フレーゲ・論理・数学の基礎

――フレーゲ研究から見えてくるもの*――

田　畑　博　敏

はじめに

筆者は、アリストテレスの研究から出発し、その後、主としてフレーゲを研究した（Cf. [田畑 2002]「あとがき」、[田畑 1978]）。職務としては、1980 年以来、本学（鳥取大学）で論理学を（1990 年代半ばからは哲学も）講じてきた。本論で論じることは、論理学の教育とフレーゲ研究とから何が見えてくるのか、すなわち、論理学の知識が哲学研究にどう生かされるべきか、そしてフレーゲが目指した論理主義という研究プログラムがどのような射程を持つのか、ということである。アリストテレスは自然学の後にくるメタ・タ・フュシカ（メタフィジカ）を「第一哲学」とした。その先例に倣うならば、メタ・ロギカ（論理についての考察）がどのようにして「哲学基礎」となるかを示すこと、これが本論の課題である。

§１．論理学と哲学教育

論理（論理学）の研究教育は哲学の研究教育にどのように役立つのだろうか？先述のように、筆者は論理学を本学で３５年間教えてきた（[大窪・田畑 1994]）。それが、哲学の研究にどう繋がるのか、その具体例から述べていく。

１．１　概念の明晰化

哲学は、自然現象や人間・社会現象を直接に観察したり実験したりするよりは、そのような分野で使われる概念を分析することを任務とする。とりわけ、曖昧な**概念を明晰にする**仕事は、哲学に求められる課題である。

１．１．１　言語的多義性の解消と概念の明晰化

哲学に限らず、日常生活でわれわれは多くの多義的表現に遭遇する。

【例１】例えば、ある小学校のあるクラスの状況を

---

*本稿は、平成 27 年 9 月 26 日に開催された、九州大学哲学会平成 27 年度大会（於　九州大学文学部 4 階会議室）でのシンポジウム提題の原稿に手を加えたものである。当大会で司会を引き受けて頂いた当会会長の荒木正見氏、特定質問者の九州大学・吉原雅子氏、会場のフロアーから質問していただいた二名の院生の方、そして最後までご清聴いただいた出席者の方々にこの場を借りて感謝申し上げる。

「すべての男子はある女子を好む」

と表現した、とする。これは、

(a) すべての男の子は、それぞれに、だれかある女の子が好きである、

とも、または、

(b) クラスにアイドル的な女の子がいて、その子を男子全員が好きである、

とも解される表現である。これら二つの意味を、論理学の（簡略化した）記法で、

$\forall x \exists y Rxy$　・・・（α）

$\exists y \forall x Rxy$　・・・（β）

と区別することにより、多義性を解消できる。また、

【例2】「すべての自然数はある自然数より小さい」

という表現も、上記の例1と同じパターン（α）（β）の多義性を持っている。すなわち、（α）の意味では、「すべての自然数が、それぞれにある自然数より小さい」（例えば、1は2より小さく、2は3より小さく、・・・、nはn＋1より小さく、・・・）という正しい文を表すのに対して、（β）の意味では、「ある最大の自然数があって、どんな自然数もこの数より小さい」という（通常の解釈では）間違った内容を表すことになる。ちなみに、（β）は（α）を含意するが、（α）が（β）を含意することはない。

【例3】もう少し哲学的な話題に向かうとすれば、「同一者不可識別の原理」と「不可識別者同一の原理」の区別がある。前者は

$x = y \rightarrow \forall P\ (Px \longleftrightarrow Py)$

（*対象xとyが同一ならば、両者はあらゆる性質を共有する*）

後者は、その逆命題：

$\forall P\ (Px \longleftrightarrow Py) \rightarrow x = y$

（*対象xとyがあらゆる性質を共有するならば、それらは同一である*）

として区別できる。もちろん、個体の同一性を、すべての特性の共有と定義すれば、すなわち、

$x = y \longleftrightarrow \mathrm{def.} \forall P\ (Px \longleftrightarrow Py)$

とすれば、二つの原理は区別できない。しかし、一方を認めるが、他方は疑う、という立場もありうるであろう。例えば、個体は性質の束とは同一視できず、何らかの「個体性の原理」によって同一性が決定される、という立場では、同一性が性質の共有を含意することは認めても、その逆は認められない、と考えるかもしれない。

【例4】数学では、概念をきちんと定義し、表現することは極めて重要である。例えば、数学者デデキントが考えた無限概念、いわゆる「**デデキント無限**」の概念は以下のように、「*自分自身の真部分集合の中への単射が存在する*」という表現により、定義される（[Shapiro 1991] p.64）：

$\exists f\,[\ \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow fx \neq fy) \land \exists y \forall x\ (fx \neq y)\ ]$

この論理式による表現の中で、

$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow fx \neq fy)$

の部分は、「fが単射である」、つまり、対象領域Dからそれ自身Dへの写像（＝関数）f（$f : D \longrightarrow D$）は、異なる対象から異なる対象へ像を写す、ということを意味する。また、

$\exists y \forall x\ (fx \neq y)$

の部分は、どんな対象xからもfにより写されることがはない、そういう対象yが存在すること、つまり集合論の言葉では、fによる対象領域（＝定義域）Dの像f(D)は、Dの**真**部分集合である、を意味する。写像が「単射である」ということは、定義域Dの要素の個数の「多さかげん」がそのまま像（＝値域=f（D））の要素の「多

さかげん」に反映されるということである。対象の個数が有限ならば、その対象領域からそれ自身の真部分集合への単射はありえない。像となるべき対象の個数が足りなくなるからである。しかし、無限集合では、これが可能である。例えば、自然数全体からその真部分集合である偶数への単射である $f(n)=2n$ が存在するからである。

【例５】また、実数の連続性（＝完備性）は以下の論理式で表現できる：

$$\forall X\ [\{\exists yXy \wedge \exists x\forall y(Xy\rightarrow y\leq x)\}$$
$$\rightarrow \exists x\{\forall y(Xy\rightarrow y\leq x)\wedge\forall z(\forall y(Xy\rightarrow y\leq z)\rightarrow x\leq z)\}]$$

（上に有界な非空の部分集合はすべて、最小上界（＝上限）をもつ）

これは、Weierstrass の公理と呼ばれる原理であり、有名な、Dedekind の「切断 Schnitt, cut」による実数の連続性の公理と同値な公理である（詳細は[赤 1996] pp.60-63、また[Shapiro1991] p.84、[前原 1966] p.20、[デデキント 2013]参照）。

１．１．２　ε-δ論法

１９世紀に、数学の厳密化（算術化）の運動が数学の内部で遂行されたが、そこで、関数の「連続性」や「収束性」などの概念が、いわゆる「ε-δ論法」として定式化されるようになった。例えば、（実数から実数への）関数 f が、実数 a に対して定義されている、とする。このとき、「関数 f は a において連続である」という主張は、

$$\forall\varepsilon[\ \varepsilon>0\ \wedge\exists\delta\ \ \{\delta>0\ \wedge\forall x(\,|a-x|<\delta\rightarrow|f(a)-f(x)|<\varepsilon)\}\ ]$$

（任意の正の実数εに対して、正の実数δが存在して、実数 a との距離がδ内にある任意の実数 x に対する関数値 f(x) は、a に対する関数値 f(a)との距離がε内に収まる）

として定義される。これらの定式化は、結局、$\forall x\exists y\forall zQxyz$ というパターンの論理式（および、そのヴァリエーション）と見なせる。つまり、多重量化という論理的な枠組みの中で解析学の概念が明確に定義された、という典型的な例である（詳細は[中根 2010]参照）。

１．１．３　哲学的に重要概念の類似性

筆者は、[Haack1978]を援用して行った「論理の哲学」という講義において、聴講者に、「全称（‘すべての’）：∀」と「必然：□」と「義務：*O*」がどのように関連しているかを、教えようとしたことがある。その目的は、必然を「すべての（到達できる）可能世界で真である」、「義務」を「（道徳的に理想的な）すべての世界で為される」と定義することによって、「否定」を介して、一見関連の無さそうなそれらの概念がどう関連しているか、を教えることである。これらの定義は、きわめて緩やかな一般的なものであり、「必然」「義務」の概念をどのような原理（公理）に基づいて理解するにせよ、採用されるであろう基本的な規定である。そうすると、以下のような関連があることが分かる：

