蓋然的推論の論理展開と推測の構成

数学科教育教室　矢　部　敏　昭

Logical Development of Plausible Reasoning and Construction of Conjecture

Toshiaki YABE

I　はじめに

一般に，論理は思考の形式・法則であり，思考の法則的なつながり，あるいは推論の仕方[1]を指す。G. Pólya は，数学において論証的推論と蓋然的推論（発見的推論）の２種類があり，この２つの推論は互いに衝突するものではなく，それどころか互いに補足しあうものである[2]と述べる。例えば，ある一つの立言がなされたとき，「この立言がどのようにして思いつかれたのか」は発見についての問いであり，「この立言を真として受け入れる根拠は何か」は根拠づけについての問いである。

前者の問いに対して説明される推論方法は，主として思考過程，及び心理的働きが関与するものであり，「発見の論理」すなわち，とりわけ帰納的推論，類比的推論に関する事柄である。この推論は危険で，争う余地があり暫定的なものである。他方，後者の問いに対して説明される推論方法は，主として思考過程に関与するものであるが，感情・意志といった情意面は含まれない形式的論理展開であり，「論証の論理」すなわち，演繹的論理に関する事柄である。この推論は厳密で，争う余地がなく最終的なものである。数学という１つの学問が，前述の２つの問いにみられる発見の論理とその発見した推測の正しさを疑いのないものにする論証の論理を兼ね備えた学問であることは一般に認められているところでもある。

がしかし，前者の推論である発見の論理は，蓋然性をもつが故に論証の論理では得られない，新しい判断や推測を導くといった極めて生産的な面をもつ。G. Polya は，数学が論証的推論を学ぶに優れた機会を提供することは誰でも知っているが，同時に蓋然的推論を学ぶに適した教科は他にないと主張し，「数学者の創造的仕事の結果は論証的推論であり，証明である。しかしその証明は，蓋然的推論によって，推測によって発見されるのです。もしも数学の学習が，なんらか数学の発明を反映するものならば，それは推測に対し，蓋然的推論に対し余地をもたねばなりません。」と主張する[3]。

そこで本稿では，第一に学習者に新しい推測や判断を導く極めて生産的な推論である帰納的推論及び類比的推論を取り上げ，それらの推論の論理を展開するものである。第二に帰納的推論及び類比的推論の諸手続きを検討し，学習者に何らかの数学的法則・規則，性質（内容）に関する推測を構

成する１つの実験を行い，この事例をもとに学習者の推測を構成する過程でみられる様相を究明するものである。そして，第三にこれらの推論を展開する場面を具体的な教材に求め，G. Polya の類比的手続きを手がかりに展開するとともに，数学教育に実践する有効性と問題点を明らかにしていくものである。

II　Polya の蓋然的推論の論理展開

蓋然的推論は物事の観察にはじまり，観察によって暗示された１つの推測を２，３の事例について検定し，その推測を指示していく推論である。つまり，考察の対象としての事象を観察し１つの推測や判断を導く推論である。言い換えれば，蓋然的推論は観察によって暗示されたある１つの推測や判断を，より確かな信頼性を強めるために展開される思考の仕方，論理の展開といえよう。ここでは，以下に示す１つの古典的な推論のパターンである論証的推論[4)]の否定式(modus tollens)をもとに帰納的推論と類比的推論を展開する。

Ａ はＢを含蓄する
Ｂは偽である
――――――――――――←「故に」を表わす
Ａは偽である

【論証的推論の古典的パターン（否定式)】

１．帰納的推論

上述の論証的推論のパターンにおける前提Ｂが，もし真であるならば，Ａの結果であるＢの確証は推測Ａを証明しない。しかし，この確証はＡの信頼性を増す。つまり，ある１つの新たな場合(B)について確証されたことによって，Ａの推測は信頼性が増すものとみる。

ＡはＢを含蓄する
Ｂは真である
――――――――――――
Ａは信頼を増す

【帰納的推論の基本的パターンａ】

さらに，Ａの信頼性を一層増すのは，Ａが含蓄するＢについて，B_nとは非常に異なる B_{n+1}において真であることが認められた場合である。そして，このパターン(b)を Polya は上述の基本的なパターン(a)よりも洗練された推論[5)]であると指摘する。

Ａは B_{n+1}を含蓄する
B_{n+1}は以前確かめられたＡの結果の
B_1，B_2，･･･，B_nとは非常に異なる
B_{n+1}は真である
――――――――――――
Ａはずっと信頼を増す

【帰納的推論のパターンｂ】

ＡはＢを含蓄する
Ｂは本来とてもありそうにない
Ｂは真である
――――――――――――
Ａは非常に信頼が増す

【帰納的推論のパターンｂ'】

つまり，新しい結果の確証は，その新しい結果(B_{n+1})が前に確かめられた結果(B_1，B_2,・・，B_n)と異なっていればいるほど一層価値があるといえるのである。しかし，Polyaは1つの推測が確かめられると，その推測の確証は次の場合の確証を得ることについてためらう心的要因が起こると指摘する。そして，新しい結果の確証はその新しい結果が以前に確かめられた結果と異なることが多いか少ないかに応じて，その推論の価値の大小が導かれるといい，最も意外な結果の確証が最も人を納得させるものであるともいう[6]。

AはB_{n+1}を含蓄する
B_{n+1}は以前確かめられたAの結果の
B_1，B_2,・・，B_nに非常によく似ている
B_{n+1}は真である

Aはほんのちょっと信頼が増す
【帰納的推論のパターンc】

AはBを含蓄する
Bは本来まったくありそうだ
Bは真である

Aはほんのちょっと信頼を増す
【帰納的推論のパターンc'】

2．類比的推論

Polyaはある1つの推測を帰納的に指示していく推論を明示した後，これらの検定(確証)は帰納的証拠を与えるが，証明は与えない[7]という。しかし，帰納的に指示されていくある1つの推測は，いくつかの事例で検定されることによって，その推測は結局真であるということになるだろうと期待するのは自然なことである[8]ともいう。そして，このことを期待するとき，我々は蓋然的推論の1つの重要なパターンに従うとして，以下のパターンを示す[9]。

