幾何数列の極限に関する学生の誤解答

Students' incorrect answers on the limit of geometric sequence: $\lim_{n\to\infty} n^2r^n$ $(0 < r < 1)$

後藤 和雄　(Kazuo Goto)

Key Words: 論理的思考力，間違い証明，推論，収束，幾何数列，学力低下

概 要

数列の収束性に関する問題で，厳密な証明の意義および収束の証明を講義し，学生に自宅学習で，内容と意味などを復習し同様な問題を解くよう指示した。論理的に，かつ，厳密に論証する表現力が，どのくらい理解し身についているか，そのことがテストでいかに反映されるかを調べた。誤答例は section 5 にある。公式を誤って使用しているもの，論理的に推論し厳密な解答を表現する能力が不十分であったり，厳密な証明とは何かが分からずにただ単に感覚で説明したもの，はじめの数項のみを調べて成り立つことを示すことが証明だと理解している，などさまざまな誤りが明らかになった。問題は「$0 < r < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} n^2r^n = 0$ を証明せよ。」である。論理的な思考力と論理的表現力の必要性についても section 4 で論じた。

1　はじめに

微分積分学の講義では,「実数の公理，収束の意味，厳密な証明とはどういうことであるか」といったことを深く考えるために，厳密な証明の意義や意味などを，数列の問題：

$$k \text{ は任意の実数とする。このとき，} a > 1 \text{ ならば，} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \text{ が成り立つ。}$$

を例題として取り上げ，厳密な証明の意義とその証明を講義した。証明の一例は section 6 にある。二項定理を用いて証明できること，

$$0 < r < 1 \text{ のとき，} \lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0 \quad \text{は} \quad a = \frac{1}{r} \text{ とおくと，}$$

$$\text{上記の } \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \text{ に帰着し，同様に証明できる。}$$

ことなどを講義し，いろいろな分野で幾何数列の収束発散は基礎基本であることなどを講義した。

講義で習ったことが，自宅学習で理解し修得し身についているか，および論理的に表現できる表現力が身についたか，をテストで調べた。テスト問題は，$k = 2$ とした

$$0 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0 \text{ を証明せよ。}$$

(80) A. Beer, *Die österreichische Handelspolitik*, S. 597-598; K. Jones-Jokl, *a. a. O.*, S. 27-28. 条約条文は、C. Parry (ed.), *op. cit.*, Vol. 80, pp. 235-242。
(81) H. Pavelka, *a. a. O.*, S. 61-62. なお第9条において有効期限は1836年3月18日とされ、両国とも更新の意向が無い場合、同日から12ヶ月で失効するとされた。
(82) H. Pavelka, *a. a. O.*, S. 33-34.
(83) K. Jones-Jokl, *a. a. O.*, S. 27.

むすび

対仏戦争に伴い生成・展開した英墺外交・通商関係を、負債問題の観点から整理しよう。

まず外交面では、対仏戦争において西方の英仏対立・東方の露土対立が並行するなか、両者の中間に位置するオーストリアが、ロシアとの対土同盟からイギリスとの対仏同盟へと外交方針を転換したことは、対仏戦争の帰趨に対して大きな影響を与えた。のみならずウィーン会議を通じてヨーロッパにおけるロシアの、中欧におけるプロイセンの台頭が顕著となった結果、一方ではレヴァント問題をめぐって英露関係が、他方ではドイツ連邦の主導権をめぐって普墺関係が緊張したため、英墺関係の紐帯は戦後の国際政治における一つの枢軸として機能することになる。こうした英墺関係の形成・展開を考える上で、資金援助の問題は大きな役割を果たした。すなわち、戦時における対仏同盟の形成においては、オーストリアの兵力供給を代償とする一連の資金援助・公債発行が、条約締結の不可欠の要件となる一方、戦後における英墺関係の展開においては、イギリス議会・世論においてオーストリアの借金不払に対する批判が高まるなか、1823年の負債処理協定によるイギリス側の譲歩＝債権の一部放棄が、友好維持を可能としたのである。

なお対仏戦争における英墺両国の公債契約は、資金供給の形態として、従来の補助金形式に代わる新たな公債発行方式を創出し、19世紀ロンドン金融市場における外債発行の発達に大きな足跡を残した。なかでも自由主義段階から帝国主義段階にかけてイギリス資本主義の基軸が工業生産から金融活動に移行し、海外進出の手段として政府貸付を代償とする利権獲得が、また海外支配の形態として債権回収を名目とする財源統制が、発達する上で、重要な布石を占めたと言えよう。