述語論理	様相論理	義務論理
①　エネルギー源の不要な生物はいない（すべての生物はエネルギー源を必要とする）	⑤a≠a は不可能である（a＝a は必然である）	⑨脱税は許されない（納税は義務である）
②　エネルギー源を要する生物がいる（すべての生物がエネルギー	⑥太郎は合格し得る（太郎の不合格が必然である訳ではない）	⑩　喫煙室では喫煙してよい（喫煙室では禁煙が義務ではない）

源が不要な訳ではない）

③エネルギー源の不要な生物がいる
（すべての生物がエネルギー源を必要とする訳ではない）

⑦滅亡しない宇宙もあり得る
（すべての宇宙の滅亡が必然な訳ではない）

⑪　献血はしなくともよい
（献血することが義務ではない）

④エネルギー源が必要な生物はいない
（すべての生物はエネルギー源を必要としない）

⑧宇宙の滅亡は不可能である
（宇宙は必然に滅亡しない）

⑫キャンパス内で喫煙することは許されない
（キャンパス内では禁煙が義務である）

１．２　正しい推論とそうでないものの区別

かつてクワインは、『論理学の方法』という有名な教科書（[クワイン 1961]）の「まえがき」で、「論理学は古くからある学科であり、1879 年以来は宏大な学科である」、と述べた（しかし、改訂第３版[クワイン 1978]では、なぜかこの文言が消えている）。無論、１８７９年というのは、フレーゲの『概念記法』（[Frege 1879]）が出版された年である。フレーゲのなした貢献の一つは、この書物の中で、論理的真理の収集だけでなく、証明するときのステップである推論規則（フレーゲの場合、事実上、Modus Ponens と代入規則、全称例化、全称汎化である）を明示したことである（[田畑 2002]第１章）。これによって、飛躍のない証明を作ることができる。さらに、推論のどの地点で誤謬が発生したのか、を追跡できる。その後の論理学の発展においては、フレーゲやラッセル・ヒルベルト流の、公理の数が多くて推論規則が少ない証明スタイル（言い換えると、真理のみから真理を導くスタイル）ではなく、逆に、推論規則のみを設定する（＝仮定からの導出を重視する）ゲンツェンの LK（logischer Kalkuel）、NK（natuerlicher Kalkuel）が提示され（[Gentzen 1969]）、さらにベートやスマリアンによるタブロー法([Smullyan 1995])で、一層容易な証明構成の方法が開発されてきた（Cf. [Priest 2008]）。論理学教育の観点からは、学習者に過度の負担を与えないことがタブロー法の長所である。いずれにせよ、論理学の研究により、正しい推論は一定のパターンを持つ推論であるという構文論・証明論による説明が与えられるようになり、しかもそのパターンの推論は前提から結論に真であることを伝達・保存することが示された（健全性）（Cf.[Grattan-Guiness 2000]）。

１．３　パラドクスの解明

自ら発見した「ラッセルのパラドクス」をフレーゲに報告してフレーゲを失望させたラッセルは、パラドクスの研究が論理や哲学の研究にとって極めて重要だ、と強調している。パラドクスの分類や解明は「論理の哲学」の主題のひとつである（[Haack1978]第８章）。また、ゲーデルは、リシャールのパラドクスと似たやり方で「自分自身は証明できない」を意味する決定不能文（いわゆるゲーデル文）を構成することにより、不完全性定理を証明している。これはパラドクスが積極的な成果を生み出す刺激になった好例である（[Van Heijenoort 1967]参照）。

ところで、パラドクスの究極は矛盾（＝二律背反）、すなわち、ある命題とその否定を同時に認める（証明する）こと、である。しかし、「矛盾」という言葉は、日常では「困った事柄」「望ましくない事柄」といった意味にも使われていて誤解を招きやすい。十分な注意が必要である（田畑[2005]、[田畑 2006]）。ただ、一見して、互いに矛盾している（矛盾を含む）ことが判別できない場合は、探求を続けるしか方法は無い。さらに、３個以上の命題について、論理学では、「矛盾」の意味を少し拡大して、同時に真であることが不可能である場合を「矛盾」とし、同時に真であるモデルが存在すれば「無矛盾」である、と見なしている。

１．４　哲学の文献を読む必須のツールとしての論理学

哲学の文献はたいていの場合、一応、「論証」の形を取って、主張が展開される。もちろん、数学の論文でなされる「証明」ほど、そのような論証が論理的である、とは限らないであろう。しかし、例えば、フレーゲの作品を読む場合などは、論理学の知識が大いに役立つ筈であり、必須のツールになる場合も少なくない。

１．４．１　論証構造の把握

自然言語で表現された論証においても、その論証を辿れる、つまりどのような構造を持った論証であるのかを把握することは、その論証を理解する上で欠かせないことである。例えば、その論証が、一種の「背理法」によって構成されていたとしよう。「背理法」は、ある命題を反駁するために、一旦、その命題を真と認め、それから矛盾を論理的に導くことで、最初の命題を否定する、というパターンの推論である。そのとき、「矛盾」が実は論理的な二律背反ではなく、先述したような「**望ましくない事柄**」であるかもしれない。その場合、その論証を、厳密ではないが「近似的な背理法」と見なして論証の有効性を認めるか、または論証が致命的欠陥を持つと見なして論証そのものの有効性を否定するか、これはその時採られる立場に依存するであろう。哲学の議論においても、あくまでも数学論文並みの厳格な論理展開を求めるのであれば、「矛盾」は真正の二律背反（ある命題とその否定形の共存：$A \wedge \neg A$）でなければならない。しかし、それほどの厳格さを要求しないのであれば、論証が目指す意図をくみ取ることは可能である。このような判断も、論理学の知識にも基づいて行われてはじめて、根拠のあるものとなる。

１．４．２　検証と反証の非対称性

科学哲学の議論の中で、検証のむずかしさと反証の容易さが対比して論じられることがある。法則や仮説は全称命題：

$\forall x Px$・・・・・(※)

として表現されるのが普通である。述語論理の知識により、この命題の否定形：$\neg\forall x Px$ は、つぎの存在命題と同値である：

$\exists x \neg Px$・・・・(※※)

ところで、全称命題を観察や実験によって実証的に検証することは、少なくとも一つの反例、すなわち $\neg Pa$ となる対象 a を発見すること（＝（※※）が成り立つことを示すこと）よりも、一般的には困難である。なぜなら、全称命題を検証するためには、ありとあらゆる対象 a について、Pa の成立を立証せねばならないからである。カール・ポパーの「反証主義」はこのことに依拠している。一般に、存在命題の反証（$\neg\exists x Px$）と全称命題の検証（$\forall x Px$）とが困難であるのに対して、存在命題の検証（$\exists x Px$）と全称命題の反証（$\neg\forall x Px$）が容易であることは、以下のような述語論理の基礎的な知識（上記 1.1.3 参照）によって正確に理解できる：

$\neg\exists x Px \equiv \forall x \neg Px$（*P なるものは存在しないとき、かつそのときにかぎり、すべてのものは P でない*）

$\exists x \neg Px \equiv \neg\forall x Px$（*P でないものが存在するとき、かつそのときにかぎり、すべてのものが P であるとはかぎらない*）

１．４．３　数学的帰納法の理解

論理学や論理の哲学などの文献ではしばしば「数学的帰納法」が用いられる。高校の数学で登場する場合は自然数に関する法則などが適用例として取り上げられる場合が多いために、「数学的帰納法」は一直線に（すなわち線形順序に）並んだ対象にしか使えないと誤解する学生を多く見かける。しかし、数学的帰納法は、枝分かれする（＝半順序の）構造をもつ対象領域においても使えることを知るのは有益である。例えば、「論理式（あるいは証明）の複雑さ（=構成）に関する数学的帰納法」というものが使われる場合がしばしばある。このような用法に慣れることは、論理に関連する哲学文献を読みこなす強力なツールになる。

§2．フレーゲの哲学の「射程」

以上は、筆者の論理学教育の経験から導いた、哲学の研究と教育に必要な論理学の知識の一旦の記述であった。次に、筆者の研究課題であった、フレーゲ研究について述べる。フレーゲは何をどこまで成し遂げ、その後、フレーゲの研究成果や思考法は、どのような形で受け継がれ、発展しているのであろうか？（[フレーゲ著作集]参照）

