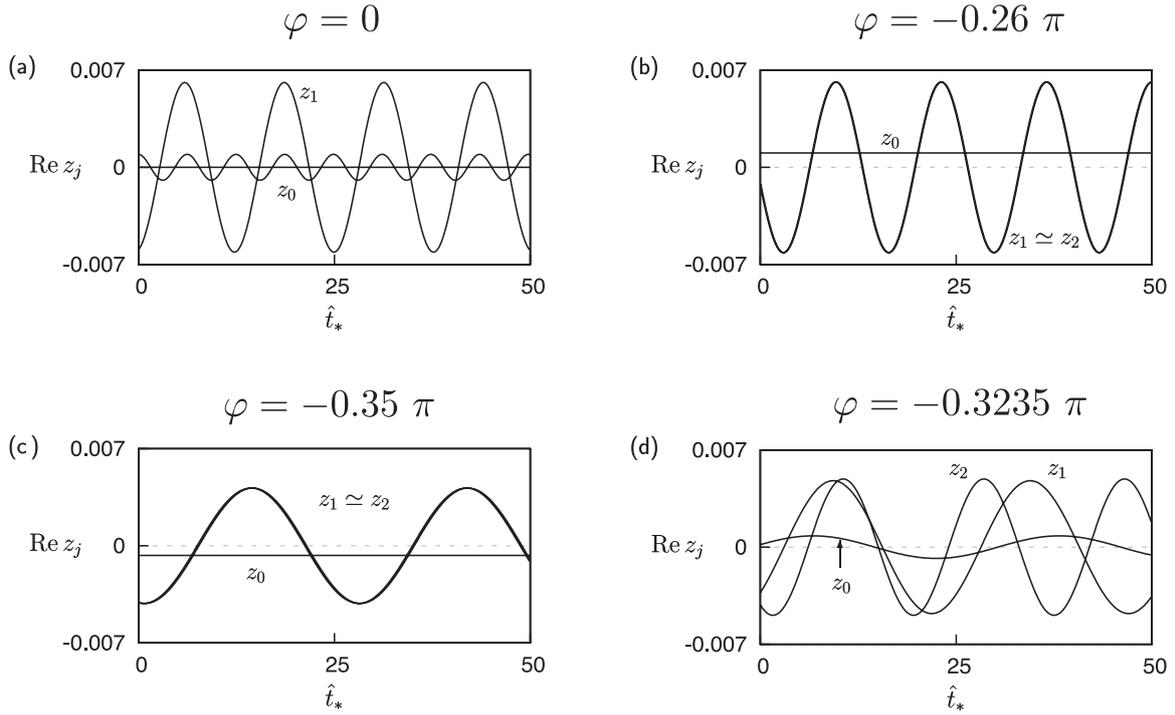


Figure 5: $R = 10^{-2}$ の場合における振幅の実部の時間発展の様子. (a) は $\varphi = 0$ における 2次元非対称混合モード AM_2 , (b) は $\varphi = -0.26\pi$ における対称混合モード SM_0 , (c) は $\varphi = -0.35\pi$ における対称混合モード SM_π , (d) は $\varphi = -0.3235\pi$ における 3次元非対称混合モード AM_3 . ただし $\hat{t}_* = \hat{t} - 1000$.

Figure 4 の解 AM_2, SM_0, SM_π, AM_3 の時間発展の様子を計算すると Figure 5 のようになった. Figure 5 は $\varphi = 0, -0.26\pi, -0.35\pi, -0.3235\pi$ でかつ $R = 10^{-2}$ のときグラフである.

SM_0 に対する初期条件としては $z_1(0) = z_2(0) \in \mathbb{R}$, $z_0(0) > 0$ を採用し, 反対に SM_π の場合の初期条件は $z_1(0) = z_2(0) \in \mathbb{R}$ であつ $z_0(0) < 0$ のものを採用した. Figure 5(b)(c) は SM_0 の場合の $z_0 > 0$ と, SM_π の場合の $z_0 < 0$ である. この結果は Appendix A.3 に記述した内容と定性的に一致していることから, $z_1(0) = z_2(0)$ かつ $z_0(0) > 0$ という初期条件の下に解の時間発展を追跡すれば, SM_0 と SM_π を判別することが可能であることが分かる.

この Figure 5(a)-(d) に対応する流れの関数の空間構造を Figure 6 に描画した.

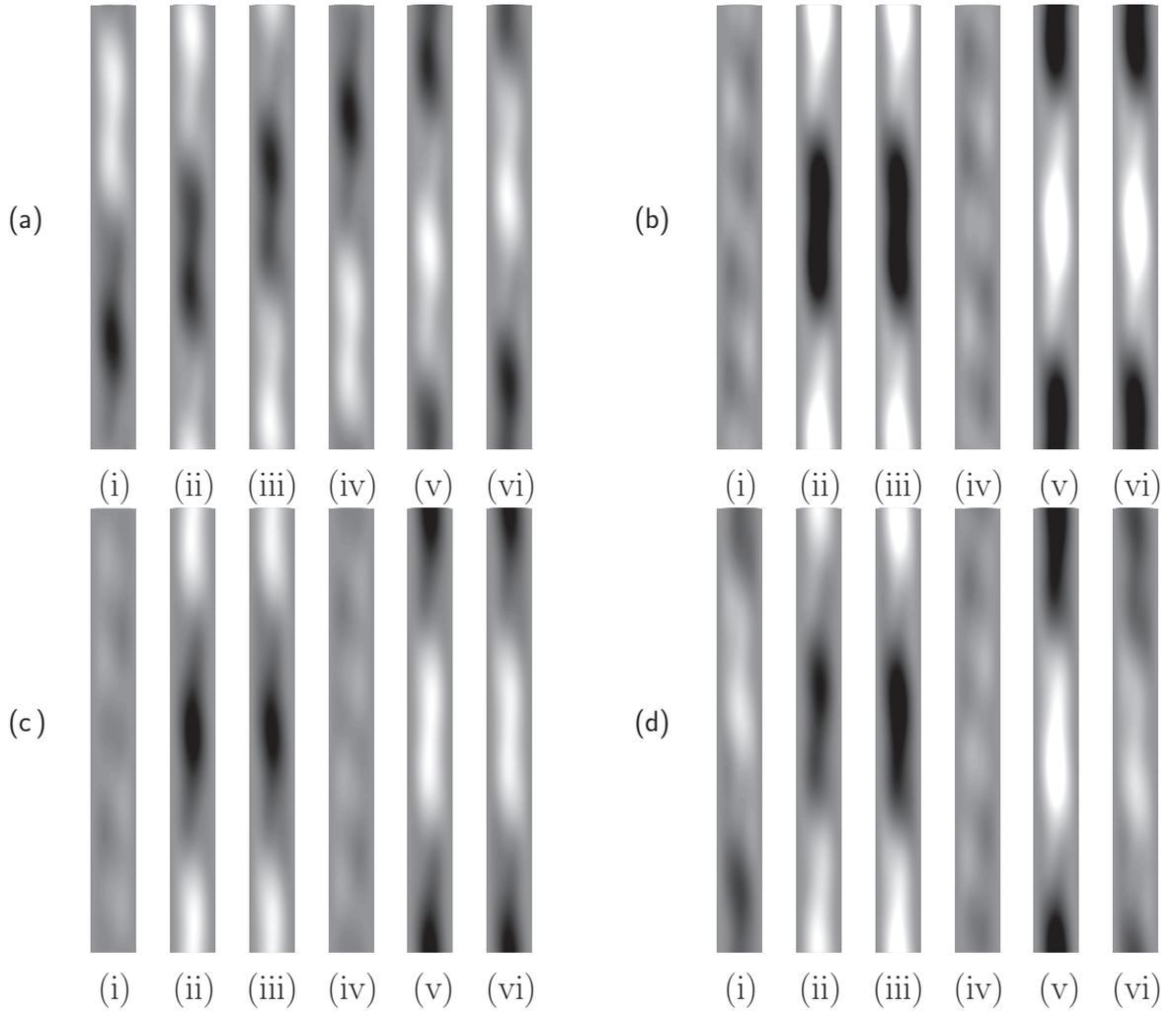


Figure 6: $R = 10^{-2}$ における流れ関数の等高線の時間発展の様子. (a) は $\varphi = 0$ の場合の AM_2 , (b) は $\varphi = -0.26\pi$ における SM_0 , (c) は $\varphi = -0.35\pi$ の場合の SM_π , (d) は $\varphi = -0.3235\pi$ の場合の AM_3 . (i),(ii),(iii),(iv),(v),(vi) は 1 周期を 6 分割した $\hat{t}_* = 0, T(z_1)/6, 2T(z_1)/6, 3T(z_1)/6, 4T(z_1)/6, 5T(z_1)/6$ の各時刻で評価. ここで $T(z_1)$ は $z_1(\hat{t})$ の 1 周期である. 流れ関数の空間構造を確認し易くするため縦軸方向に対して 0.54 倍している.

$$\hat{t}_* = \hat{t} - \hat{t}_0 = 0, T(z_1)/6, T(z_1)/3, T(z_1)/2, 2T(z_1)/3, 5T(z_1)/6, \quad (41)$$

ここで \hat{t}_0 は $z_1 = 0$ かつ $\text{Re}(dz_1/d\hat{t}) > 0$ を満たす過渡的な変化後の \hat{t} である. AM_2 は非ゼロの z_0 成分を含んでいるため, z_1 に由来する上方向に移動する伝播波パターンがこの弱く波長の短い z_0 成分による変形を受け非対称な流れを構成している. 解 SM_0 と SM_π は z_1 と z_2 を成分に持つ定在波に似た空間構造を主に持っている. しかしながら z_0 の弱い流れの影響により変形を受けている. これは, $\text{Re}z_1$ と $\text{Re}z_2$ が1周期の間に2度消えるときに, z_0 の弱い流れの構造が見えることから分かる.(Figure 6(b)(c)における (i),(iv) の図では z_0 の成分を確認することができる)

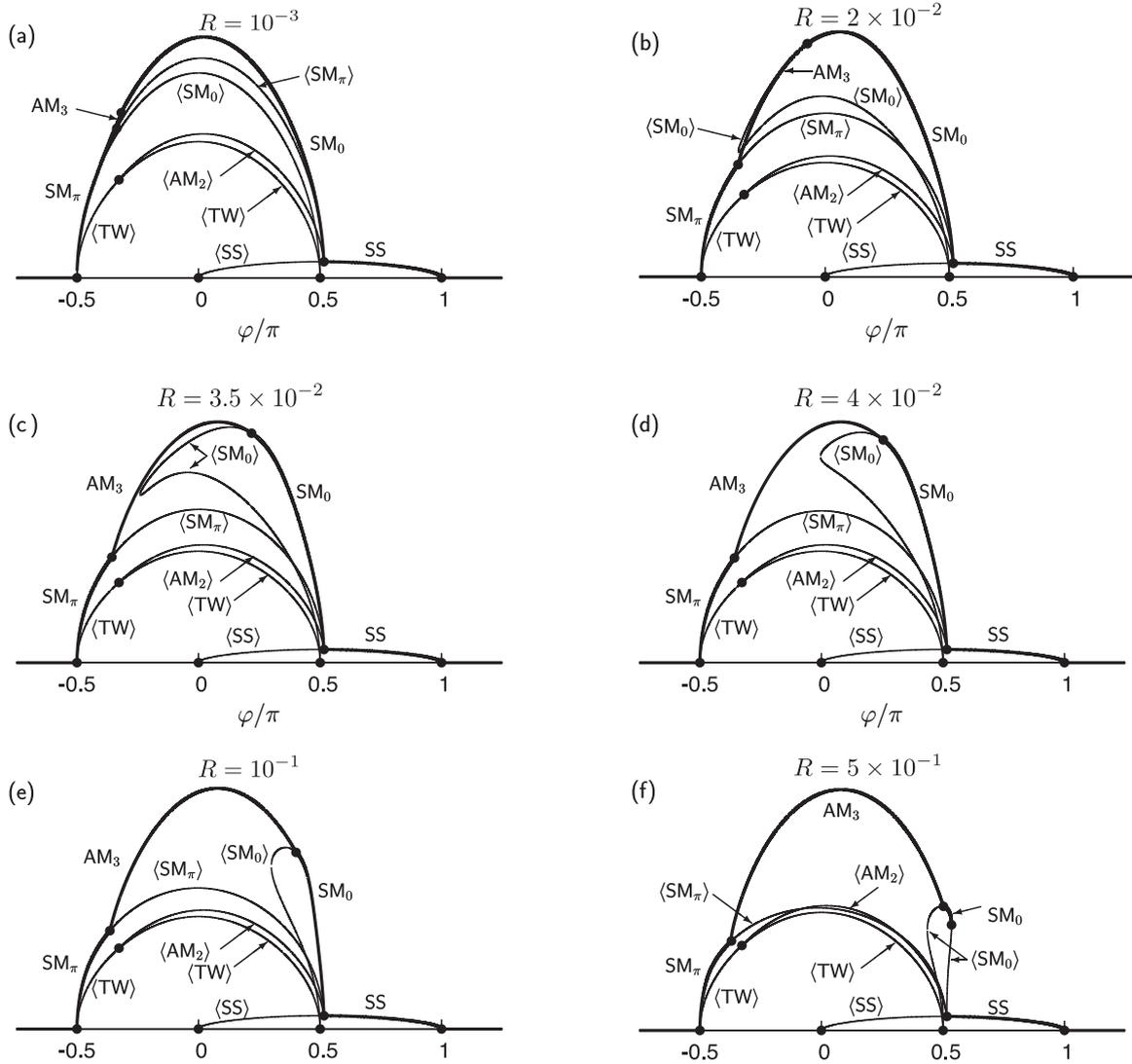


Figure 7: 分岐図の R 依存性. (a) は $R = 10^{-3}$, (b) は $R = 2 \times 10^{-2}$, (c) は $R = 3.5 \times 10^{-2}$, (d) は $R = 4 \times 10^{-2}$, (e) は $R = 10^{-1}$, (f) は $R = 5 \times 10^{-1}$.

Figure 7 は Figure 4 で示した分岐図の R 依存性を示している. $R = 10^{-3}, 2 \times 10^{-2}, 3.5 \times 10^{-2}, 4 \times 10^{-2}, 10^{-1}, 5 \times 10^{-1}$ である. Figure 7 の中で (a) は最も短い分枝 AM_3 をもつ系である. $R = 10^{-3}$ の場合, 安定な SM_π と SM_0 の間に非常に短い AM_3 が橋渡しするように存在している. R の増加によって SS, TW, AM_2, SM_π は定性的な影響を受けないが, SM_0 は影響を受ける. SM_0 の不安定な分枝上のリミットポイントは R の増加と共に右側に移動し, $R = 5 \times 10^{-1}$ では不安定な SM_0 の分枝が $\varphi > 0.5\pi$ の領域に進出し, その結果, 安定な SM_0 の領域が生じている. このような SM_0 の変化は, 分枝 AM_3 の存在領域を大きく広げる結果となっている.

3.8 α, G 平面上の分岐図

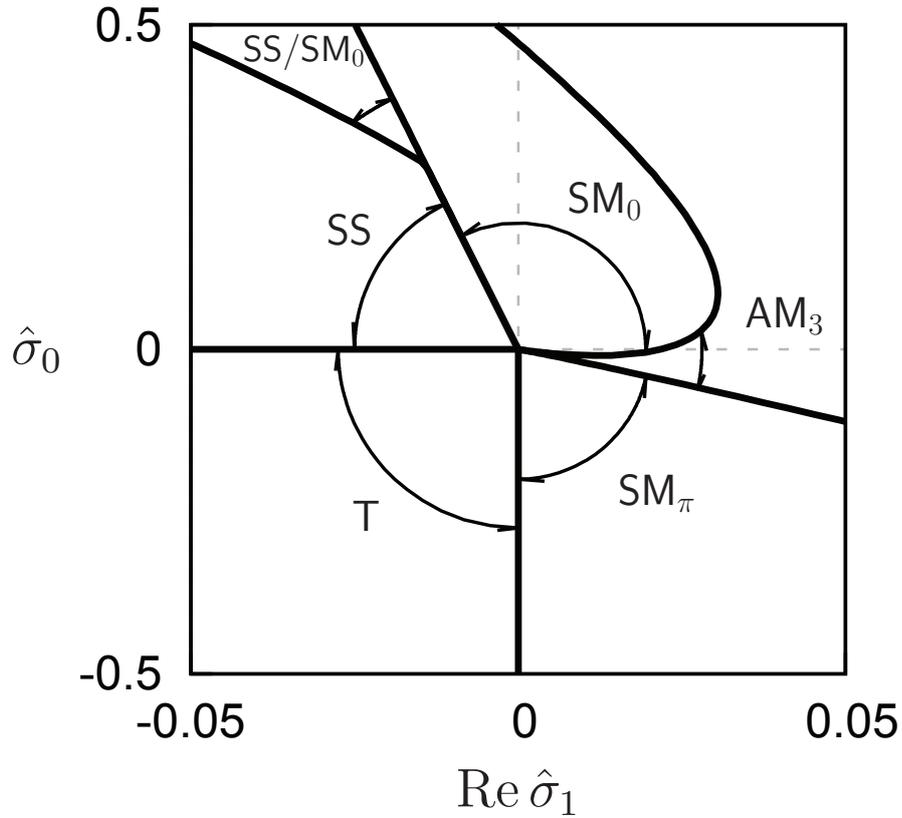


Figure 8: $\text{Re}\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_0$ 平面上の各解の安定な領域を表す図. SS/SM_0 と記載がある領域は他の領域とは異なり二つの解が安定.

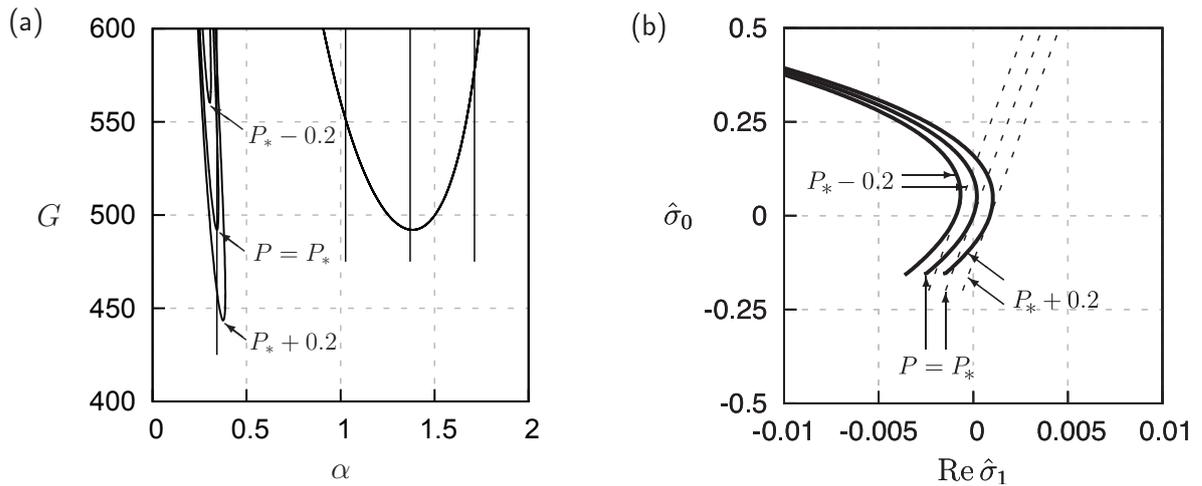


Figure 9: (a) は $P = P_*, P_* \pm 0.2$ における中立曲線を表す図. ここで $P_* = 12.45425644$ である. 垂直の線は, $P = P_*$ の場合の振動攪乱の臨界波数 $\alpha = \alpha_c$ と $3\alpha_c, 4\alpha_c, 5\alpha_c$ の各位置を示している. (b) の実線は G の増加に伴う線形増幅率の変化を, $\alpha = \alpha_c$ に固定し, $P = P_*, P_* \pm 0.2$ に対して描いたものである. (b) の点線は $\hat{\sigma}_0 = 0$ における実線に対する接線である.

Figure 8 は $\text{Re}\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_0$ 平面上での解 T, SS, SM_0 , SM_π , AM_3 の安定な領域を示す図である. この図の中で SS/ SM_0 と書いている領域は, SS と SM_0 が両方安定である. この共存は, $\varphi = 0.5$ 付近において, SM_0 の分岐構造が Figure 7(f) で見られるような特徴的なオーバーハングをもつことによる. 安定な SS と SM_0 のいずれが実現されるかは初期条件による. しかしながら, これらの分岐図 Figure 4 と Figure 7(a)-(f) は分岐特性こそはつきり示しているが, 実際の物理現象に当てはめて理解するには些か直感的ではない. そこでいくつかの R の値に対して変化させる代わりに, G を変化させてその分岐特性を調べることにする. Figure 9(a) は $P = P_*, P_* \pm 0.2$ の場合の中立曲線を示している. 厳密に $P = P_*$ に対する臨界波数 α_c に波数を固定し, G が臨界 G_c を低 G 側から通過する場合について考える. $P = P_*, P_* \pm 0.2$ における $\text{Re}\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_0$ 平面上での線形増幅率は, Figure 9(b) の実線のようになる. 破線は, $P = P_*$ における $G = G_c$ での実線に対する接線を示したものである. すなわち,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1 &\simeq \epsilon G_c \frac{\partial \text{Re}\hat{\sigma}_1}{\partial G}(G_c, \alpha_c, P_*) + (P - P_*) \frac{\partial \text{Re}\hat{\sigma}_1}{\partial P}(G_c, \alpha_c, P_*), \\ \hat{\sigma}_0 &\simeq \epsilon G_c \frac{\partial \hat{\sigma}_0}{\partial G}(G_c, \alpha_c, P_*) + (P - P_*) \frac{\partial \hat{\sigma}_0}{\partial P}(G_c, \alpha_c, P_*), \\ \epsilon &= \frac{G - G_c}{G_c}\end{aligned}$$

である. $P \gtrsim P_*$ では, 臨界 G において $\text{Re}\hat{\sigma}_1$ の符号がマイナスからプラスに変わることが確認することができる. ここでは G, P を変化させた場合における $\text{Re}\hat{\sigma}_1$ と $\hat{\sigma}_0$ の変化を確認するため, G_c, P_* で評価した $\text{Re}\hat{\sigma}_1$ と $\hat{\sigma}_0$ ではなく, 任意の G, P において線形固有値問題を解き直した場合における $\text{Re}\hat{\sigma}_1$ と $\hat{\sigma}_0$ を描画した. Figure 10 は Figure 8 と Figure 9(b) の原点付近を拡大したものである.

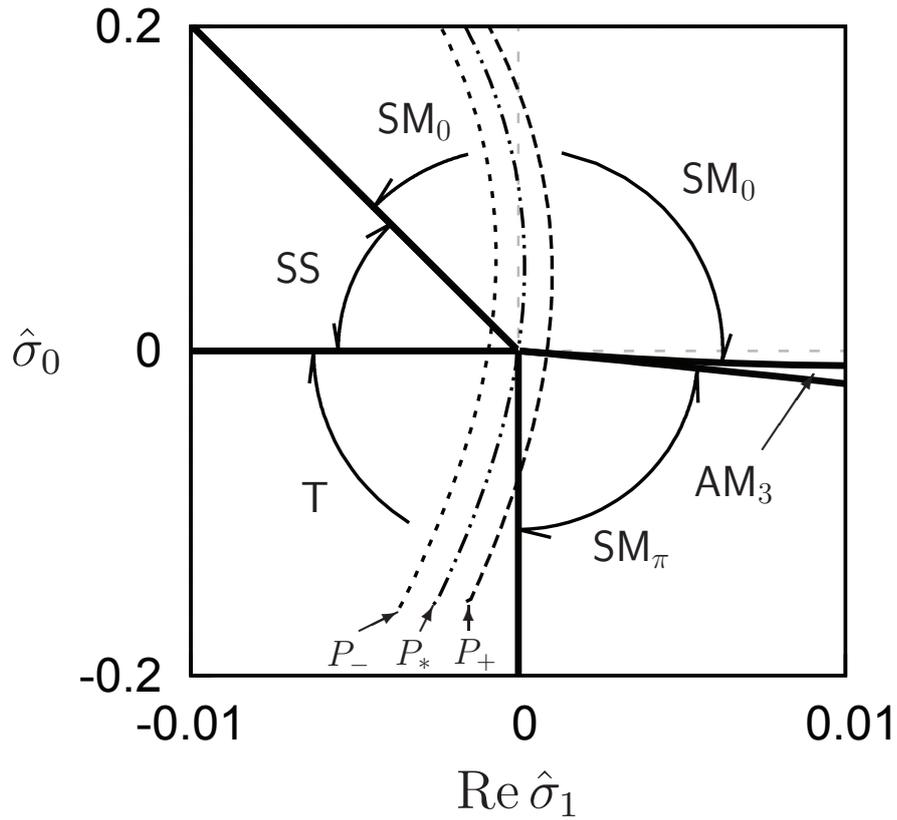


Figure 10: Figure 8 の拡大図と $P = P_*$, $P_* \pm 0.2$ に対する線形増幅率曲線. 波数 α は $P = P_*$ に対する値 α_c に固定.

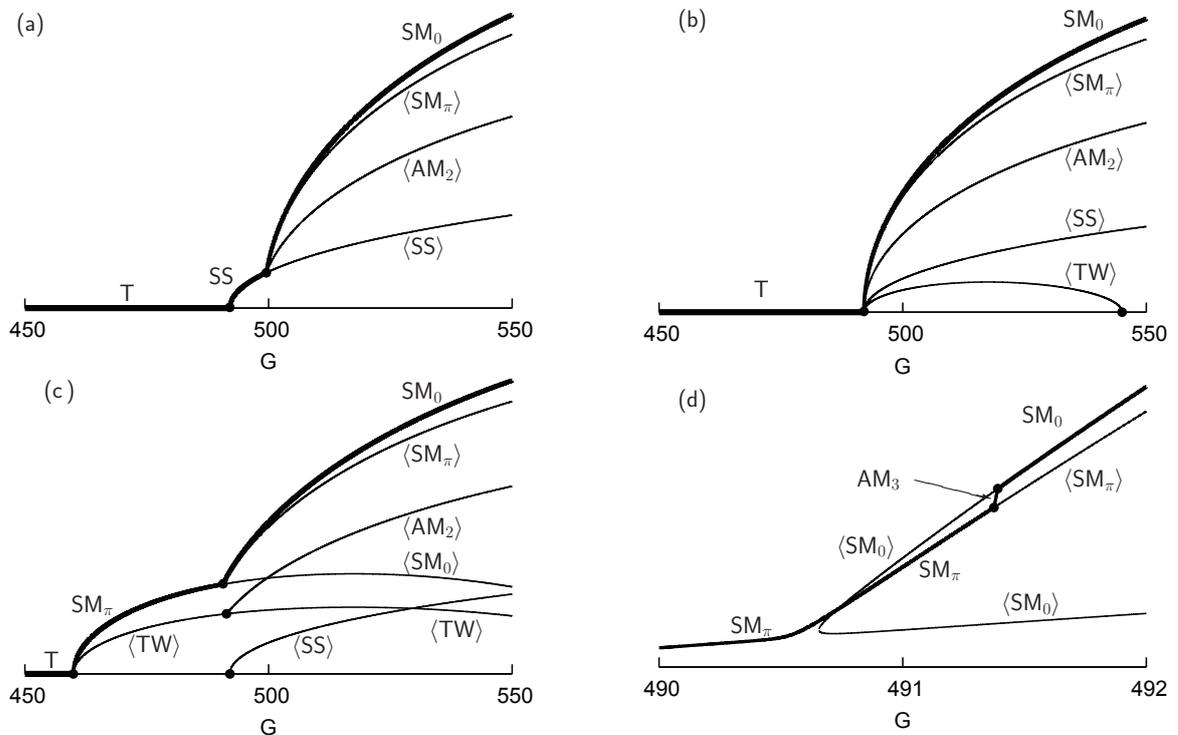


Figure 11: figure 10 の各 $P = P_* - 0.2$ (a), $P = P_*$ (b), $P = P_* + 0.2$ (c) における分岐図. (d) は $P = P_* + 0.2$ の場合の拡大図. (d) の分岐図からは SM_π と SM_0 の分枝を橋渡す形で AM_3 の分枝が存在している. 鉤括弧がついた分枝の解は不安定, 鉤括弧がついていない分枝の解は安定であることを示している.

