土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 67, No. 2(応用力学論文集 Vol. 14), I_127-I_136, 2011.

リング状の半解析的有限要素を用いた静水圧を受ける アルミニウム製円板の有限変位解析

The finite displacement analysis of the circular aluminum plate subjected to hydro static pressure with Semi-Analytical finite ring element

中島　照浩*・谷口　朋代**
Teruhiro Nakashima and Tomoyo Taniguchi

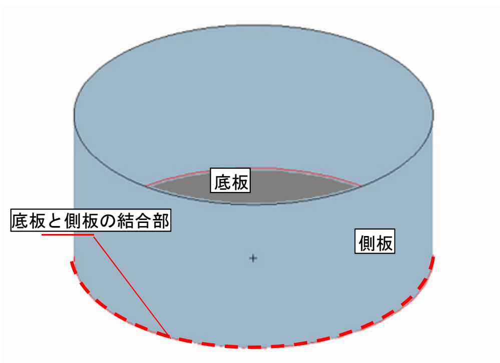
* 修士(工学) 鳥取大学大学院 工学研究科 社会基盤工学専攻（JIP テクノサイエンス㈱）
（〒532-0011 大阪市淀川区西中島 2-12-11）
** 博士(工学) 鳥取大学大学院教授 工学研究科 社会基盤工学専攻（〒680-8552 鳥取県鳥取市湖山南 4-101）

The rocking motion of tanks due to earthquakes causes the uplift and partial of large deformation of the tank bottom plate that has been considered to contribute to the various damage of the tanks. For analyzing the stress of the tank bottom plate numerically, this paper develops the analytical finite ring element with effects of the large deformation. The ring element is defined as a semi-analytical model. Fourier series give its circumferential displacement function, while polynomial gives its radial displacement function. For evaluating analytical accuracy of the proposed method, numerical results are compared with experimental ones that measure deformation of circular aluminum plate subjected to hydro static pressure.

Key Words: *Rocking Motion,Large Deformation,Semi-Analytical Element,Circular aluminum plate*
キーワード：ロッキング振動，有限変位，半解析的有限要素，アルミニウム円板

1. はじめに

社会基盤構造物の中で，円筒のシェルや円形の板で構成された平底円筒貯槽は，これまでに数多く建設され有効に活用されている．その中で，アンカーの設置が無く基礎上に直接設置された石油タンク（以下に，内容物を問わずタンクと略す．図－1）は，強震時に転倒モーメントによりロッキング振動が生じ底板に部分的な浮上りが生じることが知られている．ロッキング振動による底板の浮上りにより，底板と側板の結合部近傍に局所的な変形や過大な応力が生じ，タンクのさまざまな損傷の原因となっている [1),2),3)]．著者らは，これまでに，有限要素法に基づく数値解析モデルを用いて，衝突や落下解析に広く用いられている動的陽解法のタンクのロッキング振動問題への適用性について検討を行ってきた [4),5),6),7)]．しかし，構造－流体の連成を考慮した動的陽解法による解析は，タンクの規模ごとに実構造物の物理量とは無関係な解析パラメータを検討する必要があること，タンク底板が基礎と接触した際の衝撃が板の応力の解析結果に混入すること，また，これまでに解析結果と実構造との比較がなされていないことなどから，実務でのタンクの浮上り問題の検討には，直ちに適用することは難しいと思われる．一方，Taniguchi は，タンク下端に作用する角加速度により容器内に生じる内溶液の衝撃圧の数学解を提案し [8)]，衝撃圧に基づくロッキング振動の有効質量などを示しているが [9),10)]，ロッキング振動を解析するまでには至っていない．タンクを構成する板の解析に目を向けると，平板構造の解析法には，級数展開による解法，有限要素法などと並んで有限帯板法がある．有限要素法の離散化法とフーリエ級数による展開法を組み合わせた有限



図－1　タンクの概要図

帯板要素法は，Y.K.Cheung によって提案され今日に至っている[11),12)]．そして，前田，林ら[13)]は，幾何学的非線形性を考慮した矩形の板を対象にした有限帯板要素を導き，増分法の開発や解の精度など多方面から詳細に検証し，その有用性を示している．大規模地震に伴うタンクの浮上り問題では，タンクの底板に局所的な大きな変形が生じるので，その応力状態を詳細に解析するためには，幾何学的非線形性を取り入れた解析が必要である．タンクに作用する荷重分布の特徴から，円周方向に級数展開法を用いた半解析的有限要素法に基づく円形リング要素（以下，リング要素と略す．）を用いて，タンクの構造解析を行うことが合理的な方法と考えられる．しかし，著者らの文献調査の範囲では，幾何学的非線形性を考慮した半解析的有限要素法を，円形の板やリング状の板に適用した例は無いようである．

そこで，本論文では，タンクのロッキング振動に伴う底板の浮上り問題への適用を念頭に，幾何学的非線形性を考慮できるリング要素の定式化を試みる．また，リング要素を用いて基本的な形状のモデルを作成し，有限変位解析を行い，提案したリング要素の解の精度について検証を行った．さらに，側板との結合を見据えて外周の境界条件を検討するために，静水圧を受けるアルミニウム製円板の変位計測実験を行い，本解法による解析結果との比較を行った．

尚，本論文における有限変位解析は，初期状態と変形後の形状を明確に区別し，初期状態を基準とする Total Lagragian による方法によって定式化を行った．

2. リング要素と荷重ベクトルの定式化

2.1 リング要素と変位－ひずみの関係式

本研究では，図－2 に示す一様な厚さを有する一定幅のリング状の薄板を考える．弾性論に基づくリング要素は，変形に関して kirchhoff-love 理論に従い，変位関数を円筒座標系 (r,θ,z) によって表す．ここで，作成する要素は，変位関数を円周方向にはフーリエ級数展開し，半径方向には多項式展開した半解析有限要素として定式化を行う．そして，リング要素の内径側 i と外径側 j の円周上の節線に任意の幾何学的境界条件を与えることができるようにする．図－2 は定式化に用いたリング要素の形状，座標系および変位の定義を示し，R_0，R は，リング要素の内径と要素の幅である．図－2 に示すリング状の板が大変形するときの要素内の任意点でのひずみは，Novozhilov の式[14)]を基にして展開し，板厚の中心での変位 (u,v,w) と初期変位 w_0 を用いて次式で表される．