2．1　意味論：論理的意味論の源流

フレーゲは「分析哲学」の、そして現代的な「言語哲学」の、祖とされる。フレーゲの発想の根底には、意義（Sinn）と意味（Bedeutung)の区別を基本とする意味論がある（[Frege 1892]、[フレーゲ著作集]第4巻）。名詞に限らず文においてもこの二つの「いみ」の区別が維持される。意義は、固有名詞の意味たる対象を指示する様式（指示される対象へ至る認識ルート）である――例えば、語「明けの明星」の意義である「明け方に東の空に輝く星」は、この語の意味である「金星」を指示する仕方（「金星」に認識的に到達する手段）である。文の意義は、文の意味たる真理値を決める真理条件（ないし思想 Gedanke）である――例えば、文「13 は素数である」の意義は「数 13 を割り切る自然数は 1 または 13 以外にない」という「思想」であり、それは、数 13 において成り立つことが、当該文が真理値「真」（つまりこの文の意味）をもつ（すなわち、数 13 が実際に素数である）ことの条件（＝真理条件）となっている。フレーゲのこのような「意味論」は、カルナップ、チャーチ、モンタギューなど、フレーゲの後の世代の研究者によって展開される「論理的意味論」の源流だと見なされる（野本[2006]）。ただ、ここで注意すべきことは、その後の「論理的意味論」が数理論理学でのモデル理論の影響を相当に受けている、という点である。フレーゲには、ブールやシュレーダーなどの「代数的論理学派」に見られるような、量化子の束縛領域を限定するという発想がなく、対象領域の全体が常に量化の束縛範囲の全体とされている。そのため、「ジュリアス・シーザーはどのような理由で数（＝ある概念の値域[外延]）でないのか」、という「シーザー問題」（＃F＝Julius Caesar？）に悩まされた（後述）。さらに、フレーゲは、カントールの集合論を評価はするが、自分の意味論に積極的に組み込むことはしていない（Cf. Frege[1892a]）。モデル理論は、「代数的論理学派」の対象領域の区分と集合論による対象の階層（無限集合の階層）とを、ともに採用する（因みにチャン＆キースラーのモデル理論の教科書では、universal algebra＋logic＝model theory と説明されている：[Chang&Keisler1973] p.1）。従って、フレーゲの意味論はモデル理論の直系の先祖ではないが、広義の「指示的意味論」、つまり言語の外にある何らかの対象や構造を**指し示すこと**を「意味」の働きと見なす意味論、の共通の祖先の一人ではある。

そのような観点に立つならば、広い意味での指示論としての「フレーゲの意味論」と対比すべきは、使用の規則や文脈的慣用を「いみ」とする意味論ということになる。後期ウィトゲンシュタインの「使用の規則」としての意味理解や、ヒルベルトの「形式主義的」ないし「演繹主義的」意味理解がこれに相当する。ここでは、ヒルベルトの「意味論」を考えよう。数学者としてユークリッド幾何学を厳密に公理化しようとしたヒルベルトは、公理を定義の一種（陰伏的定義 implicit definition）と見なした（[ヒルベルト 2005]）。そのような思考法を象徴的に示すのが、「点、直線、それに平面という代わりに、いつでもテーブル、椅子それにビール・ジョッキというように言い換えることができなくてはならないのだね」（[リード 2010] p.113）という、ヒルベルトの言葉（とされる）文言に他ならない。ここでは、公理は、数学的対象がもつ自明な原理なのではなく、幾何学を遂行するための論証原理である。体系内での操作や証明を規定するのが公理であり、公理に現れる語彙の意味は、そのような規定により、文脈的に体系全体の中で与えられる。これは数学の哲学としての「形式主義」と結びつく「意味論」である。フレーゲが先祖の一人となったモデル理論とはまったく異なる発想を持つこの「証明論的意味論」は、数学基礎論の「証明論」と親近な関係にある意味論である(Cf.[Sundholm 1986])。両者の意味論は、二者択一または対立の関係ではなく、形式的証明（＝記号変形操作）による根拠づけと、論理的含意（＝真理保存）による根拠

づけという、相補的な関係であり、これらの同値性である「（意味論的）完全性」こそが、以後のさまざまな論理体系の持つべき最も望ましい特徴の一つとされることになる。

2．2　数とは何か

さて、職業人としては「数学者」の生涯を送ったフレーゲである（[野本2003]）が、当時の数学および数学者が「数とは何か」ということに無頓着であることが不満であった（[フレーゲ著作集]第2巻『算術の基礎』p. 36 等）。フレーゲの答えは、“ある概念に対応する数とは、その概念と同数的である（＝1対1対応がある）という二階の概念の外延（＝値域）である”というものである。フレーゲは、数を対象と位置づける。これは、算術の真理が対象としての数に関わる、という形で定式化されるという数学内部の慣用に加えて、数をある種の**論理的対象**と見なすことで、論理主義を首尾一貫したものにする、という彼の根本的発想に由来する。ジュリアス・シーザーのような通常の対象は特定の、しかも一階述語が適用されるが、数は「“一階のある述語と同数的である”という二階述語の外延」として論理的に定義されるゆえに、この点で区別できるはずである（「ジュリアス・シーザー問題」）。だが、フレーゲにとって「対象」は飽和的な存在者であり、その点では、ジュリアス・シーザーという対象も数13という対象も、対象であるかぎり区別できない。つまり、対象が一階の概念に由来するのか、二階の概念に基づくのか、その違いは対象の差異には反映されないのである。

ところで、「数とは何か」という問題は、現在では（「現在も」と言うべきであろうか）、（数学者によっても哲学者によっても）あまり真剣には取り上げられない。それは、主に二つの理由、技術的理由と思想的理由、のためである。まず技術的に、集合論において、「数とは何か」という問いの一応の答え（それも複数の答え）がすでに提出されている、ということがあり、さらに、思想的には、数の身分（または本性）に関する「構造主義的」見解が一般に受け入れられている、ということがあるからである。前者（技術面）について、例えば、ツェルメロは自然数0,1,2,3,…を、ϕ（＝空集合）、$\{\phi\}$、$\{\{\phi\}\}$、$\{\{\{\phi\}\}\}$、…と定義し、フォン・ノイマンはϕ、$\{\phi\}$、$\{\phi, \{\phi\}\}$、$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$、…と定義する。これらの集合上の違いは、これらが果たす数論上の役割に影響しないので無視してよい（つまり、どちらの定義を採用しても構わない）、とされる。そのことは、「数が存在意義を持つのは、数の体系の構造上の位置においてのみである」という、構造主義の思想（後者）と前者（技術面）とが、密接に結びついている、ということを示している。しかし、改めて「数とは何か」という問いを真剣に考えたとき、フレーゲの基数性を優先させる考えは、現在でも、大いに参考にできる考えであろうと思われる（その証拠として[足立2011]、[足立2013]を、比較のために[デデキント2013]を、参照されたい）。

2．3「フレーゲの定理」：論理主義の成果

筆者は、デモプーロス編の *Frege's Philosophy of Mathematics* というアンソロジー（[Demopoulos1995]）の Introduction を初めて読んだとき、学問的な衝撃を受けた。それは、論理主義というフレーゲの数学の哲学が古めかしく――Dummett もそう考えていた：*His work in the philosophy of mathematics, though still interesting, is in a fundamental respect archaic*[Dummett 1978] p.88――しかも彼の体系が矛盾を含むゆえに、真剣に取り組んでもあまり成果が期待できない分野だ、という漫然とした先入見を持っていたからである（Cf.[Dummett1991]）。しかし、デモプーロスのアンソロジーには多くの研究者による、フレーゲの数学論に対する熱の籠った論考が満載されており、しかも「フレーゲの定理」と名づけられたフレーゲの「数学的成果」までが大々的に喧伝されていたからである。そこで、筆者は、「フレーゲの定理」と言えるような成果を、フレーゲは本当に成し遂げているのか、ということを自分で確かめたいと考えた。イギリスの Wright らがすでに 1980 年代に「フレーゲの定理」（この名称の名づけ親は Boolos である：[Demopoulos p.2、[Boolos1998] 論文 12, 13 参照）を発見してそれの素描を著作で示しており（[Wright 1983]）、アメリカの Boolos や後に Heck がそれに呼応してフレーゲの数学論研究に参加し、援護射撃的にフレーゲの数学の哲学の見直し運動に火をつけていたのである。筆者