$\hat{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\omega_c}, \hat{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\omega_c}$ であるため, $G = 610$ のとき, $\hat{\sigma}_0 = 0.2$ になる. ただし, $\omega_c = 2.04671 \times 10^{-1}$. このとき対応する $\frac{G-G_c}{G_c} = 0.23$ であり, 臨界点からのずれは十分に小さいとはいえないが, $\hat{\sigma}_0 = 0.2$ のとき, $\sigma_0 = 4.09342 \times 10^{-3}$ であり, この値は比較的小さく, 弱非線形理論の適用範囲内にあるものと考えることができる. まず, $P = P_* - 0.2$ の場合について考える. Figure 10 の $P_* - 0.2$ に対する増幅率曲線は領域 T から始まっている. その後 SS の領域に入り, SM_0 の領域に移行してゆく, この過程を G を分岐パラメーターとして描いた分岐図が Figure 11(a) である. この図によれば, T (自明解) は SS が分岐するところで安定性を失う. SS は超臨界分岐により発現するがその後の分岐によって SM_0 が安定になり SS は安定ではなくなる. このとき他の解の分枝はすべて不安定である. 2 番目のケースである $P = P_*$ の場合には, Figure 10 より明らかなように, 増幅率曲線はちょうど T の安定領域の端である原点を通過し SM_0 が安定な領域に入る. G を分岐パラメーターとした Figure 11(b) からは, 最初は T が安定であるが, 分岐を経て SM_0 が安定になる. 三つ目の例である, $P = P_* + 0.2$ の場合には, Figure 10 より増幅率曲線は T が安定な領域を出て SM_π が安定な領域に入り, 続いて AM_3 が安定な領域に $\text{Re } \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_0$ 平面上の非常に短い距離だけ入った後に, SM_0 が安定な領域に入る. G を分岐パラメーターとした Figure 11 は一見すると, T より Hopf 分岐した SM_π の分枝があり, 続いて分岐を起こし SM_0 が安定な解になるように見える. しかしながら, この Figure 11 を二次分岐に焦点を合わせ拡大した Figure 11(d) からはその考えは誤りであることがわかる. 実際には非対称三次元解 AM_3 が安定になる領域が僅かに存在し, その後 SM_0 が安定になっている. AM_3 は $G \in [491.390, 491.374]$ の僅かな領域でしか存在しえない.

3.9 数値計算

前章では弱非線形解析を用いて解の安定性の解析を行ってきた. この章では, この解析の妥当性を確認するべく数値シミュレーションを行った. このシミュレーションでは攪乱を二次元と仮定し, 攪乱方程式 (14) を境界条件 (15) の下に数値的に解いた. 空間離散化にはチェビシェフ多項式とフーリエ級数の 2 重展開

$$\hat{\psi}(x, y, t) = \sum_{m=-M}^M \Phi_m(x, t) e^{im\alpha y} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^N a_{mn}(t) \begin{pmatrix} (1-x^2)^2 T_n(x) \\ (1-x^2) T_n(x) \end{pmatrix} e^{im\alpha y} \quad (42)$$

を用い, 時間発展にはパラメーターによってクランク-ニコルソン法とルンゲ-クッタ法を使い分けた.

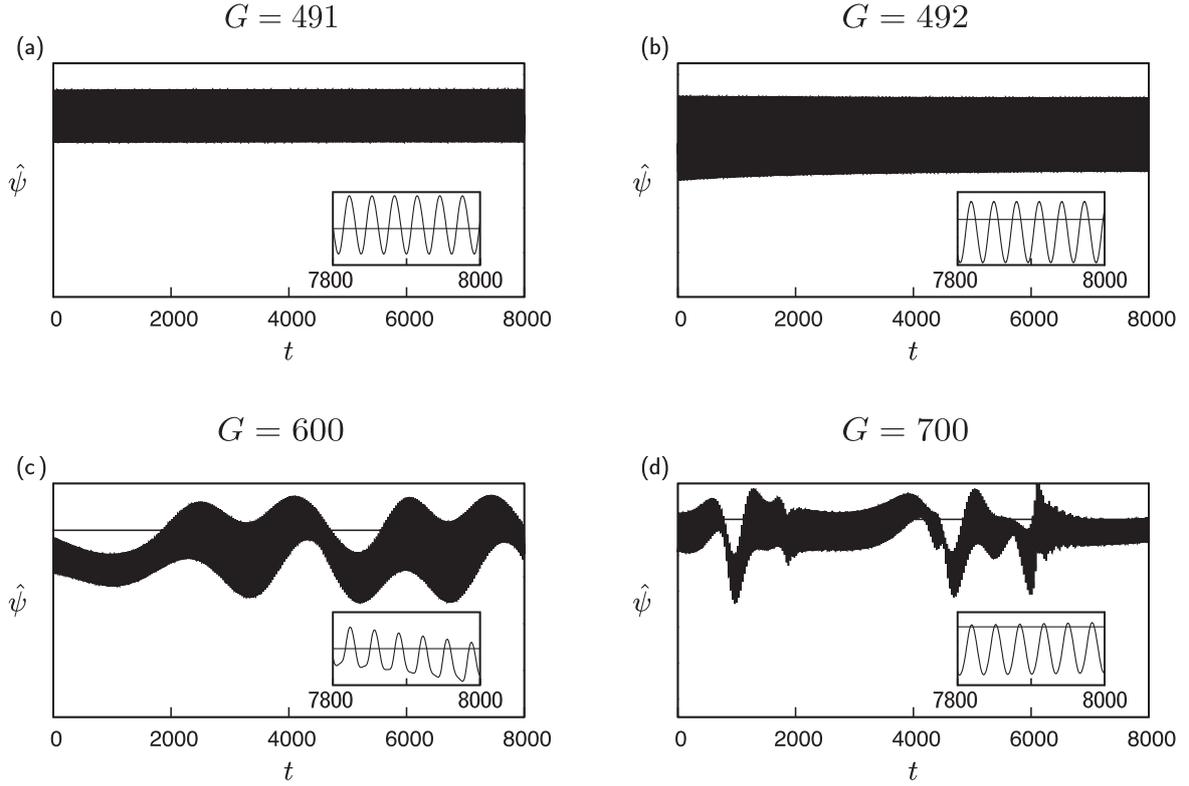


Figure 12: $P = P_* + 0.2$ の場合の流れ関数の攪乱 $\hat{\psi}$ の時間発展の様子 ($x = 0.5$). (a) は $G = 491$ における SM_π , (b) は $G = 492$ における SM_0 , (c) は $G = 600$, (d) は $G = 700$ の場合についての結果である. 水平方向に伸びる線は $\hat{\psi} = 0$ を示している.

Figure 12 は $P = P_* + 0.2$ に対して得られた $x = 0.5$ における攪乱 $\hat{\psi}$ の過渡後の時間発展の軌跡である. Figure 12(a),(b) は $t \gg 1$ の場合に平衡状態に遷移してゆく様子を示している. 平衡状態は Figure 12(a) の場合, 対称混合モードの SM_π であり, Figure 12(b) の場合には同じ対称混合モードであるが位相差が異なる SM_0 である. しかしながら一見するとこの SM_π と SM_0 の違いをシミュレーションの結果から区別するのは難しい. そのため, 次のようにして位相の違いがあるのかを確認した. 偏角 $\check{\Theta}$ は下記のように定義される.

$$\check{\Theta} \equiv 2\arg\left(\frac{\langle \phi_1^{(0)\dagger}, S_1 \Phi_1 \rangle}{\langle \phi_1^{(0)\dagger}, S_1 \phi_1^{(0)} \rangle}\right) + 2\arg\left(\frac{\langle \phi_1^{(1)\dagger}, S_1 \Phi_1 \rangle}{\langle \phi_1^{(1)\dagger}, S_1 \phi_1^{(1)} \rangle}\right) - \arg\left(\frac{\langle \phi_4^{(1)\dagger}, S_4 \Phi_4 \rangle}{\langle \phi_4^{(1)\dagger}, S_1 \phi_4^{(1)} \rangle}\right)$$

ここで内積は次のように定義される.

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 g(x)^* f(x) dx$$

このとき固有関数 $\phi_1^{(0)}$, $\phi_1^{(1)}$ とそれらの随伴関数 $\phi_1^{(0)\dagger}$, $\phi_1^{(1)\dagger}$ は (P_*, α_c, G_c) で評価し, 固有関数

Table 2: 数値計算の値から算出した位相差 $\check{\Theta}$. この結果から $G = 491, 492$ の間で SM_π から SM_0 へと変化したのが確認できる. $P = P_* + 0.2, \alpha = \alpha_c$.

G	$\check{\Theta}/\pi$
475	1.0333
485	1.0333
488	1.0333
491	1.0333
492	-0.0268
493	-0.0275
495	-0.0301
505	0.0169
525	0.0272

$\phi_4^{(1)}$ と随伴関数 $\phi_4^{(1)\dagger}$ は $(P_*, 4\alpha_c, G_c)$ で評価を行った. 例えば

$$\frac{\langle \phi_1^{(0)\dagger}, S_1 \Phi_1 \rangle}{\langle \phi_1^{(0)\dagger}, S_1 \phi_1^{(0)} \rangle} \quad (43)$$

のようにして Φ_1 における $\phi_1^{(0)}$ と平行な成分を抽出を行う. この内積を用いた方法でシミュレーションの最終時刻における解の位相差を評価した結果が Table.8 である. この結果によれば, 明らかに $G = 491$ と $G = 492$ の間で位相が $\pi \rightarrow 0$ に変化しているのがわかる. これはすなわち長時間後に解が漸近する先が SM_π から SM_0 変化していることを示している. 今回のシミュレーションで用いた展開項数 $m = 8, N = 39$ は十分とはいえず数値誤差を含んでいる可能性を排除できていない, その上, 弱非線形解析で導出した振幅方程式は 4 次の項までしか考慮されておらずそれ以降の高次の項を無視している. それにもかかわらず $G = 491$ と $G = 492$ の間で安定な解が SM_π から SM_0 に変化している. AM_3 を経由せずに安定な解が SM_π から SM_0 に変化する点は $490 < G < 491$ の領域で両者の分枝が交差する点以外ないため AM_3 は確かに存在しているといえる.

3.10 結論

今回の研究では温度差のある鉛直スロットの問題において $P = P_*$ の場合に発生する 1:4 の Hopf/定常モードの共鳴相互作用の解析を行った. 当初 1:4 の共鳴は位相のカップリングが 4

次のオーダーで起こるため非共鳴の場合と比較して共鳴の効果は弱いと予想されていた。しかしながら、中心多様体低減を用いた弱非線形解析を行うことによってその予想は誤りであることがわかった。弱非線形解析の結果得られた Figure 11 の分岐図からは、 $P = P_*$ の値に依存して分岐の構造が変化する様子が確認される。特に Figure 11(d) の $P = P_* + 0.2$ の場合の分岐図では、 AM_3 が安定になる領域が存在している。このような構造は 1:4 の共鳴の効果を導入したため現れたものであり、本研究の結果 1:4 の共鳴の効果は小さいが無視できない一つの例を提供することができた。

Table 2 は弱非線形解析の結果が正しいことを裏付けるため行った 2次元の数値シミュレーションの結果である。 $G = 491$ と $G = 492$ の間で位相差が定性的に変化していることから安定な解が SM_π から SM_0 へと変化したことが確認された。この変化は Hopf/定常モードの 1:4 の共鳴相互作用による分岐であることが今回の結論である。

加えて Figure 12 の $P = P_* + 0.2$ の場合において $G = 600, 700$ の場合の数値シミュレーションの結果より、波数 α_c の第 3, 第 5 高調波はある値より大きい G の場合には大きな影響をもつことがあることに注意しなければならない場合があることがわかった。Figure 9(a) の三つの線がそれぞれ $\alpha = \alpha_c, 3\alpha_c, 4\alpha_c, 5\alpha_c$ に相当している。 $G < 551.1822$ でかつ $(3\alpha_c, G)$ と $(5\alpha_c, G)$ の場合は定常状態の中立曲線の下側である $551.1822 < G < 577.3994$ の場合、は $(5\alpha_c, G)$ の場合には定常状態の中立曲線の下側であるが $(3\alpha_c, G)$ からは中立曲線の上側である。 α_c と $4\alpha_c$ の非線形の相互作用を通じて線形的には不安定な $3\alpha_c$ のモードが励起するようになる。 $G > 577.3994$ の場合には、 $(3\alpha_c, G)$ と $(5\alpha_c, G)$ が両方とも中立曲線の上側にくるようになる。 $\alpha_c, 3\alpha_c, 4\alpha_c, 5\alpha_c$ の非線形の相互作用は系を支配するようになる。実際の数値シミュレーション結果 Figure 12(c)(d) からは、そのような特殊な振る舞いをしているのがみてとることができる。この図の搬送波は殆ど正弦波であるが、包絡線は $1 \ll t$ においても収束する様子はみられなかった。数値シミュレーションの結果からいえることは、1:4 の Hopf/定常状態の共鳴相互作用の可能性のある系の時間発展を調べる場合においては気付かぬうちにこのような状況になっていないか確認することは重要なことである。 $G < 550$ 以下であればこのような変則的な状況を避けられるため Figure 11 は $450 < G < 550$ で描画している。

4 平面クエット流の影響

この5章では前章の系とは異なり、Figure 13のように、クエット流が加わった系の解析を行う。系を制御するパラメータは、 Pr , Gr , にクエット流の効果を示すレイノルズ数 Re が加わる。 Re は反対方向に動く側壁の速度に比例するパラメータである。(この章では前章との混同の恐れからこれら3つのパラメータを2文字で表記)

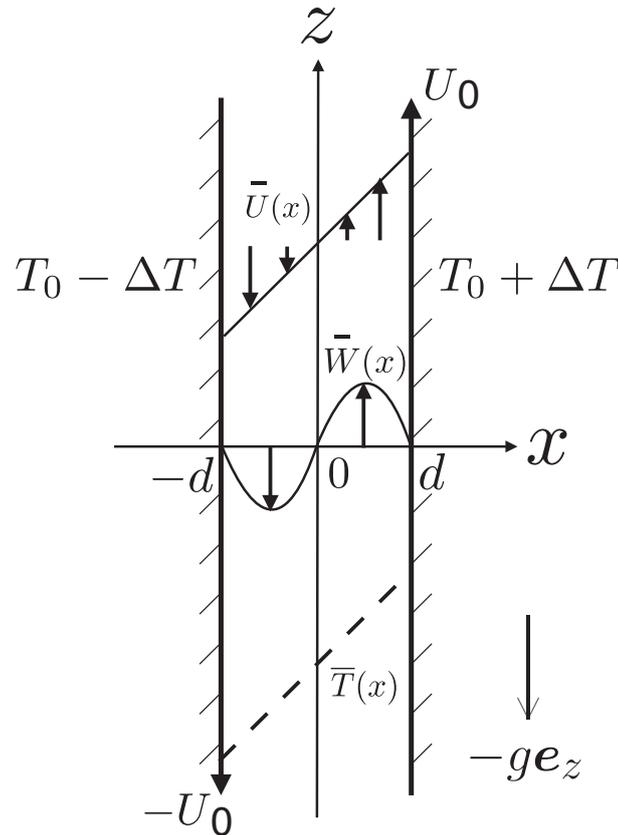


Figure 13: 系の概略図. $\bar{T}(x)$: 温度場の定常解, $\bar{W}(x)$: 速度の定常解.

4.1 基礎モデルの数式化

基礎方程式は、クエット流の成分がない場合の方程式 (1), (9) と全く同じである.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla^* \mathbf{P}^* + \nu \nabla^{2*} \mathbf{v}^* - \mathbf{g} \{1 - \gamma(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0)\} \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) T^* &= \kappa \nabla^{2*} T^*, \end{aligned}$$

ただし境界条件はクエット流の効果を加えるため次のように変更した.

$$\mathbf{v}^* = \pm U_0 \mathbf{e}_z, T^* = T_0 \pm \Delta T \quad \text{at} \quad x^* = \pm d.$$

流れ関数の定義 (3) を用い流れ関数の攪乱 $\hat{\psi}$ の時間発展方程式に直せば,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 + \bar{W}_R \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 - \bar{W}_R'' \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{G} \nabla^4 \right] \hat{\psi} + \frac{1}{Gr} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{W}_R \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{GrPr} \nabla^2 \right] \hat{\theta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = J(\hat{\psi}, \hat{\theta}), \quad (44)$$

速度場と温度場の定常解と境界条件は,

$$\bar{W}_R = \frac{x}{6}(1-x^2) + Re x,$$

$$\bar{T}_R = x, \quad (45)$$

$$\hat{\psi} = 0, \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0, \hat{\theta} = 0, \text{ at } x = \pm 1. \quad (46)$$

である. また側壁の速度を示すパラメータであるレイノルズ数 R を次のように導入した.

$$Re = \frac{U_0 d}{Gr \nu}.$$

4.2 線形安定性解析

線形安定性解析自体の方法も前章のクエット流が無い場合の式 (16) と同じであり, 中立曲線の描画の方法も同じである. 但し定常解はパラメータ R に依存するため, 式 (21) は,

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \chi}(\bar{\chi}, \alpha, Gr, Re; c_j^{(1)}) \cdot \delta \chi = -\mathcal{G}(\bar{\chi}, \alpha, Gr, Re; c_j^{(1)}), \quad (47)$$

と書き換えられる. 次に式 (47) をニュートン-ラフソン法によって解き, 選択した α, Re に対して, $Gr, Re[c]$, もしくは Gr, Re を選択して $\alpha, Re[c]$ を計算して中立曲線を描画した.

中立曲線は波数 α とグラシヨフ数 Gr の平面における線形増幅領域の境界を記述していた. これに対してクエット流のパラメータ Re が加わったため, 本来であれば線形増幅領域の境界は波数 α , グラシヨフ数 Gr , レイノルズ数 Re のより描画される, 曲面となる. しかしながら3次元にすると理解するのが困難となるためここでは次に紹介する2次元の臨界曲線を導入し系のパラメータ Re への依存性を確認する.

Figure 14 は, 中立曲線 (点線) の極小点の集合を描画することによって記述される臨界曲線 (実線) である. 臨界曲線は $Re - Gr_c$ 平面のため, $\alpha - Gr$ 平面の中立曲線とは異なり臨界波数 α_c の情報は失われるが, ここでは温度差の臨界値 Gr_c の方が重要と考える. 臨界曲線は,

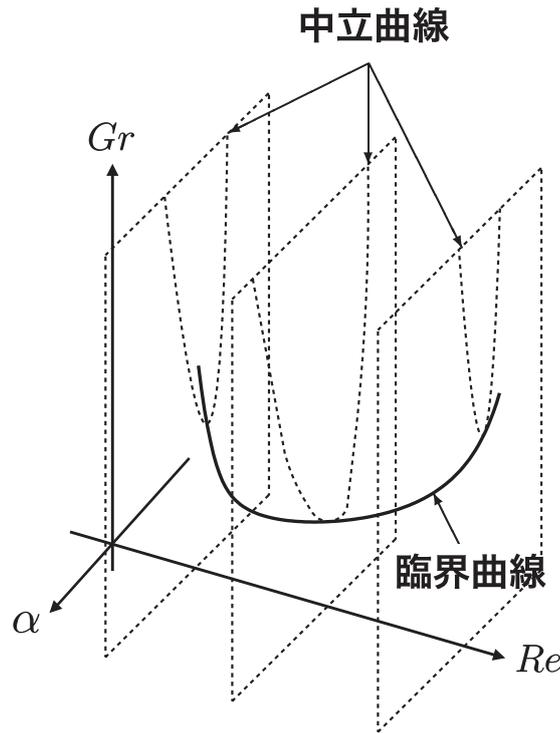


Figure 14: 臨界曲線の概略図. 中立曲線 (点線) の極小点の集合 (実線) が臨界曲線であることを示している.

Figure 14 の説明図の様に中立曲線を計算し, その極小点を集め計算をする方法が最も簡単な方法である. しかしながら, この方法は計算時間を必要とするため, 次の方法で計算した.

臨界曲線は中立曲線の条件である $\text{Re}[\sigma] = 0$ の条件に対して更に $\frac{\partial Gr}{\partial \alpha} = 0$ の条件を課す必要がある. そこで方程式 (19) を α で微分した式,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \sigma A \chi - B \chi \} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \sigma A - B \} \chi + \sigma A \chi_\alpha - B \chi_\alpha = 0 \quad (48)$$

を考える. χ_α は χ を α で微分したものである. ここで関数 \mathcal{H} を次の式で定義する.

$$\mathcal{H}(\chi, \chi_\alpha, Gr, Re; \text{Im}[\sigma]) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \sigma A - B \} \chi \right) + \sigma A \chi_\alpha - B \chi_\alpha$$

中立曲線のとおり同様に, この式に対してニュートン-ラフソン法を適用して解を求めることによって臨界曲線が計算を行った.

Figure 15 は $Pr = 2.4, 7.0, 30$ の場合における臨界曲線である. $Pr = 2.15$ 付近において, 突

然 $S^{(C)}$ の臨界曲線が存在するようになる。 $S^{(H)}$ と O_S は前章での定常攪乱と伝播波攪乱に対応する臨界曲線である。 $S^{(H)}$ は Pr の大きさによらず存在する。 一方, $R = 0$ の場合には $Pr > Pr_*$ において存在していた O_S は $Re \gtrsim 5$ で存在するようになる。 $S^{(C)}$ に対する臨界曲線は $Pr = 1000$ までの範囲で確認した限り $Re = 0$ では存在していない。 $Pr = 30$ では O_S の臨界曲線の左端が消失した。 この現象の理解のため, 該当領域の臨界曲線を拡大したものと中立曲線を描画したものが, Figure 16 と Figure 17 である。

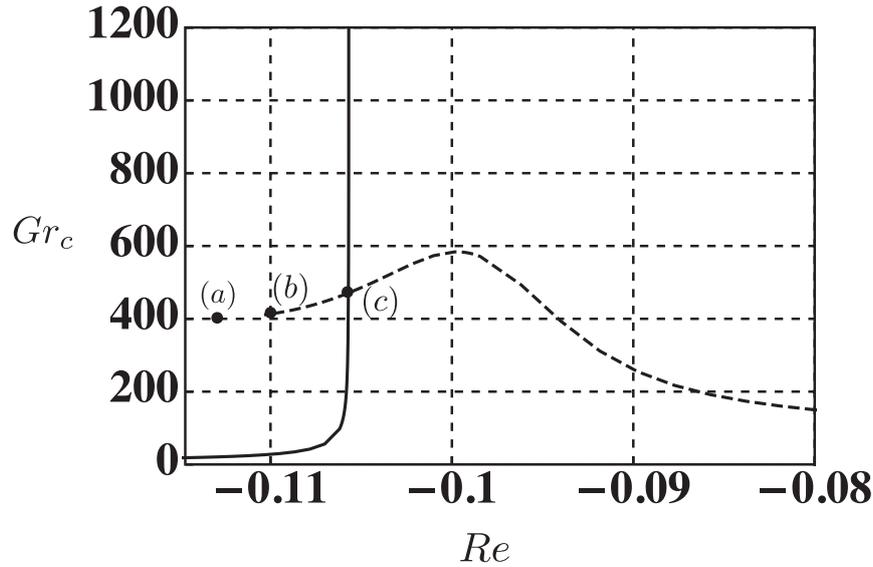


Figure 16: $Pr=30$ の場合の O_S モードに対する臨界曲線が消失する点の近傍における臨界曲線の拡大図. (a) は $Re = -0.113$, (b) は $Re = -0.11$, (c) は $Re = -0.1057$.

Figure 16 によれば, $Re = -0.1100$ 付近までは O_S の臨界曲線は存在しているが, $Re = -0.1130$ になると O_S の臨界曲線は確認できなくなる. そのためこの $Re = -0.1130, -0.1100, -0.1057$ の中立曲線を調べた. その結果が Figure 17 である. 特筆すべきは $Re = -0.1130, -0.1100$ の場合の中立曲線である. この $Re = -0.1130$ の場合, $S^{(C)}$ の中立曲線しか存在しないが, $Re = -0.1100$ の場合には $S^{(C)}$ と O_S の二つの中立曲線が存在することが確認できる.

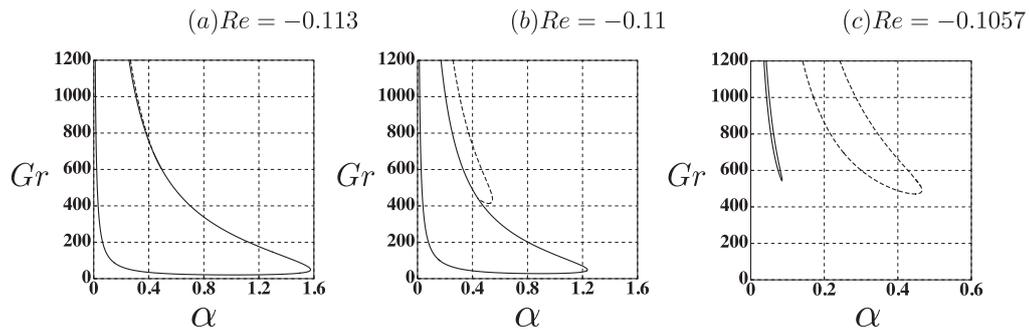


Figure 17: $Pr=30$ の場合の中立曲線. (a) は $Re = -0.113$, (b) は $Re = -0.11$, (c) は $Re = -0.1057$. 実線は $S^{(C)}$ の中立曲線を示し, 破線は O_S の中立曲線である.

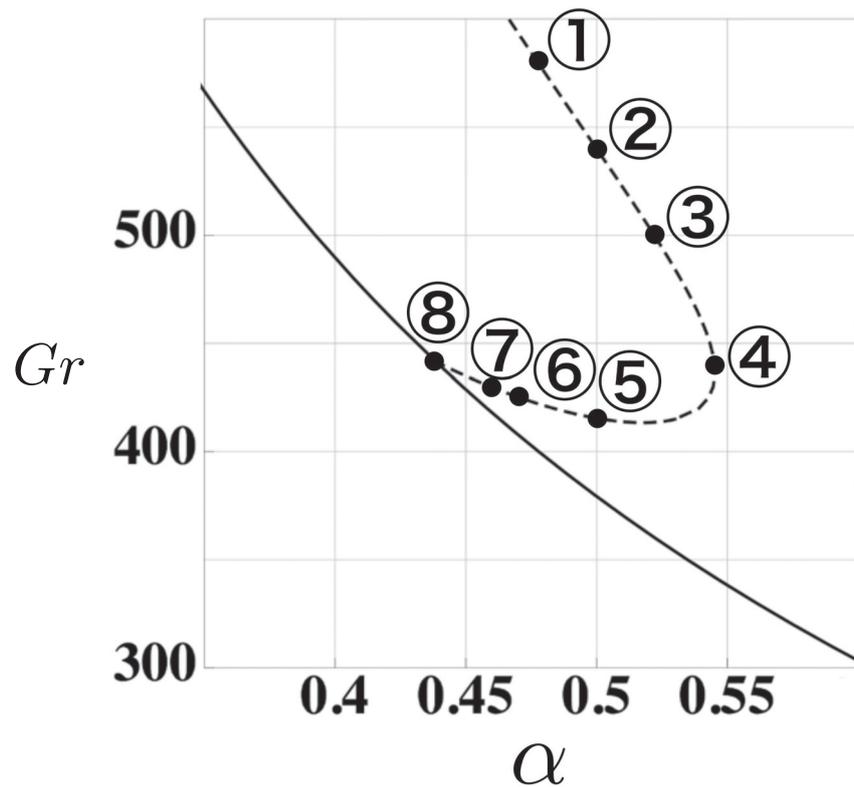


Figure 18: $Pr=30$, $Re = -0.11$ の臨界曲線. (1) は $(Gr, \alpha, c) = (580, 0.47750, \pm 0.00370)$, (2) は $(Gr, \alpha, c) = (540, 0.50001, \pm 0.00362)$, (3) は $(Gr, \alpha, c) = (500, 0.52200, \pm 0.00349)$, (4) は $(Gr, \alpha, c) = (440, 0.54505, \pm 0.00308)$, (5) は $(Gr, \alpha, c) = (415, 0.50004, \pm 0.00190)$, (6) は $(Gr, \alpha, c) = (425, 0.47016, \pm 0.00131)$, (7) は $(Gr, \alpha, c) = (429, 0.46106, \pm 0.00109)$, (8) は $(Gr, \alpha, c) = (441, 0.43897, \pm 0.00014)$. 実線は $S^{(C)}$ の中立曲線を示し, 破線は O_S の中立曲線である.

Figure 18 には $Pr = 30$, $R = -0.1100$ の場合の O_S と $S^{(C)}$ の中立曲線が接触する点の近傍を示す. Figure 18 のキャプションには O_S 側の中立曲線上の各点での位相速度を示している. 点 (1) から点 (8) の位相速度は単調減少しており接触点に近い (8) では最も小さい位相速度をとる. この位相速度の傾向から接触点では O_S の位相速度が 0 になると考えられる.