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{v}{r} - \xi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial(w+2w_0)}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta} \tag{1a}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} - \xi\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial(w+2w_0)}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} \tag{1b}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \xi\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{2r}\frac{\partial(w+2w_0)}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{1}{2r}\frac{\partial(w+2w_0)}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial r} \tag{1c}$$

ここに，w_0 は鉛直方向の初期変位，ξ は要素の板厚方向の座標を表す．

また，リング要素内の任意の点における変位関数 $w(r,\theta)$，$v(r,\theta)$，$u(r,\theta)$は，r 軸方向の形状関数と θ 軸方向のフーリエ級数に変数分離できるとして，以下のように定義する．

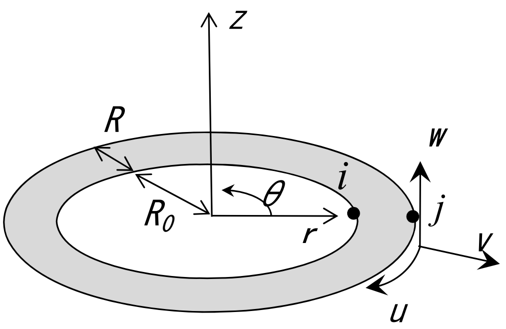
$$w(r,\theta) = \sum_{n=0} w_n(r)\cos(n\theta) \tag{2a}$$

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0} v_n(r)\cos(n\theta) \tag{2b}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0} u_n(r)\sin(n\theta) \tag{2c}$$

面外変位成分 $w(r,\theta)$ については，たわみ角として r に関する微係数 $\psi(r,\theta) = -\partial w(r,\theta)/\partial r$ を考慮する．ここに，n は θ 軸方向に展開した級数の項数を表す．また，係数 $w_n(r)$，$v_n(r)$，$u_n(r)$ は，礒江[15),16)]の方法を参考にして，以下のように定義する．

$$w_n(r) = \{r^3 \quad r^2 \quad r \quad 1\}[\kappa_1]\{w\} = \{R_1\}^T[\kappa_1]\begin{Bmatrix} w_{ni} \\ \psi_{ni} \\ w_{nj} \\ \psi_{nj} \end{Bmatrix} \tag{3a}$$



図－2　円形リング要素

$$v_n(r)=\{r \quad 1\}[\kappa_2]\{v\}=\{R_2\}^T[\kappa_2]\begin{Bmatrix} v_{ni} \\ v_{nj} \end{Bmatrix} \tag{3b}$$

$$u_n(r)=\{r \quad 1\}[\kappa_3]\{u\}=\{R_3\}^T[\kappa_3]\begin{Bmatrix} u_{ni} \\ u_{nj} \end{Bmatrix} \tag{3c}$$

ここに，i，j はリング要素の内径側と外径側の円周上の各節線を表す．$[\kappa_1]$，$[\kappa_2]$，$[\kappa_3]$は４×４あるいは２×２の係数マトリックス，ψ_{ni}，ψ_{nj} は，節線 i，j における θ 軸回りのたわみ角である．また，級数展開した要素の材端の節点変位 $\{d_n\}$，節点変位と同様に級数展開した初期変位 $\{d_{0n}\}$ および係数マトリックス $[\phi]$ は，次式のように表すことができる [15]．

$$\{d_n\}=\{w_{ni} \quad \psi_{ni} \quad w_{nj} \quad \psi_{nj} \quad v_{ni} \quad v_{nj} \quad u_{ni} \quad u_{nj}\}^T \tag{4a}$$

$$\{d_{0n}\}=\{w_{0ni} \quad \psi_{0ni} \quad w_{0nj} \quad \psi_{0nj} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \tag{4b}$$

$$[\phi]=\begin{Bmatrix} \phi_1{}^T \\ \phi_2{}^T \\ \phi_3{}^T \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \{R_1\}^T[\kappa_1] & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{R_2\}^T[\kappa_2] & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{R_3\}^T[\kappa_3] \end{Bmatrix} \tag{5a}$$

$$[\kappa_1]=\begin{bmatrix} R_0^3 & R_0^2 & R_0 & 1 \\ -3R_0^2 & -2R_0 & -1 & 0 \\ (R_0+R)^3 & (R_0+R)^2 & (R_0+R) & 1 \\ -3(R_0+R)^2 & -2(R_0+R) & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \tag{5b}$$

$$\{R_1\}^T=\{r^3 \quad r^2 \quad r \quad 1\} \tag{5c}$$

$$[\kappa_2]=[\kappa_3]=\begin{bmatrix} R_0 & 1 \\ R_0+R & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{5d}$$