は１０年以上、そういう学問的運動に気づかなかったわけである。(日本の研究者がどうだったのか、よくは分からない。)

ところで、その「**フレーゲの定理**」とは何か？それは、フレーゲが、矛盾の犯人とされる基本法則Ｖを使わないで、ヒュームの原理（HP）と呼ばれる無矛盾な原理：

(HP) $\#F = \#G \longleftrightarrow \exists f\,[\forall x(Fx \rightarrow \exists^1 y(Gy \wedge fx = y)) \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists^1(Fx \wedge fx = y))]$

(概念Ｆの数とＧの数とが同一であるのは、ＦとＧにそれぞれ当てはまる対象間に一対一対応が存在するとき、かつそのときにかぎる)

（ただし、'$\exists^1 xPx$' は '$\exists x \forall y\ (Py \longleftrightarrow y=x)$' の省略表現）

と第二階論理によって、算術の実質的部分を導出している、という事実のことである（[Heck 2011；2012]）。算術のうち、有限基数（＝自然数）の導出については、1884年の『算術の基礎』([Frege 1884]、[フレーゲ著作集]第２巻）においてすでに導出の大まかな道筋が示されている。筆者は、Boolos の論文（[Boolos 1998]）などを参照しながら、フレーゲのテキストに当たり、（邦語）論文に仕上げ、それを拡充しながら留学先のマイアミ大学でハーク教授の指導の下で英語の論文にした（[Tabata 2000]）。それをさらに詳しく、筆者の著書の一章で展開した（[田畑2002]第９章)。また、2002年の九州大学哲学会で、このテーマで特別発表を行った（[田畑2004]）。

２．４　フレーゲの延長線上にあるもの

その後、筆者はフレーゲの研究から少し離れて、フレーゲが彼の体系で実際に開発した第二階の論理の強さがどの程度のものなのか、調べてみようと思い立った。その結果を第二階論理に関する論文に仕上げたが、これについては後に節を改めて論じる。フレーゲの定理の発見者たち（Wright や Hale）は、後に、Neo-Fregean ないし Neo-logicist と呼ばれるようになり、彼らは、フレーゲの「論理主義」の復活を宣言し、ヒュームの原理を用いるフレーゲ的なやり方で、実数論や集合論まで展開しようとしている（[Hale & Wright 2001]）。技術的な点はともあれ、その思想的な側面（ヒュームの原理を論理的な原理とするなど）に対しては、Dummett や Boolos からの批判も多く、日本でも賛同者は少ないようである（[岡本・金子 2007]、[野本 2012]）。(筆者自身は、彼らのアプローチは相応の価値がある、と考えている。Cf. [田畑 2007]、[田畑 2013])

さて、フレーゲが「論理主義」において示そうとしたものは何だったのであろうか？筆者の考えでは、「論理は現在の集合論と同様の役割を果たしている」、すなわち、「(幾何学を除く) 数学の基礎を論理は形作る」、ということを実際に示すことがフレーゲの目標であった。なぜなら、フレーゲは、論理は数学よりはるかに確実であり、数学はその論理により導かれる、という認識論的信念を持っていたからである。しかし、問題は、「論理」というものをどれほどのものと考えるかに掛かってくる。Neo-Fregean の「踏ん張り」はあるものの、フレーゲのオリジナルの「論理主義」というプログラムが遂行の難しいものだとすれば、フレーゲが求めた先の活動、フレーゲの思想の延長線上に何があるか、を追究する方が、学問的にも実り多いことだと思われる。フレーゲは厳密な証明を重視した。証明は、「**何かを根拠として別の何かが成り立つ**」、ということの確認である。数学の定理の成立にはぎりぎり何が必要かという観点から、数学基礎論の「逆数学 (reverse mathematics)」は、数学の重要な定理がどのような原理 (公理) から導けるのかを、定理の複雑さを分類しながら組織的に調べようとしている ([田中 1997]、 [Simpson 2009])。たしかに、歴史的には、逆数学はフレーゲとは全く無関係に成長した（むしろ、ヒルベルト計画の部分的実現と言われる：[Simpson 1988])。しかし、結果的に、フレーゲの思想（の延長線）と重なる部分を持っている、と筆者には思われる。(ちなみに、逆数学では自然数だけではなく自然数の集合も視野にいれた二階算術を扱うため、形式的には第一階論理ながら多領域論理（many-sorted logic）という強い体系を採用する。この点でも、量化の領域を一つに限定する通常の第一階論理は十分ではない。§３参照)

２．５　クワインの影響（高階論理と様相の批判）

ところで、フレーゲが英語圏で再評価されている一方で、戦後の、特に米国の分析哲学を成長させ、その発展に大きな影響を与えた人としてクワイン（Willard Van OrmanQuine:1908-2000）の名を忘れる訳にはいかない。しかし、同時に彼は、高階論理（実質上フレーゲ）と様相論理を批判することにより（[クワイン 1972]第 5 章pp.100-104、原典[Quine 1986]pp.66-68）、論理の学問的発展に不要な水をさし、「皮肉な」結果を生み出した。とくに様相論理は、クリプキの「可能世界意味論」の出現により、爆発的な発展を遂げている。クワインは自然科学については、その成果により、ほぼ無批判に受け入れる。従って、物理学で使われる数学も科学に不可欠の学問として認める。ところで、数学は「証明」により真理性が保証される。それゆえ、数式や論理式が証明可能がどうかは、メタ数学・メタ論理的に重要な情報となる。Boolos らによって開発されてきた「証明可能性論理 provability logic」は、通常の様相論理の「必然性」演算子‘□’を「証明可能である」と解して構成された、GL と呼ばれる様相論理である（[Boolos 1993]、[Boolos 1979]、[田畑 1991]）。「意味」「内包」「属性」といったものを嫌う「自然主義者」クワインにとっては、そのようなものの一種である「様相」のある側面が、数学理解を大いに促進する学問となっていることは、「皮肉」としか言えないであろう（もう一つの「皮肉」として、シャピロは、クワインは哲学の「第一原理」を退けたはずなのに、自然主義という「第一原理」を数学に押し付けている、と論じている：[シャピロ 2012] pp.23-25）。

§ 3．第一階論理と第二階論理の比較

クワインにより「羊の皮をかぶった狼＝集合論」と批判された（[クワイン 1972]上記引用箇所）高階論理（とくにそのベースである第二階論理）と、クワインが「望ましい」（この意味については後述）論理と見なした第一階論理とのさまざまな違いについてこれから論じていく（[Shapiro 1991]、[Manzano 1996] [田畑 2001]、[田畑 2002]第 10 章、[田畑 2002a]、[田畑 2003]、[田畑 2009]参照）。

3．1　論理の違い

フレーゲ自身は、論理を第一階（述語）論理と第二階論理に分けるという考えはなかったと思われる（シュレーダーは区別したらしい：[野本 2006]p. 210 参照）。そこで、まず、言葉の定義から始めよう。第一階論理（first-order logic）とは、結合子（ $\overset{\text{…でない}}{\neg}$ 、 $\overset{\text{そして}}{\wedge}$ 、 $\overset{\text{または}}{\vee}$ 、 $\overset{\text{ならば}}{\rightarrow}$ ）を含み、対象を表示する記号 x, y, z,…のみが量化子 $\overset{\text{すべての}}{\forall}$ 、 $\overset{\text{そんざいする}}{\exists}$ によって、∀x(…x…)、∃x(…x…)のように束縛される「変項」となり、述語記号 F, G, R,…はシェーマ文字（型文字）として特定の述語の代理に止まる、という第一階言語で、表現される論理体系である。第二階論理（second-order logic）は、対象記号のみならず述語記号（第一階述語記号）も束縛変項となりうる第二階言語で表現される。第二階言語において第二階述語（述語の述語）が現れても、これは束縛変項ではなくシェーマ文字にすぎない。さらに、第三階論理（third-order logic）は、第二階述語までが束縛変項となり得る第三階言語で表現される（第三階述語＝述語の述語の述語は束縛変項にはならない）。第四階、五階論理も同様に定義される。そして、第二階以上の論理は高階論理（higher-order logic）と総称される。第三階論理までの（各階に典型的な）論理式を例示するとこうなる（ただし右上の数字は階数を示す）：