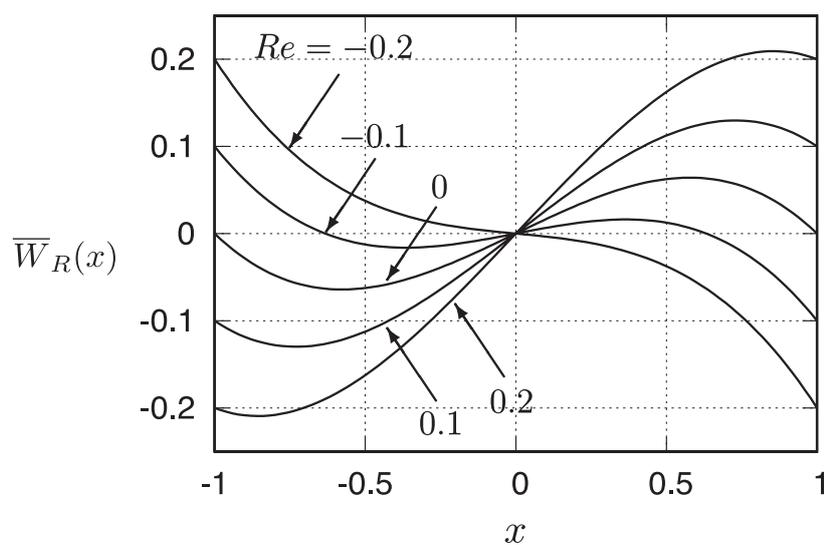


Figure 19: $Re = -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2$ の場合の定常解 $\bar{W}_R(x)$ の速度分布.

Figure 19 は $-1 \leq x \leq 1$ における定常解 $\bar{W}_R(x)$ の速度分布である. 主流速度分布は $-1/6 \leq Re \leq 1/3$ の場合, 定義域内に極値をもつ.

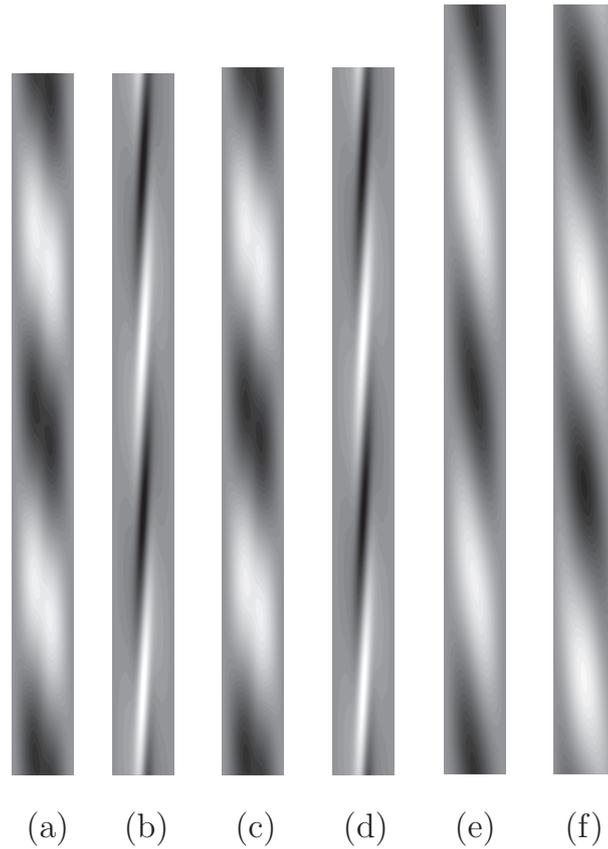


Figure 20: $S^{(H)}$ と $S^{(C)}$ の場合の流れ関数と温度の攪乱の空間構造の違い. (a)(b) は $(Pr, Re, \alpha, Gr) = (10^{-7}, 0.04202, 1.1008, 462.48)$ の場合の $S^{(H)}$, (c)(d) は, $(Pr, Re, \alpha, Gr) = (7, 0.04668, 1.0931, 450.04)$ の場合の $S^{(H)}$, (e)(f) は $(Pr, Re, \alpha, Gr) = (7, -0.1527, 0.99881, 47.735)$ の場合の $S^{(C)}$ である.

Figure 20 は流れ関数と温度場の攪乱の等高線である. Figure 20 の (a) と (b) は $(Pr, Re, \alpha, Gr) = (10^{-7}, 0.04202, 1.1008, 462.48), (7, 0.04668, 1.0931, 450.04)$ の場合の $S^{(H)}$ である. これらに対して Figure 20 の (c) は $(Pr, Re, \alpha, Gr) = (7, -0.1527, 0.99881, 47.735)$ の場合の $S^{(H)}$ である. $S^{(H)}$ は Pr の値に依らず類似の等高線の構造をもつが, $S^{(C)}$ の温度場の等高線は明らかに違う構造を持っていることが確認される.

$S^{(H)}$ モードと $S^{(C)}$ モードとではこのように空間構造が明らかに異なっているため, これらのモードを駆動する機構がことなることが想定される. その点を明らかにする目的で, ここでは Navier-Stokes 方程式とエネルギー方程式の各項のエネルギー収支を調べる. x, z は $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 2\pi/\alpha$ の範囲で積分を行った. $\bar{W}_R = \bar{W}(x) + Re\bar{U}(x), \bar{W} = x(1-x^2)/6,$

$\bar{U} = x$ とすると,

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} (u^2 + w^2) dz dx}_{I_1 e^{2\sigma t}} = \underbrace{-Re \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} \bar{U}' uw dz dx}_{I_2 e^{2\sigma t}} - \underbrace{\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} \bar{W}' uw dz dx}_{I_3 e^{2\sigma t}} \\ - \underbrace{\frac{1}{Gr} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz dx}_{I_4 e^{2\sigma t}} + \underbrace{\frac{1}{Gr} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} w \theta dz dx}_{I_5 e^{2\sigma t}}, \quad (49)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} \theta^2 dz dx}_{I_6 e^{2\sigma t}} = \underbrace{-\frac{1}{GrPr} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz}_{I_7 e^{2\sigma t}} - \underbrace{\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/\alpha} u \theta dx dz}_{I_8 e^{2\sigma t}}. \quad (50)$$

ここで, $\partial/\partial t = 2\sigma$ を仮定すれば, I_1, \dots, I_5 は,

$$I_1 = \frac{\pi\sigma}{\alpha} \int_{-1}^1 [\alpha^2(\varphi_r^2 + \varphi_i^2) + \varphi_r'^2 + \varphi_i'^2] dx, \\ I_2 = -\pi Re \int_{-1}^1 \bar{U}' [\varphi_i \varphi_r' - \varphi_r \varphi_i'] dx, \\ I_3 = -\pi \int_{-1}^1 \bar{W}' [\varphi_i \varphi_r' - \varphi_r \varphi_i'] dx, \\ I_4 = -\frac{1}{Gr} \int_{-1}^1 [2\alpha\pi(\varphi_r'^2 + \varphi_i'^2) + \frac{\pi}{\alpha}(\varphi_r''^2 + \varphi_i''^2) + \alpha^3\pi(\varphi_r^2 + \varphi_i^2)] dx, \\ I_5 = -\frac{1}{Gr} \frac{\pi}{\alpha} \int_{-1}^1 [\varphi_r' \vartheta_r + \varphi_i' \vartheta_i] dx,$$

となる. ここで, r, i はそれぞれ実部, 虚部を示している. 式 (50) は Re に比例する項を持たない. そのため平面クエット流の影響を調べるために Re に依存する式 (49) のみを数値的に評価した.

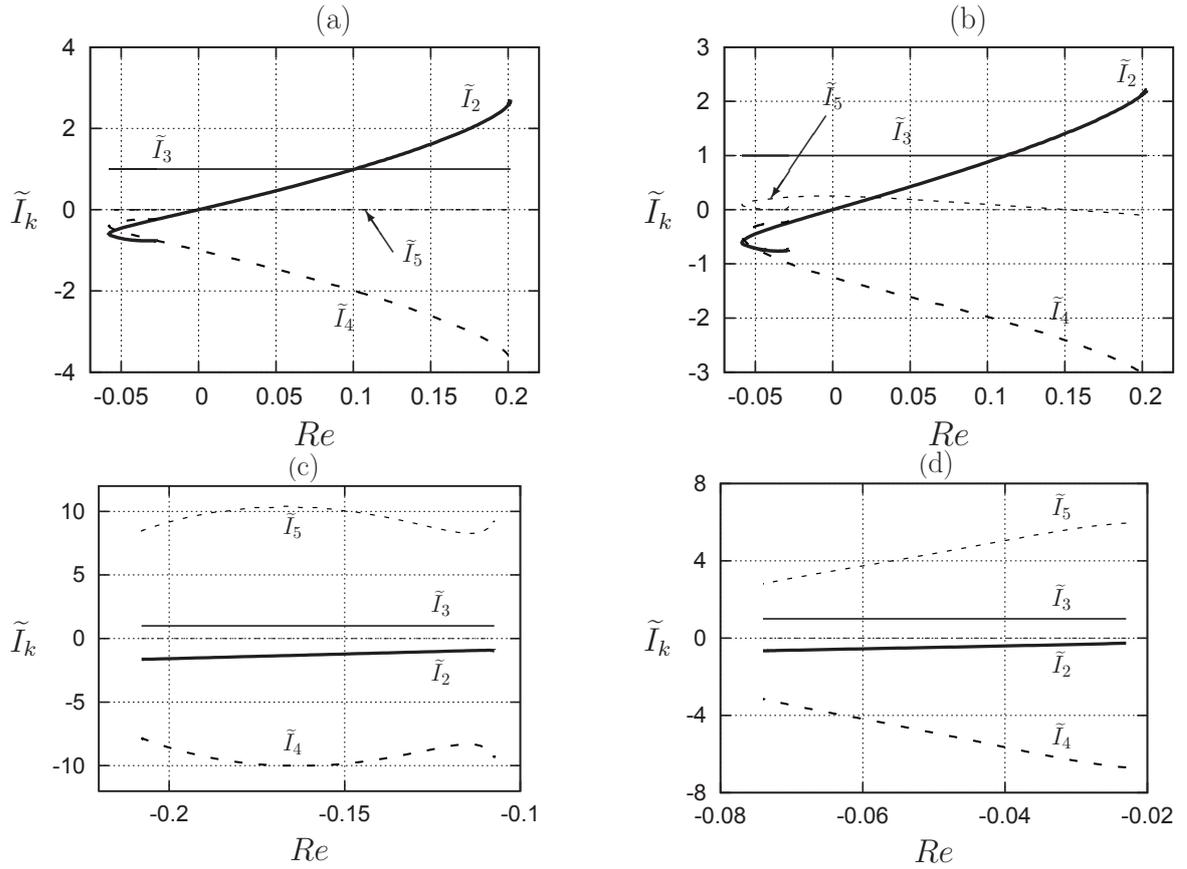


Figure 21: エネルギー収支. (a) は $Pr = 10^{-7}$ の場合の $S^{(H)}$, (b) は $Pr = 7$ の場合の $S^{(H)}$, (c) は $Pr = 7$ の場合の $S^{(C)}$, (d) は $Pr = 7$ の場合の O_S であり, 各々臨界曲線上で評価. $\tilde{I}_j = I_j/I_3$ ($\tilde{I}_3 \equiv 1$) をプロットしている. 臨界曲線上では $\sigma = 0$ のため $I_1 = 0$ であることに注意する.

Figure 21 は, $\bar{W}(x) + Re\bar{U}(x)$ で表されるエネルギー収支の結果である. ここで $\bar{W}(x)$ は $Re = 0$ の場合の主流であり, 一方で $Re\bar{U}(x)$ はクエット流の成分を示している. (a) は $Pr = 10^{-7}$ の場合の $S^{(H)}$, (b) は $Pr = 7$ の場合の $S^{(H)}$, (c) は $Pr = 7$ の場合の $S^{(C)}$, (d) は $Pr = 7$ の場合の O_S の I_1/I_3 から I_5/I_3 をプロットしたものである. いま Re に依存する項と他の項のエネルギー収支に興味があるためすべての I_j を I_3 で割った比 I_j/I_3 で結果を表示している. 臨界曲線上では線形増幅率 σ が 0 のため, I_1 は常に 0 である. 広域に対する $S^{(H)}$ の図は次小節で弱非線形理論の結果として示す. したがって, 個々ではそのような説明をすること Figure 21(a), (b) で \tilde{I}_2, \tilde{I}_4 が折れ曲がるのはその影響である. $S^{(H)}$ の場合, $Re < 0$ であるならば $I_2 < 0$ であり, $Re > 0$ であるならば $I_2 > 0$ である. I_3 に関しては Re に依存せず常に $I_3 > 0$ である. Pr が小さい $Pr = 10^{-7}$ の場合は流体力学的な極限と見なすことができ, 実際にエネルギー浮力の効果は無視することができる. すなわち, $Pr \ll 1$ の場合は, 流体力学的不安定機構により $S^{(H)}$ モードが駆動されているということである. $Pr = 7$ の場合には, I_5 は

無視できないが、相対的にみれば小さい値である。Figure 21(a), (b) の場合は I_5 を除いて大きな変化はみられない。それ故 $S^{(H)}$ は Pr に関わらず、せん断力によって駆動されたものであることがわかる。一方で、Figure 21(c)(d) は、常に $I_3 > 0$ であるため $I_5 > 0$ であるが、 $I_2 < 0$ 、 $I_4 < 0$ が成り立っている。そのため、(c)(d) に関しては、 I_5 はエネルギーを増加させる可能性がある唯一の項である。 $S^{(C)}$ の場合、 $-1.64 \lesssim I_2/I_3 \lesssim -0.94$ の範囲の値をとる。 O_S の場合、 $-0.66 \lesssim I_2/I_3 \lesssim -0.2$ の範囲の値が得られた。この両者は同じオーダーであるため $S^{(C)}$ と O_S は共に浮力駆動型であるといえる。残念ながら、重畳されたクエット流が不安定な $S^{(C)}$ を生成する機構については上記のエネルギー収支の議論からは解明することはできなかった。

4.3 弱非線形解析

この章では、単一モードの振幅の弱非線形発展を記述する Stuart-Landau 方程式と、1:2 共鳴を記述する振幅方程式を、弱非線形解析の一種である多重尺度法を用いて導出する。この導出はシステマティックに行われるため、要点のみを簡潔に述べる。

ある与えられた Pr, Re に対して臨界点 (α_c, Gr_c) (または、中立点 $(\alpha, Gr_n(\alpha))$) の近傍の点 (α, Gr) について考える。ここで微小パラメータ ϵ を次のようにして導入する。

$$\epsilon^2 = \frac{Gr - Gr_c}{Gr_c}, \quad (\text{or } \frac{Gr - Gr_n}{Gr_n}) \quad (51)$$

また、時間スケール t_n を

$$t_n = \epsilon^{2n} t, \quad (52)$$

のように定義。また次のように微分展開

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0} \epsilon^{2n} \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad (53)$$

を導入する。攪乱を ϵ とフーリエ級数で展開すると、

$$\widehat{\Psi} = [\epsilon \Phi_{11} + \epsilon^3 \Phi_{13} + O(\epsilon^5)] e^{i\alpha z} + c.c. + \dots, \quad (54)$$

となる。ここで $c.c.$ は直前の項の複素共役を意味している。式 (53) と式 (54) を攪乱の時間発展方程式 (44) に代入すれば、同次偏微分方程式と非同次偏微分方程式が導出される。最低次の近似より、 $\Phi_{11} = A(t_1, t_2, \dots) \phi_{11}(x)$ が得られる。(ただし $\phi_{11} = (\varphi_{11}, \vartheta_{11})^T$ である) ここで $\varphi_{11}(0) = 1$ により線形固有関数 ϕ_{11} を規格化する。 Φ_{13} の可解条件より、 A の 3 次の振幅方

程式を導くことができる. $z = \epsilon A + O(\epsilon^3)$ とし, また元の時間微分 d/dt に戻すことにより最低次では次の Stuart-Landau 方程式と呼ばれる振幅方程式が得られる.

$$\frac{dz}{dt} = \sigma z + \lambda_1 |z|^2 z, \quad (55)$$

右辺第一項の係数 λ_1 は, 臨界点 (中立点) で評価している. $Re = 0$ の場合, Fujimura, Mizushima [10] によると $S^{(H)}$ モードでは臨界点においてつねに $\lambda_1 < 0$ が維持される. すなわち, 定常モード $S^{(H)}$ の分岐は常に超臨界である. O_S モードに関しても $12 \leq P \leq 10^8$ にわたって臨界曲線上では $\lambda_1 < 0$ であり, 超臨界分岐が生じる.

$S^{(C)}$ に関しては, まず $Pr = 2.4$ かつ $-0.152 \leq Re \leq -0.112$ の場合に臨界曲線に沿って λ_1 の値を数値的に求めた. $-0.152 \leq Re \leq -0.139$ の場合 $\lambda_1 < 0$ になった. 反対に $-0.139 \leq Re \leq -0.112$ の場合には $\lambda_1 > 0$ になることが確認された. $\lambda_1 = 0$ となる非線形縮退点は, $Re = -0.139$ であり, 対応する臨界点は $(\alpha_c, Gr_c) = (0.484, 344)$ である. この縮退点は Figure 15(a) で黒い点で示している. また, 図中の太線は $\lambda_1 < 0$, 細線は $\lambda_1 > 0$ を示す. 次に, $Pr = 7$ に対しても同様の解析を行った. このとき $-0.2 \leq Re \leq -0.145$ の場合 $\lambda_1 < 0$ であり, $-0.145 \leq Re \leq -0.1078$ の場合 $\lambda_1 > 0$ となる. さらに $-0.1078 \leq Re \leq -0.1075$ では再び $\lambda_1 < 0$ となる. この現象は, 非線形縮退が $Re = -0.145, -0.1078$ の 2 点で起こっていることを示している. この 2 点に対応する臨界点は $(\alpha_c, Gr_c) = (1.039, 48.4), (0.334, 451)$ である. これらの縮退点を Figure 15(b) に示す.

$Pr = 7$ で縮退点が 2 つ存在するが, 中立曲線上での λ_1 の符号がどのように変化するかを理解する目的で, $Gr_c \leq Gr \leq 900$ の範囲で λ_1 を算出した. その結果は Figure 22 に示す. 図中, 太線は $\lambda_1 < 0$, 細線は $\lambda_1 > 0$ を意味し, 黒丸は非線形縮退点を示す. 第 1 の縮退点である $Re = -0.1078$ の場合, 上分枝上で $\lambda_1 < 0$, 下分枝上で $\lambda_1 > 0$ となる. (以下では, 臨界点を用いて中立曲線を 2 つの分枝に区別する. 中立曲線上の臨界点を基準に低波数側を下分枝, 高波数側を上分枝と呼ぶことにする) Re の減少にともなって, $\lambda_1 < 0$ の中立曲線の下分枝上の領域は縮小し, 消滅するが, $\lambda_1 < 0$ の上分枝上の領域が拡大して, 第 2 の縮退点である $Re = -0.145$ の場合には, 上分枝上で $\lambda_1 < 0$, 下分枝上で $\lambda_1 > 0$ となる.

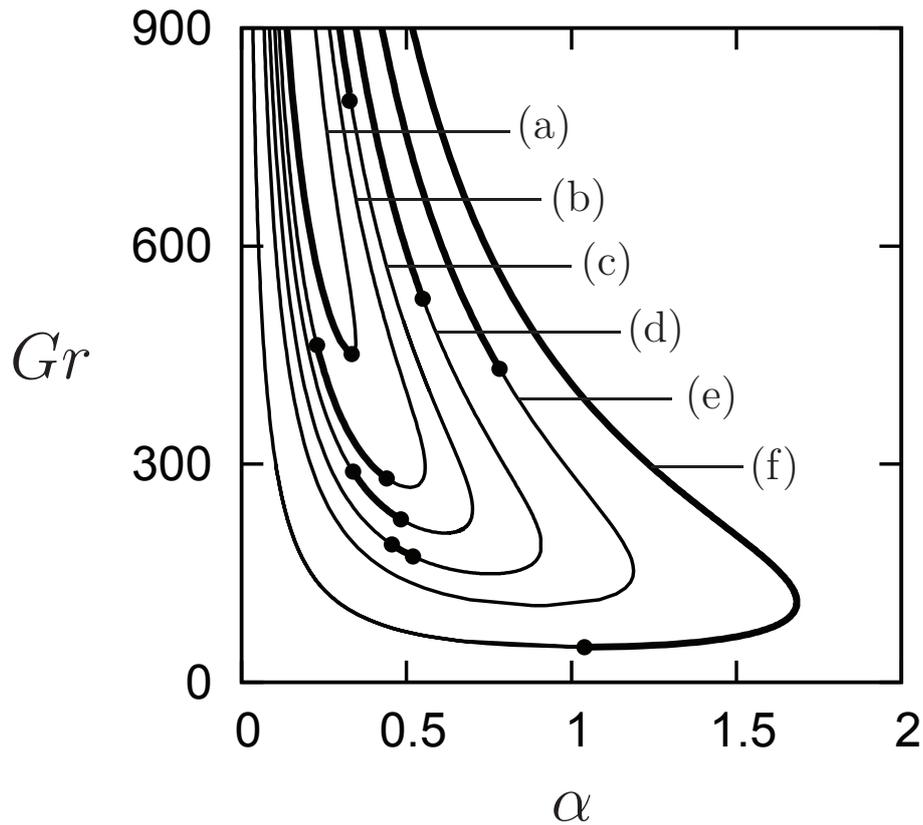


Figure 22: $Pr = 7$ の場合の中立曲線. (a) は $Re = -0.1078$, (b) は $Re = -0.108$, (c) は $Re = -0.109$, (d) は $Re = -0.110$, (e) は $Re = -0.113$ の場合である. 太線は $\lambda_1 < 0$, 細線は $\lambda_1 > 0$ を意味し, 黒丸は縮退点である.

なお Stuart-Landau 方程式は次小節に説明するように中立曲線の下分枝上でかつ, 1:2 共鳴点の近傍では有効ではなく, そのような領域において求められた λ_1 の符号から分岐の亜臨界/超臨界性を議論することはできない. さらに, Lobov, Tarunin[21] の数値シミュレーションにもとづく結果を今回の Stuart-Landau 方程式にもとづく結果と直接比較することはできない. これは彼らと我々とでは無次元化の方法が異なるためである. そこで, 我々の無次元化を彼らの無次元化に合わせ, $Pr = 10$, $Re = -0.119$, $\alpha = 1.0472 (= 2\pi/6)$ の場合に得られる線形増幅領域の上下端, $Gr = 427.4$ と 318.5 における λ_1 を評価した. これらの Gr の値は彼らの $Gr = 445$ と 320 に対応するより正確な値である. この結果 $Gr = 318.5, 427.4$ ともに $\lambda_1 < 0$, すなわち超臨界分岐であることが明らかとなった. 線形増幅領域の上限点近傍で得られた $\lambda_1 < 0$ という結果は彼らの数値計算と一致しなかった. この弱非線形解析の結果は後の章で述べる数値計算と比較しその妥当性を確認しているため, Lobov, Tarunin の結果は疑わざるを得ない.

4.4 1:2共鳴に対する弱非線形解析

ここではわずかに超臨界である $Gr \geq Gr_c$ の場合について考える. 任意の波数分布を持つ正弦波から構成される波束は, 時間の経過とともに最大増幅波数をもつ準単色波に漸近的に移行する. 一方, 分岐の数値解析や数値シミュレーション解析では, 鉛直方向にフーリエ積分を用いる代わりにフーリエ級数展開を導入する. そのため, 波束攪乱の時間発展ではなく, 指定した波数をもつ単色波攪乱とその高調波との非線形相互作用を取り扱うことになる.

中立グラシヨフ数 $Gr_n(\alpha) \geq Gr_c$ に対しては, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して中立曲線上に2つの点 $(k\alpha, Gr_n), ((k+1)\alpha, Gr_n)$ を取ることが可能である. 定常モード $S^{(H)}$ と $S^{(C)}$ に関しては, 共鳴条件 $p k \alpha + q(k+1)\alpha = 0$ を満たすように整数 p, q を選択することが可能なため, 波数比 $k : k+1$ のモード間に $2k$ 次の共鳴が生じる. その際の位相のカップリングは $2k$ 次の項を通して起こる. この他に共鳴がおきる可能性として (α, Gr_n) と $(l\alpha, Gr_n)$ の $1 : l$ 共鳴が挙げられる. (ただし $l \in \mathbb{N}$) この場合整数 p' と q' に対して共鳴条件は $p'\alpha + q'l\alpha = 0$ で与えられる. このとき, 位相のカップリングは $2l$ 次の非線形項を通して行われる. 一方, $k : k+1, 1 : l$ のいずれの共鳴においても, 絶対値を通したカップリングは3次の非線形項が受け持つ. それゆえ, $k > 2$ か $l > 3$ の共鳴の場合その効果は十分に弱いと考えられる. 一方, $k = 1$ または $l = 2$ の場合, 位相カップリングは2次のオーダーで存在することになる. この論文では, 主に中立曲線上の2点 (α, Gr_n) と $(2\alpha, Gr_n)$ 間に生じる波数比 $1 : 2$ の強い空間共鳴のみに注目し解析をおこなった. 以下では, このような (α, Gr_n) を共鳴点と呼び (α^*, Gr_n^*) と表記する.

多重尺度法を用いた弱非線形解析では, 攪乱を次のように展開する.

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(x, z, t) = & \epsilon [\Psi_{1,0}(x, t)e^{i\alpha cz} + \Psi_{-1,0}(x, t)e^{-i\alpha cz} \Psi_{0,1}(x, t)e^{2i\alpha cz} + \Psi_{0,-1}(x, t)e^{-2i\alpha cz}] \\
& + \epsilon^2 [\Psi_{1,0}^{(2)}(x, t)e^{i\alpha cz} + \Psi_{-1,0}^{(2)}(x, t)e^{-i\alpha cz} \Psi_{0,1}^{(2)}(x, t)e^{2i\alpha cz} + \Psi_{0,-1}^{(2)}(x, t)e^{-2i\alpha cz} \\
& + \Psi_{2,0}(x, t)e^{2i\alpha c} + \Psi_{0,0}^{(2)}(x, t) + \Psi_{1,1}(x, t)e^{3i\alpha c} + \Psi_{1,-1}(x, t)e^{-i\alpha c} \\
& + \Psi_{-2,0}(x, t)e^{-2i\alpha c} + \Psi_{-1,1}(x, t)e^{i\alpha c} + \Psi_{-1,-1}(x, t)e^{-3i\alpha c} \\
& + \Psi_{0,2}(x, t)e^{4i\alpha c} + \Psi_{0,-2}(x, t)e^{-4i\alpha c}] \\
& + O(\epsilon^3),
\end{aligned} \tag{56}$$

のように展開する. 微小パラメタ ϵ は

$$\epsilon = (Gr - Gr_*)/Gr_* \tag{57}$$

で定義した. 多時間スケール t_n

$$t_n = \epsilon^n t,$$

を導入し, 微分展開 $\frac{\partial}{\partial t} = \sum_0^\infty \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}$ を用いる. 最低次の近似において, $\Phi_{11} = a_1(t_1, t_2, \dots)\phi_{11}(x)$ と $\Phi_{21} = a_2(t_1, t_2, \dots)\phi_{21}(x)$ が得られる. $\varphi_{11}(0) = 1$ and $\varphi_{21}(0) = 1$ によって線形固有関数 ϕ_{11} と ϕ_{21} を規格化する. (ただし $\phi_{21} = (\varphi_{21}, \vartheta_{21})^T$ である) 2次の近似では, Φ_{12} と Φ_{22} の可解条件により, 2次のオーダーの非線形項を含んだ a_1 and a_2 の振幅方程式が導出される. この結果として $\Phi_{12} = a_1\phi_{12}^{(1)} + \bar{a}_1 a_2\phi_{12}^{(2)} + b_1\phi_{11}$ と $\Phi_{22} = a_2\phi_{22}^{(1)} + a_1^2\phi_{22}^{(2)} + b_2\phi_{21}$ が導かれる. 3次の近似からは, Φ_{13} and Φ_{23} の可解条件より新たな振幅方程式が得られる. ここでは $\epsilon a_1 + \epsilon^2 b_1 + O(\epsilon^3) = z_1$ and $\epsilon a_2 + \epsilon^2 b_2 + O(\epsilon^3) = z_2$ のようにして変形をして元の時間スケール t に戻すと次の式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \sigma_1 z_1 + \kappa_1 \bar{z}_1 z_2 + z_1(\lambda_{11}|z_1|^2 + \lambda_{12}|z_2|^2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= \sigma_2 z_2 + \kappa_2 z_1^2 + z_2(\lambda_{21}|z_1|^2 + \lambda_{22}|z_2|^2), \end{aligned} \quad (58)$$

が得られる. $\sigma_1 < 0$ かつ $\sigma_2 < 0$ で安定な自明解 $z_1 = z_2 = 0$ 以外の解を求めるために式 (58) を極形式で次のように書きなおす.