また通商面では、英仏戦争に伴うバルト海貿易・植民地貿易の規制が進むなか、トリエステが貿易活動・密輸取引の中継基地として機能したことは、大陸封鎖に直面したイギリスの物資調達において極めて重要な意味をもった。加えて戦後、大陸各国が保護政策を展開するなか、1829年の英墺通商条約に伴うトリエステ経由の両国貿易は、大陸市場の閉塞に苦悩するイギリス産業資本に新たな販路を提供する一方、オーストリアにはプロイセン中心の関税同盟に対抗的な経済圏を保証することになった。こうした通商条約の成立を考える上で、両国の懸案である債務問題を解消した1823年の負債処理協定の意義は大きい。換言するなら当該協定は、単純にオーストリア負債問題を解決してイギリス債権者利害を保全しただけでなく、続く1829年の英墺通商条約を準備することによって、むしろ両国の産業・貿易利害を救済したのであり、当該段階のイギリス経済政策において産業・通商利害が保持した金融・投資利害に対する優位性を示唆している。

なお1829年の英墺通商条約は、トリエステ経由のレヴァント産品輸入を解禁することによって、これまで航海条令が禁止してきた第三国経由の輸入貿易に重大な例外を認めることになった。この事実は、別稿にて検討した1838年の英墺通商条約がオーストリア商船の中継貿易（イギリス向けレヴァント産品・ルーマニア穀物輸出）を許可し、さらには1849年の航海条令が第三国商船の輸入仲介を全面自由化する過程において、無視できぬ伏線をなしたと言えよう。

正答もあり白紙もあるが，誤答の例については section 5「試験結果の誤答例」として解答順に載せている。さまざまなパターンがあるので，あえて分類はしていない。

３つの学科について誤答の証明を学生の解答のままに記述している。式が間違ったり，論理展開がおかしい，式の誤った変形，転記ミスなど，さまざまである。

代表的な間違いのパターンを挙げると，

1. 文字の書き方が不明確である。はっきりと区別できるように書いていないので，途中で文字が変わってしまい，間違って答えを書くという間違いがある。
2. 論理の飛躍（ジャンプ）や，証明すべきものを変形した式の成立は明らかとして，だから成り立つという論理展開をしている
3. 数列が収束する条件のもとに成り立つ定理： $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$ の仮定を確かめずに誤って適用し，そのうちの一方の値0または ∞ の値から答えの値を導いているので，∞ という答えがある。この論理展開は多い。
4. 関数の増加具合が，速い遅いということから，説明をしている。この説明を証明だと理解しており，厳密な証明の意味や，式から説明を要することの理解ができていない。感覚的や直感的な説明はそれでよい。しかし，ポリアも述べているように，「如何に厳密に証明するか」という，数学的に厳密に証明することの意味が理解されていない。
5. 「すべて の数で成り立つ」,「ある 数で成り立つ」という意味が理解されていない。高校生までの論理は命題論理であった。高校の問題でも，問題にははっきりとは示さず，「… となる数がある。」で「ある」ことを，「すべての数で成り立つ。」で「すべて」であるような文章や文句を含んだ問題を自然に学んでいる。大学でははっきりと，「すべて」「ある」をそれらの出現順序も含めた「述語論理」を，数学や科学などの学問を学ぶためには，はっきり理解しておく必要がある。

4　論理的な思考力と論理的表現力

数学基礎力調査 [3] などでは，大学生の論理的思考力が，上位の大学でも低下しているという報告がある。論述の力の低下も言われている [1],[3],[5]。マークシート試験の場合，問題を解く手順や理由を考えず，答えのみを手早くマークする技術を身につける訓練をしている。数学を記憶（暗記）の科目や学問だと，多くの学生は思っている。これでは，論理的な文章を記述したり，論理的に論述する力は養われない。学生の「誤った証明」を見ると，論理的に推論が運ばれていないことが推察できる。論理の飛躍や感覚による証明や，定理の仮定の成立を確かめずに間違って思い込んで定理を使用する，といったものもある。式の運用を誤ったり，式を正確に書いていないので途中で式や文字が変わってしまっても，見直し（チェック，振り返り）をしていないので，「誤り」に気がつかないで計算してしまう。途中で，「何かおかしい !?」と感じたり，式を見てその意味から，「何かへんだな？」と感じない感覚があるようだ。