第一階論理の論理式・・・$\forall x F^1 x \vee G^1 y$

第二階論理の論理式・・・$\exists X^1$（$\forall x X^1 x \vee G^1 y$）、$\alpha^2$（$F^1, G^1$）

第三階論理の論理式・・・$\exists \Phi^2$（Φ^2（F^1, G^1））、　Δ^3（α^2, β^2）。

そして、各「論理」には「意味論」と「演繹体系」（形式的証明をそこで実行できる形式体系）とが用意される。言い換えると、「論理＝言語＋意味論＋演繹体系」となる（詳細については[Hodges 2001]、[Shapiro 2001]、[Van Benthem & Doets 2001]など参照されたい）。

３．２　メタ定理

さて、第一階論理においては、演繹体系についての以下のようなメタ定理が成り立つ。(中級レベルの教科書を参照：[Van Dalen2013]第４章、[Manzano 1999]、[Boolos & Burges & Jeffrey 2002]、[Hunter1971]など)

①**健全性**：*論理式Aが、論理式の集合Γから演繹できるならば、Γのすべての式を真とする任意の解釈（モデル）でAも真となる（AはΓから論理的に帰結する)。*

健全性は、演繹体系が、前提の真理性を結論（＝証明される式）に確実に伝えるものであることを意味する。

② (強い) **完全性**：*論理式Aが、論理式の集合Γからの論理的帰結ならば、AはΓから演繹可能である。*

完全性は健全性の逆命題で、論理的帰結という意味論的関係が、形式的な演繹という眼に見える記号操作に対応している、ということを保証するものである。

③**コンパクト性**：*論理式の集合Γの、任意の有限部分集合がモデル（＝成り立たせる構造）を持つならば、Γ自身もモデルをもつ。*

コンパクト性は、無限個あるであろう論理式全部の成立可能性を、有限個の論理式の成立可能性に帰着させ得ることを意味する。

④**下方レーヴェンハイム＝スコーレム定理**：*第一階言語で表現される理論が無限領域のモデルをもつならば、たかだか可付番無限個の（または理論の論理式の集合の基数の）領域をもつ（元のモデルの）部分モデルが存在する。*

⑤**上方レーヴェンハイム＝スコーレム定理**：*第一階の言語で表現された式の集合Γが少なくとも基数n（nは自然数）の領域のモデルをもつならば、任意の無限基数kの領域をもつモデルをもつ。*

二つのレーヴェンハイム＝スコーレム定理は、理論を成り立たしめる世界であるモデルの構造の規模（領域の基数）を、下方および上方に（ある範囲で）動かせる、ということを意味する。

３．３　長所と短所

第一階論理が「論理」として考えられてきたのは、以上のような「望ましい」メタ定理が第一階論理で成り立つことが大きな理由の一つである。「健全性」と「完全性」は、真理性を持つ論理式と、眼に見える確認作業である証明がなされる論理式とが、ぴたりと一致することを保証する。そして、「コンパクト性」は無矛盾性に関して、「レーヴェンハイム＝スコーレム」はモデルの存在に関して、われわれに処理しやすい形でそれらを扱い得る、ということを保証する。「望ましい」の内実は以上のようなことである。それに対して、第二階論理は、標準解釈において、無矛盾性を除く、上記②～⑤の四つのメタ定理が、いずれも成り立たない。

しかし、第一階論理は「論理」としてのこのような「長所」を持つ反面、短所も持っている。まず第一に、関係や関数（関係の一種）への量化が禁止されるための、表現力の弱さがある。例えば、§１の１．１．１で「概念の明晰な提示」として挙げた[例３]、[例４]、[例５]はいずれも第二階論理の論理式として第二階言語で表現されている。このような明示的な表現を使わないまでも、数学者は、日々の数学の実践において、（メタ・レベルで）このような第二階論理に訴えて考えている。第二に、第一階論理は範疇性（categoricity）を持っていない。範疇性とは、すべてのモデル（＝論理式がそこで真となる構造）が互いに同型（isomorphism）であること、すなわち、一方のモデルMの対象領域｜M｜の要素をすべて他方のモデルM*の対象領域｜M*｜の全体に一対一に写す写像（全単射）で、かつ双方の対象の間の関数と関係とをぴったりと対応させる写像が存在すること、である。正確には、以下の３条件を満たす写像h（h：｜M｜⟶｜M*｜）が存在することが、二つのモデルが同型であることの定義である：

(1) $\forall x\{x\in |M| \rightarrow \exists y(y\in |M^*| \wedge \forall z(hx=z \longleftrightarrow z=y))\}$

$\wedge \forall y\{y \in |M^*| \rightarrow \exists x(x \in |M| \wedge \forall z(hz=y \longleftrightarrow z=x))\}$

(2)任意の関数fについて、h　$(f(x_1,\cdots,x_n))=f^*(hx_1,\cdots,hx_n)$

(3)任意の関係Rについて、h　$(R(x_1,\cdots,x_n)) \longleftrightarrow R^*(hx_1,\cdots,hx_n)$

直観的には、二つのモデルが同型であるとは、対象の個数が同じで、（本質が違っても）対象の振る舞いや役割が同じであることを意味する。では、第一階論理で定式化されると、なぜすべてのモデルが同型にはならないか？その答えは、すでに述べたように、第一階論理では、レーヴェンハイム＝スコーレム定理が成り立つからである。そして、この定理によれば、通常のモデルとは対象領域の要素の個数（＝対象領域の基数）が異なる「非標準モデル(=超準モデル)」が必ず存在するからである。従って、標準モデルと非標準モデルは同型にはなりえない。つまり、範疇性が成り立たない。範疇性が成り立たないということは、当該理論が、どのような世界での、対象のどのような姿を表現しようとしているかが確定しない、ということを意味する。それは、理論が描く世界の多様性を知るには好都合であるが、理論が意図した世界が本当はどのようなものなのか、を一義的には示せない、ということを意味する。例えば、上方レーベンハイム・スコーレム定理により、次のような、ペアノ算術の「非標準」モデルが存在する（[Van Dalen 2013] pp.114-5.）。そのモデルの対象領域では、標準的な自然数が小さい方から大きい方にお馴染みの順序で一列に並び、その後に、非標準的な数が続いて並ぶ：

○○○○・・・・・　　　・・・・○○○○・・・・・

└　標準数　┘　　　└　非標準数　┘

そして、この非標準モデルでは、非標準的な自然数は非可算無限個（通常の自然数の多さを一ランク超えた多さで実数の個数と同じ）ある（可算な非標準モデルについては[田中他 1997] pp.172-4 参照）。従って、このモデルの対象領域の基数は、標準・非標準合わせて、全体として非可算無限である。であるから、標準モデルの可算無限の領域と、このモデルの非可算無限の領域との間で一対一対応がつかない。それゆえ、標準モデルとこの非標準モデルとは同型ではありえない。

しかし、第二階の論理に基づく理論では、範疇性が成り立つならば、理論の意図された意味は一義的に決まるから、当該理論が何を描こうとしているか、迷うことはない。実際に、第二階の論理で定式化されたペアノ算術（＝第二階ペアノ算術）の（標準的な）モデルはどれも同型であるから、範疇性が成り立っている（[Manzano 1996] 第3章、[田畑 2002a] 参照）。ただし、第二階の論理でも、ヘンキン・モデル（または「一般構造」）と呼ばれる非標準的なモデルでは、完全性やコンパクト性やレーヴェンハイム＝スコーレム定理が成り立つことが知られている（[Manzano 1996]、[Enderton 1972]第4章、[Robbin 2006]第6章、[田畑 2003]）。しかし、それはあくまで非標準的なモデルでの話である。こうして、フレーゲが現代的論理学を創始したときも第二階論理を正面から使っていたにも関わらず、第二階の論理がいつの間にか忘れられ、もっぱら第一階の論理が「論理」そのものであるかのように見なされてきたが、もう一度両者を見直す時期にきている、と思われる。