AはBに類比である
Bは真である

Aは信頼が増す
【類比的推論のパターンd】

この論理展開に用いられている前提BはAと関連のある事柄である。そして，ある推測(A)がそれと類比な推測(B)において真であることが認められれば，その推測は信頼性を増すことを意味する。

ところが，Polyaは類比のことを論じはじめると，その概念はあまりしっかりしていない地盤の上に足を踏み入れることになるとし，類比は一種の相似といえばいえるだろう[10]という。そして，相似な物は何らかの点で互に一致し，もしその一致する面をはっきりした概念にまで縮約しようと思うなら，それらの相似なものを類比であるとみなし，ある2つの対象がそれぞれの部分の明白に定義できる諸関係において一致するならば類比である[11]と述べる。このことについては次章で考察する。

類比的推論は，前提Aと類比にあるBを考察の対象としながらも，このように新たな対象について推測を展開することによって，新たな類比なBを検定することによって帰納的基盤を広げていると考えることができる。しかし，導かれた1つの推測は類比の関係にある事柄Bの上に成り立った結論であることから考えると，類比に基づく結論はその信頼性が強められるが，証明を与えていないことは帰納的推論と同じである。

さらに，帰納的推論のパターンCに対応して，類比的推論も同様にAの結果であるBの確証は，

そのＢの信頼が増すことによって，結果の信頼性は増すのである。

Ａは Ｂに類比である
Ｂは信頼が増す
―――――――――――
Ａはやや信頼が増す
類比的推論のパターンｅ】

３．蓋然的推論の信頼性（結果の検討）

帰納的推論にみられる論理展開は，命題Ａがあるとき，Ａの１つの結果Ｂを考察の対象とする。このとき，Ｂは１つの明瞭な論理的な組み立てであるＡにしたがっていることがわかっている場合である。つまり，ＡがＢを含蓄するとき，Ａよりも近づきやすいＢへと観察の対象を切り換え検討する推論である。それは，Ａを直接証明することができず，またＡを反証することに決定的な成功が得られない場合だからである。同様に，類比的推論もまた，命題Ａに対してＡよりも近づきやすい，Ａと類比な関係にあるＣを考察の対象として，Ｃが真であるか偽であるかの検討に切り換えるのである。

このような推論の過程によって導かれた結果は，もしＡの結果であるＢやＣが偽であればＡもまた偽でなければならないと推定できる。しかし，もしＢやＣが真であるならば，Ａはそれ以前よりも多くの信頼を受けることができる。このとき，Polya はＢやＣの結果に応じてさらなる推論のパターンが見いだせ，論証的推論あるいは，蓋然的推論のパターンに従う[12)]という。

Ａは Ｂを含蓄する
Ｂは偽である
―――――――――――
Ａは偽である
【論証的推論のパターンａ】

Ａは Ｂを含蓄する
Ｂは真である
―――――――――――
Ａは信頼を増す
【蓋然的推論のパターンａ’】

これらのパターンは，前述した論証的推論の古典的（否定式）のパターンと１において取り上げた帰納的推論の基本的パターンである。

逆に，命題Ａの真偽を決定するに当たって，ＡがＢによって含蓄されるならば，そしてもしＢが証明できたなら求めるＡは，その証明の結果にしたがう。つまり，ＢはＡの１つの可能な根拠となる。

ＡはＢによって含蓄される
Ｂは真である
―――――――――――
Ａは真である
【論証的推論のパターンｂ】

ＡはＢによって含蓄される
Ｂは偽である
―――――――――――
Ａは信頼が減る
【蓋然的推論のパターンｂ’】

よって，蓋然的推論においてＡはＢによって含蓄されるとき，そしてＢが偽であることによって，その推測の信頼性は直ちに否定されるものではなく，ただ減少するのみであるといえる。

さらに，２つの相反する，相容れない推論についても考えられる。このとき，２つの命題ＡとＢの一方が真なることは必然的に他方の偽なることを含蓄する。しかし，２つの命題ＡとＢが両方と

も真であることはあり得ないが，それらは両方とも偽であることはあり得る。なぜなら，ある事象に対して相容れない2つの推測が導かれたとき，もしBが正しいければ，他方のAは偽でなければならない。しかし，もしBが正しくないことが示されても，他方のAは偽であるかも知れないのである。

証的推論	蓋然的推論
AとBは相容れない	AとBは相容れない
Bは真である	Bは偽である
Aは偽である	Aは信頼が増す
【証的推論のパターンC】	【蓋然的推論のパターンC'】

つまり，蓋然的推論においては，ある推測に対する我々の信頼は，相容れない推測が一方で偽である場合，他方の推測の信頼は増し得るのみであって，決して真であることは証明しないということになる。

ここまで述べてきて，無定義に使っていた「相容れない」「含蓄する」という用語について定義をしておく。『相容れない(imcompatible)』とは，2つの命題AとBについて，もし両方が同時に真であり得ないとき，これらの2つの命題は互いに相容れないと言う。命題Aは真または偽であり得るし，Bも真または偽であり得る。つまり，AとBとを一緒に考えるとき，次の4つの異なった場合が起こり得る。

~~Aは真，Bは真~~　　Aは真，Bは偽
Aは偽，Bは真　　Aは偽，Bは偽

しかし，AがBと相容れないというときは，これらの4つの場合の中で，「Aは真，Bは真」が除外されることを意味する。そして，相容れないという性質は常に相互的である。

「AはBと相容れない」　⇔　「BはAと相容れない」

また，『含蓄(implication)される』とは，Aと非Bとが相容れないとき，AはBを含蓄する（あるいは，BはAによって含蓄される）と言う。よって，含蓄の概念は次の同値(equivalent)性によって特徴づけられる。「AはBを含蓄する」⇔「Aは非Bと相容れない」

PolyaはAがBを含蓄することを知っていることは大切である[13]という。それは，はじめの観察の段階ではAもBも真であるか偽であるかわからない。しかし，後にAが真であることが明らかになれば，直ちに非Bは偽でなければならないからである。したがってBは真でなければならない。そして，「非BはAと相容れない」⇔「非Bは非Aを含蓄する」を知って，上記の3つの同値性の連鎖から，「AはBを含蓄する」⇔「非Bは非Aを含蓄する」が導け，この同値性は論証的推論の肯定式(modus ponens)が得られるので，極めて重要であると考えられる。