$$\{R_2\}^T=\{R_3\}^T=\{r \quad 1\} \tag{5e}$$

これらを式(1a)，(1b)，(1c)へ代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta=\sum_{n=0}\Bigg\{&\frac{n}{r}\phi_3^T\cos(n\theta)+\frac{1}{r}\phi_2^T\cos(n\theta) \\ &+\xi\left(\frac{n^2}{r^2}\phi_1^T\cos(n\theta)-\frac{1}{r}\phi_{1,r}^T\cos(n\theta)\right) \\ &+\frac{n}{2r^2}\sin(n\theta)\left(\phi_1^T\sum_k^\infty k\sin(k\theta)\{d_k+2d_{0k}\}\right)\phi_1^T\Bigg\}\{d_n\}\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r=\sum_{n=0}\Bigg\{&\phi_{2,r}^T\cos(n\theta)-\xi\phi_{1,rr}^T\cos(n\theta) \\ &+\frac{1}{2}\cos(n\theta)\left(\phi_{1,r}^T\sum_k^\infty\cos(k\theta)\{d_k+2d_{0k}\}\right)\phi_{1,r}^T\Bigg\}\{d_n\}\end{aligned} \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{r\theta}=\sum_{n=0}\Bigg\{&\phi_{3,r}^T\sin(n\theta)-\frac{1}{r}\left(\phi_3^T\sin(n\theta)+n\phi_2^T\sin(n\theta)\right) \\ &-\xi\left\{\frac{2n}{r^2}\phi_1^T\sin(n\theta)-\frac{n}{r}\phi_{1,r}^T\sin(n\theta)\right\} \\ &-\frac{n}{2r}\sin(n\theta)\left(\phi_{1,r}^T\sum_{k=0}^\infty\cos(k\theta)\{d_k+2d_{0k}\}\right)\phi_1^T \\ &-\frac{1}{2r}\cos(n\theta)\left(\phi_1^T\sum_{k=0}^\infty k\sin(k\theta)\{d_k+2d_{0k}\}\right)\phi_{1,r}^T\Bigg\}\{d_n\}\end{aligned} \tag{6c}$$

ここに，$\phi_{1,r}$，$\phi_{1,rr}$，$\phi_{2,r}$，$\phi_{3,r}$ は，添字 r の数に応じ，式(5)によって定義した内挿関数の r に関する１階および２階の微係数を表す．さらに，式(6)をマトリックス表示すれば，次式となる．

$$\{\varepsilon\}=\left[[B_n]_L+[B_n]_{NL}\right]\{d_n\}=[B_n]\{d_n\} \tag{7}$$

ここに，$[B_n]_L$ は線形項のひずみマトリックス，$[B_n]_{NL}$ は非線形項のひずみマトリックスを示す．

2.2 応力ーひずみ関係式

等質，等方弾性体の板における円筒座標系上の応力ーひずみの関係式は，次式のように表される．

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{8}$$

ここに，

$$\{\sigma\}=\{\sigma_\theta \quad \sigma_r \quad \tau_{r\theta}\}^T \tag{9}$$

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_\theta \quad \varepsilon_r \quad \gamma_{r\theta}\}^T \tag{10}$$

また，$[D]$ は弾性係数マトリックスを表し，鋼材のような等方性材料の場合，ヤング係数 E，ポアソン比 ν を用いて次式のように表すことができる．

$$[D]=\frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

2.3 リング要素の非線形剛性方程式

文献[13)]と同様の方法により，リング要素の非線形剛性マトリックスを，仮想仕事の原理に従って定式化を行う．ここで，仮想ひずみエネルギーは，次式のように表される．

$$\delta U=\int_V\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV=\int_V\{\delta\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}dV \tag{12}$$

ここに，V は変形前の物体の体積，σ は第２種 Piola-Kirchhoff の応力を示す[17)]．
そして，式(12)へ式(6)〜(8)を代入して，次式を得る．

$$\delta U=\sum_{m=0}\sum_{n=0}\{\delta d_m\}^T\int_0^{2\pi}\int_{R_0}^{R_0+R}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\left([B_m]_L+2[\overline{B}_m]_{NL}\right)^T [D][B_n]rd\xi drd\theta\{d_n\}$$

$$=\sum_{m=0}\sum_{n=0}\{\delta d_m\}^T[K_{mn}]\{d_n\} \tag{13}$$

ここに，$[\overline{B}_m]_{NL}$ は，式(7)の $[B_m]_{NL}$ の成分の初期変位を 1/2 倍した非線形項のひずみマトリックスを表す．そして，$[K_{mn}]$ は，行列の中に未知数 d_k を含む非線形剛性マトリックスであり，線形項の剛性マトリックス $[K_{mn}]_L$ と d_k を含む非線形項の剛性マトリックス $[K_{mn}]_{NL}$ の和で与えられる．

リング要素に作用する外力も変位と同様に，円周方向にフーリエ級数を用いて展開すると，仮想変位 $\{\delta d_m\}$ による仮想外力仕事 δW は，次式となる．

$$\delta W=\sum_{m=0}\{\delta d_m\}^T\{f_m\} \tag{14}$$

式(13)，(14)から，仮想仕事の原理に基づき，次式の非線形剛性方程式を得る．

$$\sum_{m=0}\sum_{n=0}[K_{mn}]\{d_n\}=\sum_m\{f_m\} \tag{15}$$

一方，式(1)の増分形は，変位 w からの増分変位を Δw として，次式のように表される．

$$\Delta\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta u}{\partial\theta}+\frac{\Delta v}{r}-\xi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(w+w_0+\frac{1}{2}\Delta w\right)}{\partial\theta}\frac{\partial\Delta w}{\partial\theta} \tag{16a}$$

$$\Delta\varepsilon_r=\frac{\partial\Delta v}{\partial r}-\xi\frac{\partial^2\Delta w}{\partial r^2}+\frac{\partial\left(w+w_0+\frac{1}{2}\Delta w\right)}{\partial r}\frac{\partial\Delta w}{\partial r} \tag{16b}$$

$$\Delta\gamma_{r\theta}=\frac{\partial\Delta u}{\partial r}-\frac{\Delta u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta v}{\partial\theta}-\xi\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Delta w}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Delta w}{\partial\theta}\right\}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(w+w_0+\frac{1}{2}\Delta w\right)}{\partial r}\frac{\partial\Delta w}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(w+w_0+\frac{1}{2}\Delta w\right)}{\partial\theta}\frac{\partial\Delta w}{\partial r} \tag{16c}$$