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \sigma_1 r_1 + \kappa_1 r_1 r_2 \cos\Theta + r_1(\lambda_{11}r_1^2 + \lambda_{12}r_2^2), \\ \frac{dr_2}{dt} &= \sigma_2 r_2 + \kappa_2 r_1^2 \cos\Theta + r_2(\lambda_{21}r_1^2 + \lambda_{22}r_2^2), \\ \frac{d\Theta}{dt} &= -2\kappa_1 r_2 \sin\Theta - \kappa_2 r_2^{-1} r_1^2 \sin\Theta, \end{aligned} \quad (59)$$

ここで, $z_1(t) = r_1(t)e^{i\theta_1(t)}$, $z_2(t) = r_2(t)e^{i\theta_2(t)}$ とおき, 位相差として $\Theta = \theta_2 - 2\theta_1$ を定義した. 式 (59) は3つの定常解を持つ

1. 単純モード PM: $(r_1, r_2) = (0, r)$
2. 混合モード MM: $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \sin\theta = 0$
3. 伝播波モード TW: $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \sin\theta \neq 0$.

これらの解を記述する方程式と安定性については付録に譲る. さて, これらの定常解に加えて以下の4種類の解が存在することがよく知られている.

4. 定在波モード SW: 混合モードの分枝から分岐する解.
5. 変調伝播波モード MTW: 伝播波モードの分枝から Hopf 分岐によって発生する解.
6. ヘテロクリニック軌道: 単純モード PM が不安定である場合に鞍点である異なる符号の単

Table 3: 式 (58) の係数.

in Figure 23	A	C	D	E	F
Pr	2.4	7	7	7	7
Re	0	0	-0.113	-0.14488	-0.2
α_*	0.879181	0.877921	0.576912	0.692786	0.197058
Gr_*	615.480	615.366	126.111	55.3883	186.382
κ_1	-7.11848	-1.37549×10^1	-4.63982	-1.58731	3.58503×10^{-2}
κ_2	1.41379	1.44353	-6.50249×10^{-2}	-4.80162×10^{-3}	1.29231×10^{-1}
λ_{11}	-1.30531×10^3	-4.74931×10^3	1.79547×10^3	2.73623×10^1	-6.20152×10^1
λ_{12}	-6.09509×10^3	-2.67328×10^4	5.80990×10^3	3.33864×10^2	-1.46859×10^2
λ_{21}	-3.65885×10^3	-1.32061×10^4	5.15636×10^2	-3.38483×10^2	-4.06713×10^1
λ_{22}	-4.85581×10^3	-1.97300×10^4	6.06593×10^3	-1.02417×10^2	-2.19346×10^2

純モード間を接続する解.

次に $(P, R) = (2.4, 0), (7, 0), (7, -0.113), (7, -0.145), (7, -0.2)$ の場合の式 (59) を数値的に求めた結果を Table.(4.4) に示す. ここで各 (P, R) を Figure 23 のように A, B, ..., F とラベル付けした.

4.5 数値計算による非線形解の解析

分岐の数値解析としてニュートン-ラフソン反復法を用いて非線形解を直接数値的に解くためにフーリエ-チェビシェフ展開する.

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} (x, z, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=-N}^N \begin{pmatrix} a_{n,m}(1-x^2)^2 \\ b_{n,m}(1-x^2) \end{pmatrix} T_m(x) e^{in\alpha(z-ct)}. \quad (60)$$

式 (60) を式 (44) に代入しコロケーション法を適用する. このとき $2 \times (M+1) \times (2N+1)$ の点で離散化して評価した $a_{n,m}, b_{n,m}$ と位相速度 c に対する非線形代数方程式をニュートン-ラフソン法を用いて解く. その際に攪乱の位相を $a_{10} = 1$ と固定する必要がある.

一般的な傾向としては, 大きい Pr, Gr の場合はより大きい M, N が必要になる. ここでは

標準的に $M = 33, N = 10$ を展開の打ち切り項数とした. α が小さい場合には高調波との共鳴のためより高次の精度 N が必要になる場合がある. 例えば Figure 15(b) の下部の点では $M = 23, N = 28$ という打ち切り項数で計算している.

$$(\|\widehat{\psi}_2\|)^2 = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_{-1}^1 |\widehat{\psi}(x, z, t)|^2 dx dz. \quad (61)$$

によって定義される攪乱の L_2 -ノルムの2乗 $(\|\widehat{\psi}_2\|)^2$ の数値誤差が 5×10^{-5} 以下となるように M, N を選んだ. ただし $Pr = 7, Re = -0.113, \alpha < 0.2$ の領域のみ高次の共鳴が発生するためこの数値誤差を保証できていない.

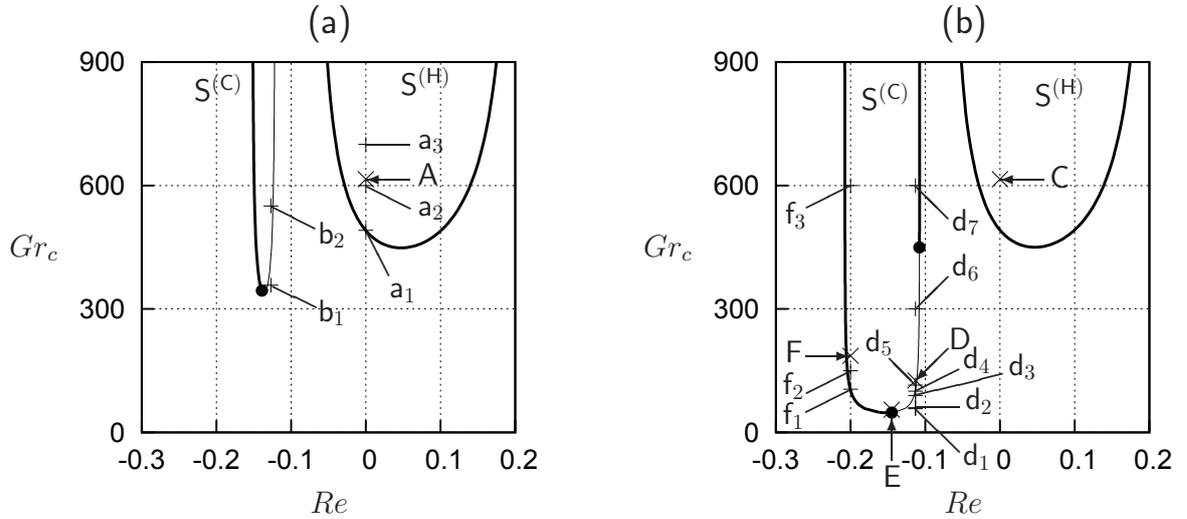


Figure 23: figure 15 の臨界曲線. (a) は $Pr = 2.4$, (b) は $Pr = 7$ の場合である. (b) では煩雑になるのを避けるため, O_S モードに対する臨界曲線を除いて表示している. A, B, \dots, F の矢印が指す \times 記号は Table 4.4 に示した共鳴点を表しており, 点 a_1, \dots, f_3 は数値的な解析を行った点を示している.

求めた解分枝の安定性を調べるため, 式 (58) を数値計算を実行した. 一般に 3次元攪乱に対する標準的な安定性解析としては Floquet 解析が用いられ, その有効性についてもよく知られている. しかしながら本研究では, Floquet 解析を行う代わりに, 簡易的な解析方法として解の時間発展を数値シミュレーションによって追跡する方法を採用する. 攪乱を次のようにフーリエ級数とチェビシェフ多項式で2重展開する.

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} (x, z, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=-2N}^{2N} \begin{pmatrix} c_{n,m}(t)(1-x^2)^2 \\ d_{n,m}(t)(1-x^2) \end{pmatrix} T_m(x) e^{in\alpha z/2}. \quad (62)$$

この展開は式 (60) に波数 $n\alpha/2$ の分数調波攪乱を付加することに対応しているため, 式 (62) を用いることにより解分枝が分数調波攪乱に対して安定どうかを判定することが可能である.

これによって解くべき非線形偏微分方程式を $2 \times (M + 1) \times (4N + 1)$ 次元の常微分方程式に帰着し、ルンゲ-クッタ法及びクランク-ニコルソン法を用いて解いた。

式 (60) の定常解と任意の攪乱を重ね合わせたものを初期条件として用いて長時間の時間発展を追跡し、解が安定であるかを判定した。このときの安定の判定基準は、

$$\left(\frac{\|\hat{\psi}(t) - \hat{\psi}_e\|_2}{\|\hat{\psi}_e\|_2} \right)^2 < 0.005 \quad \text{for } t \gg 1, \quad (63)$$

とした。ここで $\hat{\psi}_e$ は式 (60) の定常解である。これは厳密な安定性の判定基準とは言えないが便宜上、この基準にしたがい判定した。

4.6 数値結果

この章では Figure 23 の A, \dots, F で示された 1:2 共鳴点を与えるグラシヨフ数 Gr_* の上下で解の分岐特性を調べるとともに、Figure 23 の a_1, \dots, f_3 における大域的分岐解を数値計算によって求めた。Figure 27, 28, 30, 33 の各図において、(a) は与えられた Pr, Re における 2 種類の中立曲線を示す。すべての図において、実線はノーマルモード $\hat{\Psi} = \phi(x)e^{i\alpha(z-ct)}$ に対応する中立曲線を示し、一方で破線は $\phi(x)e^{2i\alpha(z-ct)}$ に対応する中立曲線を示している。つまり、実線を水平方向に 1/2 倍したものが破線になっていることを意味している。これらの 2 本の曲線が交差する点 (α_*, Gr_*) が 1:2 共鳴点である。

一方、Figure 27, 28, 30, 33 の (b) は、Figure 23 の a_1, \dots, f_3 における大域的な分岐図である。(b) の縦軸は、 $(\|\hat{\psi}\|_2)^2$ である。実線は式 (60) においてすべての n に対して非 0 の値をもつ $a_{n,m}, b_{n,m}$ によって記述される解である。破線は奇数の n に対して $a_{n,m}, b_{n,m}$ がすべて 0 になる解である。破線の解分枝は波数 α 方向に 1/2 にリスケールしたものである。ニュートン-ラフソン法では適当な初期値を与え、解が一定の値に収束したと判定されるまで繰り返し計算を行うが、破線に沿って基本波数 α とその高調波から構成された初期値を与えた結果得られた解は基本波数 α の成分をを含まず、 2α とその整数倍の波数成分をあたかも基本モードの波数が 2α であるかのように含んでいた。以下では、実線を α モードと呼び破線を 2α モードと呼ぶ。

分岐特性の詳細を説明する前に、次のことを注意しておく。各 Pr, Re, Gr について、式 (58) 及び式 (59) の線形増幅率 σ_1, σ_2 の符号は、 $\alpha > \alpha_-$ の場合 $\sigma_1 > 0$ であり、 $2\alpha < \alpha_+$ の場合

$\sigma_2 > 0$ である. 特に, $G < G_*$ のとき, $\alpha_+/2 < \alpha < \alpha_-$ ならば σ_1 と σ_2 は両方共に負になる. 一方で, $Gr > Gr_*$ のとき, $\alpha_- < \alpha < \alpha_+/2$ ならば σ_1 と σ_2 は両方正になる. ここで, α_-, α_+ はある与えられた Gr に対する増幅波数帯の下限値と上限値を示している.

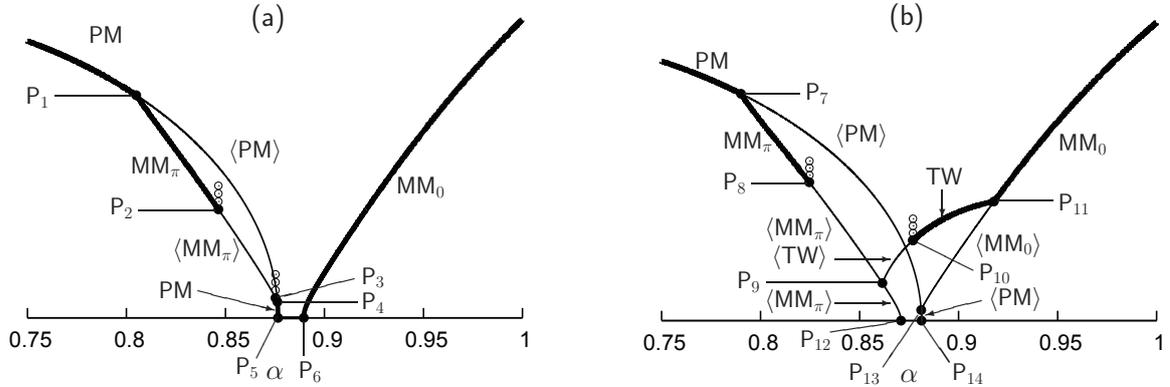


Figure 24: $S^{(H)}$ モードの分岐図. $Pr = 2.4$, $Re = 0$. (a) は $Gr=610$, (b) は $Gr = 620$. 臨界点は $Gr_* = 615$ である. 太線でかつ括弧がついていない解分枝は安定である. 逆に細線でかつ括弧が付いている解分枝は不安定である. 黒点は Hopf 分岐点である. 振幅の大きさは $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ を用いて表した. Hopf 分岐後の非定常解については Figure 26 を参照

Figure 24 は式 (59) に基づいて中立安定な定常モード間の 1:2 共鳴に対して求めた分岐図である. Figure 24 は $Pr = 2.4$, $Re = 0$ の場合の $Gr = 610, 620$ に対する式 (59) の定常解の分岐を示している. この 2 つの Gr の値の間に臨界点 $Gr_* = 615.48$ が位置している. Appendix A.5 において述べるように, 単純モード PM は $\sigma_2 + \lambda_{22}r_2^2 = 0$ が成り立てば存在することができる. ここで考える λ 's はすべて負であるので, PM の解分枝は $\alpha = \alpha_+/2$, すなわち, $Gr < Gr_*$ のときは点 P_5 , また, $Gr > Gr_*$ のときは点 P_{14} から $\sigma_2 > 0$ の領域に向かって超臨界分岐する. 混合モードを $\cos \Theta$ の符号で区別するため, 以下では, $\Theta = 0$ の MM を MM_0 , $\Theta = \pi$ の MM を MM_π とよぶことにする. 混合モード解は式 (94) によって表される. この第 1 式より, MM_0 が存在するためには $\sigma_1 + \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 > 0$ が成り立たねばならない. また, 第 2 式 $r_2(\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2) + (\kappa_2 + \lambda_{21} r_2) r_1^2 = 0$ より, $r_2 \ll 1$ では $\sigma_2 < 0$ を得る. このため, MM_0 は Figure 24(a) の点 P_6 から分岐する. 一方, MM_π が自明解から分岐するためには, $\sigma_1 - \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 > 0$ と $r_2(\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2) + (-\kappa_2 + \lambda_{21} r_2) r_1^2 = 0$ がなりたたねばならない. 第 1 式は $r_2 \ll 1$ の場合の σ_1 の符号に対して何ら制約を加えないが, 第 2 式は $-\kappa_2 + \lambda_{21} r_2 < 0$ より $\sigma_2 > 0$ を与える. これは Figure 24(b) において, MM_π が P_{12} から分岐することと一貫している. PM の解分枝上で MM_0 が分岐するためには, $\sigma_1 + \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 = 0$ と $\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2 = 0$ が必要であるので, $\sigma_1 > 0$ かつ $\sigma_2 > 0$ を得る. このため, MM_0 は P_{13} において PM から分岐する. 一方で, MM_π が PM から分岐するためには, $\sigma_1 - \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 = 0$ が成り立つ必要

があるので、十分小さな r_2 に対して $\sigma_2 > 0$ と $\sigma_1 < 0$ を得る. MM_π が点 P_1 と P_4 において PM から分岐するのはこのためである. $Gr = 610$ の場合, MM_π の解分枝は PM 上の 2 点 P_1 と P_4 を橋渡しするが, $Gr = 620$ では PM 上の点 P_7 と自明解を橋渡しする. Figure 24(b) より, 伝播波解 TW が $Gr = 620$ の場合存在し, MM_π の解分枝上の点 P_9 と MM_0 の解分枝上の点 P_{11} を橋渡しする. MM_π 上の点 P_2, P_3 と P_8 ならびに TW 上の点 P_{10} に示した白抜きの丸印は Hopf 分岐を意味する. 定在波 SW は点 $P_2, P_3,$ and P_8 において MM_π から分岐し, また変調波 MTW が TW の解分枝上の点 P_{10} から Hopf 分岐する. Figure 25 は定常モード PM, MM_π , TW, MM_0 の空間構造を示す. これらは攪乱を

$$\hat{\Psi} = (\hat{\psi}, \hat{\theta})^T = r_1 \Phi_{11}(x) e^{i(\alpha z + \theta_1)} + c.c. + r_2 \Phi_{21}(x) e^{2i(\alpha z + \theta_1) + i\Theta} + c.c.$$

で近似して求めたものである. 線形固有関数は波数 α の影響を大きくは受けない. PM は 2α -モードであるため, 支配的な波長は π/α であるが, それ以外の 3 つの解は α -モードであり支配的な波長は $2\pi/\alpha$ である. 大雑把に言うと, MM_π の空間構造は MM_0 の空間構造において $\hat{\psi}, \hat{\theta}$ を共に符号を逆転し, さらに半波長 π/α だけシフトしたものに相当する. 実験室系において MM_π を MM_0 から区別することは容易ではないが, これらの間の違いは TW が存在する上で必要である. TW は MM_π と MM_0 の中間的な空間構造を有している. 時間に依存する解も含めた分岐図を示すために, $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ の代わりに r_2 を振幅を代表する量として用いる.

Figure 26(a) と (b) は Figure 24(a) と (b) においてすでに示した定常解とともに時間に依存する解を示したものである. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ から r_2 への変更に伴って, Figure 26(a) と (b) における定常解の解分枝は Figure 24(a), (b) におけるそれらからわずかに歪んだものになっている. Figure 26(a) は MM_π の解分枝から Hopf 分岐する定在波 SW と, SW の存在領域の端点 (Q_1 と Q_2) の間に存在するヘテロクリニック軌道 HO を示す. Figure 26(b) によると, SW は MM_π から, また, 変調波は TW から Hopf 分岐する. SW の存在領域の上限, Q_3 , と MTW の存在領域の下限, Q_4 の間にヘテロクリニック軌道が存在する. Figure 26(a), (b) で, 挿入図は ξ, η, ζ -空間内の解軌道を示す. ここで, $\xi = r_1, \eta = r_2 \cos \Theta, \zeta = r_2 \sin \Theta$ とした. ヘテロクリニック軌道 HO は 2 つの PM, すなわち $\eta = \pm \sqrt{-\sigma_2/\lambda_{22}}$ を結んでいる. 定在波解 SW は ξ, η -平面上に存在するが, α の変化と共に, SW の軌道は ξ, η -面内で拡大し, ひとたび PM に接触すると, SW の軌道はヘテロクリニック軌道に変化する. 同様に, 変調波解 MTW は ξ, η, ζ -空間に存在する. Figure 26(b) の挿入図が示すように, その軌道は 2 つの PM 解, $-\sqrt{-\sigma_2/\lambda_{22}} < \eta < \sqrt{-\sigma_2/\lambda_{22}}$ の間で η -軸と交差する. ひとたび PM と接触すると, MTW 解はヘテロクリニック軌道に変化する. 非定常解の詳細とここで述べたヘテロクリニック軌道

以外のヘテロクリニックサイクルについては Porter and Knobloch[25] に詳しい議論がある.

ここで, Figure 24 と Figure 26 の解釈について述べておく. まず, $Gr = 610$ の場合を考える. α の値を PM だけが安定な解として存在する $\alpha = 0.75$ から増加させる状況を考えよう. PM の解分枝上では基本波数 α をもつ解は存在しない. その代わりに, 基本波数 2α をもつ解が単純モードとして存在する. したがって, PM は 2α -モードである. Figure 24 における点 P_1 に相当する α よりも大きな α において, MM_π が α -モードとして現れる. 点 P_2 では, SW が分岐し, Figure 26 の点 Q_1 まで存在する. Q_1 と Q_2 の間では HO が観察される. 点 Q_2 と Figure 24 の点 P_3 の間では, SW が再び実現される. P_3 と P_4 の間では, 安定な MM_π が α -モードとして存在する. P_4 と P_5 の間では安定な PM が 2α -モードとして実現される. P_5 と P_6 の間ではすべての解が 0 にまで減衰する. α が P_6 に対する値よりも大きい場合, もう 1 つの α -モードである MM_0 が少なくとも $\alpha = 1$ まで得られることが Figure 24(a) より分かる.

一方, $Gr = 620$ では, 単純モード PM が 2α -モードとして P_7 に対応する α 未満では実現される. P_7 と P_8 の間では, MM_π は安定な α -モードである. P_8 と Q_3 の間では, SW が安定な周期解として現れる. 点 Q_3 に対応する α からある α の値 α_\dagger をもった点 Q_4 までの範囲で, HO が現れ, Q_4 と P_{10} の間では, MTW が達成される安定な解である. なお, 振幅方程式 式 (58) もしくは 式 (59) の数値積分結果から MTW と HO の境界点 α_\dagger を決定するのは困難である.

さて, 点 P_{10} と P_{11} の間で, TW が安定な解である. P_{11} に相当する α 以上では α -モードである MM_0 が少なくとも $\alpha = 1$ までは存在する. TW, SW, MTW, HO はいずれも α -モードである.

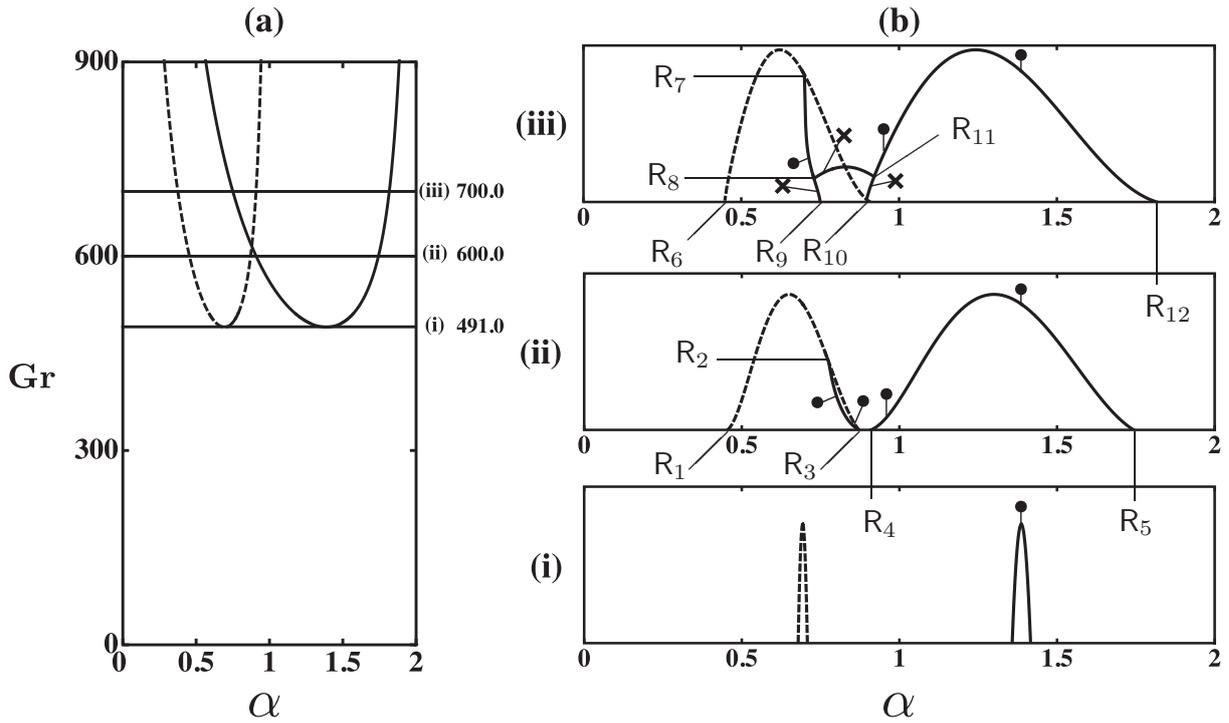


Figure 27: 定常モード $S^{(H)}$ に対する中立曲線 (a) と大域的分岐図 (b). $Pr = 2.4$, $Re = 0$. (i) $Gr = 491$ (Figure 23(a) の点 a_1), (ii) $Gr = 600$ (点 a_2), (iii) $Gr = 700$ (点 a_3). 分岐図における縦軸は $(\|\hat{\psi}\|_2)^2$. (a) における破線は実線で示した中立曲線を α 方向に $1/2$ 縮小したものであり, (b) における破線は式 (62) における展開係数 $a_{n,m}$ と $b_{n,m}$ が n が奇数の場合に 0, 偶数の n に対しては非 0 であるもの, 実線は n の偶奇によらず $a_{n,m}$ と $b_{n,m}$ が非 0 であるものを指す. 同図中の黒丸は解分枝上の対応する点が式 (63) によって安定, クロス印は不安定と判定されたことを意味する. (a) の中立曲線上のすべての点において $\lambda_1 < 0$ が成り立つ.

さて, Figure 24 と 26 における分岐図は式 (58) と 式 (59) にもとづく局所分岐解を示したものであるが, それらは大域的分岐構造の中に埋め込まれている必要がある. 以下では大域的分岐特性を示す. Figure 27(a) は $Pr = 2.4$, $Re = 0$ における $S^{(H)}$ モードに対する中立曲線である. 1:2 共鳴点 (α_*, Gr_*) は Table I に示すように実線と破線の交点から求められる. Figure 27(b) は $Gr = 491$ (Figure 23 における点 a_1), 600 (a_2), および 700 (a_3) である. $Gr = 491$ は臨界グラシヨフ数 G_c よりもわずかに大きいことが Figure 27(a) から分かる. したがって, 定常解の解分枝は Figure 27(b_i) のように自明解から超臨界分岐する. ここで, 破線は参考程度の意味で示している. Figure 27(b_{ii}) と (b_{iii}) は大域的分岐構造を示しているが, $(\|\hat{\psi}\|_2)^2 \simeq 0$ の局所構造に限定すると, それぞれ Figure 24(a) と (b) に定性的に一致することが分かる. 共鳴波数の近傍では, R_1 から分岐して R_3 に向かう, あるいは R_6 から分岐して R_{10} に向かう破線は波数 α をもった単純モードとしての役割を担い, これらは R_4 と R_5 の間, もしくは R_{10}

と R_{12} の間に存在する波数 2α の非線形解に対応する.

R_2 と R_3 , R_4 と R_5 , R_7 と R_9 , R_8 と R_{11} , もしくは R_{10} と R_{12} の間の実線は, 基本波数 α をもった混合モード解 MM もしくは伝播波解 TW に対応する. したがって, 点 R_1 あるいは R_6 から波数 α を増加させるとき, ニュートン-ラフソン反復法は点 R_4 または R_{10} から出発して, 実線上の R_2 または R_7 と対応する点までの解分枝に収束する. そうして, 点 R_2 または R_7 において, 混合モード MM_π が突然現れる. 点 R_2 と R_3 , あるいは R_7 と R_{11} の間では, 分岐のシーケンスは定性的に Figure 24 のそれと良く一致する.

ニュートン-ラフソン反復法では, 伝播波解 TW に対応する実線上の点 R_8 and R_{11} 間の解は $\pm c$ という位相速度をもつ. 振幅方程式によって予測される伝播波解の伝播方向については Appendix A.5 参照.

Figure 27(b) における黒丸は判定条件式 (63) によって安定と判定された箇所, クロスは不安定と判定された箇所を示す. Figure 27(b) における解分枝の安定特性は Figure 24 における解分枝の安定特性は一貫しているしていることが分かる. 次に $Pr = 7$, $Re = 0$ に対する Figure 23 の点 C に移ろう. C における κ と λ は点 A におけるそれらと同一の符号を有する. したがって, 点 C においても Figure 24 と 26 に示した点 A での分岐図と定性的に同一の分岐特性が得られる. また, 我々の数値解析の結果も Figure 27(b) と定性的に同一の結果を与えるため, 点 C における分岐図は省略する.