BはAを含蓄する
Bは真である
―――――――――
Aは真である
【論証的推論のパターン(肯定式)】

III 蓋然的推論における推測の構成

論証的推論の肯定式の論理展開からは，ある１つの命題に対してそれを含むより一般的な命題を設定し，考察の対象とするとともに検定によってはじめの命題の真偽を導く。他方，帰納的推論は１つの命題に対して，それに含まれるより特殊（部分的）なものを考察の対象として推測を導き検定する。また，類比的推論はその命題と類比な関係にある特殊なものを考察しさらに検定する。そして，これらの推論はその結果において，その真なる場合ははじめの命題の信頼性は増し，その偽なる場合はその信頼性が減る推論とみることができる。

言い換えれば，ある推測に対する考察及び検定の対象は，論証的推論が「一般から特殊」の方向であるのに対して，帰納的推論は「特殊から一般」，類比的推論は「特殊から特殊」の方向であるといえよう。しかし，Polya が言うように，蓋然的推論である帰納及び類比的推論は，その推測の構成過程で取り上げられる考察の対象及び検定は，何らかの関係の類比への気づき，より広い大きな対象へと昇る一般化と，逆により狭い具体へと降りる特殊化がみられる。

ここでは，まず帰納的推論及び類比的推論の形式（手続き）と特徴を考察し，次に１つの実験事例に基づく推測の構成過程を取り上げるものである。

１．蓋然的推論の形式

Polya は，帰納は物事の観察に始まることが多い[14]といい，ゴールドバッハの推測（４より大きい任意の偶数は２つの奇数の素数の和である）を取り上げ，帰納的手続きの典型とみられる３つの段階[15]があることを指摘する。

1) ある類似性に注目すること
2) 一般化の段階があること
3) それを検定すること

1)の「ある類似性に注目すること」は，与えられたＢの内部において部分的に類似していること，また類比である。2)の「一般化の段階があること」は，一般的な関係としてＡの考察へ至ること。しかし，この推測は暫定的なもの。3)の「それを検定すること」は，暫定的な推測をいくつかの場合に当てはめて確かめることである。とりわけ，ある類似性に気づくことは，また与えられた内部において部分的に類似している，本質的手がかりを発見することは非常に困難である[16]ともいう。それは，１つの推測を作るための観察の仕方は，それまでの観察者の経験や知識に基づいて決定されるからであり，例えば数を観察しようと思うならば，数に興味を持ちさらに数のことにある程度通じていなければならないからである。このことについては次の項で明らかにする。

また，帰納がうまくいかない場合の原因として，1)いくつかの事例の間の類似性に気づかないこと，2)その類似性を一般化して推測を作ることができないこと，3)さらにその推測を点検して，修正したり補強したりすることができないこと，は一般に考えられる事柄である。

しかし，ある１つの推測の構成を目指す帰納的推論は，その展開していく中で，とりわけ「ある類似性に注目する」活動において，有益な副産物が得られる[17]と伊藤説朗氏はいう。

1) 対象について徹底的に理解し，そのすべての意味を了解したこと
2) 対象についての強力な帰納的な証拠を集めたことにより，対象への疑念を克服し，強い確信を与えたこと

3) 対象と関連のある諸概念や原理・定理等を帰納の過程で用いたことから，論証においても，それらを導入することについてのもっともな基盤を与えたこと

さらに，伊藤氏は「ある類似性に注目すること」という活動を分析すると，２つの要素から成り立っていることが分かると指摘し[18]その１つとして，いくつかの事例が何でもよいというものではなく，適当に選ばれていることが必要である。その際に，なるべく簡単な場合を事例として取り上げること。さらに，それらの事例から一般の場合を想定しやすいものを取り上げることであるという。

他方，類比的推論はある１つの命題に対して，その命題よりも近づきやすく，かつ類比な関係にあるものを考察の対象として推測を構成し検定していく推論である。言い換えれば，ある事柄 A'に対して，A'と類比の関係にある事柄Ａを考察の対象とし，Ａから導かれる性質Ｂとの関係を，A'とB'の間に考え，Ｂと類比的な未知の B'を導き出そうとする推論といえよう。

伊東俊太郎氏のモデル[19]を借りれば，図１のように表せよう。カギ型矩形によって囲まれたＡ, A', Ｂは既知のものであり，これから未知のもの B'が推論される。

この推論においても推測 B'を作り上げる上で，その観察の仕方についてはいくつかの困難点が考えられる。その１つは A'と類比な関係にある事柄Ａの想定（抽出）ができないこと。また，Ａから導かれるＢとの関係を，A'と B'の間に考えられないこと。さらに，一般的な性質として B'の推測を点検したり修正したりできないことである。

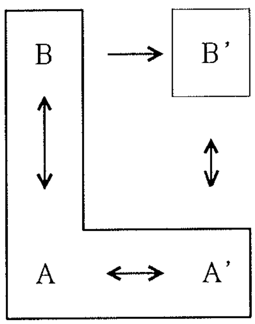


図１　類比的推論の手続き

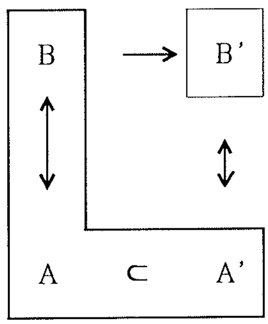


図２　帰納的推論の手続き

図２は帰納的推論の手続きを示したモデルである。新しい推測を導き，構成するといった目的において一致する両者の推論は，考察の対象としてのＡの抽出の仕方においては異なるものの，その手続き的な流れでは多くの共通点（前述した Polya の1) 2) 3) の手続き）を見い出すことができる。つまり，Ａから導かれる性質Ｂとの関係を，A'と B'の間に考え未知の B'を導こうとする各段階の手続きは一致するのである。一方，異なる点はこの新たな対象であるところのＡの抽出の仕方である。それは，帰納的推論が A'に含まれるＡを新たな対象とするのに対して，類比的推論のＡは A'と類比の関係にある事柄が新たな対象となるからである。このことは，実際的な問題において類比的推論を展開する際の困難点の１つになると考える。次章２.(2)で具体例を取り上げて詳述するものである。