これらに，式(2)〜(5)を代入することで，次式のひずみ増分 $\{\varDelta\varepsilon\}$ と変位増分 $\{\varDelta d_n\}$ の関係を得る．

$$\Delta\varepsilon_\theta=\sum_{n=0}\left\{\frac{n}{r}\phi_3^T\cos(n\theta)+\frac{1}{r}\phi_2^T\cos(n\theta)+\xi\left(\frac{n^2}{r^2}\phi_1^T\cos(n\theta)-\frac{1}{r}\phi_{1,r}^T\cos(n\theta)\right)+\frac{n}{r^2}\sin(n\theta)\left(\phi_1^T\sum_{k=0}^{\infty}k\sin(k\theta)\left\{d_k+d_{0k}+\frac{1}{2}\varDelta d_k\right\}\right)\phi_1^T\right\}\times\{\varDelta d_n\} \tag{17a}$$

$$\Delta\varepsilon_r=\sum_{n=0}\left\{\phi_{2,r}^T\cos(n\theta)-\xi\phi_{1,rr}^T\cos(n\theta)+\cos(n\theta)\left(\phi_{1,r}^T\sum_{k=0}^{\infty}\cos(k\theta)\left\{d_k+d_{0k}+\frac{1}{2}\varDelta d_k\right\}\right)\phi_{1,r}^T\right\}\times\{\varDelta d_n\} \tag{17b}$$

$$\varDelta\gamma_{r\theta}=\sum_{n=0}\left\{\phi_{3,r}^T\sin(n\theta)-\frac{1}{r}\left(\phi_3^T\sin(n\theta)+n\phi_2^T\sin(n\theta)\right)-\xi\left\{\frac{2n}{r^2}\phi_1^T\sin(n\theta)-\frac{n}{r}\phi_{1,r}^T\sin(n\theta)\right\}-\frac{n}{r}\sin(n\theta)\left(\phi_{1,r}^T\sum_{k=0}^{\infty}\cos(k\theta)\left\{d_k+d_{0k}+\frac{1}{2}\varDelta d_k\right\}\right)\phi_1^T-\frac{1}{r}\cos(n\theta)\left(\phi_1^T\sum_{k=0}^{\infty}k\sin(k\theta)\left\{d_k+d_{0k}+\frac{1}{2}\varDelta d_k\right\}\right)\phi_{1,r}^T\right\}\times\{\varDelta d_n\} \tag{17c}$$

構造系が外力 $\{f\}$ とつり合っている状態から，外力が $\{\Delta f\}$ だけ増加したときの状態を，仮想仕事の原理を用いて表す．このときの内力による仮想ひずみエネルギー $\delta\varDelta U$ と，外力のなす仮想外力仕事 $\delta\varDelta W$ は，次式のように表すことができる．

$$\delta\Delta U = \int_V \{\delta\Delta\varepsilon\}^T \{\sigma^{i-1} + \Delta\sigma\} dV \tag{18a}$$

$$\delta\Delta W = \sum_{m=0} \{\delta\Delta d_m\}^T \{f_m^{\,i-1} + \Delta f_m\} \tag{18b}$$

ここに，$\{\Delta\sigma\}$は応力増分，$\{\delta\Delta\varepsilon\}$は仮想変位を与えたときのひずみ増分であり，$i-1$は直前の状態の計算値を表す．内力による仮想ひずみエネルギー$\delta\Delta U$と，外力のなす仮想外力仕事$\delta\Delta W$から，仮想仕事の原理より，各増分荷重段階でのつり合いを表すと次式となる．

$$\sum_{m=0}\int_V \left\{[B_m]_L + 2\left[\overline{B}_m^{\,i-1}\right]_{NL} + 2[\Delta B_m]_{NL}\right\}^T \{\sigma^{i-1} + \Delta\sigma\} dV = \sum_{m=0}\{f_m + \Delta f_m\} \tag{19a}$$

$$\sum_{m=0}\int_V \left\{[B_m]_L + 2\left[\overline{B}_m^{\,i-1}\right]_{NL}\right\}^T \{\Delta\sigma\} dV + \int_V 2[\Delta B_m]_{NL}^T \{\sigma^{i-1}\} dV = \sum_{m=0}\{f_m + \Delta f_m\} - \int_V \left\{[B_m]_L + 2\left[\overline{B}_m^{\,i-1}\right]_{NL}\right\}^T \{\sigma^{i-1}\} dV \tag{19b}$$

ここに，$[\Delta B_m]_{NL}$は，非線形項の増分ひずみマトリックスを表す．さらに，式(19b)を書き換えると次式の接線剛性方程式を得る．

$$\sum_{m=0}\sum_{n=0}[\Delta K_{mn}]\{\Delta d_n\} = \{r_m\} \tag{20a}$$

$$\{r_m\} = \{\Delta f_m\} - \sum_{n=0}[K_{mn}]\{d_n\} + \{f_m\} \tag{20b}$$

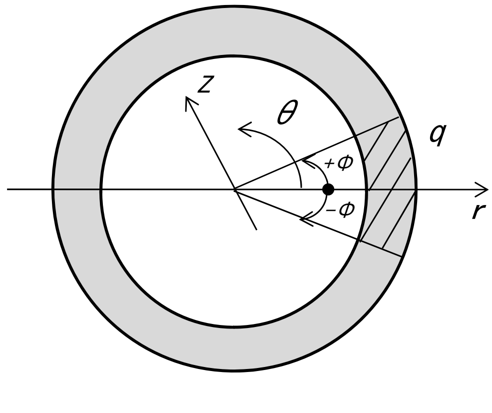
ここに，$[\Delta K_{mn}]$は，各増分荷重段階での接線剛性マトリックスであり，線形項の剛性マトリックス$[K_{mn}]_L$と未知数d_kを含む剛性マトリックス$[\Delta K_{mn}]_{NL}$の和によって与えられる．また，$\{r_m\}$は，増分荷重段階での不平衡力を表す．ここで，非線形剛性マトリックスおよび接線剛性マトリックスに含まれるd_kは，円周方向に級数展開した変位関数であるので，三角関数の３重積あるいは４重積が現れる．そのため，三角関数の直交性の利用が困難であることから，三角関数の積を和の形に直して積分を行った．