§4．展望：論理と数学の基礎

4．1真理と証明

真理は、真理であることが確認されてはじめて、存在価値を持つ。未確認の仮説は真理ではなく、推測・予想にすぎない。数学において、真理であることの確認は、観測や実験ではなく証明――公理と定義からの演繹（＝

導出）――によってなされる。そして、数学における証明を支えるのが論理である。ところで、数学の真理はいつでも証明できる（＝真であることを確認できる）のであろうか？ゲーデルは、「数論を展開できるほどの表現能力のある無矛盾な証明体系には、肯定形も否定形もいずれも証明できない文が存在する」ということを示した（第一不完全性定理）。さらに、「その無矛盾な体系の無矛盾性を主張する文も当の体系内では証明できない」ということも示した(第二不完全性定理)（[Goedel 1986]、[ゲーデル 2006]、[田中 2012]、[フラーセン 2011]）。ゲーデルの定理は、数学の各分野の無矛盾性を有限的な立場で証明することを提唱した「ヒルベルト・プログラム」がそのままでは実行できないことを決定的にした、と通常は解される（[竹内 2009] p. 173, 176、Cf.[菊池 2014]）。しかし、この結果は「論理主義」にも影響する。フレーゲの論理主義は、（数学の概念・原理よりももっと）確実な論理的概念と論理的原理（＝公理）によって、算術（数論）の真理を証明することを企てる。仮に、矛盾の出ない確実な論理的原理のみを採用したとしても、証明体系の「十分さ」を確保できないことをゲーデルの定理は教えるからである。すると、**真理は、証明するというわれわれの認識能力を超えているのだろうか**？だとすれば、数学的真理のわれわれの認識能力からの独立性について、ゲーデルの定理はある種の証拠として働かないであろうか？言い換えると、数学的実在論（数学の真理はわれわれの認識から独立に存在するという主張）に有利な状況をゲーデルは彼の定理によって提供した、と言えそうである（[ドーソン 2006]）。

４．２　ゲーデルの「実在論」とそれへの批判

そして、ゲーデル自身も実在論的な見解を持っていた。しかし、最近まで、ゲーデルの考えはあまりに素朴すぎる――例えば、連続体仮説についての論文（の一つのヴァージョン）に以下の文言がある：“…; *as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true*”（*公理がわれわれに真として受け入れるように迫ってくるという事実から分かるように…*）[Benacerraf & Putnam 1983] p. 484――という理由で、一部の論者からは嘲笑的な評価さえ投げかけられていた（その代表格が C. Chihara である：[飯田 1995] pp.97-119 参照）。しかし、ゲーデルの著作集第三巻が 1995 年に出版され（[Goedel1995]）、未公開の草稿が読めるようになって以来、評価の「風向きが変わってき」（[戸田山 2007] p. 230）ている。ゲーデルの考えは、一言でいえば、「実在論的な観点から概観することにより逆に実証的・戦略的な方法が見えてくる」というものである。従来考えられてきたような、すなわち、数や集合の直観を、物理的事物に関する直観（感覚知覚）になぞらえて説明する、稚拙かつ神秘的な後づけの実在論、そういうものからはゲーデルの実在論は程遠い、ということが分かってきたのである。ゲーデルの実在論の根底にあるのは、未解決の問題を解くための未知の原理（公理）を発見することだ、という信念である。未解決問題を解く原理がどのようなものかは、人間的な、制限された原理に最初から固執していては、見えてこない。その原理そのものを（「直観的能力」で）直接に把握することにより、原理を用いる手段（＝証明方法）が見えてくる。ゲーデルの実在論は、そのような「発見」を促進する能動的な観方を含むもののように思われる。「数学の哲学にとっての[彼の哲学の]重要性は、今後ますます高まるにちがいない」（[飯田 2006] p.114; [Kennedy,J.2014]）、とされるゆえんである。

４．３　論理・数学の基礎と哲学

このように見てくると、論理や数学の基礎と哲学がきわめて密接に関連することが理解される（Cf.[Van Heijenoort 1967]）。フレーゲの例を俟つまでもなく、論理は数学の土台である。数学の基礎の哲学的問題として、存在や認識に関わる問題が山積している。集合をある種の存在とみるとき、それをどのようなものと把握して記述すべきなのか。記述手段、認識手段として、言語と論理をどうするかのという問題（§３で考えた問題）が待ち構えている。十九世紀末から二十世紀の前半にかけて、ビッグ・スリーと呼ばれる（[シャピロ 2012]）数学の哲学が隆盛となる。論理主義、形式主義、直観主義の三つである。**論理主義**は**論理を確実なもの**とみなし、証明を論理に基づけようとする。そして、真理や（集合などの）抽象的対象の容認との親和性がある。**形式主義**は数学の営

みをあたかもゲームであるかのように見做し、真理や抽象的対象を直接問題にせず、体系全体の中で果たす役割により言語の意味を捉える。これらに共通するのは言語や論理の重視である。しかし、**直観主義**にとって、言語や論理は「後づけ」であり、数学の営みは直観的構成に基づくと考える点ではそれは人間主義的である。

4．4　数学の哲学

二十世紀の後半から現在までの数学の哲学のマップはどうなっているのであろうか？シャピロの概観からは、ビッグ・スリーの持ついくつかの要素が、コンピュータの発達や量子物理の進展などに刺激されて、再統合・再編成されているありさまが見えてくる（[シャピロ 2012]、[Shapiro 2005]、[飯田 1995]）。形式主義の唯名論的要素は、現代の唯名論である虚構主義に発展し、形式主義のもつ公理主義的側面は構造主義に発展している。証明や言語を重視する論理主義の傾向は構造主義のシステム優位の考えに引き継がれる一方で、論理主義の真理や抽象的対象との親和性は、構造主義の構造が集合という抽象的対象によって記述されることに受け継がれている。物理学を代表とする自然科学の興隆は、論理や数学の、科学との連続性を重視する（認識論的）自然主義を導いている。伝統的な実在論はゲーデルの実在論に受け継がれ、さらに集合論的実在論さえ論じられている（[Maddy 1990; 1997; 2011]参照）。直観主義の構成主義（＝有限主義）的側面は、コンピュータの発達と相まって計算主義的傾向を形成している。

4．5　哲学基礎としてのメタ・ロギカ

以上、筆者の（比較的限定された）教育・研究経験からも、現代の論理学 logic（＝数理論理学 mathematical logic ＝数学基礎論 foundations of mathematics；これらの‘＝’については[田中 2006-7] 第1巻 p.3 参照）を学ぶことで、新しい形の哲学的課題がある種鮮明な姿で浮かび上がってくる、ということが分かる。数理論理学の四つの分野(Cf. [新井 2011])のうち、（公理的）**集合論**と**モデル理論**は「存在論」に、**証明論**と**計算論**は「認識論」に関わる問いを発している。集合や数といった**数学の対象**は、そのような「抽象的対象」がどのような意味で存在するのか、という**存在論**の問題をわれわれに投げかける。プラトン以来、哲学は「普遍」といった抽象的存在者の存在論的身分を問題としてきた。それが数理論理学の中で、新しい形で提示されている。自然界の対象と違い、集合や数は抽象的ではあっても、（時空内で変化しないという意味で）複雑ではない。むしろ、それらは単純である。それにも関わらず、例えば「無限集合」の構造を扱うカントールが創始した集合論は、中世以来の「無限論」をはるかに超えた深い課題を現在のわれわれに突き付けている（例えば「連続体仮説」が正しいか否か知られていない）。こうして、集合論とモデル理論は、抽象的対象の構造という形で、さまざまな存在のあり様と問題点とを示している。しかし、それらの数学的対象から成る可能世界の真理性の認識は、証明によって確認されねばならない。そして、証明そのものの構造や限界は証明論（＝数学命題の認識論）により探求される。さらに、われわれが計算したり証明したりすることの（心理的ではない）操作的な側面、および有限的な側面は、計算論によって明らかにされる。このように、数理論理学は、存在や真理や認識といった哲学的問題を哲学と共有している。言い換えると、数理論理学は、存在や認識に関わる哲学的な動機に刺激されることによって、新しい問題を見つけている。他方、哲学は、数理論理学で開発された技術や問題意識のなかに、伝統的な哲学的問いが新たな形で蘇っていることを確認することができる。

こうして、論理学・数学の哲学と、伝統的な哲学の問題との相互的な交流（刺激の仕合い）を確認することによって、それらの間に循環的な問題設定があることが理解できる。以上により、筆者が最初に提出した「メタ・ロギカは哲学の基礎となりうる」、というテーゼの正当性が示せた、と考えられる。

参考文献

≪邦文≫

[足立 2011]：足立恒雄**『数とは何か・そしてまた何であったか』**共立出版 2011 年

[足立 2013]：足立恒雄**『フレーゲ・デデキント・ペアノを読む**：現代における自然数論の成立』日本評論社 2013 年

[新井 2011]：新井敏康**『数学基礎論』**岩波書店 2011 年

[飯田 1995]：飯田隆（編）『リーディングズ　**数学の哲学**：ゲーデル以後』勁草書房 1995 年

[飯田 2006]：飯田隆「**ゲーデルと哲学**：不完全性・分析性・機械論」、[田中 2006-7] 第 1 巻 pp.111-169.