以下の実験事例は，帰納的推論における推測の構成過程を考察するねらいから，１つの数学的な課題を作成し，その解決の実際を解決過程に即して記述したものである。はじめの考察の対象 A'に含まれるＡについては，そのいくつかの対象（式）が示されているが，「ある類似性に注目する」数学的活動は一様でないことがわかる。

2．１つの実験事例

下記の課題に対して，学部学生及び大学院生（現職）を被験者として，課題の解決に当たっていただいたものである。

課題　連続する２つの奇数の積について考えるとき，以下の形で表される続いた２つの奇数の積には，どんな数学的な性質が見いだされるであろうか。

$1\times3=3$　$3\times5=15$　$5\times7=35$　$7\times9=63$　……

また，この課題に対して次のような説明を付した。「一般に，帰納は物事の観察にはじまることが多く，また推測は観察によって暗示される，といわれる。推測を構成するには与えられた課題から類似性を見い出し，共通の性質としてどんな数学的な命題が作り出せるかである。自らの推測を構成してみたい。」と。この説明を入れたのは，解決者の思考の流れを，とりわけ推測を導く過程をできるだけ詳しく記述してもらいたいという意図からである。さらに，被験者自身に思考の流れについて段階も明記してもらった。

被験者ａ

1)類似性

ア.奇数になる　イ.増加する　ウ.１を加えると平方数になる

2)検討(ウについて)

他の例で成立するかどうかを確かめる

13

$195+1=196=14^2$

15

$255+1=256=16^2$

17

$323+1=324=18^2$

19

3)共通の性質

「連続する２つの奇数に１を加えると偶数の２乗になる」

なぜなら，ｎを自然数とすると，連続する２数の奇数は$2n-1$，$2n+1$と表せる。

よって，$(2n-1)(2n+1)+1=4n^2-1+1=4n^2=(2n)^2$

4)一般的な法則

「連続する２つの奇数の積は，その２数の間にある偶数（２数の平均）の平方から１をひいた数である。」

被験者ｂ

1)どんな類似性が見い出せるか

ア.かけてある２数は共に奇数である　イ.奇数×奇数＝奇数となっている　ウ.かけてある２数を比べると右側の数の方が大きい　エ.２つの数の差は２である　オ.２数の和は偶数である

2)検討をどのように行うか(エについて)

１番目の式は　$1\times3=3$

２番目の式は　$3\times5=15$

３番目の式は　$5\times7=35$

4番目の式は　7×9＝63

であるから，n番目の式は2n－1，2n＋1で表すことができる。

ゆえに，(2n＋1)－(2n－1)＝2　よって，2数の差は2であることがわかる。

3)共通の性質としてどんな内容がつくりだせるか

(1•3)　(3•5)　(5•7)　(7•9)　(9•11)　••••••••••••••

3　15　35　63　99　143　195　••••

12　20　28　36　44　52　•••••••

→　→　→　→　→　→

8　8　8　8　8　••••••••

隣り合う奇数の積を並べた数列を考えたとき，この数列の階差数列はいずれも4の倍数になっている(□枠)ことがわかる。

12＝3×(5－1)＝3×4　　20＝5×(7－3)＝5×4　　28＝7×(9－5)＝7×4

このとき，被乗数が3，5，7と2ずつ大きくなっているので，その差は常に8である。

4)一般的法則としてとらえられるもの

(元の数列の第n項)＝(元の数列の初項)＋(階差数列n－1項の和)

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdot\cdot\cdot + b_{n-1})$$

階差数列は初項12，公差8の等差数列であるから，

$$\begin{aligned} a_n &= 3+(n-1)[2\cdot 12+\{(n-1)-1\}\cdot 8]/2 \\ &= 3+(n-1)(8+8n)/2 \\ &= 3+(n-1)(4+4n) \\ &= 4n^2-1 \end{aligned}$$

よって，n番目の式の積は$4n^2-1$で表すことができる。

IV　実験事例の考察と類推物の検討

1．実験事例の考察

(1)　被験者aの思考の流れ

被験者は，連続する2つの奇数の積における何らかの数学的な性質の推測を課題として与えられた。このとき，被験者はア.積が奇数になること，イ.積が増加すること，ウ.積に1を加えると平方数になるという3つの類似性に気づいている。次に，これらの中からウの類似性を取り上げて検討している。それは，ウの類似性は他のア，イを含む関係にあるからと推察される。つまり，積に1を加えると平方数になるということは，同時に積が奇数になること，積が順々に増加していくことを意味するからである。しかし，この類似性に気づく観察の仕方は，言い換えればどのようにしてこの類似性（立言）が思いつかれたかは不明である。このことについては，本項(3)で考察する。

この立言に対して，類似な関係にある2，3の場合で検討している。具体的には13×15，15×17，17×19の場合で成り立つことを確かめている。この検討によって，先の推測はやや信頼を増し，1つの推測として「連続する2つの奇数に1を加えると偶数の2乗になる」を導いている。さらに，連続する2数の奇数を2n－1，2n＋1と表すことによってその推測を証明するに至った。この証明に

よって，表現された推測を，再びより的確な表現へと書き改め，一般的な性質として導いている。

(2) 被験者Bの思考の流れ

この被験者は，ア～オの5つのことを類似性として取り上げている。しかし，連続する2つの奇数の積についての類似性は，イの「奇数×奇数＝奇数」が指摘できる。類似性の検討については，エの「2つの数の差は2である」ことを取り上げている。このくいちがいは被験者の課題把握の不十分さが指摘でき，課題意識の問題を含くむものと考えられるので，ここでは考察を先に進めることにする。