さて, 1:2 共鳴は余次元 2 の分岐問題である. したがって, 分岐構造を完全に理解するためにはたとえば α と G のような 2 つのパラメータを変化させる必要がある. 以上では, あたかも波数 α を連続的に変化させることが可能なパラメータであるかのように扱ってきた. しかし, 実験室系においては, 臨界点以外の波数を制御することは容易ではない. 波数を制御するための唯一の方法は thermal-imprinting 法と呼ばれ, Chen and Whitehead [26] によって Rayleigh-Bénard 対流において 2 次不安定性を検出する目的で導入された. したがって, 実験室系では, thermal-imprinting 法によって所定の波数をもつ攪乱を作り出し, G を連続的に変化させることが, パラメータを変化させるために我々にとって実行可能な方法である. にもかかわらず, 分岐構造をより明確に理解する目的で, 本論文ではいくつかの G の値に対して α を変化させることにする. Figure 23(a) において, $Pr = 2.4$ において $S^{(C)}$ モードに対する臨

界曲線は狭い R の幅を有していた。対応する中立曲線も Figure 28(a) に示すように、増幅波数帯が狭いことが分かる。 $G \leq 900$ の範囲に限ると実線と破線の交点は存在しないため、弱非線形の観点からの 1:2 共鳴は存在せず、振幅方程式 (58) は使うことができない。 Figure 23 の点 b_1 に対する Figure 28(b_i) はベースラインから浮いた 2 本のループを示している。これらの浮いた解分枝は分岐が重臨界であることに由来する。 $Gr = 358$ に対する Figure 28(b_i) の分岐図では、実線の解分枝が破線のループ上の 2 点 R_3 と R_4 を繋いでいる。破線のループが存在しなければ、その実線の解分枝は他の解分枝と接続することなく孤立していることになる。 1:2 共鳴は存在しないが、実線は混合モード解 MM, 破線は単純モード解 PM の特徴を備えていると言することができる。実際、 α の値を 0 から増加させるとき、 R_1 において波数 2α を基本波数とする非線形会があたかも R_6 から分岐した基本波数 2α であるかのように分岐する。 R_2 では、 α -モードが突如分岐し、 R_3, R_4 まで存在した後、消滅する。 R_3 から R_5 まで、そして、 R_4 から R_5 まで、 2α -モードは存在するが、点 R_5 は α -モードの点 R_7 に対応する。 $Gr = 550$ では、中立曲線の上分枝、下分枝の双方から重臨界分岐する。このときも、Figure 28(b_i) と同様の解分枝が得られるが、それらはベースラインから分岐する。

Figure 28(a) では、水平方向に $2/3$ 縮小された中立曲線も一点鎖線で表示している。実線は一点鎖線と交差するので、 $(\alpha, Gr) = (0.281, 597)$ において 2:3 共鳴が発生することが分かる。定常モード間に 2:3 共鳴が生じると、 2α と 3α を波数にもつ 2 モード間の振幅方程式を導出することが可能である。その振幅方程式によると、単純解としては $z_2 \neq 0$ かつ $z_3 = 0$ という解と $z_2 = 0$ かつ $z_3 \neq 0$ という解が存在可能である。 Figure 28(b_{ii}) によれば、そのような 2:3 共鳴の特徴的な解分枝を見いだすことはできない。実際、点 R_{10}, R_9, R_{11} を結ぶ実線の解分枝が破線で示した解分枝から分岐するが、その分岐点は厳密に R_{10} と R_{11} という破線上の点である。このことは、すでに指摘したように、2:3 共鳴では位相のカップリングが 4 次の非線形項を通して行われるのに対して、絶対値のカップリングが 3 次で行われることによると考えられる。 [?] Figure 29 は $Pr = 7, Re = -0.113$ における $S^{(C)}$ モードの解分枝である。(a)

は $Gr = 125$, (b) は $Gr = 127$ である。 λ_{22} は正であるため、単純モード解 PM は P_1 と P_6 から $\sigma_2 < 0$ を満たすように高波数領域に向けて分岐する。混合モード解 MM が存在するためには、式 (94) の第 1 式より $-\lambda_{11}^{-1}(\sigma_1 + \kappa_1 r_2 \cos \Theta + \lambda_{12} r_2^2) > 0$ を満たす必要がある。 MM_π については、これは $\sigma_1 < 0$ を意味する。式 (94) の第 2 式 $0 = r_2(\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2) + (\kappa_2 \cos \Theta + \lambda_{21} r_2) r_1^2$ より、 $\sigma_2 < 0$ を得る。したがって、 MM_π は自明解から点 P_3 において、 $\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2 = 0$ と $\sigma_1 + \kappa_1 r_2 \cos \Theta + \lambda_{12} r_2^2 = 0$ が成り立つ点 P_2 に向けて分岐する、点 P_1 と P_3 の間では、自明

解は安定である. 一方で, 混合モード解 MM_0 に対しては, $\kappa_1 r_2 \cos \Theta < 0$ が成り立つ. したがって, $r_2 \ll 1$ のとき, 式 (94) の第 1 式は $\sigma_1 > 0$, また第 2 式は $\sigma_2 > 0$ を要求する. MM_0 は点 P_4 において, P_5 に向けて分岐する. $r_2 \ll 1$ を仮定しない場合は, 式 (94) 第 1 式の $\kappa_1 r_2 \cos \Theta + \lambda_{12} r_2^2$ は, σ_1 が比較的小さければ σ_1 の符号に依らず負に保たれる. また, 第 2 式は σ_2 の符号に対して何ら制約を課すことはない. このため, MM_0 の解分枝は Figure 29 において自明解から浮いて存在している. 単純モード解 PM 上では, MM_0 が分岐するためには $\sigma_1 > 0$ と $\sigma_2 < 0$ が必要であり, MM_π が分岐するためには $\sigma_1 < 0$ と $\sigma_2 < 0$ が必要である. これらはそれぞれ点 P_5 と P_2 の位置と一貫している.

Figure 30(a) には $Pr = 7$, $Re = -0.113$ における $S^{(C)}$ モードに対する中立曲線, (b) には大域的分岐図を示す. Figure 30(b_i)–(b_{iv}) ではすべての解分枝がベースラインから浮いているため, 明らかに亜臨界分岐である. Figure 30(b_i) における分岐構造は Figure 28(b_i) におけるそれと類似である. Figure 30(b_i) を除くと, 分岐図は複雑に入り組んだ構造を有しており, その全体像を求めることは困難である. これは, G の増加に伴って非線形解の存在領域が大きく拡大し, α , 2α , 3α 等の波数をもつ定常モード間の相互作用が効いてくるためと考えられる. Figure 30(b_v) と (b_{vi}) では実線で示した解分枝は線形増幅波数帯の上限値 α_+ をかなり超えた領域まで伸びていることから, 亜臨界分岐であるといえる. Table I にリストした共鳴点 (α_*, G_*) は Figure 30(a) の実線と破線との交点に位置している. そのため, Figure 30(b_v) の $G = 115$ は G_* よりもわずかに低い. Figure 30(b_v) の小さな領域 (p) の拡大図を挿入図 (p) として示すが, 破線の解分枝が点 R_1 において自明解から分岐している. また, ほぼ同一の点から実線の解分枝が分岐し, R_2 で終わっている. 破線からは実線が点 R_3 において分岐する. Figure 29(a) の分岐図と Figure 30(b_v) の対応関係は次の通りである. Figure 29(a) において点 P_1 から分岐する単純モード PM bifurcating は Figure 30(b_v) における破線と対応しており, P_2 と P_3 を橋渡しする混合モード解 MM_π は R_1 と R_2 を橋渡しする実線に対応している. Figure 29(a) においてベースラインから浮いていた混合モード MM_0 は R_3 と R_4 を結ぶ別の実線に対応している. このように, 式 (59) によって予測された局所分岐構造は確かに Figure 30(b_v) に示した大域的分岐構造の中に埋め込まれていることが分かる.

Figure 30(b_i)–(b_{vi}) での分岐は亜臨界であったため, Figure 7 (e) を思い出そう. $Gr > 426.8$ では中立曲線の上分枝に沿って $\lambda_1 < 0$ であるが, それ以外の中立曲線上分枝上と, 共鳴点近傍を除く中立曲線の下分枝に沿って, $\lambda_1 > 0$ である. 一見すると, これは Figure 30(b_{vii}) の $G = 600$ における高波数領域に伸びる解分枝と一貫しない. その理由を知るために, Herbert[27] によ

る振幅展開法を用いて 13 次のオーダーまでの非線形項を含む Stuart-Landau 方程式,

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A + \sum_{j=1}^6 \lambda_j |A|^{2j} A \quad (64)$$

を導出し, 各々の係数 λ_j 値を数値的に求めた. その結果を Table II に示す. 等温の場合の平面ポワズイユ流の場合, 係数 λ_j は j の増加と共にその符号を $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0, \dots$ のように変化させた. [28] これに対して, 今回の $G = 600$ における λ_j の符号は $j = 2, 3, 4, 5$ で正, $j = 1$ と $j = 6$ で負であることが分かった. Figure 30(b.vii) の小領域 (q) の拡大図を挿入図 (q) として示すが, 解分枝が点 R_5 においてベースラインから鈍角を成して分岐しているのはそのためである. しかし, 振幅が増大すると共に解分枝はすぐに折れ戻り, 最終的に $\alpha \simeq 1.58$ という $2.6 \times \alpha_+$ の地点まで解分枝は伸びている. ここで α_+ は $G = 600$ における増幅波数帯 $0.103 < \alpha < 0.607$ の上限値である. このような非線形解の存在領域は, たとえば平面ポワズイユ流において $R = 13000$ での非線形解が存在する波数の最大値 $1.6 \times \alpha_+$ [29] よりも広いことが分かる. これは λ_j ($j = 2, 3, 4, 5$) が正であることに起因すると考えられる. Figure 31 には $P = 7, R = -0.145$ における $S^{(C)}$ モードの解分枝を示す. (a): $Gr = 55$, (b): 56 であり, $55 < G_* < 56$ が成り立っている. この R の値に対しては, 臨界点において $\lambda_1 = 0$ という非線形縮退が生じる. 単純モード PM は P_4 と P_{11} において自明解から超臨界分岐する. 混合モード解 MM_0 が存在するためには, $0 = r_2(\sigma_2 + \lambda_{22}r_2^2) + (\kappa_2 + \lambda_{21}r_2)r_1^2$, $\kappa_2 < 0$, $\lambda_{21} < 0$, $\lambda_{22} < 0$ のために $\sigma_2 > 0$ でなければならない. Figure 31(b) では, MM_0 が点 P_9 において自明解から $\sigma_2 > 0$ の領域に向けて分岐する. MM_π は $\sigma_1 - \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 < 0$ かつ $0 = r_2(\sigma_2 + \lambda_{22}r_2^2) + (-\kappa_2 + \lambda_{21}r_2)r_1^2$ が成り立てば存在する. この最初の不等式より $\sigma_1 < 0$, 第 2 の等式より $r_2 \ll 1$ の場合には $\sigma_2 < 0$ を得る. MM_π が点 P_5 において自明解から α の低い方向に分岐するのはこのためである. 単純モード PM の解分枝上では, MM_0 は $\sigma_1 > 0$ を満たす点 P_{10} から分岐するが, それは $r_2 \ll 1$ に対して $\sigma_1 + \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 = 0$ が成り立つから

Table 4: 13 次で打ち切った Stuart-Landau 方程式 (64) に含まれる非線形項の係数の符号. $P = 7, R = -0.113, G = 600, 300, 115$. $S^{(C)}$ モードに対する中立曲線上分枝上での結果.

Gr	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
600	-	+	+	+	+	-
300	+	+	-	+	+	-
115	+	-	-	+	-	+

である. MM_π は PM から $\sigma_1 < 0$ の成り立つ点 P_3 において分岐するが, これも $r_2 \ll 1$ のとき $0 = \sigma_1 - \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 = 0$ が成り立つためである. Figure 31(b) では, 混合モード解 MM_π の解分枝はリミットポイント P_8 から安定性を獲得するが, その点は単純モード PM の解分枝からわずかに外れている. (b) における不安定な PM の解分枝と不安定な MM_π との交点は分岐点ではないことを注意しておく. 混合モード解 MM_π の解分枝は Hopf 分岐によって安定性を失う. 2つの Hopf 分岐点の間では, 安定な定在波 SW が存在するが, Figure 31 には分岐図が煩雑になるのを避けるために図示していない.

Figure 32 (a) と (b) に, $Pr = 7$, $Re = -0.2$ における $S^{(C)}$ に対する中立曲線と分岐図をそれぞれ示す. この場合, 中立曲線に沿って分岐は超臨界である. $\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2 = 0$ を満足する単純モード PM が負の λ_{22} に対して存在するためには, $\sigma_2 > 0$ が必要であり, PM は (a) では点 P_1 , (b) では点 P_4 から, α が低下する方向に分岐する. ついで MM_0 を考えよう. MM_0 が存在するためには, $\sigma_1 + \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 > 0$ と $0 = r_2(\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2) + (\kappa_2 + \lambda_{21} r_2) r_1^2$ が成立しなければならない. したがって, $r_2 \ll 1$ に対しては $\sigma_1 > 0$ と $\sigma_2 < 0$ が要求される. これが MM_0 が点 P_2 において自明解から分岐する理由である. 一方, MM_π が自明解から分岐するためには, $\sigma_1 - \kappa_1 r_2 + \lambda_{12} r_2^2 > 0$ と $0 = r_2(\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2) + (-\kappa_2 + \lambda_{21} r_2) r_1^2$ が成り立つ必要があり, その結果, $\sigma_1 > 0$ と $\sigma_2 > 0$ が結論される. この不等式 $\sigma_1 > 0$ と $\sigma_2 > 0$ は $Gr < Gr_*$ のとき成立しない. $Gr > Gr_*$ の場合には, これらは中立点 P_3 と P_4 の間で満足される. 単純モード PM の解分枝上では, $\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2 = 0$ と $\sigma_1 + \kappa_1 r_2 \cos \Theta + \lambda_{12} r_2^2 = 0$ が成り立つ点から混合モードが分岐する. $\kappa_1 r_2 > 0$ であるため $\sigma_1^{(MM_0)} = -\kappa_1 r_2 - \lambda_{12} r_2^2$ と $\sigma_1^{(MM_\pi)} = \kappa_1 r_2 - \lambda_{12} r_2^2$ より, 小さな r_2 に対しては $\sigma_1^{(MM_0)} < \sigma_1^{(MM_\pi)}$ が結論される. この不等式は点 P_5 と P_6 との位置関係と一貫している. 式 (95) の第 1 式, すなわち, $r_1^2 = -2\kappa_1 r_2^2 / \kappa_2$ より, (a), (b) いずれの場合にも伝播波解 TW は存在しない.

Figure 33 には, $Pr = 7$, $Re = -0.2$ の場合の $S^{(C)}$ モードに対する中立曲線と大域的な分岐図を示す. Figure 33(a) では実線と破線が交差しており, 1:2 共鳴が生じることが分かる. Figure 33(b) には $Gr = 105, 150, \text{ and } 220$ に対する分岐図を示す. Figure 32(a), (b) の局所分岐構造が大域的分岐構造の中に埋め込まれていることが分かる. $Gr = 150$ と 220 に対して Figure 33(b) に示した安定特性は, Figure 32(a), (b) の各解分枝の安定性と完全には一致していない. たとえば, Figure 33(b_{ii}) の点 R_1 , (b_{ii}) の R_2 と R_4 とを結ぶ解分枝, (b_{iii}) の R_3 と R_5 を結ぶ解分枝の安定性は Figure 32(a), (b) のそれと一致しない.

今回設定した安定性のための判定条件 (63) はこのように誤判定することがある。数値計算では α という基本波数とその高調波から成る非線形解に対して、 $n\alpha/2$ という攪乱を加え、その時間発展を追跡している。したがって、このように求めた安定特性は、付録で記述した振幅方程式にもとづく安定性のための条件を包含していなければならない。すなわち、弱非線形解析によって安定と判定された解分枝が数値計算によって不安定と判定されることは十分に可能である。逆に、弱非線形解析によって不安定と判定された解分枝が数値計算によって安定であると判定されることがあるとすれば、それは、弱非線形解析では3次の非線形項で打ち切ったことによる誤差、数値シミュレーションにおける空間分解能の低さ、もしくは、安定のための判定条件 (63) が安定性を正確に評価する上で緩すぎるといった理由が挙げられる。

4.7 結論

本研究では、平面クエット流を重畳させた場合の鉛直スロットにおける熱伝導状態の線形安定性と非線形安定性を調べた。3つの不安定モード $S^{(H)}$, O_S , $S^{(C)}$ の中で、 $S^{(H)}$ は流体力学的不安定性機構によって駆動され、 O_S は浮力駆動型であることは広く知られている。エネルギーバランスの議論に基づき、 $S^{(C)}$ は浮力駆動型であることを今回明らかにした。しかしながら、クエット流がどのように重畳して不安定な $S^{(C)}$ モードになるのかは説明できなかった。Re-Gr 平面上において3つのモードに関する臨界条件を調べ、また定常モード $S^{(H)}$ と $S^{(C)}$ の臨界曲線に沿って、Stuart-Landau 方程式に含まれるランダウ定数 λ_1 を評価した。 $S^{(H)}$ モードの臨界曲線に沿って、 $P = 2.4, 7, 30$ の場合については $\lambda_1 < 0$ が成り立つ、一方で、 $S^{(C)}$ モードの臨界曲線によれば、 λ_1 はこれらの P の値に対して明確な符号の規則性を持たなかった。臨界曲線では、 $P = 2.4$ の場合、 λ_1 の縮退点が1つ存在し、 $P = 7.0, 30.0$ の場合、 λ_1 の縮退点が2つ存在することがわかった。 $P = 7.0$ の場合では、いくつか異なる R の場合の符号を示すことによって、 λ_1 の符号が中立曲線上でどのように変化するかを明らかにした。 $S^{(H)}$ と $S^{(C)}$ は共に定常のため中立曲線上の2つの波数 $l\alpha, m\alpha$ が同じ中立 G になる場合容易に $l:m$ の共鳴がおこる。これは、共鳴条件が周波数側の制約を必要ととていないためである。 $1:m$ の共鳴のうち最も強いのは位相カップリングが2次の $1:2$ の共鳴である。したがって、 $S^{(H)}$ と $S^{(C)}$ モード共に $1:2$ 共鳴について考えた。 $S^{(H)}$ モードでは、弱非線形解析により、PM, MM_0 , MM_π , TW, SW, MTW, ヘテロクリニック軌道 HO のよく知られる解分枝が明らかになった。振幅方程式 (59) の解分枝は数値的に導出された分枝の大域構造の中に埋め込まれていることが確認された。数値解析によって共鳴点近傍における大域的な分岐図が得られた。分岐図では破線でしめされた単純モードの 2α モード、実線で示された混合モードや伝播波の α モー

ドの様子が描画されている。ここで単純モード、混合モード、伝播波は方程式 (58) か (59) の解を分類したものであり、共鳴点近傍の局所解に対してのみ有効であることに注意する必要がある。したがって、弱非線形解析より得られた結果はその局所的な領域でのみ数値解析の解と比較すべきである。一方で、 $S^{(C)}$ については、中立曲線からの分岐は R の値によっては重臨界になる場合がある。これにより多様な分岐図が得られた。1:2 共鳴点が中立曲線上にある場合、局所的な分岐構造が大域構造に埋め込まれていることがわかる。しかし Figure 28(b) に示すように、中立曲線上に共鳴点が存在しない場合でも、数値解析の結果からは、純粹モードの分岐から分岐した混合モードが存在している特徴がえられた。(これは α モードの分岐が 2α モードの分岐から発生していることがわかる) しかし、 α モードと 2α モードの解分岐の2つのループは離れているため 1:2 共鳴に関連付けて説明することは困難である。逆にこれは低調波不安定性機構に起因する α モードからの分岐により $\alpha/2$ モードが出現したと解釈することができる。後者の解釈には、2つのループの距離が $\alpha/2$ モードの出現には不要であるため、より説得力がある。以上のように、 $S^{(H)}$ モードの $P = 2.4, 7.0$ の分岐構造とともに $S^{(C)}$ モードの駆動機構と弱非線形性と強非線形性の詳細を明らかにした。今回の研究をより深く理解するためにはより基礎的な研究が行われることを期待したい。

本論文を終了するにしたがい2つのコメントを残します。今回調べたパラメターの値に対して非線形係数 $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1$ は消失しない。(Table I) したがって3次近似で打ち切った振幅方程式 (58) は、共鳴点近傍の分岐特性を記述すれば十分である。非縮退条件の1つが壊れている場合、すなわち、 $\kappa_1, \kappa_2, \lambda_1$ のどれかが消失する場合、振幅方程式は分岐を説明するために4次の方程式、5次の非線形項が必要になる。これらに関しては、Okamoto [30] or Fujimura and Nagata, [31] を参照。

Figure 33(b_{ii}–b_{vii}) は、任意の整数 n (実線) に対して、式 (62) の消失しない $a_{n,m}$ と $b_{n,m}$ を有する解についての分岐図のみを示し、破線は奇数の n に対して $a_{n,m}$ と $b_{n,m}$ が消失するものを示している。同様に、例えば、より高次の n に対してすなわち $\text{mod}(n, k) = 0$ の場合について $a_{n,m}$ と $b_{n,m}$ が消失するものもある。このような解は $k \geq 3$ の場合 1:k の共鳴によって強く影響を受けると考えられる。 $k = 3$ の例では、 α と 3α の相互作用が 2α モードを生成しその結果解分岐がより複雑にもつれるという研究結果がある。この研究に関しては Meyer–Spacsche, [32] を参照願いたい。しかし本研究ではこのような複雑な状況を回避するためこのような状況には設定しなかった。

5 参考文献

References

- [1] D. I. Boyarintsev, Journal of Technical Physics, **20**, 1084 (1950).
- [2] G. Z. Gershuni, Zh. Tekhn. Fiz. (Journal of Technical Physics), **23**, 1838 (1953).
- [3] R. N. Rudakov, Prikl. Mat. Mekh. **31(2)**, 349 (1967).
- [4] G. K. Batchelor, Quart. Appl. Math. **12**, 209 (1954).
- [5] C. M. Vest and V. S. Arpaci, J. Fluid Mech. **36**, 1 (1969).
- [6] A. E. Gill and A. Davey, J. Fluid Mech. **35**, 775 (1969).
- [7] A. E. Gill and C. C. Kirkham, J. Fluid Mech. **42**, 125 (1970).
- [8] S. A. Korpela, D. Gözum and C. B. Baxi, Int. J. Heat Mass Transfer. **16**, 1683 (1973).
- [9] K. Fujimura, JAERI-M 90-057 (1990).
- [10] K. Fujimura and J. Mizushima, Eur. J. Mech. B Fluids, **10**, No.2-suppl., 25 (1991).
- [11] M. Kropp and F. H. Busse, in *Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, eds. R. Seydel, F. W. Schneider, T. Küpper and H. Troger (Birkhäuser, Basel, 1991) p.217.
- [12] K. Fujimura, Eur. J. Mech. B/Fluids, **11**, 461 (1992).
- [13] M. Golubitsky and W. F. Langford, Physica D **32**, 362 (1988).
- [14] M. Golubitsky, I. N. Stewart, and D. G. Shaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II (Springer-Verlag, New York, 1988).
- [15] K. Fujimura and Y. Y. Renardy, Physica D **85**, 25 (1995).
- [16] K. Fujimura and Y. Y. Renardy, in *Advances in Multi-Fluid Flows*, Eds. Y. Y. Renardy, et al. (SIAM, Philadelphia), 252 (1996).
- [17] P. Colinet, Ph. G´eoris, J. C. Legros, and G. Lebon, Phys. Rev. E **54**, 514 (1996).

- [18] A. Hill and I. Stewart, Phys. “Hopf-steady-state mode interactions with $O(2)$ symmetry, ” Dynamics and Stability of Systems **6**, 149 (1992).
- [19] K. Fujimura, Proc. R. Soc. A 453, **181** (1997)
- [20] K. Fujimura and J. Mizushima, in *Nonlinear Wave Interactions in Fluids*, eds. R. W. Miksad, T.R. Akylas and T. Herbert, AMD-Vol.**87**, 123, (1987).
- [21] N.I. Lobov, E.L. Tarunin, Perm’, Translated from Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, No.5, 10 (1983).
- [22] The following papers are not available to the authors: E. L. Tarunin, Uch. Zap. Permsk. Univ., No.316, 115 (1974), N.I. Lobov and A.I. Nikitin, in Investigation of Thermal Convection in Heat Transfer (in Russian), Ural’sk Nauchn. Tsentr., Sverdlovsk p.12 (1981), and N.I. Lobov and A. I. Nikitin, in Convective Flow (in Russian), Permsk. Dep. Inst., Perm’ p.41 (1981).
- [23] K. Fujimura and S. Tsunoda, Phys. Fluids **29**, 084103 (2017).
- [24] G. Dangelmayr, Dynamics and Stability of Systems **1**, 159 (1986).
- [25] J. Porter and E. Knobloch, Physica D **159**, 125 (2001).
- [26] M. M. Chen and J. A. Whitehead, J. Fluid Mech. **31**, 1 (1968).
- [27] T. Herbert, J. Fluid Mech. **126**, 167 (1983).
- [28] T. Herbert, AIAA J. **18**, 243 (1980).
- [29] U. Ehrenstein and W. J. Koch, J. Fluid Mech. **228**, 111 (1991).
- [30] H. Okamoto, Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo **39**, 1 (1989).
- [31] K. Fujimura and M. Nagata, Physica D **115**, 377 (1998).
- [32] R. Meyer-Spasche, Pattern Formation in Viscous Flows—The Taylor-Couette Problem and Rayleigh-Bénard Convection, (Birkhäuser Verlag, Basel, 1999).
- [33] S. Tsunoda and K. Fujimura, J.Phys. Soc. Jpn. **87**, 014402 (2018).

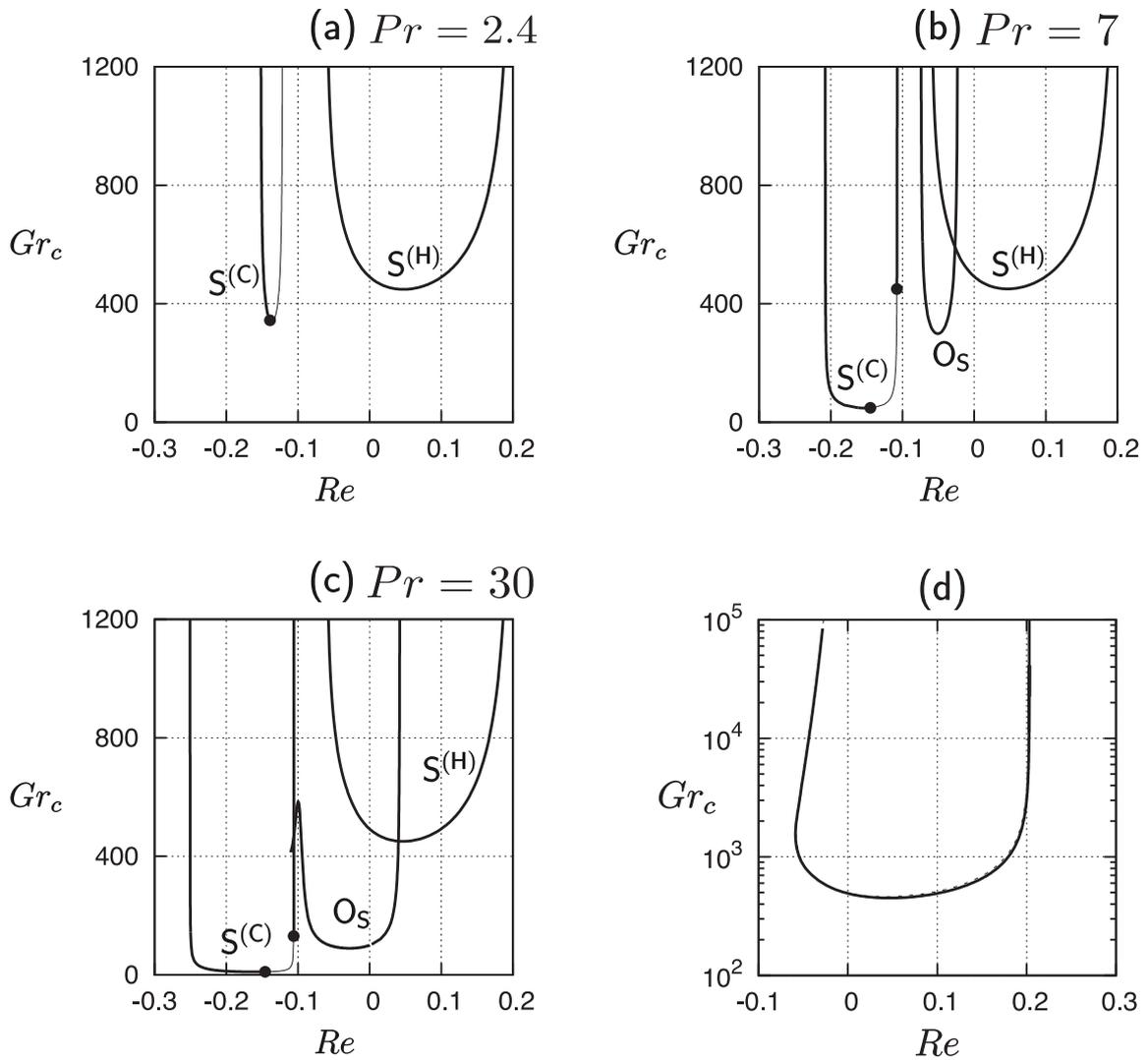


Figure 15: 臨界曲線の Pr 依存性. (a): $Pr = 2.4$, (b): $Pr = 7$, (c): $Pr = 30$, (d): Gr に対して広域表示した $S^{(H)}$ モードの臨界曲線. (d) の破線は $Pr = 10^{-7}$, 実線は $Pr = 7$ の場合の臨界曲線. $S^{(C)}$ モードの臨界曲線は $Pr \gtrsim 2.15$ の場合に存在する. O_s モードの臨界曲線は $(Re, Gr) = (-0.110, 413)$ の点で失われる. (a), (b), (c) の点は各々 $(Re, Gr) = (-0.139, 344)$, $(-0.145, 48.4)$, $(-0.1078, 451)$ である. この点は $\lambda_1 = 0$ となる非線形縮退点であることを示している. (a), (b), (c) の臨界曲線は太線と細線で表示しており, 太線部分は単色モードが超臨界分岐する場合, 細線部分は単色モードが重臨界分岐する場合を表す.