であり，高等学校で学ぶ数学 III の基本事項を理解していればやさしい問題である。

厳密な証明の意義および必要性については，ポリヤ著「いかにして問題をとくか」の [6, p.159] に述べられている。また，[1] でも「厳密な証明がなぜ必要か，論理的思考力の必要性」を論じている。

2 対象

微分積分学に関する講義を受講している，３つの学科の学生を対象にした。

Ａは医学系の生命系の学科である。講義は選択科目である。個別学力試験前期日程入試では数学 III・数学Ｃまで課している。学生のほとんどが選択しており，37 名である。

Ｂは農学部の医学系で個別学力試験では，数学 III・数学Ｃは課していないが，多くの他大学の同様な学科では数学 III・数学Ｃが課されており，学習している学生は多い。2012 年までは講義は選択科目であったが，2013 年４月からこの講義は必須科目になったので，36 名のすべての学生が受講しており，過年度生が１名いる。昨年までは，選択科目であったため途中棄権する学生がいたが，当然ながら今年はいない。

Ｃは農学部の学科で，数学は選択科目である。個別学力前期日程試験では数学 III・数学Ｃまでの入試で入学する学生，個別学力試験で数学を選択しないで入学する学生などさまざまである。高校での学習も，数学 III・数学Ｃまで，数学 II・数学Ｂまで学習した学生など，さまざまなタイプの学生が入学する。したがって，微分積分学を講義するクラスを，数学 II・数学Ｂを仮定するクラスを１クラス，数学 I・数学Ａを仮定したクラスを２クラスを設けている。

テストは数学 II・数学Ｂを仮定する１クラスで行った。数学 III・数学Ｃを高校で学習している学生，学習していない学生などが存在する。

「学習意欲」について，Ａは１年後に米子に行くために必要な単位を前期のうちに，早く取得したいので，学習意欲は高い。Ａに対して，数学・物理・化学・生物が１年前期・後期に計８科目開講されている。このうち３科目の単位があればよいので，どの科目の単位でも取得できれば後が楽になる。したがって，意欲は高いが，他の科目で単位が満たされる場合，途中棄権する学生もいる。

Ｂは今年から，必須科目になったため，数学 III を高校で学習していない学生も存在するが，昨年と比べて，単位取得が絶対条件である。よって，学習意欲は高く，途中棄権する学生はいない。

Ｃは選択科目であり，３クラスある微分積分学の講義を選択していない同学年の学生もいるので，いろいろな条件で，途中棄権したり，学習意欲に欠ける学生が見受けられる。

3 結果と考察

テストした問題は

$$0 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0 \text{ を証明せよ。}$$

であり，解答例は section 6 にある。

［平均値の問題］　ある中学校の三年生の生徒100人の身長を測り、その平均を計算すると163.5 cmになりました。この結果から確実に正しいと言えることには○を、そうでないものには×を、左側の空欄に記入してください。

(1) 身長が163.5 cmよりも高い生徒と低い生徒は、それぞれ50人ずついる。
(2) 100人の生徒全員の身長をたすと、163.5 cm × 100 = 16350 cmになる。
(3) 身長を10 cmごとに「130 cm以上で140 cm未満の生徒」「140 cm以上で150 cm未満の生徒」… というように区分けすると、「160 cm以上で170 cm未満の生徒」が最も多い。

である。解答は(2)と示されてあるが，平均値163.5 cmは有効数字で小数以下2桁で四捨五入して計算されていると考えると，(2)は正解ではなく。答えがないということになる。問題文には「確実に正しいと言えること …」とあるので，(2)は「= 16350 cmになる。」ではなく，「= 16350 cmに近い値になる。」または，正確に「16345 cm以上16355 cm未満の値になる。」が正しい解答欄であろう。

次の問題とも共通するが，厳密性に欠ける問題である。多くの人を対象にした調査であれば，問題文および解答欄には不明確性は極力存在しないことが望まれる。

さらに，同じ基本調査[4]の **奇数と偶数の問題**：

「偶数に奇数を足すと必ず奇数になることを証明せよ。」（中学2年生レベル）

の調査結果によると，に国公立の最難関大学の学生の76.9 %が正答とほぼ正しい準正答であったが，私立の最難関大学では正答率は27.8と低かった。その誤りの例はその調査報告にある。