「2数の差が2である」ことを証明した後，被験者はさらに推測を構成する活動を展開している。被験者の表現を借りれば，共通する性質としての数学的な内容の抽出である。再び，課題に示された$1\times3=3$, $3\times5=15$, ‥‥, $7\times9=63$のこれらの式から，さらに考察の対象を広げ，$9\times11=99$, $11\times13=143$, $13\times15=195$を書き出して，これらの積の差へ考察の目を向けている。□枠された1回目の積の差から，これらの積の差は4の倍数になっていることを推測している。$12=3\times(5-1)=3\times4$, $20=5\times(7-3)=5\times4$, $28=7\times(9-5)=7\times4$。さらに，これらの式化によってこの数列の階差は常に8であることを推測する。そして，2数の積をa_nとすると，$a_n=a_1+(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})$より，$a_n=4n^2-1$で表すに至った。

(3) 共通する思考の流れ

被験者a，bの推測を導く共通する思考について，まず指摘できる第1の点は類似性に気づくための何らかの数に対するある程度の知識が使われている点である。つまり，被験者aの使われている知識は平方数の知識であり，被験者bは数列の知識である。その際，2つの奇数の積である3, 15, 35, 63をみて，$3+1=4=2^2$, $15+1=16=4^2$, $35+1=36=6^2$, $63+1=64=8^2$と見直すことは，数に対する相対的な見方がとりわけ生かされたものと思われる。また，数列とみて階差を探る数の見方にはとりわけ数に対する加法的な見方が生かされたものと思われる。

指摘する第2の点は，観察に始まる推測の構成はある何らかの類似性への気づきである。被験者の類似性への気づきに関して，被験者aは既得の知識であるところの平方数との対比によって，類似性への気づきが起こったものと考えられる。また，被験者bは既得の知識であるところの数列との対比によって，その階差におけるこの課題の類似性（4の倍数になっていること，差が常に8であること）への気づきが起こったものと考えられる。特に，この対比すべきものの想定ないしは抽出が，ある1つの推測を構成していく上で不可欠なものであると思われる。それは，私達が何かを考えはじめる場合，また何らかの考えが思いつく場合，それまでの経験や知識，行動様式といった基盤を土台にしているからである。言い換えれば，考察の対象と何等かの点で類似した対比できる物の想定によって，ある1つの類似性への気づきが起こるものと考える。

指摘する第3の点は，類似性への気づきが起こりある1つの推測が暗示されると，その推測の信頼性をいくらかでも増すために，2，3の事柄ついて検定している点である。帰納によって（あるいは類比によって）打ち立てられた1つの推測は，蓋然性をもつが故に2，3の事柄で検定し，その真なる信頼性を増す努力がはかられるということである。

2．類推物の検討

III.1で明らかにした蓋然的推論の形式(手続き)，III.2で取り上げた1つの実験事例，及び本項の実験事例の考察からある1つの類似性へ気づくためには，考察の対象と何等かの点で類比の関係にある対比できるものの想定(抽出)が必要であることが導かれた。Polyaは，類比は一種の相似であ

り，二つの系はもしそれらがそれぞれの部分の明白に定義できる諸関係において一致するならば類比であるといい，具体的な１つの例として，平面上の三角形と空間上の四面体を挙げている[20]。

本項では，推論を展開していく際にある１つの類似性へ気づくための，言い換えれば１つの推測を構成していくときに観察者が「想定し抽出するもの」，あるいは「類比の関係にある対比できる物」として以下では**類推物(Analogue：類似な物)**と呼び，分数の除法の計算方法の一般化の過程を取り上げて考察するものである。それは，この類推物そのものが推測を構成する働きの出発点となるとともに，類推物そのものの検討が推測を構成していく上で重要な要因になると考えるからである。言い換えれば，どのような類推物を想定するかによって導かれる数学的な活動及び数学的な推測は異なったものとなり，さらに導かれた推測の信頼性を増す活動の中にも新たな類推物の想定がみられるものと予想されるからである。

小学校第６学年「分数の除法」

(1)考察の対象

一般に，数学教育ではこの学年で$(a/b)\div(c/d)=(a/b)\times(d/c)$と計算方法を一般化するこの場合，$(a/b)\div(c/d)$となる除数が分数の場合を取り扱う前に，$c/d$が整数の場合($d=1$)から取り上げられることが多い。そこで，本項でも以下の考察を進めていくに当たって$a/b\div c$(c:整数)の場合からはじめるものとする。また，実際の学習では具体的な事実問題をもとに，除数が整数の問題場面が提示される。そこで，以下の問題場面を設定する[21]ことにする。

①$(a/b)\div c$の考察

課題　『ある時間内(c 時間)に植えられた苗の面積がわかっているとき，その１時間当たりの面積を求める』

仮に，３時間で2/5haの面積に苗を植えることができるとき，その１時間当りの面積を求める式は$(2/5)\div3$となる。児童にとって$(2/5)\div3$の式から式変形をして商を求めることは未習であり，観察の対象は問題場面に依存されよう。題意より，求める１時間当りの面積は2/5haより小さくなることは推測されるが，これ以上の推測は難しい。

そこで，上述の問題とある部分の関係において一致する事柄が必要となる。例えば，児童にとって既習の$(2/5)\times3$の問題場面やその際に用いた方法が考えられる。除法と乗法という点では数学的な構造は異なるものの，場面に示されている二量やその二量の関係に対しては数学的な関係は保存されているからである。

言い換えれば，乗法の問題では「１時間に2/5haの苗を植えると３時間では何haか」という問題であり，これは上述の除法の問題における二量，つまり時間と面積が比例関係を前提としている点で明確に数学的な関係は一致している。この問題場面は児童の学習の経過からみても想起することが可能であると思われる。また，そのときの学習活動で用いられた解決の方法も合わせて想起されよう。そして，これらの事柄の想起が必要となる。なぜなら，本課題はあくまでも$(a/b)\div c$の商を求めることにあるから，$(a/b)\div c$とある部分において明確に類似する具体的な事柄が想起されない限り類比は難しいからである。

②類推物の構成

本課題の解決のために用いられる具体的な類推物としては，面積図(図３)が考えられる。(この面積図は，児童にとって既に乗法において学習されてきている[22]からである。異なる指導が既に展開されいる場合は異なる類推物が想起されることは言うまでもない。)