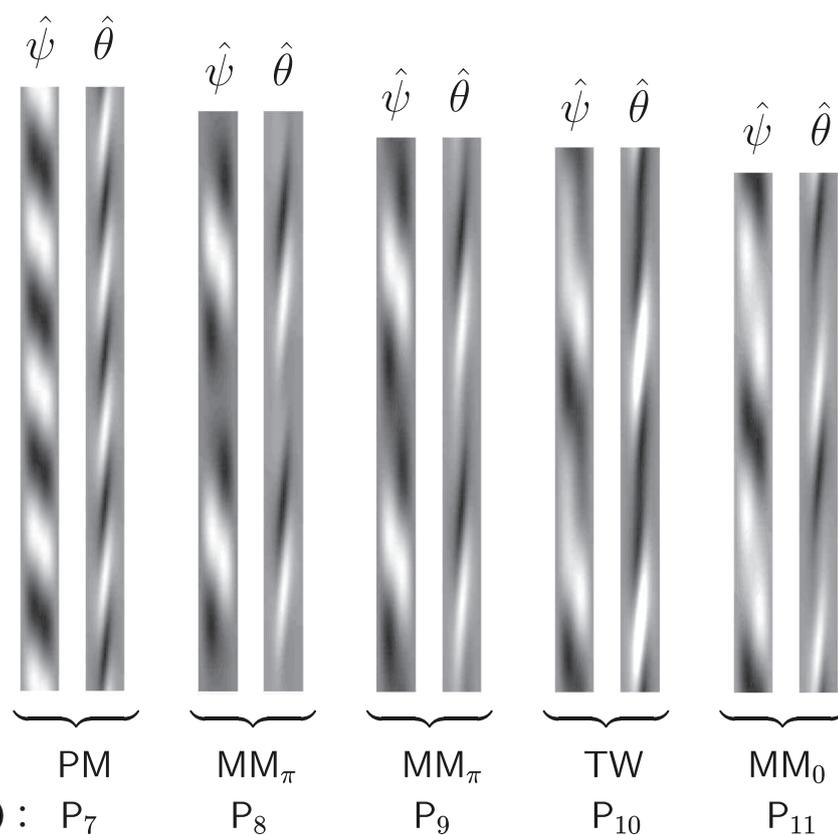


Figure 25: $P = 2.4$, $R = 0$, $G = 620$ での Figure 24(b) の点 P_7 – P_{11} における攪乱の空間構造. 点 P_{10} における TW はスナップショットである. 2 波長分 $4\pi/\alpha$ を表示した.

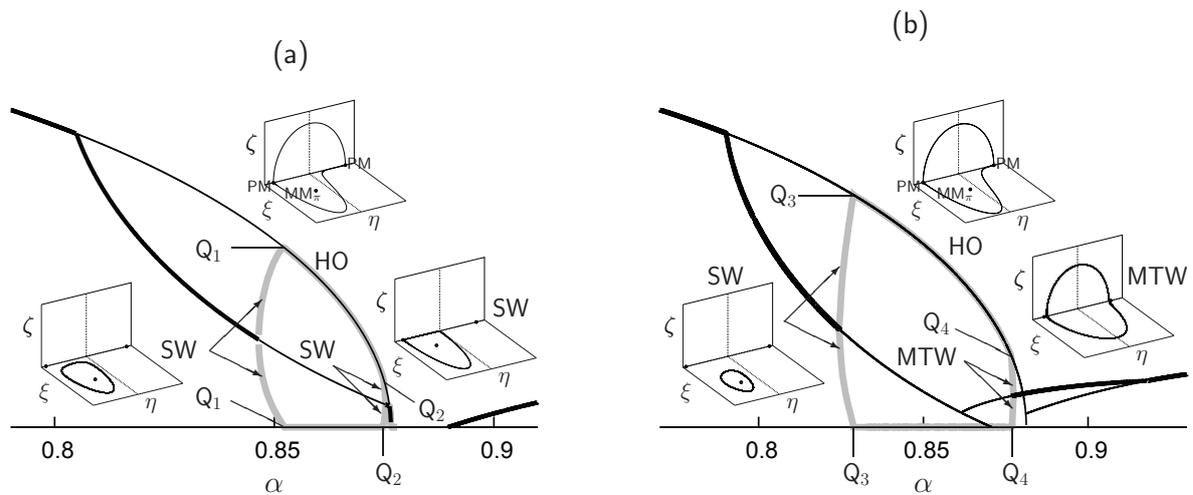


Figure 26: $Pr = 2.4$, $Re = 0$ における時間に依存する解と定常解の解分枝. (a) $Gr = 610$, (b) $Gr = 620$. 太線は安定な解分枝. 細線は不安定な解分枝を示す. 灰色の線は時間に依存する解である. 振幅を代表する量として r_2 を用いた. (a) の挿入図は Figure 24(a) の点 P_2 と Q_1 の間で得られる定在波 SW, Q_1 と Q_2 の間のヘテロクリニック軌道 HO, 点 Q_2 と P_3 の間に存在する SW である. (b) の挿入図は Figure 24(b) の点 P_8 と点 Q_3 の間で得られる SW, Q_3 と Q_4 の間で得られる HO, 点 Q_4 と P_{10} の間で得られる変調波解 MTW である. $\xi = r_1$, $\eta = r_2 \cos \Theta$, $\zeta = r_2 \sin \Theta$.

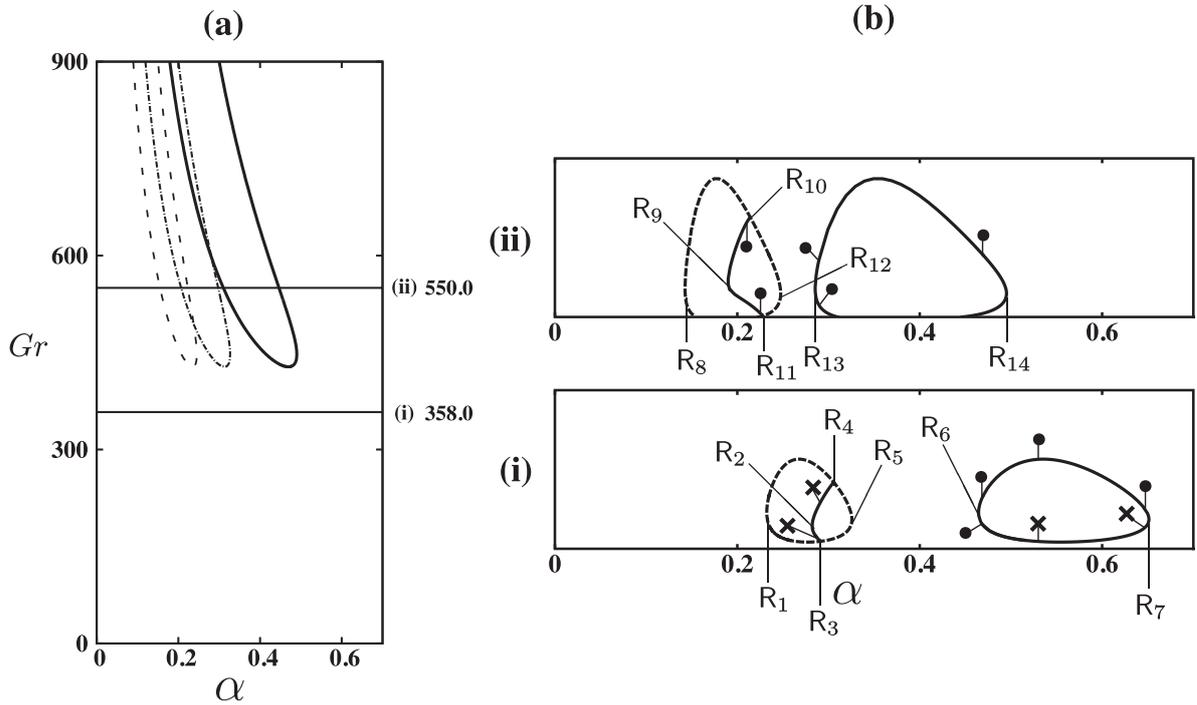


Figure 28: 定常モード $S^{(C)}$ の中立曲線 (a) と分岐図 (b). $Pr = 2.4$, $Re = -0.127$. (a) 中立曲線 (実線), 中立曲線を α 方向に $1/2$ に縮小したもの (破線) と $2/3$ に縮小したもの (1点鎖線). (b) は (i) $Gr = 358$, (ii) $Gr = 550$. 中立曲線に沿って $\lambda_1 > 0$, すなわち単色波攪乱の分岐は亜臨界. $(\alpha, Gr) = (0.281, 597)$ において $2:3$ 共鳴が生じる.

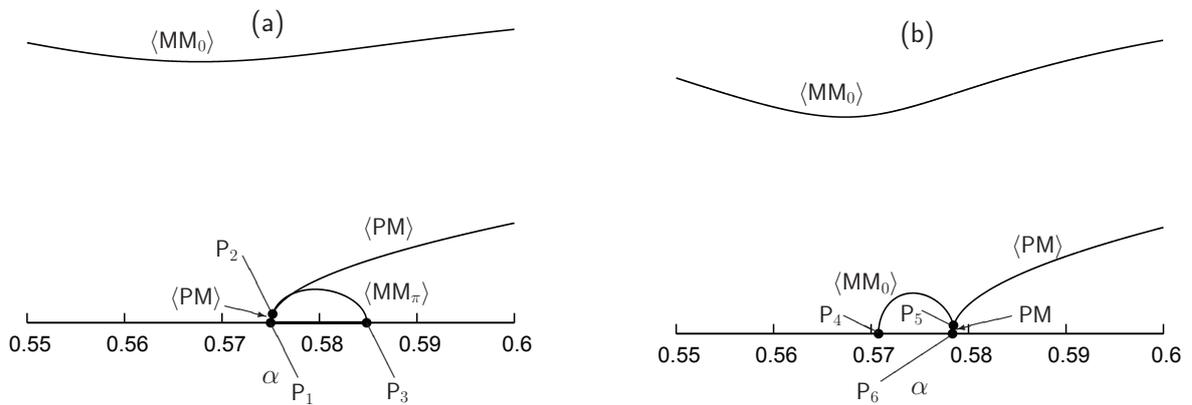


Figure 29: $S^{(C)}$ モードに対する分岐図. $Pr = 7$, $Re = -0.113$. (a) $Gr = 125$, (b) $Gr = 127$. $Gr_* \simeq 126$. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ を用いて表示した.

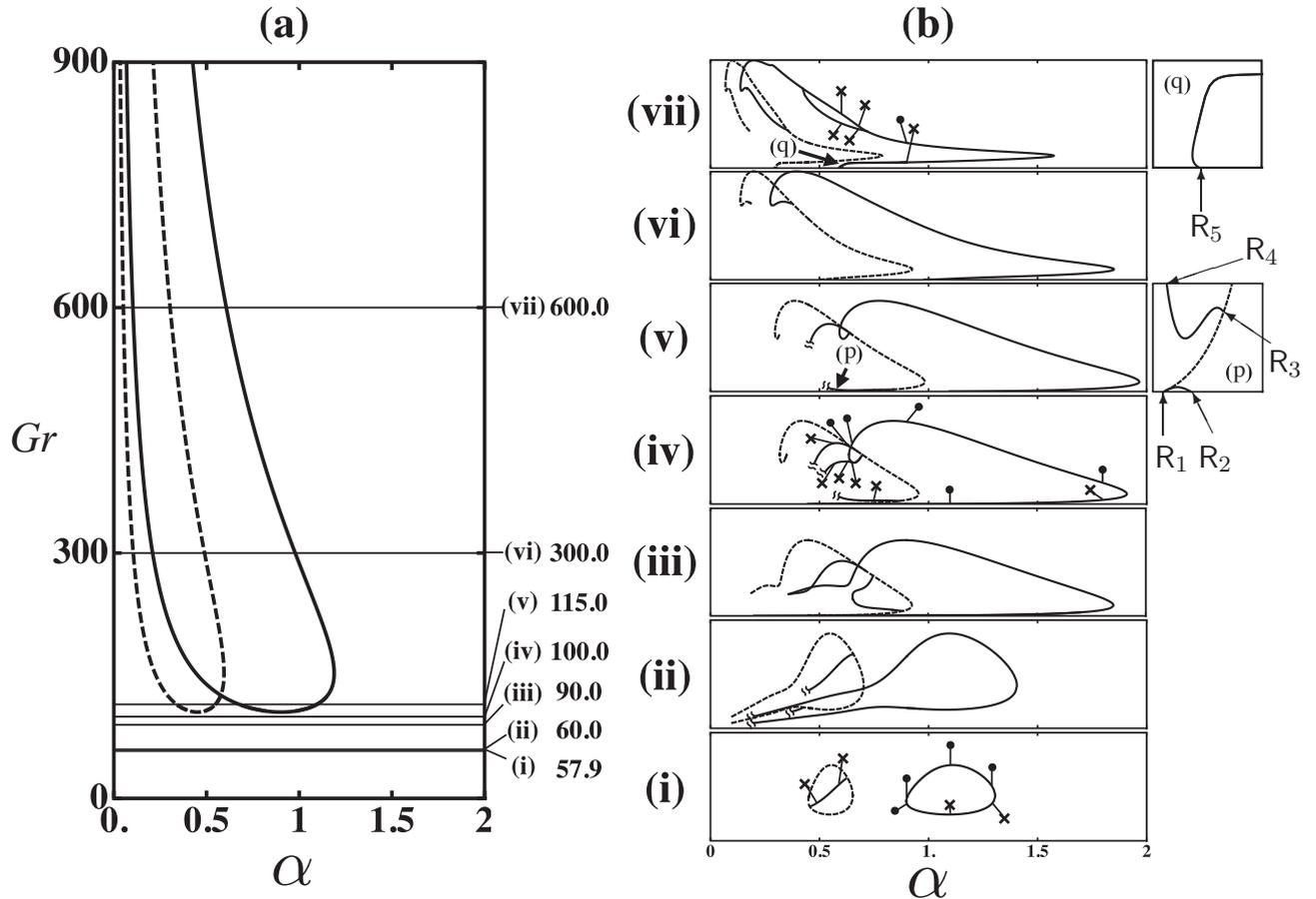


Figure 30: $S^{(C)}$ モードに対する中立曲線 (a) と分岐図 (b). $Pr = 7$, $Re = -0.113$. (i) $Gr = 57.9$, (ii) $Gr = 60$, (iii) $Gr = 90$, (iv) $Gr = 100$, (v) $Gr = 115$, (vi) $Gr = 300$, (vii) $Gr = 600$. 挿入図 (p) と (q) は分岐点近傍における局所構造の拡大図.

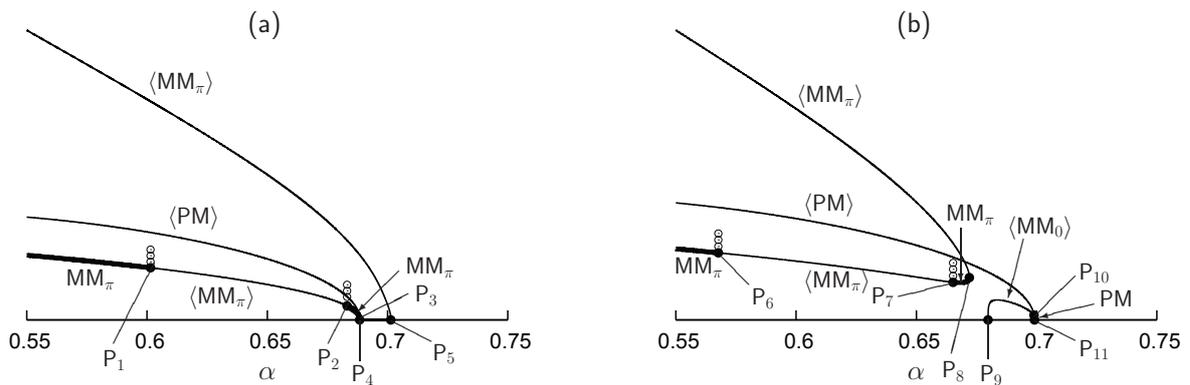


Figure 31: $P = 7$. $Re = -0.145$ における $S^{(C)}$ モードの分岐図. この R では非線形縮退が臨界点において起こる. (a) $Gr = 55$, (b) $Gr = 56$. $Gr_* \simeq 55.4$. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ を振幅値として用いた.

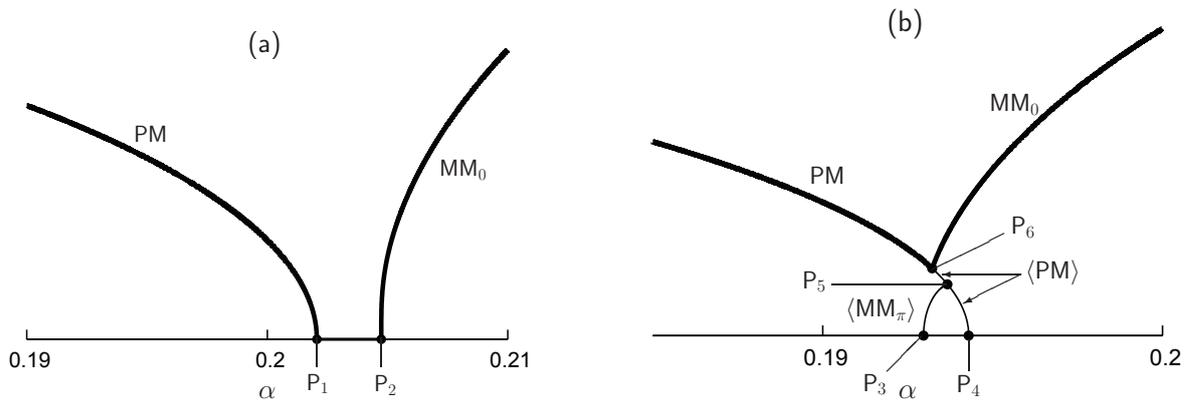


Figure 32: $S^{(C)}$ モードに対する分岐図. $Pr = 7$, $Re = -0.2$. (a) $Gr = 180$, (b) $Gr = 190$. $Gr_* \simeq 186$. 振幅は $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ を用いて表示した.

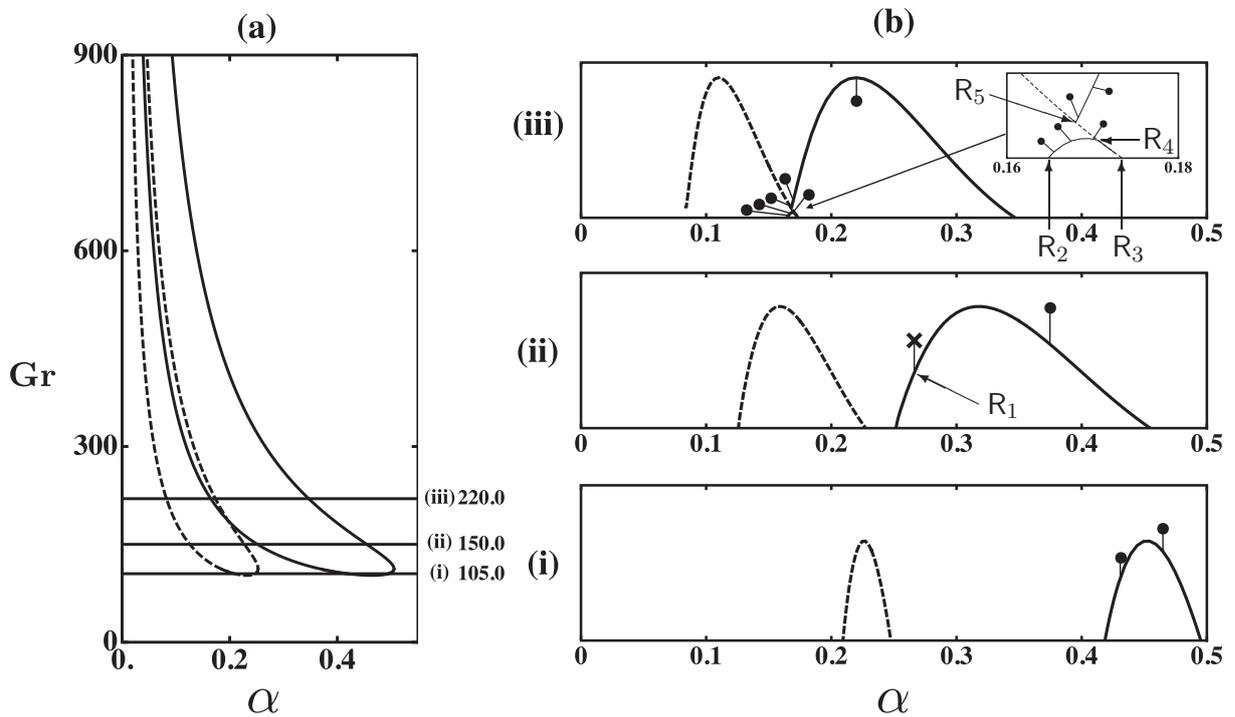


Figure 33: $Pr = 7$, $Re = -0.2$ の場合の $S^{(C)}$ モードに対する中立曲線 (a) と分岐図 (b). (i) $Gr = 105$, (ii) $Gr = 150$, (iii) $Gr = 220$.

6 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である鳥取大学工学部 応用数理工学科 藤村 薫 教授には多大なご指導を賜りましたことを感謝いたします。非線形動力学研究室には6年所属させて頂き、この時間は公私ともに渡って私の人生を大きく変える転機になりました。その意味を持って二重にも渡って心から感謝をいたします。

川添 博光 教授 並びに 松岡 広成 教授には私の博士論文を注意深く読んで下さり、貴重なコメントや助言などを賜りましたことに対して、篤くお礼申し上げます。

大信田 丈志 助教には、学会発表の発表練習を見て頂いたりお世話になりましたことを感謝いたします。加藤 由紀 助教には研究の結果についてアドバイスなど、少ない機会ではありましたが非常に参考になる意見を頂き感謝いたします。

星 健夫 准教授には、星研究室の定例会に参加させて頂くなどご配慮頂きました。この経験は本研究の数値計算に活かされておりこの機会を与えて下さりまして感謝いたします。

途中から社会人学生となることに関しまして、金澤 真紀氏、神谷 大樹氏、西垣 裕子氏をはじめ鳥取大学 工学部 教務係の方々には書面手続きの手配など細かい配慮を頂きお礼を申し上げます。

最後に、長年に渡り暖かく見守り援助して頂きました両親、祖父母、妹並びに家族には感謝の意を表して謝辞といたします。

A Appendix

A.1 固有関数と随伴関数との従直交関係

一般に, $\text{Dom}(\mathcal{A}) = H$ である有界な作用素 \mathcal{A} を考えると, $\text{Dom}(\tilde{\mathcal{A}}) = H$ であり, $u, v \in H$ であるようなすべての関数 u, v に対して

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{A}v \rangle$$

を満たす有界な作用素 $\tilde{\mathcal{A}}$ が一意に定まる. ここで, 関数 u, v の内積を $\langle u, v \rangle = \int_D v^* u d\mathbf{x}$ によって定義する. $\tilde{\mathcal{A}}$ は作用素 \mathcal{A} の随伴作用素と呼ぶ. さて, \mathcal{A} として線形固有値問題 $[\sigma_j^{(m)} S_j + L_j] \phi_j^{(m)} = 0$ に含まれる作用素 $\sigma_j^{(m)} S_j + L_j$ を考える. この作用素に対する随伴作用素を $\sigma_j^{(m)\dagger} S_j + L_j^\dagger$ と書こう. 固有関数 $\phi_j^{(m)}$ に対して随伴関数を $\phi_j^{(m)\dagger}$ と書くと, 次が成り立つ:

$$[\sigma_j^{(m)} S_j + L_j] \phi_j^{(m)} = 0, \quad [\sigma_j^{(m)\dagger} S_j + L_j^\dagger] \phi_j^{(m)\dagger} = 0. \quad (65)$$

したがって, 随伴作用素の定義により

$$\langle (\sigma_j^{(m)\dagger} S_j^\dagger + L_j^\dagger) \phi_j^{(m)\dagger}, \phi_j^{(m)} \rangle = \langle \phi_j^{(m)\dagger}, (\sigma_j^{(m)} S_j + L_j) \phi_j^{(m)} \rangle,$$

すなわち

$$\sigma_j^{(m)\dagger} \langle S_j^\dagger \phi_j^{(m)\dagger}, \phi_j^{(m)} \rangle - \sigma_j^{(m)*} \langle \phi_j^{(m)\dagger}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle = \langle \phi_j^{(m)\dagger}, L_j \phi_j^{(m)} \rangle - \langle L_j^\dagger \phi_j^{(m)\dagger}, \phi_j^{(m)} \rangle$$

を得る. L_j^\dagger の定義により, 右辺は 0 である. ここで, 我々が考える問題では, 第 5 節においてすでに述べたように作用素 S_j は自己随伴であった. したがって,

$$(\sigma_j^{(m)\dagger} - \sigma_j^{(m)*}) \langle \phi_j^{(m)\dagger}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle = 0$$

より, $\langle \phi_j^{(m)\dagger}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle \neq 0$ のとき $\sigma_j^{(m)\dagger} = \sigma_j^{(m)*}$ が成り立つ. (65) の第 1 式と $\phi_j^{(k)\dagger}$ との内積, (65) の第 2 式で m を k に変えたものと $\phi_j^{(m)}$ との内積を作ると,

$$\langle \phi_j^{(k)\dagger}, [\sigma_j^{(m)} S_j + L_j] \phi_j^{(m)} \rangle = 0, \quad \langle [\sigma_j^{(k)\dagger} S_j + L_j^\dagger] \phi_j^{(k)\dagger}, \phi_j^{(m)} \rangle = 0$$

を得る. したがって,

$$(\sigma_j^{(m)*} - \sigma_j^{(k)\dagger}) \langle \phi_j^{(k)\dagger}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle = \langle L_j^\dagger \phi_j^{(k)\dagger}, \phi_j^{(m)} \rangle - \langle \phi_j^{(k)\dagger}, L_j \phi_j^{(m)} \rangle$$

が成り立つが, 右辺は作用素 L_j の定義により 0 である. したがって, $\sigma_j^{(k)} \neq \sigma_j^{(m)}$ であれば

$$\langle \phi_j^{(k)\dagger}, S_j \phi_j^{(m)} \rangle = 0 \quad (66)$$

が成り立つ. これを従直交性とよぶ.