[大窪・田畑 1994]：大窪徳行・田畑博敏**『論理学の方法』**北樹出版 1994 年

[岡本・金子 2007]：岡本賢吾・金子洋之（編）**『フレーゲ哲学の最新像』**勁草書房 2007 年

[菊池 2014]：菊池誠**『不完全性定理』**共立出版 2014 年

[クワイン 1961]：ウィラード・ヴァン・オーマン・クワイン（中村秀吉・大森荘蔵訳）**『論理学の方法』**岩波書店 1961 年

[クワイン 1972]：ウィラード・ヴァン・オーマン・クワイン（山下正男訳）**『論理の哲学』**培風館. W. V. O. Quine, ***Philosophy of Logic***, Prentice Hall 1970 年、1986 年（2nd de）の邦訳.

[クワイン 1978]：ウィラード・ヴァン・オーマン・クワイン（中村・大森・藤村訳）**『論理学の方法**原書第 3 版』岩波書店 1978 年

[ゲーデル 2006]：林晋・八杉満利子訳・解説**『ゲーデル不完全性定理』**岩波文庫 2006 年

[現代思想 2007]：現代思想・総特集『**ゲーデル**』vol.35-3, 青土社 2007 年

[シャピロ 2012]：スチュワート・シャピロ（金子洋之訳）**『数学を哲学する』**筑摩書房 2012 年. 原典：Stewart Shapiro, ***Thinking about Mathematics****: The Philosophy of Mathematics,* Oxford U.P. 2000 年

[赤 1996]：赤攝也**『実数論講義』**SEG 出版 1996 年

[竹内 2006]：竹内外史「**プリンストンにて**：私の基本予想とゲーデル」[田中 2006-7]第 1 巻 pp.173-181

[田中他 1997]：田中一之（編著）**『数学基礎論講義』**日本評論社 1997 年

[田中 1997]：田中一之**『逆数学と 2 階算術』**河合教育文化研究所 1997 年

[田中 2006-7]：田中一之（編）**『ゲーデルと 20 世紀の論理学』**全 4 巻東京大学出版会 2006-7 年

[田中 2012]：田中一之『原典解題**ゲーデルに挑む**：不可能なことの証明』東京大学出版会 2012 年

[田畑 1978]：田畑博敏「**知識と論証体系について**―アリストテレスの「論証知」論とゲーデルの証明に即して」哲学論文集第 14 輯 1978 年、1-23.

[田畑 1991]：田畑博敏「**様相と証明可能性（I）**」鳥取大学教養部紀要第 25 巻 1991 年、1-31.

[田畑 2001]：田畑博敏「**第二階論理の特性について**」鳥取大学教育地域科学部紀要第 3 巻第 1 号 2001 年、133-157.

[田畑 2002]：田畑博敏**『フレーゲの論理哲学』**九州大学出版会 2002 年

[田畑 2002a]：田畑博敏「**第二階論理によるペアノ算術**」鳥取大学教育地域科学部紀要第 4 巻第 4 号 2002 年、37-84.

[田畑 2003]：田畑博敏「**第二階論理の非標準モデル**」鳥取大学教育地域科学部紀要第 5 巻第 1 号 2003 年、147-164.

[田畑 2004：田畑博敏「**フレーゲ論理主義の可能性**」哲学論文集第 40 輯 2004 年、55-72

[田畑 2005]：田畑博敏「**論理とレトリック**――なぜ「矛盾」と「反対」を区別する必要があるのか？」鳥取大学大学教育総合センター紀要第 2 号 2005 年、9-22.

[田畑 2006]：田畑博敏「**嘘・真実・パラドクス**」鳥取大学・大学教育総合センター紀要第 3 号 2006 年、41-51.

[田畑 2007]：田畑博敏「**書評：岡本賢吾・金子洋之（編）『フレーゲ哲学の最新像』**」『科学哲学』40-2、2007 年、96-101.

[田畑 2009]：田畑博敏「**第一階論理の特徴**」鳥取大学教育センター紀要第 6 号 2009 年、1-14.

[田畑 2013]：田畑博敏「**書評：野本和幸『フレーゲ哲学の全貌』**」図書新聞 3094 号 2013-1-19.

[デデキント 2013]：リヒャルト・デデキント（渕野昌訳）『**数とは何か・そして何であるべきか**』筑摩学芸文庫 2013 年

[ドーソン 2006]：ジョン・W. ドーソン Jr 『**ロジカル・ディレンマ**：ゲーデルの生涯と不完全定理』新曜社 2006 年

[戸田山 2007]：戸田山和久「**ゲーデルのプラトニズムと数学的直観**」[田中 2006-7]第 4 巻 2007 年、227-293.

[中根 2010]：中根美知代『**ε-δ 論法とその形成**』共立出版 2010 年

[野本 2003]：野本和幸『**フレーゲ入門**』勁草書房 2003 年

[野本 2006]：野本和幸「**論理的意味論の源流、モデル論の誕生、そしてその展開**：*論理と言語の間で*」[田中 2006-7] 第 2 巻「完全性定理とモデル理論」東京大学出版会 2006 年、191-272

[野本 2012]：野本和幸『**フレーゲ哲学の全貌**』勁草書房 2012 年

[ヒルベルト 2005]：ダーフィト・ヒルベルト（中村幸四郎訳）『**幾何学基礎論**』ちくま学芸文庫 2005 年

[フラーセン 2011]：トルケル・フラーセン（田中一之訳）『**ゲーデルの定理**：利用と誤用の不完全ガイド』みすず書房 2011 年

[フレーゲ著作集]：ゴットロープ・フレーゲ（黒田亘・藤村龍雄・野本和幸編訳）『**フレーゲ著作集**』勁草書房 1999-2002 年. 第 1 巻「概念記法」、第 2 巻「算術の基礎」、第 3 巻「算術の基本法則」、第 4 巻「哲学論集」、第 5 巻「数学論集」第 6 巻「書簡集（付「日記」）」

[前原 1966]：前原昭二『**数理論理学序説**』共立出版 1966（復刻版 2010 年）

[前原 1977]：前原昭二『**数学基礎論入門**』朝倉書店 1977 年（復刻版 2006 年）

[リード 2010]：コンスタンス・リード（彌永健一訳）『**ヒルベルト：現代数学の巨峰**』岩波現代文庫 2010 年

≪欧文≫

[Benacerraf & Putnam 1983]：Paul Benacerraf & Hilary Putnam, ***Philosophy of Mathematics, second edition***, Cambridge U. P. 1983 年

[Boolos 1979]：George Boolos, ***The Unprovability of Consisency,*** Cambridge U. P. 1979 年

[Boolos 1993]：George Boolos, ***The Logic of Provability***, Cambridge U. P. 1993 年

[Boolos 1998]：George Boolos, ***Logic, Logic and Logic***、 Harvard U. P. 1998 年

[Boolos & Burges & Jeffrey 2002]：George Boolos, John Burges and Richard Jeffrey, ***Computability and Logic*** 4thed. Cambridge U. P. 2002 年

[Burgess 2005]：John P. Burgess, ***Fixing Frege***, Princeton U.P. 2005 年

[Cantor 1932]：Georg Cantor, ***Gesammelte Abhandlungen***, *Mathematischen und Philosophischen Inhalt*, Herausgegeben von Ernst Zermelo in 1932 年、復刻：Olms 1966 年