2.4 荷重ベクトル

荷重ベクトルは，図－3 の斜線部（$-\phi \le \theta \le +\phi$）に作用する荷重を，文献[11),12)]に示された方法を参考にして作成する．リング要素内に部分的に作用するz軸方向およびr軸方向の等分布荷重q_z，q_rは，フーリエ級数を用いて展開すると，次式のように表すことができる．

$$q_z = \sum_{m=0} q_{zm}\cos m\theta \tag{21}$$

$$q_r = \sum_{m=0} q_{rm}\cos m\theta \tag{22}$$



図－3　要素の荷重

（$-\phi \le \theta \le +\phi$）区間に等分布荷重が作用する場合，フーリエ係数は三角関数の直交性を利用して，次式のように表すことができる．

$$q_{zm} = \frac{\int_{-\phi}^{+\phi} - q_z \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta \, d\theta} \tag{23}$$

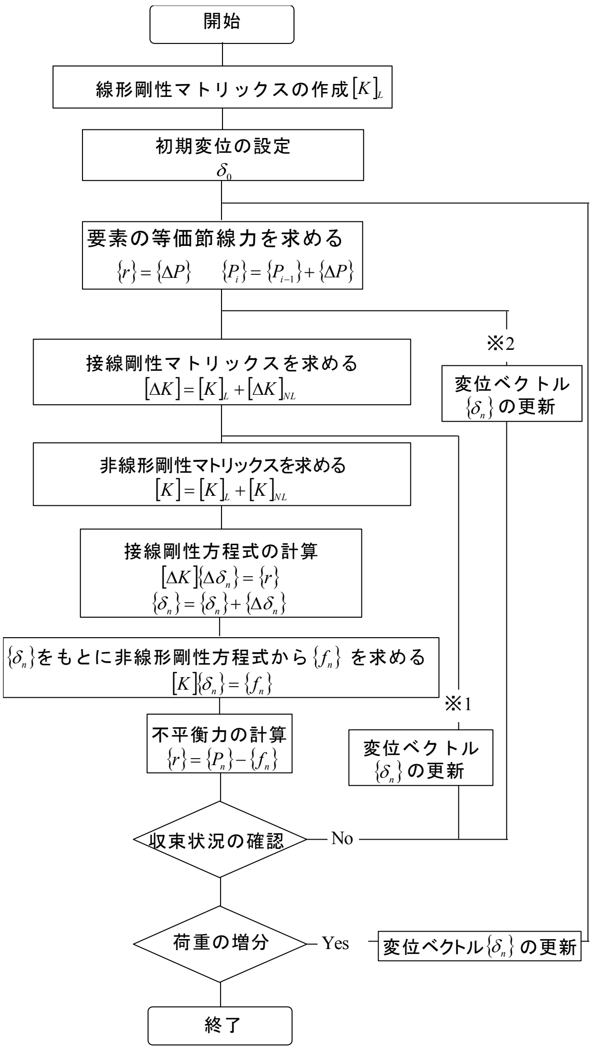
$$q_{rm} = \frac{\int_{-\phi}^{+\phi} - q_r \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta \, d\theta} \tag{24}$$

さらに，式(5)，(14)から，等価節線力$\{f_m\}$は，次式で与えられる．

$$\{f_m\} = \sum_{n=0} \int_{-\phi}^{+\phi}\int_{R0}^{R0+R} \begin{Bmatrix} \phi_1 \cos n\theta \;\; q_{zm} \\ \phi_2 \cos n\theta \;\; q_{rm} \\ 0 \end{Bmatrix} r d\theta dr \tag{25}$$

3．有限変位解析

前章に示した式(15)の非線形剛性方程式および式(20)の接線剛性方程式を用いて，有限変位解析を行う．本研究では，一般に用いられる荷重増分法，すなわち，式(20)に示す接線剛性方程式を用いて，適当な大きさの外力の増分とのつり合いを解き，式(15)に示す非線形剛性方程式を用いて，外力の増分後の不平衡力を式(20)より計算する．そして，各段階でのリング要素内の各外力の増分に伴う不平衡力が微小となるように計算を繰り返し行う．図－4 は，その解析のフローを示す．なお，図－4 の※１で表したフローは，各荷重ステップにおける接線剛性マトリックスの構築に，前ステップの荷重段階にて収束計算した変位を用いる修正 Newton-Raphson 法である．さらに，解析条件によっては，各収束計算内での変位を用い



図－4　幾何学的非線形解析フロー

て逐次剛性マトリックスを組み替えると，解の収束性が改善される場合がある．そのため，図－4 の※２のフローの Newton-Raphson 法を取り入れて解析を行った．

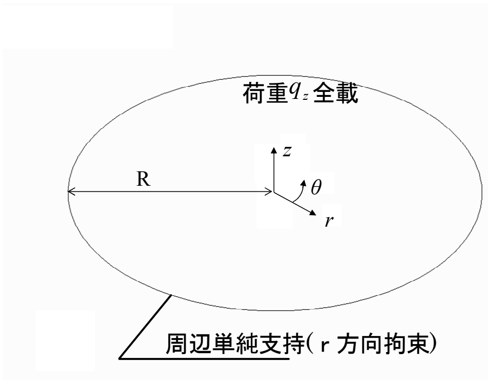
4. 幾何学的非線形性を考慮したリング要素の検証

4.1 等分布荷重を受ける円形板の解析

幾何学的非線形性を考慮したリング要素の解析精度の検証を行うために，周辺単純支持した半径Rの円形の板を，リング要素を用いて作成し解析を行った．図－5 は，解析モデルの形状を示し，半径方向の分割数は 5 分割とした．ただし，リング要素では，完全な円をモデル化できず，中央部に円孔を有したものとなるので，円形の板として扱うための処置が必要となる．本研究では，中央部の円孔の内径R_0を$R_0/R=4.0\times10^{-4}$とし，θ軸まわりの回転方向を拘束することによって連続条件をモデル化した．