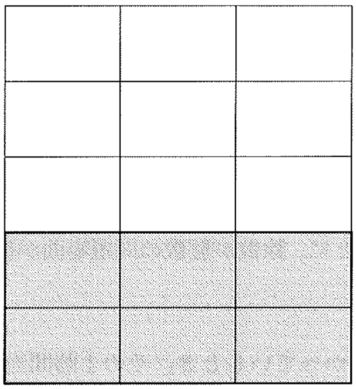
また，$(2/5)\times3=(2\times3)/5$と式化した過程も，本課題の解決において有効な類推物になると思わ

れる。両者(面積図と式化)の類推物によって思考は進展し，それぞれ次のような暫定的な推測が構成される。

③暫定的な推測の構成

ア．面積図

$(2/5)\times 3$においては2/5の図が3倍された。他方，$(2/5)\div 3$では乗数($\times 3$)が除数($\div 3$)に代わったことにより，2/5haの部分を3等分割される(図4)ことは児童にとって容易に暗示されるものと思われる。



(2/5) × 3

図3

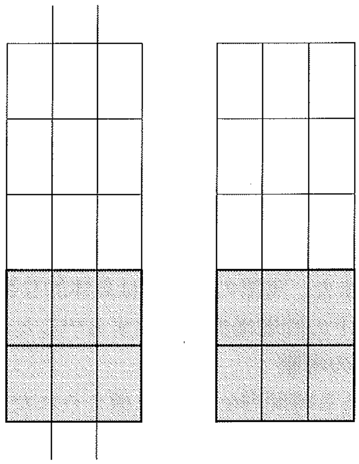


図4

イ．式化

$(2/5)\times 3$においては$(2/5)\times 3=(2\times 3)/5$が導かれた。ここでの思考の行き先は$(2/5)\div 3=(2\div 3)/5$である。しかし，$2\div 3$が割り切れないことにより，時に多くの児童にとってはこの暫定的な推測はこのまま否定される。そして児童は思考錯誤に陥る。例えば，$(2/5)\div 3=2/(5\div 3)$や，$(2/5)\div 3=(2\times 3)/5$などである。

④さらなる類推物と推測の構成

③のイにおいて暗示された推測（分子に着目した$2\div 3$）を，肯定するためには新たな論理を展開しなければならない。つまり，$(2/5)\div 3$の事実を保存しながら，暗示された推測を推し進めるには，その後の式に現れる分子の$2\div 3$を，割り切れるものにしなければならない。そこで，被除数の2/5に相等な分数を捜し出すことが考えられる。つまり，$2/5=4/10=6/15=\cdots$。もし，2/5の代わりに6/15を用いるならば，はじめの推測は分子において割り切れ，暫定的な推測として指示されよう。つまり，$2/5=(2\times 3)/(5\times 3)=6/15$より，$(2/5)\div 3=(6/15)\div 3=(6\div 3)/15$によって，$(2/5)\div 3$の商を求めることになる。

$$\left[\ (2/5)\div 3=\{(2\times 3)/(5\times 3)\}\div 3=(6\div 3)/15=2/15\ \right]$$

⑤暫定的な推測の確証

2/5と相等な分数(6/15)を類推物として構成した推測は，乗法において乗数を分子にかけて成り立ったことから，『除法においては分子を除数で割る』であった。本課題の結果としての商は得られたが，その結果は再び図的表現によって推測の確証が得られるものと思われる(図5及び図6)。

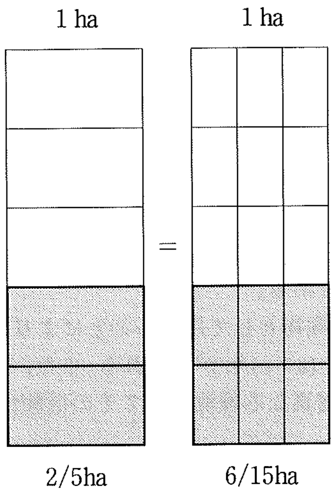


図5

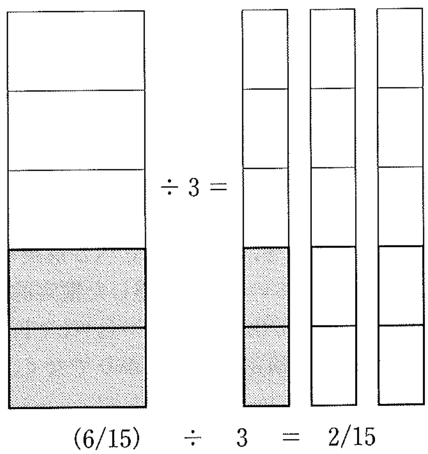


図6

⑥一般化による推測の検定

類比によって構成された上述の推測は暫定的な推測であり，この推測は取り上げられた１つの実例に対してのみ真である。したがって，この後推測は証明を試みるか，あるいはその推測が真でないことを示す努力をしなければならない。つまり，暫定的な推測を検定しなければならない。

一般に，数学教育における推測の検定は，解決に用いた手続きや考え方の根拠を追求し明確にする一方，さらなる別の例を取り上げて調べることも多く行われる。この場合，新たな１つの場合について確かめられるわけであるが，１つの確かめは推測を強化しその信頼性を高めるという意味をもつ。

暫定的な推測は，(a/b)÷c において a÷c が割り切れるように a/b と相等の分数を代用した。つまり，(a/b)÷c＝(a×c)/(b×c)÷c＝(a×c÷c)/(b×c)＝a/(b×c)である。もし，常に得られる商の分子(a)が被除数(a/b)の分子と一致するならば，結果からみて被除数の分子はそのままにして，除数(c)を分母にかければよいことになる。これは新たな一般的な推測への暗示である。

[(2/5)÷3＝(2×3÷3)/(5×3)＝2/(5×3) ， (2/5)÷3＝2/(5×3)]

また，暫定的な推測を構成する過程では，a÷c が割り切れないものであった。もし，割り切れる場合はそのまま分子を除数でわればよいことになる。例えば，(4/9)÷2では(4÷2)/9＝2/9となる。これは，前述した新たな推測に反するものと一見思われる。なぜなら，『除数を分母にかければよい』という新たな推測は(4/9)÷2＝4/(9×2)＝4/18を導くからである。