文字で表現して説明することに慣れていないから，正答率は27.8と低かったのである。マークシート試験の影響がここにも現れている。文字式で奇数と偶数を表現し，それらを用いて式で計算し，結果の式の意味することを読み取り，それを表現できないからである。何を示せば証明となるのかも，理解されていない。

証明の一例は

偶数と奇数はそれぞれ，整数m, nを用いて$2m$, $2n+1$とかける。
（一般には，偶数と奇数には負の数も含まれる。）
よって，その和は

$$2m + (2n+1) = 2(m+n) + 1$$

であり，整数m, nの和$m+n$もまた整数であるから，$m+n$は整数である。
したがって，$2(m+n)+1$は奇数である。

である。

しかし，よく考えてみると，次のような疑問が浮かぶ。偶数および奇数の意味や定義を，どこまでを仮定して証明すればよいかという点では，よい問題とはいえない。ペアノの公理までもどって証明を求めるのか，その中間なのか。奇数と偶数の定義（問題では$2m$, $2n+1$で偶数・奇数を定義と仮定しているのだろう）はどのように定義されていて，証明されるべきなのか。基本的な問題であるからこそ，偶数や奇数の定義を与えて，そのことから証明することを要求することが望まれる。さらに，どこまで厳密な証明を要するかという指示もない点で，不親切な問題である。

これらは，センター試験などの試験方式であるマークシート試験対策によって，高校生のときから素早く答えのみを求めるというテクニックを身につける訓練の結果であろうか，問題を解くという大切な思考プロセスを考えないで，答えのみを求めるという態度になってはいないだろうか。さらに，思考の結果を論理的な文章に纏めて書き表すという能力にも乏しい。

[5] の研究集会においても発表の一部分として，学力の低下や能動的学習の重要性，思考を促す質問などについての発表があったので要点を纏めると，

1. 自分の頭で考えたことを，主体的に行う文章作成を論理的に行う，大学生の学力や論理的思考力が低下している。
2. （基礎や仮定した）資料から推論する能力が乏しい，また，表現力が乏しい。これらは学習リテラシーの不足である。
3. 知識の伝達や体験させることはやさしいが，考えさせることは，かなり難しく，成果を数値化しにくいし評価もしにくい。
4. 大学での学びのため，独り立ちし主体的に動く。高校までの受動的な学習から，能動的学習（主体的学び）への転換が求められる。
5. 受動的学習は，深い内容の理解を行わず，受身となる。しかし，能動的学習は，中身や法則性・原理・原則を理解するために多くの時間を要する。しかし，自ら発見した型については深い理解を伴う。
6. 思考を刺激する質問：なぜ，特徴（同じもの，違いは何か），可能性（もし～），具体的質問「～との関係は」などが重要である。

であった。思考を刺激する質問は，ポリア [6] に含まれることを注意しておく。

仕事や日常生活のさまざまな状況において，必要とされる市民の汎用スキル（社会人としての基礎力）として，「読解力（リテラシー），論理的思考力」や論理的な文章記述能力などがある。一般教養の必要性も含めて，論理的思考力や文章表現能力が必要であることが，もと産業界の人であった吉澤 [7, p. 671] も次のように指摘している。

> 自分の体験からも学生の日本語能力はかなり低く，故に論理的な文章記述能力ならびに言葉による説明能力が乏しい。また，英語の能力も一部の学生を除けば不十分である。政治・経済などに関心が薄く，新聞やニュースに触れることも少なく，文学作品も読まないので，内容のある話ができない等，一般教養も低い。このような状況では企業内どころか国際化された社会で活躍できるはずがない。

自らしっかり考えて，その考えを厳密に説明・証明し，証明したことを論理的に説明・表現することを大切にする意識をつねにもつ習慣をつけることが重要である。内容を確かに理解していなければ，論理的な文章を書いたり表現したりできない。

条件から論理的に考え結論を導くこと，および論理的に証明する能力が弱いことが，次の調査からも明らかにされている。
日本数学会が，2011 年 4 月から 7 月にかけて全国の大学生約 6000 人を対象に，テスト形式の「大学生数学基本調査」[4] を行った。基本調査の平均値の意味を問う問題では，24 %の学生しか平均値の意味を正しく理解していないと指摘している。平均値の問題は

11. $0<r<1$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ となり，収束するので，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