まず，設定した連続条件の良否を検証するために，図－5 に示すモデルのz軸方向に無次元化した荷重q_zを全面に載荷し，微小変位解析を行った．尚，荷重強度$q_zR^4/2Et^4=1.71$，ポアソン比$\nu=0.25$とし，境界条件はリング状の板の最外縁を完全固定とした．表－1 には，リング要素による板厚で除して無次元化した鉛直方向変位（w/t）と厳密解[18]によるそれとの比較を示す．両者の解析結果に差異が見られないことから，リング要素の中央部の円孔の内径を小さくすることや，連続条件を境界条件として与えることによって，円形の板の解析も可能と考えられる．

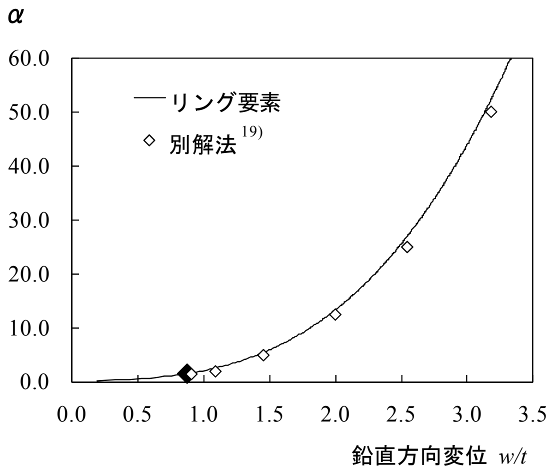
次に，図－5 に示す解析モデルによって有限変位解析を行った．図－6 は，円形の板に作用する荷重と中央近傍の変位に関する有限変位解析の結果を示している．尚，Federhofer，Egger による厳密解[19]と比較するために，解析モデルのポアソン比を$\nu=0.25$とした．図－6 の縦軸は，無次元化した荷重強度$\alpha=qR^4/2Et^4$であり，Federhofer，Egger による厳密解を別解法として示した．ただし，厳密解はグラフから読み取ったので，正確な精度の検証はできないが，本解析値が厳密解を近似できていることがわかる．尚，図－4 の※１の修正 Newton-Raphson 法で有限変位解析を行ったところ，幾何学的非線形性が現れ始める無次元化した鉛直方向変位$w/t=0.8$程度（図－6 の◆印）から解が不安定になった．そのため，本解析では，



図－5　円形の板の解析モデル図

表-1　円形の板の無次元化した鉛直方向の変位の最大値（w/t）

	リング要素	厳密解[18]
最大変位	2.52	2.52



図－6　円形の板の荷重と鉛直方向変位の関係

※２の Newton-Raphson 法よって解析を行った. この結果から，荷重が増加しても大きな誤差を含むことなく計算していると考えられる.

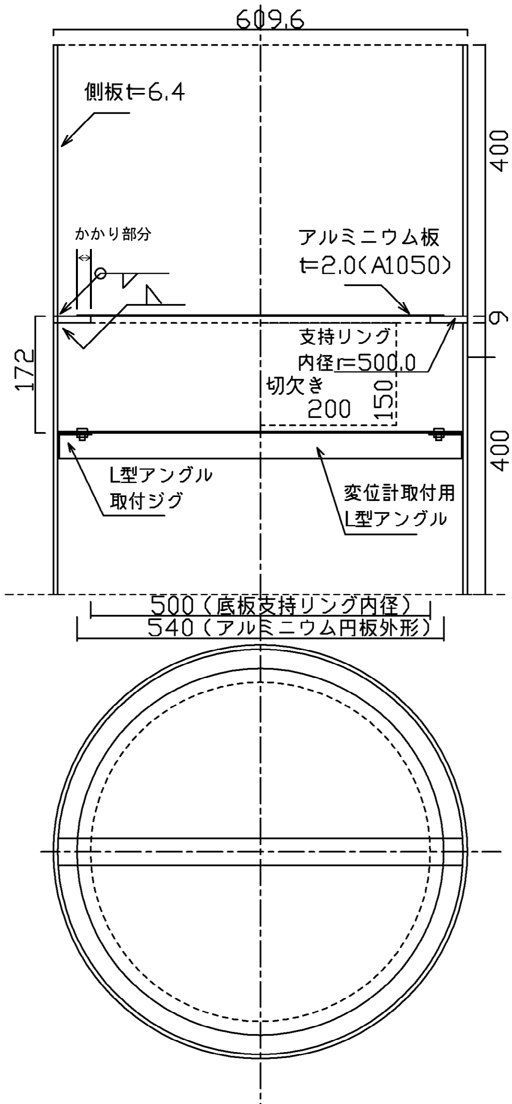
5. アルミニウム製円板の変位計測と有限変位解析

タンクの底板は，側板に接合されていることから，底板の外周がピン支持ほど半径方向の動きが拘束されることなく，いわゆる側板の剛性によって弾性的に支持された状態と考えられる．そのため，鉛直方向と半径方向の変位に非線形性が現れる場合の解析精度についても検討しておく必要がある．ここでは，円形のアルミニウム板を用い，半径方向に移動可能な支持条件下で，面外方向に荷重を作用させ変位を計測する実験を行い，提案する解析方法の解析結果と比較することで，解析精度の検証を行った.

5.1 アルミニウム製円板の変位計測

変位計測実験装置は，写真－１及び図－7 に示すような，直径 609.6mm，高さ 800mm の鋼製容器の中間に，リブ材を支持リング（内径 500mm）として取り付け，そこに，板厚 2mm，直径 540mm のアルミニウム製円板を設置した. その際, アルミニウム製円板の外縁部の 20mm のかかり部分が，支持リングに載るように行った．さらに，支持リングの表面には，グリスを塗布し，アルミニウム製円板との間の摩擦を軽減させる処置を施した．実験は，アルミニウム製円板が振動しないように，容器に静かに水を注入し，注入した水の水深と底板となるアルミニウム製円板の鉛直方向のたわみを計測した．また，止水対策として塩化ビニル膜を用い，塩化ビニル膜の設置には，アルミニウム板の半径方向の動きに影響を与えないように工夫した.