なお, (66) では同一のフーリエ成分で異なる次数の固有関数と随伴関数の間に成り立つ従直交性を示したが, 異なるフーリエ成分同士では固有関数の次数とは無関係に直交関係が成り立つことを注意しておこう.

A.2 近恒等変換による不適切な時間項の除去

Hill と Stewart (1991) は, 同変分岐理論を用いて, 波数比が $l:m$ である Hopf/定常モード間の相互作用に対する非常に包括的な解析を行った. その結果, Birkhoff ノーマルフォームとしての振幅方程式にはどのような項が含まれるべきかが明らかになった. (これについては, Appendix D に簡単な説明を行う.) すなわち, ノーマルフォームに含まれていない項はすべて不適切な項であり, 近恒等変換によって除去されなければならない項である. その意味で, ここでのゴールは非常に明快であり, (34), (35), (36) に含まれるどの項が不適切であるかは近恒等変換を行う前から分かっているといえる.

まず,

$$y_0 = A_1^{(0)} + a_1|A_1^{(0)}|^2 A_1^{(1)} + a_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)2} + a_3 A_1^{(0)2} \bar{A}_1^{(1)} + a_4 |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + a_5 |A_4^{(1)}|^2 A_1^{(1)}, \quad (67)$$

$$y_1 = A_1^{(1)} + b_1 |A_1^{(0)}|^2 A_1^{(0)} + b_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)2} + b_3 A_1^{(0)2} \bar{A}_1^{(1)} + b_4 |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(0)} + b_5 |A_4^{(1)}|^2 A_1^{(0)}, \quad (68)$$

$$y_4 = A_4^{(1)} + c_1 A_1^{(0)} \bar{A}_1^{(1)} A_4^{(1)} + c_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} \quad (69)$$

という近恒等変換を用いることで, (34), (35), (36) に含まれる 3 次の不適切な時間項を除去する. 変換 (67) を (34) に代入する.

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= \frac{dA_1^{(0)}}{dt} + \frac{dA_1^{(0)}}{dt} (a_1 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} + 2a_3 A_1^{(0)} \bar{A}_1^{(1)}) + \frac{d\bar{A}_1^{(0)}}{dt} (a_1 A_1^{(0)} A_1^{(1)} + a_2 A_1^{(1)2}) \\ &+ \frac{dA_1^{(1)}}{dt} (a_1 |A_1^{(0)}|^2 + 2a_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} + 2a_4 |A_1^{(1)}|^2 + a_5 |A_4^{(1)}|^2) + \frac{d\bar{A}_1^{(1)}}{dt} (a_3 A_1^{(0)2} + a_4 A_1^{(1)2}) \\ &+ \frac{dA_4^{(1)}}{dt} a_5 \bar{A}_4^{(1)} A_1^{(1)} + \frac{d\bar{A}_4^{(1)}}{dt} a_5 A_1^{(1)} A_4^{(1)} \\ &= \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} + \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(0,m,0)} \left(\gamma_{1,1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_1^{(1)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_{-1}^{(0)} \right. \\ &+ \lambda_{2,-1}^{(0,m,1)} \left(\gamma_{1,1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_1^{(0)} + \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_1^{(1)} \right) A_{-1}^{(1)} \\ &+ \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(1)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} \right) A_1^{(0)} \\ &+ \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} A_1^{(0)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(0)} + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} A_1^{(1)} A_{-1}^{(1)} \right) A_1^{(1)} \\ &+ \left. \left(\lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(0,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)} \right) A_4^{(1)} A_{-4}^{(1)} A_1^{(1)} \right] \\ &+ \sigma_1^{(0)} A_1^{(0)} \left(a_1 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} + 2a_3 A_1^{(0)} \bar{A}_1^{(1)} \right) + \bar{\sigma}_1^{(0)} \bar{A}_1^{(0)} \left(a_1 A_1^{(0)} A_1^{(1)} + a_2 A_1^{(1)2} \right) \\ &+ \sigma_1^{(1)} A_1^{(1)} \left(a_1 |A_1^{(0)}|^2 + 2a_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} + 2a_4 |A_1^{(1)}|^2 + a_5 |A_4^{(1)}|^2 \right) \\ &+ \bar{\sigma}_1^{(1)} \bar{A}_1^{(1)} \left(a_3 A_1^{(0)2} + a_4 A_1^{(1)2} \right) + \sigma_4^{(1)} A_4^{(1)} a_5 \bar{A}_4^{(1)} A_1^{(1)} + \bar{\sigma}_4^{(1)} \bar{A}_4^{(1)} a_5 A_1^{(1)} A_4^{(1)}. \end{aligned}$$

ここで、右辺が $\sigma_1^{(0)} y_0$, すなわち

$$\sigma_1^{(0)} y_0 = \sigma_1^{(0)} \left(A_1^{(0)} + a_1 |A_1^{(0)}|^2 A_1^{(1)} + a_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)2} + a_3 A_1^{(0)2} \bar{A}_1^{(1)} + a_4 |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + a_5 |A_4^{(1)}|^2 A_1^{(1)} \right)$$

と等しくなるように、係数 a_1, \dots, a_5 を以下のように決定できる。

$$\begin{aligned} a_1 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,0)}}{\sigma_1^{(1)} + \bar{\sigma}_1^{(0)}}, \\ a_2 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)}}{\bar{\sigma}_1^{(0)} + 2\sigma_1^{(1)} - \sigma_1^{(0)}}, \\ a_3 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)}}{\sigma_1^{(0)} + \bar{\sigma}_1^{(1)}}, \\ a_4 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)}}{2\sigma_1^{(1)} + \bar{\sigma}_1^{(1)} - \sigma_1^{(0)}}, \\ a_5 &= - \sum_m \frac{\lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(0,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,1)}}{\sigma_1^{(1)} + \sigma_4^{(1)} + \bar{\sigma}_4^{(1)} - \sigma_1^{(0)}}. \end{aligned}$$

同様に、変換 (68)

$$y_1 = A_1^{(1)} + b_1 |A_1^{(0)}|^2 A_1^{(0)} + b_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)2} + b_3 A_1^{(0)2} \bar{A}_1^{(1)} + b_4 |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(0)} + b_5 |A_4^{(1)}|^2 A_1^{(0)}.$$

を (35) に代入し、

$$\sigma_1^{(1)} y_1 = \sigma_1^{(1)} \left(A_1^{(1)} + b_1 |A_1^{(0)}|^2 A_1^{(0)} + b_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)2} + b_3 A_1^{(0)2} \bar{A}_1^{(1)} + b_4 |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(0)} + b_5 |A_4^{(1)}|^2 A_1^{(0)} \right)$$

と等値することにより、

$$\begin{aligned} b_1 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,0)}}{2\sigma_1^{(0)} + \bar{\sigma}_1^{(0)} - \sigma_1^{(1)}}, \\ b_2 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} A_1^{(1)}}{\bar{\sigma}_1^{(0)} + \sigma_1^{(1)}}, \\ b_3 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)}}{2\sigma_1^{(0)} + \bar{\sigma}_1^{(0)} - \sigma_1^{(1)}}, \\ b_4 &= - \sum_m \frac{\lambda_{2,-1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)}}{\sigma_1^{(0)} + \bar{\sigma}_1^{(1)}}, \\ b_5 &= - \sum_m \frac{\lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-4,5}^{(1,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,0,1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,m,1)} \gamma_{-4,1}^{(m,1,0)}}{\sigma_1^{(0)} + \sigma_4^{(1)} + \bar{\sigma}_4^{(1)} - \sigma_1^{(1)}} \end{aligned}$$

が求められる。

最後に、変換 (69)

$$y_4 = A_4^{(1)} + c_1 A_1^{(0)} \bar{A}_1^{(1)} A_4^{(1)} + c_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} A_4^{(1)}$$

を (36) に代入して

$$\sigma_4^{(1)} y_4 = \sigma_4^{(1)} \left(A_4^{(1)} + c_1 A_1^{(0)} \bar{A}_1^{(1)} A_4^{(1)} + c_2 \bar{A}_1^{(0)} A_1^{(1)} A_4^{(1)} \right).$$

と等値することにより、

$$c_1 = - \sum_m \frac{\lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} + \lambda_{1,3}^{(1,0,m)} \gamma_{-1,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{-1,5}^{(1,1,m)} \gamma_{1,4}^{(m,0,1)}}{c_1 \sigma_1^{(0)} + c_1 \bar{\sigma}_1^{(1)}},$$

$$c_2 = - \sum_m \frac{\lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} + \lambda_{1,3}^{(1,1,m)} \gamma_{-1,4}^{(m,0,1)} + \lambda_{-1,5}^{(1,0,m)} \gamma_{1,4}^{(m,1,1)}}{c_2 \bar{\sigma}_1^{(0)} + c_2 \sigma_1^{(1)}}.$$

が得られる。

以上の結果をまとめると4次のオーダーで振幅方程式 (34), (35), (36) がそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= \sigma_1^{(0)} y_0 + \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} \right] |y_0|^2 y_0 \\ &+ \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} \right] |y_1|^2 y_0 + \sum_m \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} |y_4|^2 y_0 \\ &+ \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} \bar{y}_0^3 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 \right. \\ &+ \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} \bar{y}_1^3 y_4 + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} \bar{y}_0^3 y_4 + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 \\ &+ \left. \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,1,1,1)} \bar{y}_1^3 y_4 \right) \\ &+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{-2,3}^{(0,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{y}_0^3 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{y}_1^3 y_4 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \sigma_1^{(1)} y_1 + \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} \right] |y_0|^2 y_1 \\ &+ \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} \right] |y_1|^2 y_1 + \sum_m \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} |y_4|^2 y_1, \\ &+ \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} \bar{y}_0^3 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 \right. \\ &+ \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} \bar{y}_1^3 y_4 + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} \bar{y}_0^3 y_4 + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 \\ &+ \left. \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,1,1,1)} \bar{y}_1^3 y_4 \right) \\ &+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{-2,3}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{y}_0^3 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{y}_0^2 \bar{y}_1 y_4 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{y}_1^3 y_4 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_4}{dt} &= \sigma_4^{(1)} y_4 + \sum_m \left[\lambda_{8,-4}^{(1,m,1)} \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} \right] |y_4|^2 y_4 \\
&+ \sum_m \lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} |y_0|^2 + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} |y_1|^2 \right) y_4 \\
&+ \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,0)} y_0^4 + \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,1)} y_0^3 y_1 + \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,1,1)} y_0^2 y_1^2 + \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,1,1,1)} y_0 y_1^3 \right. \\
&+ \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,0)} y_0^3 y_1 + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,1)} y_0^2 y_1^2 + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,1,1)} y_0 y_1^3 + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,1,1,1)} y_1^4 \left. \right) \\
&+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} y_0^3 y_1 + \gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} y_0^2 y_1^2 + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} y_0^3 y_1 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} y_0^2 y_1^2 + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} y_0 y_1^3 + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} y_0^2 y_1^2 + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} y_0 y_1^3 \right) \right] \\
&+ \sum_{j \leq k} \left[\lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} y_0^4 + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} y_1^4 \right) \right]
\end{aligned}$$

のように変換されることが分かる。変換後の振幅方程式からは3次の不適切な項がたしかに除去されているが、4次の項の中に不適切な項がまだ混入している。そこで、さらなる近恒等変換として、

$$s_0 = y_0 + p_1 \bar{y}_0^3 y_4 + p_2 \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + p_3 \bar{y}_1^3 y_4, \quad (70)$$

$$s_1 = y_1 + q_1 \bar{y}_0^3 y_4 + q_2 \bar{y}_0 \bar{y}_1^2 y_4 + q_3 \bar{y}_1^3 y_4, \quad (71)$$

$$s_4 = y_4 + r_1 y_0^4 + r_2 y_0^3 y_1 + r_3 y_0 y_1^3 + r_4 y_1^4. \quad (72)$$

を導入しよう。これまでとまったく同じ手順を踏むことにより、

$$p_1 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,0,0)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \lambda_{-2,3}^{(0,j,k)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)}}{\sigma_1^{(0)} - 3\bar{\sigma}_1^{(0)} - \sigma_4^{(1)}}, \quad (73)$$

$$p_2 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} + \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,0,0,1)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \lambda_{-2,3}^{(0,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \right)}{\sigma_1^{(0)} - 2\bar{\sigma}_1^{(0)} - \sigma_1^{(1)} - \sigma_4^{(1)}}, \quad (74)$$

$$p_3 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,1,1,1)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \lambda_{-2,3}^{(0,j,k)} \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)}}{\sigma_1^{(0)} - 3\bar{\sigma}_1^{(1)} - \sigma_4^{(1)}}, \quad (75)$$

$$q_1 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,0)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \lambda_{-2,3}^{(1,j,k)} \gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)}}{\sigma_1^{(1)} - 3\bar{\sigma}_1^{(0)} - \sigma_4^{(1)}}, \quad (76)$$

$$q_2 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \right)}{\sigma_1^{(1)} - \bar{\sigma}_1^{(0)} - 2\bar{\sigma}_1^{(1)} - \sigma_4^{(1)}}, \quad (77)$$

$$q_3 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(j,1,1,1)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)}}{\sigma_1^{(1)} - 3\bar{\sigma}_1^{(1)} - \sigma_4^{(1)}}, \quad (78)$$

$$r_1 = \frac{\sum_{j \geq 1} \lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,0)} + \sum_{j \leq k} \lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)}}{\sigma_4^{(1)} - 4\sigma_1^{(0)}}, \quad (79)$$

$$r_2 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,1)} + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,0)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} \right)}{\sigma_4^{(1)} - 3\sigma_1^{(0)} - \sigma_1^{(1)}}, \quad (80)$$

$$r_3 = \frac{\sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,1,1,1)} + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,1,1)} \right) + \sum_{j,k \geq 1} \lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} \right)}{\sigma_4^{(1)} - \sigma_1^{(0)} - 3\sigma_1^{(1)}}, \quad (81)$$

$$r_4 = \frac{\sum_{j \geq 1} \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,1,1,1)} + \sum_{j \leq k} \lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)}}{\sigma_4^{(1)} - 4\sigma_1^{(1)}} \quad (82)$$

のように、係数値を決定することができる。

以上の結果をまとめると、近恒等変換 $(A_1^{(0)}, A_1^{(1)}, A_4^{(1)}) \rightarrow (y_0, y_1, y_4) \rightarrow (s_0, s_1, s_4)$ を導入して不適切な時間依存性を示す項を除去することにより、つぎの振幅方程式が Birkhoff ノーマルフォームとして4次までの近似で導出された。

$$\begin{aligned} \frac{ds_0}{dt} &= \sigma_1^{(0)} s_0 + \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,0,0)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} \right] |s_0|^2 s_0 \\ &+ \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,1)} \right] |s_1|^2 s_0 + \sum_m \lambda_{0,1}^{(0,m,0)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} |s_4|^2 s_0 \\ &+ \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(0,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,1,1,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1^2 s_4 + \lambda_{-1,2}^{(0,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1^2 s_4 + \lambda_{-3,4}^{(0,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,1,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1^2 s_4 \right) \\ &+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{-2,3}^{(0,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1^2 s_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,1,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1^2 s_4 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dt} &= \sigma_1^{(1)} s_1 + \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,1}^{(m,0,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,0)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,0)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} \right] |s_0|^2 s_1 \\ &+ \sum_m \left[\lambda_{2,-1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,1}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,1}^{(1,m,1)} \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} \right] |s_1|^2 s_1 + \sum_m \lambda_{0,1}^{(0,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} |s_4|^2 s_1, \\ &+ \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{-1,2}^{(1,0,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,1,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1 s_4 + \lambda_{-1,2}^{(1,1,j)} \kappa_{-1,-1,4}^{(j,0,0,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1 s_4 + \lambda_{-3,4}^{(1,j,1)} \kappa_{-1,-1,-1}^{(m,0,0,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1 s_4 \right) \\ &+ \sum_{j,k \geq 1} \left[\lambda_{-2,3}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{-1,-1}^{(j,0,0)} \gamma_{-1,4}^{(k,1,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1 s_4 + \gamma_{-1,-1}^{(j,0,1)} \gamma_{-1,4}^{(k,0,1)} \bar{s}_0 \bar{s}_1 s_4 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds_4}{dt} &= \sigma_4^{(1)} s_4 + \sum_m \left[\lambda_{8,-4}^{(1,m,1)} \gamma_{4,4}^{(m,1,1)} + \lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \gamma_{4,-4}^{(m,1,1)} \right] |s_4|^2 s_4 + \sum_m \lambda_{0,4}^{(1,m,1)} \left(\gamma_{1,-1}^{(m,0,0)} |s_0|^2 + \gamma_{1,-1}^{(m,1,1)} |s_1|^2 \right) s_4 \\ &+ \sum_{j \geq 1} \left(\lambda_{1,3}^{(1,0,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,1,1)} s_0^2 s_1^2 + \lambda_{1,3}^{(1,1,j)} \kappa_{1,1,1}^{(j,0,0,1)} s_0^2 s_1^2 \right) \\ &+ \sum_{j \leq k} \left[\lambda_{2,2}^{(1,j,k)} \left(\gamma_{1,1}^{(j,0,0)} \gamma_{1,1}^{(k,1,1)} s_0^2 s_1^2 + \gamma_{1,1}^{(j,0,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,1)} s_0^2 s_1^2 + \gamma_{1,1}^{(j,1,1)} \gamma_{1,1}^{(k,0,0)} s_0^2 s_1^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

A.3 振幅方程式の解と安定性

次の方程式から始めよう.

$$\begin{aligned}\frac{dz_0}{dt} &= \tilde{\sigma}_3 z_0 + (\tilde{\mu}_{3,2}|z_2|^2 + \tilde{\mu}_{3,2}|z_1|^2 + \tilde{\mu}_{3,3}|z_0|^2)z_0 + \tilde{\nu}_3 \bar{z}_2^2 z_1^2, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \tilde{\sigma}_2 z_1 + (\tilde{\mu}_{2,1}|z_2|^2 + \tilde{\mu}_{2,2}|z_1|^2 + \tilde{\mu}_{2,3}|z_0|^2)z_1 + \tilde{\nu}_2 z_2^2 \bar{z}_1 z_0, \\ \frac{dz_2}{dt} &= \tilde{\sigma}_2 z_2 + (\tilde{\mu}_{2,2}|z_2|^2 + \tilde{\mu}_{2,1}|z_1|^2 + \tilde{\mu}_{2,3}|z_0|^2)z_2 + \tilde{\nu}_2 \bar{z}_2 z_1^2 \bar{z}_0.\end{aligned}$$

以下では簡単のために “ \sim ” を除いて書くことにする. $z_j = r_j e^{i\vartheta_j t} + \zeta_j e^{i\vartheta_j t}$ ($j = 0, 1, 2$) を代入し, 位相差として

$$\Theta = 2\theta_1 - 2\theta_2 - \theta_0 \quad (83)$$

を導入することによって, この $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^6$ に対する力学系を $(r_0, r_1, r_2, \Theta) \in \mathbb{R}^4$ に対する力学系に帰着させる:

$$\begin{aligned}\dot{r}_0 &= r_0[\kappa_0 + \mu_{3,2}^r(r_1^2 + r_2^2) + \mu_{3,3}r_0^2] + \nu_3 r_1^2 r_2^2 \cos \Theta, \\ \dot{r}_1 &= r_1[\kappa_2 + \mu_{2,1}^r r_2^2 + \mu_{2,2}^r r_1^2 + \mu_{2,3}^r r_0^2 + r_2^2 r_0(\nu_2^r \cos \Theta + \nu_2^i \sin \Theta)], \\ \dot{r}_2 &= r_2[\kappa_2 + \mu_{2,2}^r r_2^2 + \mu_{2,1}^r r_1^2 + \mu_{2,3}^r r_0^2 + r_1^2 r_0(\nu_2^r \cos \Theta - \nu_2^i \sin \Theta)], \\ \dot{\Theta} &= 2[(\mu_{2,1}^i - \mu_{2,2}^i)(r_2^2 - r_1^2) + \nu_2^i(r_2^2 - r_1^2)r_0 \cos \Theta - \nu_2^r(r_1^2 + r_2^2)r_0 \sin \Theta] \\ &\quad + \mu_{3,2}^i(r_2^2 - r_1^2) - \nu_3 r_0^{-1} r_1^2 r_2^2 \sin \Theta,\end{aligned} \quad (84)$$

位相と振幅に対する 4 次元系 (84) は次の定常解を持つ.

i. 自明解 (T): $(z_1, z_2, z_0) = (0, 0, 0)$.

ii. 定常解 (SS): $(z_1, z_2, z_0) = (0, 0, r_0) \in I_1$.

r_0 は $0 = \kappa_0 + \hat{\mu}_{3,3}r_0^2$ を満たす. この解は自明解 T から $\kappa_0 = 0$ において分岐する.

定常解 SS に対する Jacobi 行列は

$$\begin{aligned}J^{SS} &= \begin{pmatrix} \sigma_3 + 2\mu_{33}|z_0|^2 & \mu_{33}z_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{33}\bar{z}_0^2 & \sigma_3 + 2\mu_{33}|z_0|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 + \mu_{23}|z_0|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_2 + \bar{\mu}_{23}|z_0|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_1 + \bar{\mu}_{13}|z_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 + \mu_{13}|z_0|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_{33}|z_0|^2 & \mu_{33}z_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{33}\bar{z}_0^2 & \mu_{33}|z_0|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 + \mu_{23}|z_0|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_2 + \bar{\mu}_{23}|z_0|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_1 + \bar{\mu}_{13}|z_0|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 + \mu_{13}|z_0|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

のように求められる。 J^{SS} の固有値は小行列 $J_0^{SS} = \begin{pmatrix} \mu_{33}|z_0|^2 & \mu_{33}z_0^2 \\ \mu_{33}\bar{z}_0^2 & \mu_{33}|z_0|^2 \end{pmatrix}$ の固有値と

$$\sigma_2 + \mu_{23}|z_0|^2 \langle 2 \rangle, \bar{\sigma}_2 + \bar{\mu}_{23}|z_0|^2 \langle 2 \rangle$$

で与えられる。さて、一般に 2×2 行列 A の固有値が与える解の安定条件は $\text{tr } A < 0$ かつ $\det A > 0$ であるが、 $\det A = \det J_0^{SS} = 0$ である。定常解 SS が超臨界分岐をするためには $\mu_{33} < 0$ であることが必要なので、結局、1つの固有値は0、他の固有値は負であることが分かる。以上をまとめると、Jacobi 行列の固有値の符号は

$$0, 2\hat{\mu}_{3,3}r_0^2, \hat{\sigma}_2 - i(1 + \tau) + \hat{\mu}_{2,3}r_0^2 \langle \text{twice} \rangle, \bar{\sigma}_2 + i(1 + \tau) + \bar{\mu}_{2,3}r_0^2 \langle \text{twice} \rangle \quad (85)$$

のように求められる。ただし、 $\langle \rangle$ に固有値の重複度を示した。

iii. 伝播波解 (TW): $(z_1, z_2, z_0) = (r_1 e^{i\theta_1 t}, 0, 0) \in I'_1$.

r_1 と θ_1 は $0 = \kappa_2 + \hat{\mu}_{2,2}^r r_1$ 及び $1 + \tau + \theta_1 = \hat{\mu}_{2,2}^i r_1^2$ に支配される。以下では、上付き文字 r と i はそれぞれ実部と虚部を意味するものとする。伝播波解 TW は $\kappa_2 = 0$ において自明解 T から分岐する。

TW solution in the form of $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1 t}$ で表される伝播波解 TW の安定性を調べる上で、Floquet 解析に相当する形 $z_1 = (r_1 + \zeta_1(t)) e^{i\tilde{\theta}_1 t}$, $z_2 = e^{i\tilde{\theta}_1 t} \zeta_2(t)$, $z_0(t) = \zeta_0(t)$ とおくことによって、因子 $e^{i\theta_1 t}$ を消去するのが便利である。

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_0}{dt} &= \sigma_3 \zeta_0 + (\bar{\mu}_{3,2}|\zeta_2|^2 + \mu_{3,2}|r_1 + \zeta_1|^2 + \mu_{3,3}|\zeta_0|^2)\zeta_0 + \nu_3 \bar{\zeta}_2^2 \zeta_1^2, \\ \frac{d\zeta_1}{dt} &= \hat{\sigma}_2 \zeta_1 + \mu_{22} r_1^2 (2\zeta_1 + \bar{\zeta}_1) \\ \frac{d\zeta_2}{dt} &= \hat{\sigma}_2 \zeta_2 + (\mu_{2,2}|\zeta_2|^2 + \mu_{2,1}|r_1 + \zeta_1|^2 + \mu_{2,3}|\zeta_0|^2)\zeta_2 + \nu_2 \bar{\zeta}_2 (r_1 + \zeta_1)^2 \bar{\zeta}_0. \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_1(t) = \tilde{\theta}_1 t$, $\hat{\sigma}_2 = \sigma_2 - i\tilde{\theta}_1 = \kappa_2 + i(1 + \tau(\kappa_2) - \tilde{\theta})$ とおいた。

伝播波解 TW に対する Jacobi 行列 J^{TW} は

$$\begin{aligned} df^{TW} &= \begin{pmatrix} \sigma_3 + \mu_{32}r_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 + \bar{\mu}_{32}r_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_2 + 2\mu_{22}r_1^2 & \mu_{22}r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{22}r_1^2 & \bar{\sigma}_2 + 2\bar{\mu}_{22}r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_2 + \mu_{21}r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_2 + \bar{\mu}_{21}r_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_3 + \mu_{32}r_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 + \bar{\mu}_{32}r_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{22}r_1^2 & \mu_{22}r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{22}r_1^2 & \bar{\mu}_{22}r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_2 + \mu_{21}r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma}_2 + \bar{\mu}_{21}r_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められるので, J^{TW} は $2\text{Re } \mu_{22}r_1^2, 0, \sigma_3 + \mu_{32}r_1^2, \sigma_3 + \bar{\mu}_{32}r_1^2, \hat{\sigma}_2 + \mu_{21}r_1^2, \bar{\hat{\sigma}}_2 + \bar{\mu}_{21}r_1^2$ を固有値として持つことが分かる. 伝播波解 TW に対する Jacobi 行列の固有値の符号は次で与えられることが結論される.

$$0, 2\hat{\mu}_{2,2}^r r_1^2, \kappa_0 + \hat{\mu}_{3,2}r_1^2, \kappa_0 + \bar{\hat{\mu}}_{3,2}r_1^2, (\hat{\mu}_{2,1} - \hat{\mu}_{2,2})r_1^2, \text{ and } (\bar{\hat{\mu}}_{2,1} - \bar{\hat{\mu}}_{2,2})r_1^2. \quad (86)$$

iv. 2次元非対称混合解 (AM₂): $(z_1, z_2, z_0) = (r_1 e^{i\theta_1 t}, 0, r_0 e^{i\theta_0 t}) \in I_2$.

r_1 と r_0 は $0 = \kappa_0 + \hat{\mu}_{3,2}^r r_1^2 + \hat{\mu}_{3,3}r_0^2$ 及び $0 = \kappa_2 + \hat{\mu}_{2,2}^r r_1^2 + \hat{\mu}_{2,3}^r r_0^2$ に支配される. 一方で θ_0 と θ_1 は $\theta_0 = \hat{\mu}_{3,2}^i r_0^2$ および $1 + \tau + \theta_1 = \hat{\mu}_{2,2}^i r_1^2 + \hat{\mu}_{2,3}^i r_0^2$ に従う. 2次元混合モード解 AM₂ は $\kappa_0/\kappa_2 = \hat{\mu}_{3,2}^r/\hat{\mu}_{2,2}^r$ において TW から, また, $\kappa_2/\kappa_0 = \hat{\mu}_{2,3}^r/\hat{\mu}_{3,3}$ において SS から分岐する.

この解 AM₂, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0 t}$, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1 t}$ に加えた攪乱の消長は, Floquet 解析に相当する変換 $\zeta_0 = (r_0 + \eta_0) e^{i\theta_0 t}$, $\zeta_1 = (r_1 + \eta_1) e^{i\theta_1 t}$, $z_2 = \eta_2 e^{i\vartheta_2(t)}$ を用いて因子 $e^{i\theta_0 t}$, $e^{i\theta_1 t}$ を消去することで容易に調べることができる. ここに, $\eta_0(t), \eta_1(t), \eta_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ である. また, $\vartheta_2 = (\theta_1 - \theta_0/2)t$ とおくことによって $(2\theta_1 - \theta_0)t - 2\vartheta_2(t) \equiv \Theta$ を複素振幅 η_2 に吸収させている.