[Chang &Keisler 1973]：C. C. Chang and H. Jerome Keisler, ***Model Theory***、 North-Holland.1973 年

[Demopoulos 1995]：William Demopoulos, ***Frege's Philosophy of Mathematics,*** Harvard U.P.1995 年

[Dummett1978]：Michael Dummett, ***Truth and other Enigmas***, Harvard U. P. 1978 年

[Dummett 1981]：Michael Dummett, ***Frege：Philosophy of Language***, 2^{nd} ed. Harvard U. P. 1981 年

[Dummett 1991：Michael Dummett, ***Frege：Philosophy of Mathematics***, Harvard U.P. 1991 年

[Ebbinghaus &Flum &Thomas 1994]：H.-D. Ebbinghaus & J. Flum &W. Thomas, ***Mathematical Logic, Second Edition,*** Springer 1994 年

[Enderton 1972]：Herbert B. Enderton, ***A Mathematical Introduction to Logic***, Academic Press 1972 年

[Frege 1879]：Gottlob Frege, ***Begrffsschrift,*** Nerbert 1879 年．邦訳：[フレーゲ著作集] 第 1 巻。

[Frege 1884]：Gottlob Frege, ***Die Grundlagen der Arithmetik,*** Koebner 1884 年. 邦訳：[フレーゲ著作集] 第 3 巻

[Frege 1892]：Gottlob Frege, **"Ueber Sinn und Bedeutung"**, *Zeitschrift fuer Philosophie und philosophische Kritik,* vol. 100, 1892 年, 25-50．邦訳：[フレーゲ著作集]第 4 巻に収録。

[Frege 1892a]：Gottlob Frege, **"Rezension von：Georg Cantor, Mitteilungen Zur Lehre von Transfiniten"** (1887-88), *Zeitschrift fuer Philosophie und philosophische Kritik,* vol.100, 1892 年, 269-272 邦訳：『フレーゲ著作集』第 5 巻に収録。

[Frege 1893-1903]：Gottlob Frege, ***Grundgesetze der Arithmetik,*** 1893-1903 年, Olms 1966 年．邦訳：[フレーゲ著作集]第 3 巻.

[Gabbay & Guenthner 2001]：D. M. Gabbay and F. Guenthner, ***Handbook of PhilosophicalLogic,*** 2^{nd} ed. Volum 1, Kluwer 2001 年

[Gentzen 1969]：Gerhard Gentzen （M. E. Szabo ed.）、***The Collected Papers of Gerhard Gentzen,*** North-Holland 1969 年

[Goedel 1986]：Kurt Goedel, ***Collected Works, Volume I***：*Publications 1929-1936,* Oxford U. P. 1986 年

[Goedel 1990]：Kurt Goedel, ***Collected Works, Volume II***：*Publications 1938-1974,* Oxford U. P. 1990 年

[Goedel 1995]：Kurt Goedel, ***Collected Works, Volume III***：*Unpublished Essays and Lectures,*Oxford U. P. 1995 年

[Grattan-Guinnes 2000]：I. Grattan-Guinnes, ***The Search for Mathematical Logics, Set Theories and Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Goedel,*** Princeton U. P. 2000 年

[Haack 1978]：Susan Haack, ***Philosophy of Logics,*** Cambridge U. P. 1978 年

[Hale & Wright 2001]：B. Hale & C. Wright, ***The Reason's Proper Study***：*Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics,* Clarendon Press 2001 年

[Hallet 1984]：Michael Hallet, ***Cantorian Set Theory and Limitation of Size***, Oxford U. P. 1984 年

[Heck 2011]：Richard Heck, Jr, ***Frege's Theorem***, Oxford U. P. 2011 年

[Heck 2012]：Richard Heck, Jr, ***Reading Frege's Grundgesetze***、Oup 2012 年

[Hodges 2001]：Wilfrid Hodges, **Elementary Predicate Logic**, in [Gabbay & Guenthner 2001] 1-129.

[Hunter 1971]：Geoffrey Hunter, ***Metalogic***：*An Introduction to the Metatheory of Standard First OrderLogic,* U. of California Press 1971 年

[Kennedy, H 1980] ：Hubert C. Kennedy, ***Peano***：*Life and Works of Giuseppe Peano,* Reidel 1980 年

[Kennedy, J 2014]：Juliette Kennedy (ed.),***Interpreting Goedel***：*Critical Essays,* Cambridge U. P. 2014 年

[Maddy 1990]：Penelope Maddy, ***Realism in Mathematics,*** Oxford U. P. 1990 年

[Maddy 1997]：Penelope Maddy, ***Naturalism in Mathematics,*** Oxford U. P. 1997 年

[Maddy 2011]：Penelope Maddy, ***Defending the Axioms,*** Oxford U. P. 2011 年

[Manzano1996]：Maria Manzano, ***Extensions of First Order Logic***, Cambridge U.P. 1996 年

[Manzano 1999]：Maria Manzano, ***Model Theory***, Oxford U. P. 1999 年

[Potter & Ricketts 2010]：M. Potter & T. Ricketts, ***The Cambridge Companion to Frege***, Cambridge U. P. 2010 年

[Priest 2008]：Graham Priest, ***An Introduction to Non-Classical Logic***, *From If to Is*, 2nd ed. Cambridge U. P. 2008 年

[Robbin 2006]：Joel W. Robbin, ***Mathematical Logic***：*A First Course*, Dover 2006 年

[Shapiro1991]：Stewart Shapiro, ***Foundations without Foundationalism***, *A Case for Second-Order Logic*, Clarendon Press・Oxford, 1991 年

[Shapiro 1996]：Stewart Shapiro, ***The Limits of Logic***, Dartmouth 1996 年

[Shapiro 1997]：Stewart Shapiro, ***Philosophy of Mathematics,Structure and Ontology***, Oxford U.P. 1997 年

[Shapiro 2001]：Stewart Shapiro, **Systems Between First-order and Second-order Logic**, in [Gabbay & Guenthner 2001] 131-187.

[Shapiro 2005]：Stewart Shapiro (ed.), ***The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic***, Oxford U. P. 2005 年

[Shapiro 2014]：Stewart Shapiro, ***Varieties of Logic***, oxford U. P. 2014 年

[Simpson 1988]：Stephen G. Simpson, **Partial realizations of Hilbert's program**, *Journal of Symbolic Logic* vol. 53 num. 2, 1988, 349-363.

[Simpson 2009]：Stephen G. Simpson, ***Subsystems of Second Order Arithmetic***, 2nd ed., Cambridge U. P. 2009 年

[Smith 2007]：Peter Smith, ***An Introduction to Goedel's Theorems***, 2nd ed. Cambridege U. P. 2007 年, 2013 年 (2nd ed.).

[Smullyan 1995]：Raymond M. Smullyan, ***First-Order Logic***, Dover 1995 年

[Sundholm 1986]：Goeran Sundholm, "**Proof Theory and Meaning**," D. Gabbay and F. Guenthner (ed.), *Hnadbook of Philospphical Logic*, vol.3, 1986 年, 471-506.

[Tabata 2000]：Hirotoshi Tabata, "**Frege's theorem and his logicism**," *History and Philosophy of Logic*, vol. 21 num 4, 2000 年, 265-295.

[Tabata 2011]：Hirotoshi Tabata, "**Frege's Theorem—A starting Point of the Modern Study of Frege**"、鳥取大学・大学教育支援機構教育センター紀要第 8 号 2011 年, 33-45.

[Tabata 2012]：Hirotoshi Tabata, "**Frege's Result**：Frege's Theorem and Related Matters", *Fronties of Philosophy of China*, vol.7 num3, 2012 年 351-377.

[Van Dalen 2013]：Dirk van Dalen, ***Logic and Structure*** 5th ed, Springer2013 年

[Van Heijenoort 1967]：Jean van Heijenoort, ***From Frege to Goedel***, *A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard U. P. 1967 年

[Van Benthem & Doets 2001]：Johan Van Benthem and Kees Doets, "**Higher-Order Logic**", in [Gabbay & Guenthner 2001] 189-243.

[Wright 1983]：Crispin Wright, ***Frege's Conception of Numbers as Objects***, Aberdeen U. P. 1983 年