しかしこの一見，反例に思われる事実は4/18＝2/9であることの理解により却下されよう。言い換えれば，この場合の推測の検定は，この推測をより信頼性のあるものへ高められたといえる。

⑦さらなる推測の検定

被除数の分子と除数が割り切れない数値で検定する。例えば，(5/9)÷3は，5÷3が割り切れないことによって，5/9の分数と相等の分数を代用して，(5/9)÷3＝(5×3)/(9×3)÷3＝(5×3÷3)/(9×3)＝5/(9×3)＝5/27となる。さらなる別の例で推測を検定することによって新たな推測はさらに信頼性が高められる。この過程を通して児童にとっては，分数÷整数の除数を分母にかけることのよ

さに気づくものと思われる。それは，被除数の分子と除数の数値に関わりなく（つまり，割り切れる，割り切れないの問題はなくなり），当面の課題であった暫定的な推測は検定されたからである。

⑧(a/b)÷(1/c)の考察

本学習の目的は，(a/b)÷(c/d)＝(a/b)×(d/c) へと計算方法を一般化していくことであった。前項によってある推測は暗示され暫定的な推測を得た。そして，類似な実例をもとに検定し，その推測はある程度の確証を得るまでに至った。次なる蓋然的推論は別なる特別な場合の考察へと向かう。

この場合の観察は，当初の目的であるところの(a/b)÷(c/d)の解決へ向かうための有効な実例として位置づけられる。なぜなら，(a/b)÷c の考察によって得られた，より確かな推測 (a/b)÷c＝(a×c)/(b×c)÷c＝a/(b×c)を，除数が1/c へと進展させるからである。

除数が1/c の場合においては，前述した暫定的な推測を類推物として用いることにより，最終的には(a/b)÷(1/c)＝(a×c)/(b×c)÷1/c＝(a×c÷1)/(b×c÷c)＝(a×c)/b が導かれる。また，この実例によって暫定的な推測が検定されるばかりでなく，推測は一層真なる推測としてその信頼性が高められることになる。

⑨計算方法の一般化

これら２つの場合をもとに，(a/b)÷c＝a/(b×c)と(a/b)÷(1/c)＝(a×c)/b が導かれ，より真なる推測へと指示されてきた。これらの実例をもとに，当初の課題である(a/b)÷(c/d)の計算方法を一般化する。

はじめの場合からは，除数が整数の場合には『分母に除数をかけること』が推測として導かれ，２つ目の場合からは，除数が単位分数の場合に『分子に除数をかけること』が推測として導かれた。そして，その推論の過程では数学的な考え方として，以下に示す２つの数学的な方法が用いられている。

ア．除数が整数の場合，被除数の分子が除数で割り切れるようにするために，被除数の分子・分母に除数をかける。つまり，被除数と相等な分数を新たな被除数として代替する。

[(a/b)÷c＝(a×c)/(b×c)÷c] → [(a/b)÷c＝a/(b×c)]

イ．除数が単位分数の場合，被除数の分母が除数の分母の数値で割り切れるようにするために，被除数の分子・分母に除数の分母の数値をかける。つまり，被除数と相等な分数を新たな被除数として代替する。

[(a/b)÷(1/c)＝(a×c)/(b×c)÷(1/c)] → [(a/b)÷(1/c)＝(a×c)/b]

したがって，(a/b)÷(c/d)の計算方法は以下の２つの方法が導かれる。

(a/b)÷(c/d)＝(a×c×d)/(b×c×d)÷(c/d)＝(a×c×d÷c)/(b×c×d÷d)＝(a×d)/(b×c)･･･＊１

(a/b)÷(c/d)＝(a/b)÷{(c)×(1/d)}＝(a×d)/(b×c)･･･＊２

（註：＊１は暫定的な推測を，＊２は指示された推測をもとに展開した計算方法である）

つまり，分数の除法の計算方法は，結果として(a/b)÷(c/d)＝(a/b)×(d/c)となる。このことを言葉によって表現されているのが「除数の分子と分母を入れかえてかければよい」である。

⑵類推物の検討

分数の除法についてその推論の過程をみてきた。そこで取り上げた課題の最終的な目的は，(a/b)÷(c/d)の計算方法を一般化することであった。(a/b)÷(c/d)＝(a×d)/(b×c)を導いた類推物は，上述した＊１，＊２である。ここでは，これら２つの類推物について検討する。

①(a/b)÷c＝(a×c÷c)/(b×c)＝a/(b×c)からの一般化

被除数(a/b)の分子を除数でわる暫定的な推測からは，被除数の分子・分母にそれぞれ除数をかけ

る推測が得られ，また検定された。この推測をもとに一般化へ向けた推論を展開すると，以下のようになると思われる。

$(a/b)\div(c/d)=\{a\times(c/d)\}/\{b\times(c/d)\}\div(c/d)=\{a\times(c/d)\div(c/d)\}/\{(b\times c)/d\}=a/\{(b\times c)/d\}$

この得られた分数は分母に分数をもつ。そこで，分母を整数値にするために $a/\{(b\times c)/d\}$ と相等な分数をつくることが必要となる。つまり，分子・分母に d をかけることによって，児童に既知な分数表示が導かれる。

$a/\{(b\times c)/d\}=(a\times d)/\{(b\times c)/d\times d\}=(a\times d)/\{(b\times c\times d)/d\}=(a\times d)/(b\times c)$

よって，$(a/b)\div(c/d)=(a\times d)/(b\times c)=(a/b)\times(d/c)$　として一般化される。

②$(a/b)\times(c/d)=(a\times c)/(b\times d)$からの一般化

$(a/b)\div(c/d)$の計算方法の一般化に向けた推測を可能にする類推物としては，①以外に分数の乗法の計算方法が有効であると考える。なぜなら，除数が分数(c/d)である場合は，乗法の乗数が分数である場合からの推測が考えられるからである。そして，数学的な構造において部分的な明確な一致（相似）が見い出せるからである。つまり，①で用いた類推物$(a/b)\div c$より，より有効であることが以下の展開から明らかになる。