写真－1　実験装置



図－7　計測実験装置の概要図

表－2　計測実験結果

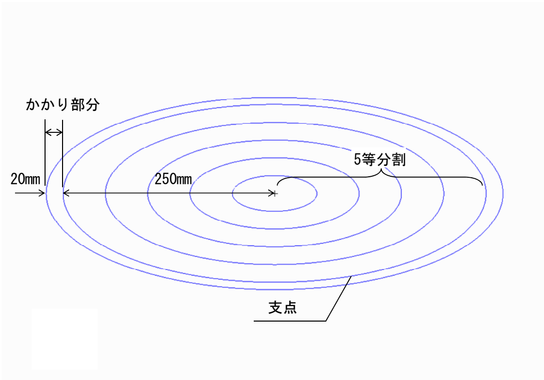
中心からの距離 (mm)	水深 (cm)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
0.0	たわみ (mm)	-0.498	-0.846	-1.196	-1.518	-1.744	-1.994	-2.188	-2.358
74.3		-0.476	-0.792	-1.108	-1.400	-1.614	-1.842	-2.026	-2.178
147.3		-0.342	-0.570	-0.802	-1.006	-1.154	-1.336	-1.476	-1.596

たわみは，設置したアルミニウム製円板の下方にレーザー変位計を据え付けて，水面の動揺がなくなり静水圧状態になったことを確認しながら計測を行った．表－2は，アルミニウム製円板の鉛直方向の変位と水深の関係を示している．尚，変位計測は，アルミニウム製円板の中心及び中心から 74.3mm と 147.3mm の位置で行った．また，アルミニウム製円板の自重による初期変位は，計測結果に含んでいない．

5.2 アルミニウム製円板の有限変位解析

図－8 は，アルミニウム製円板の有限変位解析に用いた半解析的有限要素のモデル図である．底板部分は半径方向に 5 等分割とし，その外側に支持リングとのかかり部として幅 20㎜ のリング要素を付加した．また，荷重は，静水圧を等分布荷重として，かかり部も含めて全載した．ここに，水の単位体積重量は 9.80kN/m^3 とした．境界条件は，半径 R =250mm の位置の円周にわたり，鉛直方向と θ 方向を拘束し，板の中央の θ 軸まわりの回転方向と半径方向を拘束した．また，表－3 は，実験に用いたアルミニウム A1050 の物性値 [20]である．

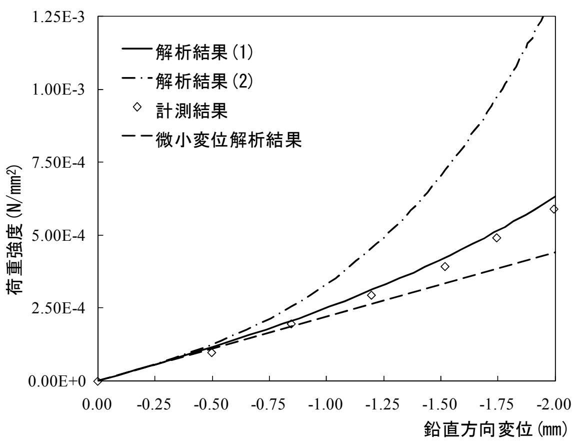
図－9 は，円形の板に作用する荷重と中央部の変位に関する有限変位解析の結果を示している．図－9 の縦軸は荷重強度であり，横軸は鉛直方向の変位 w を示している．ここに，解析結果(1)は，前述の境界条件による解析結果であり，計測結果は，5.1 に示す実験で得られた計測値である．一方，図－9 の解析結果(2)は，解析結果(1)のモデルに，半径 R =250mm の位置の円周にわたり半径方向の拘束を付与した時の解析結果である．さらに，参考のために微小変位解析の結果 [18]をプロットした．これらの結果を見ると，解析結果(1)は，計測実験値より若干小さな変位を示している．これは，計測値では，支えに用いた鋼製の支持リングのたわみが含まれていることが原因と考えられる．また，鉛直方向変位が 0.5㎜ を過ぎると，幾何学的非線形性が現れ始め，境界条件の異なる



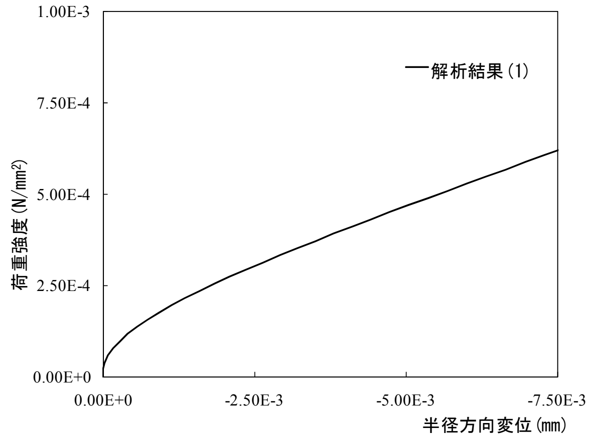
図－8　解析モデル図

表－3　アルミニウムの物性値

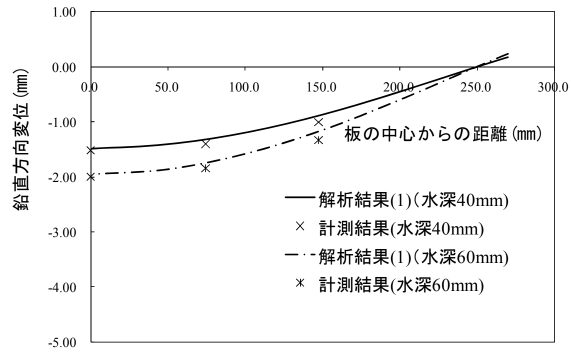
	弾性係数 N/mm2	ポアソン比
アルミニウム(A1050)	70300	0.345