12. 明らかである。

13. $0<r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であることは明らかである。したがって，$0<r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

14. 実数の公理から，r^n は単調減少して 0 に近づく。$n^2<(n+1)^2$ であるので，はさみうちの定理より，$0<n^2r^n<(n+1)^2r^2\to 0\quad (n\to\infty)$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$
(実数の公理として「上に有界な単調増加数列は収束する」を採用している。)

15. $\lim_{n\to\infty} n^2=0,\quad 0<r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

16. $0<r<1$ より，$\lim_{n\to\infty} r^n=0,\quad \lim_{n\to\infty} n^2=\infty$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$。
($0\times\infty=0$ と理解し，収束する極限値の意味を理解していない。)

17. $0<r<1$ より，
$$r^n=\left(0+\frac{1}{n}\right)^n\quad (h\text{ は実数})=0+{}_nC_1\cdot 0+0\cdot{}_nC_2+\cdots+{}_nC_2\left(\frac{1}{h}\right)^n=\left(\frac{1}{h}\right)^n$$
ここで，$0<\frac{1}{h}<1$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}=0$。
よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{h}\right)^n\to\infty\cdot 0=0\quad (n\to\infty)$。
(式の変形は間違いであるが，解答そのままである。)

18. $0<r<1$ であるとき，r は十分大きな数 N(1 より大きな数) を用いて，$\frac{1}{N}$ と表すことができる。よって，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^n=0$ であるため，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$ がいえる。

B

1. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\lim_{n\to\infty} b_n$ より，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=\lim_{n\to\infty} n^2\times\lim_{n\to\infty} r^n$ となり，$0<r<1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n=0$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2\times 0=0$ となり，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$ となる。

2. $0<r<1$ より，n^2r^n は単調減少数列であり，さらに，$0<r$ より有界であるので，実数の公理より，ある値に収束する。ここで，$\alpha\neq 0$ と仮定すると，$0\leqq\alpha<1$ より，十分大きな n に対して，
(途中ヤメ)

3. $0<r<1$ であるから，n^2r^n は単調減少である。

4. $\frac{1}{r}>1,\quad \lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

5. $0<r<1$ なので，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$ となる。

6. $r=\frac{1}{h}$ (h は整数)，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{h}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty} n^2=\infty$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=\infty\times 0=0$

7. $\{n^2r^n\}$ は $r,\ 4r^2,\ 9r^3,\ 16r^4,\ \ldots$

8. $0<r<1$ より $\frac{1}{r}>1,\quad \frac{1}{r}=1+h$ とすると，$\left(\frac{1}{r}\right)^n=(1+h)^n=1+{}_nC_1+\cdots>nh,\quad \lim_{n\to\infty} nh=\infty$ より，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nh}=0$。よって，$0<n^2r^n<n^2\left(\frac{1}{nh}\right)^n\to 0\quad (n\to\infty)$。
よって，はさみうちの定理より，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$。

5 試験結果の誤答例

学生の誤答の例であり，解答や証明ではないことをはっきり断っておく。

３つの学科について誤答の証明を解答（回答）のままに記述する。式が間違ったり，論理がおかしい，式の誤変形，転記ミスなど，さまざまである。また，無解答（白紙）もあった。途中に（　）内に簡単なコメントを，著者が入れているところがある。

A

1. $r>1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}=0$ より，$0<r<1$ ならば $\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$
(証明すべきものを変形した式の成立は明らかとして，だから成り立つという論理展開)

2. $0<r<1$ より $r^n=0(n\to\infty)$。したがって，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot 0=0$ (終わり)

3. $0<r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$

4. $0<r<1$ のとき，r^n は n に対して単調減少し，$1>r^n>0$ である。よって，実数の公理より $\lim_{n\to\infty}r^n=\alpha\ (1>\alpha\geqq 0)$ という極限値が存在する。$\alpha\neq 0$ とすると，十分大きな N に対して，$\alpha\leqq r^N$ となり，アルキメデスの原理に矛盾する。ゆえに，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ となるから，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$。(「実数の公理として，上に（下に）単調増加（減少）数列は収束する」を講義した。アルキメデスの原理（原則）「任意の正数 a, b に対して，$na>b$ を満たす自然数 n が存在する。」を説明している。)