乗法においては$(a/b)\times(c/d)=(a\times c)/(b\times d)$が一般的な計算方法として導かれている。このことは，乗数の分子は被乗数の分子にかける，乗数の分母は被乗数の分母にかけることである。この既に獲得されている方法を除法に用いると，除数の分子は被除数の分子を，除数の分母は被除数の分母をそれぞれわればよいこととなる。また，除法においての暫定的な推測，つまり割り切れないことを考慮して被除数の相等な分数を代替した論理を展開することとなる。

$(a/b)\div(c/d)=(a\times c\times d)/(b\times c\times d)\div(c/d)=(a\times c\times d\div c)/(b\times c\times d\div d)=(a\times d)/(b\times c)$

①の展開と比較するならば，明らかに②の展開の方が複雑さは省かれており，簡潔でしかも明確である。それは，①の一般化へ向けた展開においては２段階の操作を必要としたが，②の展開では１段階の操作ですむことからみても明らかである。また，このことはどのような類推物を用いるかの検討の重要性が指摘できるとともに，類推物それ自体が児童の問題解決を推し進める不可欠な要素として検討の必要性が指摘できるものと考える。

V　今後の課題

蓋然的推論の論理展開は，与えられた考察の対象に含まれるより部分的な対象を考察することによって，ある１つの推測を導き検定し，その真偽にしたがって一般的な性質として推測の信頼性を高める展開である。与えられた対象よりも考察しやすく近づきやすい対象を考察することであり，導かれた推測は検定において，その真なる場合にその信頼性は高められる。また，このような論理展開によってその推測の帰納的証拠はより多く集められ，その展開過程において豊かな数学的な活動がもたらされるものと思われる。しかし，この推論は多くの帰納的証拠は集められるものの，決してその推測は証明されるものではない。このようにして導かれた推測がどのような条件のもとで正当化されるかは，従来からいわれているところの「帰納の問題」であり，この問題の検討は今後の課題と考える。とりわけ，小学校の算数学習においてはその取り扱い方も含めて考えてみなければならないと思われる。

それは，児童の発達段階から考えて，論証的推論をそのまま展開することは難しいと思われるからである。しかし，だからと言って根拠を追求する活動や用いた考え方や手法の正しさは求められ

なければならない。例えば，具体的な場面から抽象される数，式等の意味づけは大切であり，この具体から抽象への過程において用いられた考え方や手法の根拠を，数直線，絵や図，あるいは操作そのものによって表したり原理・法則を明確にしたりすることは不可欠な活動であると思われる。言い換えれば，具体から抽象への学習活動と抽象から具体に戻る学習活動との両者の活動の位置づけは，蓋然的推論によって新しい推測や判断が導かれれば導かれる程，その両者の活動は機能的な意義が認められ，とりわけ後者の活動は児童にとって必然的な活動になるものと思われる。

また，帰納的推論の手続きの１つである，類似性へ注目する活動については，本稿III.1で観察者(学習者)の困難点ともたらされる利点を述べた。しかし，類比的推論を含めてこれらの推論を展開する学習活動を，数学教育に積極的に位置づけていくためには，学習者の理解との関わりは今後考えていかなければならない点である。それは，推論を展開していく学習者の思考や行動様式は，それまでの学習者の経験や知識に依るところが大きいと思われるからである。

さらに，本稿IVで展開した学習活動は，できれば学習者自身が対象に対して主体的に働きかけ，関わっていくことが望ましい。与えられた対象と類比の関係にある対比できるものの想定(抽出)も学習者自身に求めていく活動を追求することと言い換えられよう。学校数学において，理解するということが，それまでの学習を通して獲得された知識についての思考の生産物であるととらえるならば，それまでの数学的活動の展開とつながりのある活動が推測を構成していく中にも求められなければならないと考える。数学的活動との関わりについても今後の課題である。

注

2) (2)P.4　3) (2)P.4　4) (3)P.3
5) (3)P.5　6) (3)P.8　7) (3)P.9
8) (3)P.9　9) (3)P.9　10) (2)P.13
11) (2)P.14　12) (3)P.21　13) (3)P.23
14) (2)P.2　15) (2)Pp:2-3　16) (2)P.5
17) (5)P.84　18) (5)P.84　19) (4)P.71
20) (2)P.14　21) (6)P.33　22) (6)Pp:21-23

引用・参考文献

(1) 新村出編「広辞苑」第三版(岩波書店) 1988年
(2) G. Polya 著「帰納と類比」柴垣和三雄訳 数学における発見はいかになされるか 1 Mathematics and Plausible Reasoning. Vol, 1(丸善) 1959年
(3) G. Polya 著「発見的推論 そのパターン」柴垣和三雄訳 数学における発見はいかになされるか 2 (丸善) 1959年
(4) 伊東俊太郎著「創造の機構-科学的発見の方法論的考察-」理想誌 1975年 №506 P.71
(5) 伊藤説朗著「数学教育における構成的方法に関する研究」上巻 (明治図書) 1993年 P.84
(6) 啓林館「小学校教科書６年上」分数のわり算 1991年 Pp:32-35
(7) 栗田稔著「大学への数学 問題はどう作られるか」(東京出版) 1989年 Pp:8-49
(8) K. R. Popper 著「科学的発見の論理(上)」大内義一他訳 (恒星社厚生閣) 1987年 Pp:30-68
(9) G. Polya 著「How To Solve It」A New Aspect of Mathematical Method (Princeton Univ.) 1973年 「いかにして問題をとくか」 柿内賢信訳 (丸善) Pp:66-68, 82-86, 130-137
(10) M. E. Bell-Gredler 著「Learning and Instruction」Theory into Practice (Macmillan P.C) 1986年 Jean Piajet's Cognitive-Development Theory Pp:191-233

(11) S. Mac Lane 著「数学ーその形式と機構」赤尾和男他訳（森北出版）1992年 Pp:532-595
(12) R. R. Skemp 著「Intelligence, Learning, and Action」(JOHN WILEY&SONS) 1979年 Pp:70-90, 143-166, 167-192
(13) R. R. Skemp 著「Goals of Learning and Qualities of Understanding」Mathematics Teaching

(1994年 8 月31日受理)