図－9　荷重と鉛直方向の変位の関係



図−10　荷重と半径方向の変位の関係



図−11　断面の変位

解析結果(1)と(2)の変位に違いが見られる．これは，解析結果(1)のモデルが，半径 R =250mm の位置で半径方向に拘束されていないので，解析結果(2)よりたわみが大きくなると考えられる．図−10 は，荷重強度と支点位置での半径方向の変位 v の関係を示している．半径方向を拘束していないアルミニウム製円板が鉛直方向にたわむにつれ，板が円の中心に向かって変位するので，半径方向の変位にも幾何学的非線形性が強く現れていることを示している．図−11 は，水深 40㎜ および 60㎜ の時のアルミニウム製円板を半径方向に切断した断面の変形図である．断面の変形も最大変位と同様の精度で計算できていることが解る．これらの結果から，荷重が増加しても計測実験値と大きな誤差を含むことなく解析できていると考えられる．

6. 結論

本論文では, 大規模地震時のタンクのロッキング振動によって引き起こされる底板の浮上り部の応力解析に適用することを想定して, 相対２辺に任意の境界条件を与えることができ, 幾何学的非線形性を考慮できるリング要素の定式化を行った. そして, リング要素で構成される基本的なモデルを用いて別解法との比較や, アルミニウム製円板を用いた変位の計測実験を行い, 本解析法の解の検証を行った. ここで得られた結果をまとめると, 以下の通りである.

(1)幾何学的非線形性を考慮して定式化したリング要素の非線形剛性マトリックスを用いて，円形の板の有限変位解析を行い，Federhofer，Egger が示した厳密解による荷重−変位曲線と比較したところ，差異のない結果を得た.

(2)円形の板をモデル化した解析では，リングの内径を微小にとり，連続条件を与えることによって，解析精度を保てることを示した.

(3)円形の板の有限変位解析では，各収束計算段階の変位を用いて，その都度，接線剛性マトリックスを組み替える Newton-Raphson 法によって, 収束解を得ることができた.

(4)タンクの側板と底板の結合を想定して，半径方向に移動可能な境界条件を設定し，静水圧を受けるアルミニウム製円板の変位計測実験を行い，本解法と比較したところ，計測実験のたわみを精度良く近似できることを示した.

(5)半径方向に移動可能な支持条件下で，面外荷重を受けるアルミニウム製円板の有限変位解析を行い，幾何学的非線形性効果によって半径方向の変位を解析できることを示した.

(6)タンクに作用する荷重は，円周に滑らかに変動する荷重分布であることが多く，円周方向に級数展開法を用いた半解析的有限要素法の適用が，合理的な解析方法と考える．これまでに示したように，基本的なモデルを用いて解析精度の検証ができたので，円筒シェルと組み合わせて，地震時の動液圧によるタンクの浮上り状態の静的解析へ発展させたいと考える.

7. 謝辞

本研究の一部は，科研費(21560242)の助成を受けたものである.

参考文献

1) 土木学会耐震工学委員会：サンフェルナンド地震(1971 年 2 月)の震害について，土木学会論文報告集，第 195 号，1971.
2) 坂井：液体貯槽の耐震設計研究に関する現状と課題,

土木学会論文集，第 362 号，1985.
3) 坂井，磯江，秋山：平底円筒タンクの地震時浮き上がり挙動に関する模型実験研究，圧力技術，第 23 巻，第 6 号，1985.
4) 中島，安藤，谷口：陽解法を適用した液体を含むタンクのロッキング振動解析に関する一研究，平成 18 年度土木学会関西支部年次学術講演会概要集， I -68，2006.
5) 中島，安藤，谷口：液体を充填した容器のロッキング振動への陽解法の適用性の検討，計算工学講演会論文集，Vol.12，pp739-742，2007.
6) 中島，安藤，谷口：平底円筒貯槽の浮上り挙動への陽解法の適用性に関する基礎的研究，応用力学論文集 Vol.11，pp.1047 –1054，2008.
7) T.Taniguchi, T.Nakashima: A numerical study of uplift motion of flat-bottom cylindrical shell model tank subjected to harmonic excitation, ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, PVP2010, 2010.
8) T.Taniguchi, Y.Ando, T.Nakashima: Fluid pressure on unanchored rigid flat-bottom cylindrical tanks due to uplift motion and its approximation，Elsevier，Engineering Structures 31，pp.2598-2606，2009.
9) T. Taniguchi,T. Segawa: Effective Mass of Fluid for Rocking Motion of Flat-Bottom Cylindrical Tanks, ASME 2009 Pressure Vessels and Piping Conference, PVP2009, 2009.
10) T.Taniguchi:Effective Mass of Fluid for Rocking-Bulging Interaction of Rigid Rectangular Tank Whose Bottom Plate Rectilinearly Uplifts, ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, PVP2010, 2010.
11)Y. K. Cheung: Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs ASCE EM6, pp 1365-1378, 1968.
12) Y. K. Cheung: Folded Plate Structures by Finite Strip Method, Journal of the Structural Division, ASCE ST12 pp.2963-2979, 1969.
13) 前田，林，森：有限帯板法による薄板の有限変位解析，土木学会論文報告集，第 316 号，pp.23-36，1981.
14) J. A. Stricklin, W. E. Haisler: Nonlinear Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method, AIAA Journal, Vol.6, No.12, pp2306-2312, 1968.
15) 礒江：地上式平底円筒タンクの地震時における浮き上がりおよび滑り挙動に関する研究，東京大学学位論文, 1994.
16) 坂井，礒江：アンカー付きタンク底板の地震時部分的すべりによる影響，土木学会論文集，第 410 号， I -12，pp.385-393，1989.
17) 鷲津，宮本，山田，山本，川井：有限要素法ハンドブック（I）基礎編，培風館，pp128-132，1992.
18) 土木学会構造工学委員会編：構造力学公式集，昭和 61 年版，1986.
19) S.P.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger：THEORY OF PLATES AND SHELLS, McGRAW-HILL 2ed，pp396-413，1989.
20) 自然科学研究機構 国立天文台編：理科年表，第 81 冊，平成 20 年版，丸善出版，2008.

（2011 年 3 月 8 日　受付）