5. $\lim_{n\to\infty}n^2r^n=n$ の 2 乗よりも n 乗の方が（指数関数の伸び）比率が大きいから

6. $0<r<1$ より $\lim_{n\to\infty}r^n=0$。よって，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$。

7. $\lim_{n\to\infty}n^2r^n$　ここで $f(n)=n^2$,　$g(n)=r^n$ とおく。$f'(n)=2n$,　$g(n)=n\log n$　(微分が間違い。n と r の書き方が悪いので，途中で n と r を間違えている。) であり，それぞれの関数の増加率は $n\to\infty$ において，$g'(n)>f'(n)$，すなわち，n^2r^n の値は $(n\to\infty)$ においては $g(n)$ の値によって左右される。よって，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$。($\because f(n)$ は増加関数，$g(n)$ は減少関数。以上は明らかである。)

8. $0<r<1$ より $r=1+K\,(K>0)$ とおく。

$$r^n=(1+K)^n=1+{}_nC_1K+{}_nC_2K^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}K^2$$
$$0<n^2r^n<\frac{n(n-1)}{2}K^2\to 0\quad(n\to\infty)$$

より，はさみうちの定理から，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$ となり成り立つ。(Q.E.D)

9. $0<r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ となる。よって，$\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0\cdots$(証終)

10. $r=\frac{1}{\ell}$ とおく。$(\ell>0)$　$n^2r^n=\frac{n^2}{\ell^n}$ をみたす正整数 ℓ をとる。

$$0<n^2r^n=\frac{n^2}{\ell^n}=\left(\frac{n}{\ell}\right)^2\left(\frac{1}{\ell}\right)^{n-2},\quad 0<\frac{1}{\ell}<1$$

より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ell}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\ell^2\left(\frac{1}{\ell}\right)^n=0$。よって，はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$。

20. $0 < r < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$,　$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$,　$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$ より $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$　（感覚で議論している）

C

1. $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ となるので，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} r^n$　$0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$　よって，$\lim_{n\to\infty} r^n$ は $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ になる。$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ となる。
3. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n$
4. $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n$ は0に収束する。グラフ（省略する。$y = n^2$ と $y = r^n$ のグラフを描いている。）より発散速度は $n^2 < r^n$　よって，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ となる。
5. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = n^2 \lim_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1} = n^3 \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{r^2}{n} - \dfrac{1}{n}}{1 - \dfrac{1}{n}} = n^3 \cdot 0 = 0$
6. $0 < r < 1$ より $0 < n^2 r^n < 1$　実数の公理より，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = \alpha \geqq 1$ が存在する。$\alpha > 1$ とするとき，$\alpha = 1 + h\,(h > 0)$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \to \infty \quad (n \to \infty)$$

　このとき，α が実数であることに矛盾する。よって，$\alpha = 0$, $h = 1$。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$

7. $0 < r < 1$ より r は分数となるので，$\lim_{n\to\infty} (\text{分数})^n = 0$ より，$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$,　$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
8. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n$ について

$$n^2 r^n < n^2 \left(1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

9. $0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n$ は0に収束する。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ である。
10. $\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{x}{10}\right)^n = 0$　$(1 < x < 9)$　よって，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
11. 十分大きな自然数 n について，$\dfrac{1}{n+1} < r < \dfrac{1}{n}$ となる n が存在する。

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n-2}} \quad (\because \quad 0 < \frac{n}{n+1} < 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n^{n-2} = 0$$

　よって，はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$

12. $r = \dfrac{1}{K}$ とおく。$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{K^n} = \left(\dfrac{n}{K}\right)^2 \left(\dfrac{1}{K}\right)^{n-2}$　$0 < \dfrac{1}{K} < 1$ なので $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{K}\right)^{n-2} = 0$　よって，$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{K}\right)^2 \left(\dfrac{1}{K}\right)^{n-2} = 0$,　$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
13. $0 < r < 1$ のとき $0 < n^2 r^n$　また，ここで $r = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ とすると，$t = \dfrac{1}{r}$ となり $r \to \infty$ のとき，$t = 0$ となる。$n^2 r^n = n^2 \left(\dfrac{1}{t}\right)^n$　（途中ヤメ）

9. $a_n = n^2 r^n$ は単調減少で，かつ下に有界であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる α が存在し，$\alpha \neq 0$ と仮定すると，矛盾する。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
（a_n が単調減少はどうしてか？　どうして矛盾がいえるのか？）