これによって直ちに

$$\frac{d\eta_0}{dt} = -i\theta_0\eta_0 + \kappa_0\eta_0 + (\mu_{32}r_1^2 + \mu_{33}r_0^2)\eta_0 + \mu_{32}r_1r_0(\eta_1 + \bar{\eta}_1) + \mu_{33}r_0^2(\eta_0 + \bar{\eta}_0) + O(2),$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = -i(1 + \tau + \theta_1)\eta_1 + \kappa_2\eta_1 + (\mu_{22}r_1^2 + \mu_{23}r_0^2)\eta_1 + \mu_{22}r_1^2(\eta_1 + \bar{\eta}_1) + \mu_{23}r_1r_0(\eta_0 + \bar{\eta}_0) + O(2),$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = i\theta_0/2 \cdot \eta_2 + (\mu_{21} - \mu_{22})r_1^2\eta_2 + \nu_2r_1^2r_0\bar{\eta}_2$$

を得るので, AM₂ に対する Jacobi 行列は $J^{AM_2} = \begin{pmatrix} J_1^{AM_2} & 0 \\ 0 & J_2^{AM_2} \end{pmatrix}$ 小行列に分解できる. ここで,

$$J_1^{AM_2} = \begin{pmatrix} \mu_{33}r_0^2 & \mu_{33}r_0^2 & \mu_{32}r_1r_0 & \mu_{32}r_1r_0 \\ \mu_{33}r_0^2 & \mu_{33}r_0^2 & \bar{\mu}_{32}r_1r_0 & \bar{\mu}_{32}r_1r_0 \\ \mu_{23}r_1r_0 & \mu_{23}r_1r_0 & \mu_{22}r_1^2 & \mu_{22}r_1^2 \\ \bar{\mu}_{23}r_1r_0 & \bar{\mu}_{23}r_1r_0 & \bar{\mu}_{22}r_1^2 & \bar{\mu}_{22}r_1^2 \end{pmatrix},$$

$$J_2^{AM_2} = \begin{pmatrix} i\mu_{32}^i r_1^2/2 + (\mu_{21} - \mu_{22})r_1^2 & \nu_2r_1^2r_0 \\ \bar{\nu}_2r_1^2r_0 & -i\mu_{32}^i r_1^2/2 + (\bar{\mu}_{21} - \bar{\mu}_{22})r_1^2 \end{pmatrix}$$

である.

$$|J_1^{AM_2} - \Lambda I| = \Lambda^2 \det \begin{pmatrix} 2\mu_{33}r_0^2 - \Lambda & (\mu_{32} + \bar{\mu}_{32})r_1r_0 \\ (\mu_{23} + \bar{\mu}_{23})r_1r_0 & (\mu_{22} + \bar{\mu}_{22})r_1^2 - \Lambda \end{pmatrix} = 0$$

より,

$$\Lambda = 0(2), \text{ tr } J_1^{AM_2} = 2\mu_{33}r_0^2 + 2\mu_{22}^r r_1^2, \det J_1^{AM_2} = 4(\mu_{33}\mu_{22}^r - \mu_{23}^r\mu_{32}^r)r_1^2r_0^2$$

であるため, 非対称混合モード解 AM₂ の安定条件として,

$$\mu_{33}Z_0^2 + \mu_{22}^r r_1^2 < 0, \mu_{33}\mu_{22}^r - \mu_{23}^r\mu_{32}^r > 0, \mu_{21}^r - \mu_{22}^r < 0, |i\mu_{32}^i/2 + \mu_{21} - \mu_{22}|^2 - |\nu_2|^2r_0^2 > 0 \quad (87)$$

が結論される.

v. 3次元対称混合モード SM: $(z_1, z_2, z_0) = (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, r_0 e^{i\theta_0}) \in I_3$.

ここで θ_1, θ_2 は非線形性による $(1 + \tau)\hat{t}$ からのずれを表す. 位相と振幅に対する (84) を出発点にする:

$$\begin{aligned}\dot{r}_0 &= r_0[\kappa_0 + \hat{\mu}_{3,2}^r(r_1^2 + r_2^2) + \hat{\mu}_{3,3}^r r_0^2] + \hat{\nu}_3 r_1^2 r_2^2 \cos \Theta, \\ \dot{r}_1 &= r_1[\kappa_2 + \hat{\mu}_{2,1}^r r_2^2 + \hat{\mu}_{2,2}^r r_1^2 + \hat{\mu}_{2,3}^r r_0^2 + r_2^2 r_0(\hat{\nu}_2^r \cos \Theta + \hat{\nu}_2^i \sin \Theta)], \\ \dot{r}_2 &= r_2[\kappa_2 + \hat{\mu}_{2,2}^r r_2^2 + \hat{\mu}_{2,1}^r r_1^2 + \hat{\mu}_{2,3}^r r_0^2 + r_1^2 r_0(\hat{\nu}_2^r \cos \Theta - \hat{\nu}_2^i \sin \Theta)], \\ \dot{\Theta} &= 2[(\hat{\mu}_{2,1}^i - \hat{\mu}_{2,2}^i)(r_2^2 - r_1^2) + \hat{\nu}_2^i(r_2^2 - r_1^2)r_0 \cos \Theta - \hat{\nu}_2^r(r_1^2 + r_2^2)r_0 \sin \Theta] \\ &\quad + \hat{\mu}_{3,2}^i(r_2^2 - r_1^2) - \hat{\nu}_3 r_0^{-1} r_1^2 r_2^2 \sin \Theta.\end{aligned}$$

ここで, $\dot{} = \frac{d}{d\hat{t}}$ とおいた.

(84) において第3式を第2式から引き去り, $r_1 = r_2$ とすることで,

$$\hat{\nu}_2^i(r_1 + r_2)r_1 r_2 r_0 \sin \Theta = 0$$

を得るが, これは $\Theta = 0, \pi$ を意味している. したがって, 分岐方程式として次が従う.

$$0 = r_0[\kappa_0 + 2\hat{\mu}_{3,2}^r r_1^2 + \hat{\mu}_{3,3}^r r_0^2] \pm \hat{\nu}_3 r_1^4, \quad 0 = \kappa_2 + (\hat{\mu}_{2,1}^r + \hat{\mu}_{2,2}^r)r_1^2 + \hat{\mu}_{2,3}^r r_0^2 \pm \hat{\nu}_2^r r_1^2 r_0.$$

3次元対称混合モード解 SM は $\kappa_2 = 0$ において自明から分岐し, また, $\kappa_2/\kappa_0 = \hat{\mu}_{2,3}^r/\hat{\mu}_{3,3}^r$ において定常解 SS から分岐する. $\Theta = 0$ が $\theta_1 = \theta_2 + \theta_0/2$ を, また, $\Theta = \pi$ が $\theta_1 = \theta_2 + \theta_0/2 + \pi/2$ を意味することに注意すると, $z_1 = z_2$ のとき, $\Theta = 0$ では $z_0 > 0$, $\Theta = \pi$ では $z_0 < 0$ であることが分かる.

このように, 2次元非対称混合モード解 AM₂ と 3次元対称混合モード解 SM が定常解 SS から $\kappa_2/\kappa_0 = \hat{\mu}_{2,3}^r/\hat{\mu}_{3,3}^r$ において同時に分岐する.

さて, (84) から求めた SM に対する 4×4 の Jacobi 行列 J^{SM} の固有値問題に対する特性方程式

$$|J^{SM} - \Lambda I| = 0$$

は, 行列式の column-row 演算によって次のような2つの 2×2 行列に対する固有値問題の特性方程式に分けることができる.

$$\begin{aligned}0 &= |J^{SM} - \Lambda I| = \det \begin{pmatrix} 2\tilde{\mu}_{33}^r r_0^2 - \tilde{\nu}_3 r_1^4 r_0^{-1} \cos \Theta - \Lambda & 2(2\tilde{\mu}_{32}^r r_0 r_1 + 2\tilde{\nu}_3 r_1^3 \cos \Theta) \\ 2\tilde{\mu}_{23}^r r_0 r_1 + r_1^3(\tilde{\nu}_2^r \cos \Theta) & 2\tilde{\mu}_{21}^r r_1^2 + 2r_1^2 r_0(\tilde{\nu}_2^r \cos \Theta) + 2\tilde{\mu}_{22}^r r_1^2 - \Lambda \end{pmatrix} \\ &\times \det \begin{pmatrix} -2\tilde{\mu}_{21}^r r_1^2 - 2r_1^2 r_0(\tilde{\nu}_2^r \cos \Theta) + 2\tilde{\mu}_{22}^r r_1^2 - \Lambda & -2r_0 r_1^3(\tilde{\nu}_2^i \cos \Theta) \\ 2[2(\tilde{\mu}_{21}^i - \tilde{\mu}_{22}^i)r_1 + 2\tilde{\nu}_2^i r_0 r_1 \cos \Theta] + 2\tilde{\mu}_{32}^i r_1 & 2[-2\tilde{\nu}_2^r r_1^2 r_0 \cos \Theta] - \tilde{\nu}_3 r_0^{-1} r_1^4 \cos \Theta - \Lambda \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Jacobi 行列 J^{SM} に含まれるすべての要素は実数であるので, 固有値の実部の符号は

$$\text{trace}^{(1)} = 2\tilde{\mu}_{33}^r r_0^2 + 2(\tilde{\mu}_{21}^r + \tilde{\mu}_{22}^r)r_1^2 - \tilde{\nu}_3 r_1^4 r_0^{-1} \cos \Theta + 2\tilde{\nu}_2^r r_1^2 r_0 \cos \Theta,$$

$$\det^{(1)} = 2[2\tilde{\mu}_{33}^r r_0^2 - \tilde{\nu}_3 r_1^4 r_0^{-1} \cos \Theta][(\tilde{\mu}_{21}^r + \tilde{\mu}_{22}^r)r_1^2 + \tilde{\nu}_2^r r_1^2 r_0 \cos \Theta]$$

$$-4[\tilde{\mu}_{32}^r r_0 r_1 + \tilde{\nu}_3 r_1^3 \cos \Theta][2\tilde{\mu}_{23}^r r_0 r_1 + \tilde{\nu}_2^r r_1^3 \cos \Theta],$$

$$\begin{aligned}
\text{trace}^{(2)} &= 2(\tilde{\mu}_{22}^r - \tilde{\mu}_{21}^r)r_1^2 - 6\tilde{\nu}_2^r r_1^2 r_0 \cos \Theta - \tilde{\nu}_3 r_0^{-1} r_1^4 \cos \Theta, \\
\det^{(2)} &= 2[(\tilde{\mu}_{21}^r - \tilde{\mu}_{22}^r)r_1^2 + \tilde{\nu}_2^r r_1^2 r_0 \cos \Theta][4\tilde{\nu}_2^r r_1^2 r_0 + \tilde{\nu}_3 r_0^{-1} r_1^4] \cos \Theta \\
&\quad + 4\tilde{\nu}_2^i r_0 r_1^3 [2(\tilde{\mu}_{21}^i - \tilde{\mu}_{22}^i)r_1 + 2\tilde{\nu}_2^i r_0 r_1 \cos \Theta + \tilde{\mu}_{32}^i r_1] \cos \Theta
\end{aligned} \tag{88}$$

から決まり、3次元対称混合モード解 SM の安定条件は $\text{trace} < 0$, $\det > 0$ によって与えられる。

vi. 3次元非対称混合モード解 (AM₃): ($r_1 \neq r_2$, $r_1 r_2 r_0 \neq 0$, and $\Theta \neq n\pi$.)

3次元非対称混合モード解 AM₃ は、これまでに述べた解と比べて複雑であるため、ニュートン-ラフソン法を用いて (84) を数値的に解く以外に有効な手段はない。

また、AM₃ に対する Jacobi 行列の固有値問題に関しても、 4×4 行列を単純化する有効な手段が存在しないため、本論文では QR 法を用いて固有値を数値的に求めることによって、AM₃ の安定性を評価した。

3次元非対称混合モード解 AM₃ を除く解の安定条件と、Hill と Stewart (1991) によるそれとの比較は Appendix D に譲る。

A.4 同変分岐理論による結果との比較

Hill と Stewart (1991) は同変分岐理論を用いて、 $O(2)$ 対称性の下で $l:m$, ($l, m \in \mathbb{N}$) という波数比を持つ Hopf モードと定常モード間の相互作用を調べ、解の分類を詳細に行った。

彼らは

$$dz/dt + f(z, \lambda) = 0$$

が Birkhoff ノーマルフォームであるとする、分岐方程式は

$$0 = f(z, \lambda) - i(1 + \tau)z^* \equiv \begin{pmatrix} P^1 z_0 + P^3 \bar{z}_0^{\alpha-1} z_1^\beta \bar{z}_2^\beta \\ Q^1 z_1 - i(1 + \tau)z_1 + Q^5 z_0^\alpha \bar{z}_1^{\beta-1} z_2^\beta \\ R^1 z_2 - i(1 + \tau)z_2 + R^5 \bar{z}_0^\alpha z_1^\beta \bar{z}_2^{\beta-1} \end{pmatrix}, \tag{89}$$

によって与えられることを示した。ここで、 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は $O(2)$ の作用の下での同変な写像、すなわち、

$$f(\gamma \cdot x, \lambda) = \gamma \cdot f(x, \lambda) \text{ for all } \gamma \in O(2), x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R},$$

であり、 $z^* = (0, z_1, z_2)$ であるとした。ここで、

$$P^j = p^j + i(u_1 - u_2)p^{j+1}, \quad Q^j = q^j + iq^{j+1} + u_2(q^{j+2} + iq^{j+3}), \quad R^j = \kappa \cdot Q^j,$$

$$p^j = p^j(N_0, N_1, M_1, T_1, T_2) \in \mathbb{R}, \text{ and } q^j = q^j(N_0, N_1, M_1, T_1, T_2) \in \mathbb{R}$$

である。 u_0, u_1, u_2 はそれぞれ $u_0 = |z_0|^2$, $u_1 = |z_1|^2$, $u_2 = |z_2|^2$ と定義する。このとき、

$$N_0 = u_0, \quad N_1 = u_1 + u_2, \quad M_1 = u_1 u_2, \quad T_1 = \text{Re}(z_0^\alpha \bar{z}_1^\beta \bar{z}_2^\beta), \quad T_2 = (u_1 - u_2)(\text{Im}(z_0^\alpha \bar{z}_1^\beta \bar{z}_2^\beta))$$

はいずれも実数値を取る $O(2) \times S^1$ 不変量である。 α と β は、 l が奇数の時、 $\alpha = 2m$, $\beta = l$, また、 l が偶数の時は $\alpha = m$, $\beta = l/2$ であるとする。我々が取り扱う問題は、 $(l, m) = (4, 1)$ であるため $\alpha = 1$, $\beta = 2$ である。また、 $\kappa \in O(2)$ は (z_0, z_1, z_2) に対して $\kappa \cdot (z_0, z_1, z_2) = (\bar{z}_0, z_2, z_1)$ のように作用する。

P^j, Q^j を原点周りで Taylor 級数展開したときの最低次の近似で, 分岐方程式 (89) に含まれる p 's と q 's は次のように振幅方程式 (37) 係数と対応する:

$$\begin{aligned} p^1 &= p_\lambda^1 \lambda + p_{N_0}^1 u_0^2 + p_{N_1}^1 (u_1 + u_2), \quad p^2 = p^2(0)(u_1 - u_2), \\ q^1 &= q_\lambda^1 \lambda + q_{N_0}^1 u_0 + q_{N_1}^1 (u_1 + u_2), \quad q^2 = q_{N_0}^2 u_0 + q_{N_1}^2 (u_1 + u_2), \\ p_\lambda^1 \lambda &= \kappa_3, \quad p_{N_0}^1 = \hat{\mu}_{3,3}, \quad p_{N_1}^1 = \hat{\mu}_{3,2}^r, \quad p^2(0) = \hat{\mu}_{3,2}^i, \quad p^3(0) = \hat{\nu}_3, \\ q_\lambda^1 \lambda &= \hat{\sigma}_2, \quad q_{N_0}^1 = \hat{\mu}_{2,3}^r, \quad q_{N_0}^2 = \hat{\mu}_{2,3}^i, \quad q_{N_1}^1 = \hat{\mu}_{2,2}^r, \quad q_{N_1}^2 = \hat{\mu}_{2,2}^i, \\ q^3(0) &= \hat{\mu}_{2,1}^r - \hat{\mu}_{2,2}^r, \quad q^4(0) = \hat{\mu}_{2,1}^i - \hat{\mu}_{2,2}^i, \quad q^5(0) = \hat{\nu}_2^r, \quad q^6(0) = \hat{\nu}_2^i. \end{aligned}$$

同形分解を行うことにより, Hill と Stewart は Jacobi 行列の固有値の実部を決定した. 定常モード SS の固有値の実部として

$$0, \quad p_{N_0}^1 = \hat{\mu}_{3,3}, \quad q^1 \pm q^5 x_0^2 \pm i(q^2 \pm q^6 x_0^2 - 1 - \tau) = \kappa_2 + \hat{\mu}_{2,3}^r u_0 \pm i(-1 - \tau + \hat{\mu}_{2,3}^i u_0) \langle \text{twice} \rangle. \quad (90)$$

が求められたが, これは (85) と一致する. 伝播波解 TW に対する結果

$$0, \quad q_{N_1}^1 = \mu_{2,2}^r, \quad q^3 \pm i q^4 = \mu_{2,1}^r - \mu_{2,2}^r \pm i(\mu_{2,1}^i - \mu_{2,2}^i), \quad p^1 \pm i p^2 x_1^2 = \kappa_3 + \hat{\mu}_{3,2}^r u_1 \pm i \hat{\mu}_{3,2}^i u_1, \quad (91)$$

は (86) と一致する. 2次元非対称混合モード AM₂ に対しては,

$$0 \langle \text{twice} \rangle, \quad q_{N_1}^1 = \mu_{2,2}^r \langle \text{twice} \rangle, \quad p_{N_0}^1 u_0 = \hat{\mu}_{3,3} u_0, \quad q_{N_1}^1 x_0 x_1 = \hat{\mu}_{2,2}^r x_0 x_1. \quad (92)$$

という結果が得られたが, これは (87) とは一致しない.

さて, 3次元対称混合モード解 SM についての彼らの結果は, $0 \langle \text{twice} \rangle$ と残り4つの固有値に対する小行列の trace と det によって表されている. Taylor 級数展開を行い最低次の近似で評価した結果は

$$\begin{aligned} \text{trace}^{(1)} &= 2[p_{N_0}^1 x_0^2 + (2q_{N_1}^1 + q^3)x_1^2] = 2[\hat{\mu}_{3,3} x_0^2 + (\hat{\mu}_{2,1}^r + \hat{\mu}_{2,2}^r)x_1^2], \\ \det^{(1)} &= 4[p_{N_0}^1 (2q_{N_1}^1 + q^3) - (q_{N_0}^1 + \epsilon q^5)(2p_{N_1}^1 + \epsilon q^3)]x_0^2 x_1^2 = 4[\hat{\mu}_{3,3}(\hat{\mu}_{2,2}^r + \hat{\mu}_{2,1}^r) - 2\hat{\mu}_{2,3}^r \hat{\mu}_{3,2}^r]x_0^2 x_1^2, \\ \text{trace}^{(2)} &= -2[q^3 x_1^2 + \epsilon p^3 x_1^2 + 2\epsilon q^5 x_0^2] = -2(\hat{\mu}_{2,1}^r - \hat{\mu}_{2,2}^r)x_1^2, \\ \det^{(2)} &= 4x_0^{\alpha-2} x_1^{2\beta-2} [\alpha(p^3 q^3 x_1^2 + 2p^2 q^6 x_0^2)x_1^2/2 + \beta(q^3 q^5 + q^4 q^6)x_0^2 x_1^2] \\ &= 2\hat{\nu}_3(\hat{\mu}_{2,1}^r - \hat{\mu}_{2,2}^r)x_1^6 x_0^{-1} + 4\hat{\mu}_{3,2}^i \hat{\nu}_2^i x_1^4 x_0 + 8[(\hat{\mu}_{2,1}^r - \hat{\mu}_{2,2}^r)\hat{\nu}_2^r + (\hat{\mu}_{2,1}^i - \hat{\mu}_{2,2}^i)\hat{\nu}_2^i]x_1^4 x_0. \quad (93) \end{aligned}$$

の通りである. これらは (88) において, 最低次の項のみを残したものと完全に一致する. このように, 2次元非対称混合モード AM₂ を除いて, 今回得た安定性条件は Hill と Stewart による同変分岐理論にもとづく結果によって支持された.

A.5 1:2 共鳴に対する振幅方程式の定常解とその安定性

式 (59) の非自明な定常解ならびにその安定条件は以下のように求められる。

1. 単純モード PM: $(r_1, r_2) = (0, r)$

r は $\sigma_2 + \lambda_{22}r^2 = 0$ を満たす。すなわち、 $\sigma_2\lambda_{22} < 0$ が成り立つ場合に単純モード解は存在する。単純モード解の安定性を議論するためには式 (59) の代わりに元の式 (58) を用いるのが便利である。PM を $(z_1, z_2) = (0, y)$, $y \in \mathbb{R}$ と書くとき、 y は

$$0 = \sigma_2 + \lambda_{22}|y|^2$$

を満たす。さて、(59) の PM に対する Jacobi 行列

$$df_{PM} = \begin{pmatrix} \sigma_1 + \lambda_{12}|y|^2 & \kappa_1 y & 0 & 0 \\ \kappa_1 y & \sigma_1 + \lambda_{12}|y|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{22}|y|^2 & \lambda_{22}y^2 \\ 0 & 0 & \lambda_{22}y^2 & \lambda_{22}|y|^2 \end{pmatrix},$$

から固有値が

$$\sigma_1 + \lambda_{12}z_2^2 \pm \kappa_1 z_2, 2\lambda_{22}z_2^2, 0$$

のように求められる。したがって、PM の安定条件は

$$\lambda_{22} < 0, \quad \sigma_1 + \lambda_{12}r^2 < 0, \quad (\sigma_1 + \lambda_{12}r^2)^2 - \kappa_1^2 r^2 > 0$$

で与えられる。なお、1:l 共鳴 ($l \in \mathbb{N}$) の場合、 $(z_1, z_2) = (s, 0)$, ($s \in \mathbb{N}$) の形の単純モード解は、式 (58) の第2式右辺第2項のために存在することができない。これは $k:k+1$ 共鳴 ($k \in \mathbb{N}$) の場合に2種類の単純モード解が存在可能であるのと対照的である。

2. 混合モード MM: $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \sin \Theta = 0$

r_1 と r_2 は次の式を満たす。

$$\begin{aligned} r_1^2 &= -\lambda_{11}^{-1}(\sigma_1 + \kappa_1 r_2 \cos \Theta + \lambda_{12} r_2^2), \\ 0 &= r_2(\sigma_2 + \lambda_{22} r_2^2) - \lambda_{11}^{-1}(\kappa_2 \cos \Theta + \lambda_{21} r_2)(\sigma_1 + \kappa_1 r_2 \cos \Theta + \lambda_{12} r_2^2). \end{aligned} \quad (94)$$

$\Theta = 0, \pi$ である混合モードをそれぞれ MM_0, MM_π と呼ぶことにする。MM に対する (59) の Jacobi 行列は

$$df_{MM} = \begin{pmatrix} 2\lambda_{11}r_1^2 & \kappa_1 r_1 \cos \Theta + 2\lambda_{12}r_1 r_2 & 0 \\ 2\kappa_2 r_1 \cos \Theta + 2\lambda_{21}r_1 r_2 & -\kappa_2 r_1^2 r_2^{-1} \cos \Theta + 2\lambda_{22}r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa_1 r_2 \cos \Theta - \kappa_2 r_2^{-1} r_1^2 \cos \Theta \end{pmatrix}$$

であり、MM の安定条件は、

$$2\kappa_1 r_2 \cos \Theta + \kappa_2 r_2^{-1} r_1^2 \cos \Theta > 0, \quad 2\lambda_{11}r_1^2 - \kappa_2 r_1^2 r_2^{-1} \cos \Theta + 2\lambda_{22}r_2^2 < 0,$$

$$2\lambda_{11}r_1^2(-\kappa_2 r_1^2 r_2^{-1} \cos \Theta + 2\lambda_{22}r_2^2) - (\kappa_1 r_1 \cos \Theta + 2\lambda_{12}r_1 r_2)(2\kappa_2 r_1 \cos \Theta + 2\lambda_{21}r_1 r_2) > 0$$

で与えられる. 第2番目の不等式と第3番目の不等式はそれぞれ $\text{tr } J_2 < 0$ 及び $\det J_2 > 0$ から得られる. ここで, J_2 は MM_0 または MM_π に対する df_{MM} の 2×2 部分行列である. さて, SW という周期解が MM の解分枝から Hopf 分岐するが, この Hopf 分岐は J_2 が複素共役対の固有値をもつことに起因するため, SW は 2次元固有ベクトルによって張られた 2次元平面上に制限されることが分かる.

3. 伝播波 TW: $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \sin \Theta \neq 0$.

r_1, r_2, Θ は次を満たす.

$$r_1^2 = -\frac{2\kappa_1}{\kappa_2} r_2^2, \quad r_2^2 = \frac{\kappa_2(\sigma_2 + 2\sigma_1)}{2\kappa_1(2\lambda_{11} + \lambda_{21}) - \kappa_2(2\lambda_{12} + \lambda_{22})},$$

$$\Theta = \cos^{-1} \left(-\frac{\sigma_1 + \lambda_{11}r_1^2 + \lambda_{12}r_2^2}{\kappa_1 r_2} \right). \quad (95)$$

この解は定常ピッチフォーク分岐により $\text{MM}_0, \text{MM}_\pi$ の解分枝から分岐したものである. TW に対する Jacobi 行列は

$$df_{\text{TW}} = \begin{pmatrix} 2\lambda_{11}r_1^2 & \kappa_1 r_1 \cos \Theta + 2\lambda_{12}r_1 r_2 & -\kappa_1 r_1 r_2 \sin \Theta \\ 2\kappa_2 r_1 \cos \Theta + 2\lambda_{21}r_1 r_2 & -2\kappa_1 r_2 \cos \Theta + 2\lambda_{22}r_2^2 & 2\kappa_1 r_2^2 \sin \Theta \\ -2\kappa_2 r_2^{-1} r_1 \sin \Theta & -4\kappa_1 \sin \Theta & 0 \end{pmatrix}$$

であるが, 安定条件を陽的に表すことは容易ではない. そのため, TW の安定性は数値的に評価した.

さて, $z_j(t) = r_j(t) e^{i\theta_j(t)}$, $j = 1, 2$ における位相 θ_1 と θ_2 は $\dot{\theta}_1 = \kappa_1 r_1 r_2 \sin \Theta$ と $\dot{\theta}_2 = -\kappa_2 r_1^2 r_2^{-1} \sin \Theta$ に従う. $\hat{\theta}_1 = \kappa_1 r_1 r_2 \sin \Theta$, $\hat{\theta}_2 = -\kappa_2 r_1^2 r_2^{-1} \sin \Theta$ とおき位相を $\theta_1 = \hat{\theta}_1 t + \theta_1(0)$, $\theta_2 = \hat{\theta}_2 t + \theta_2(0)$ と書くとき, 攪乱は

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(x, z, t) &= z_1(t) e^{i\alpha_* z} \phi_1(x) + z_2(t) e^{2i\alpha_* z} \phi_2(x) + c.c. + \dots \\ &= r_1 \phi_1 e^{i\alpha_*(z + \alpha_*^{-1} \hat{\theta}_1 t)} e^{i\theta_1(0)} + r_2 \phi_2 e^{2i\alpha_*(z + \alpha_*^{-1} \hat{\theta}_1 t)} e^{i(\Theta + \theta_2(0))} + c.c. + \dots \end{aligned}$$

と表される. このように攪乱 $\hat{\Psi}$ は z 方向に位相速度 $-\alpha_*^{-1} \hat{\theta}_1$ で伝搬することが分かる. これが, この解が (59) の定常解であるにもかかわらず伝播波と呼ばれる理由である.

ところで, $(\sigma_1 + \lambda_{11}r_1^2 + \lambda_{12}r_2^2)/(\kappa_1 r_2)$ が求まっても, Θ の符号, そして $\sin \Theta$ の符号は一意に決まらない. これは, 1:2 共鳴における伝播波解 TW として上向き進行波と下向き進行波が共に存在可能であることを意味する. df_{TW} が与える特性方程式には Θ の情報が $\cos \Theta$ および $\sin^2 \Theta$ の形でしか含まれない. それゆえ, Θ の符号は固有値の符号に影響を与えず, 双方向に伝播する TW が同じ安定特性を有する.

TW の解分枝上から, 3次元空間における変調波解 MTW が Hopf 分岐する.