10. $0 < r < 1$ より $0 < r^n < 1$

$$0 < n^2 r^n < n^2 < 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n \to 0$$

はさみうちの定理より　$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$

11. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = \lim_{n\to\infty} n^2 + \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$
（積がいつの間にか，和になっている）

12. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n > 0$ であり，$\lim_{n\to\infty} n^2 r$ は減少関数である。よって，$0 < \lim_{n\to\infty} n^2 r < 0$ となり，はさみうちの定理より $\lim_{n\to\infty} n^2 r = 0$
(r^n が r になり，$0 < x < 0$ から $x = 0$ を推論，はさみうちの定理では，極限操作をすると不等式が等式になる定理を誤って適応。＜を≦としていない。)

13. $r < n$ となる m をとると，$n > m$ なるすべての n について，$0 < n^2 r^n < n^2 m^n \to 0 \quad (n \to \infty)$
はさみうちの定理より，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
（n が m となる。文字をていねいに書いていないので，間違った。）

14. $0 < r < 1$ のとき，$0 < r^n < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

15. $\{n^2 r^n\}$ について，$0 < r < 1$ より，

$$1^2 r^1 < 2^2 r^2 < 3^2 r^3 < \cdots < n^2 r^n$$

$0 \leqq n^2$，　$0 < r^n < 1$，　$0 \leqq n^2 r^n \leqq 1$ より，はさみうちの定理より，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$

16. $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = \lim_{n\to\infty} n^2 \times \lim_{n\to\infty} r^n$ である。$0 < r < 1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$

17. n を 1, 2, 3, ..., ∞ と増やしていくと，n^2 は 2 乗ずつしか増えないが，r^n は n 乗ずつ増えていく。したがって，$n \to \infty$ とした場合に $n^2 < r^n$ となることが明らか。ここで，$0 < r < 1$ なので $n^2 > r^n$ であるが，$n \to \infty$ とすると，r は限りなく 0 に近づく。すなわち，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$
($n^2 < r^n$ と述べているが，その後の $n^2 > r^n$ と矛盾していることに気づいていない。$0 < r < 1$ なので $n^2 < r^n (\leqq 1)$ とはならないことを認識していない。)

18. $0 < r < 1$ より $n \to \infty$ のとき $r^n \to \infty$ に近づく。$r = \dfrac{1}{t}$ としたとき，$t > 1$ で n が十分大きいとき，n^2 より t^n の増加率が大きいため，与式は 0 に収束する。

19. $0 < r < 1$ より $r = \dfrac{1}{m}$ $(m > n^2)$ とおく。
$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{m}$，　$0 < \dfrac{n^2}{m} < 1$ より $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{m}\right) = 0$
次に，$r = \dfrac{1}{\ell}$ $(1 < \ell \leqq n^2)$ とおく。$0 < \dfrac{n^2}{\ell} < n^2$　ここで，逆数をとる。$\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\ell}{n^2} < 0$。
$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$　したがって，はさみうちの定理より，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\ell} = 0$　したがって，$\lim_{n\to\infty} r^2 \cdot r = 0$
が示された。

6　証明

k は任意の実数とする。このとき，$a>1$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ が成り立つ。

を証明せよ。[2, p.11] の証明を次に与え，別解も講義で示した。

Proof. $k \leqq 0$ ならば，$0<n^k\leqq 1$ で $a^n\to\infty$ $(n\to\infty)$ より明らか。
($a^n\to\infty$ の証明は，$a>1$ から $a=1+h$ $(h>0)$ とおく。二項定理から，$a^n=(1+h)^n=1+nh+\cdots>hn\to\infty$ $(n\to\infty)$ である。最後はユークリッドの公理が必要であるが，そのことは講義で説明し，教科書には解説および証明が載っている。)

$k=1$ のとき $h=a-1$ とする。仮定より $h>0$ である。二項定理を用いて，(二項定理で得られる各項はすべて正の数であるから)

$$a^n=(1+h)^n=1+hn+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2!}h^2$$

であるから，$0\leqq\dfrac{n}{a^n}<\dfrac{2}{(n-1)h^2}\to 0\quad(n\to\infty)$ となり，はさみうちの定理より，成り立つ。

$k>0$ ならば，$k<m$ を満たす整数 m を選ぶ。$\sqrt[m]{a}>1$ であるから，$k=1$ の場合の結果を利用して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sqrt[m]{a}\,)^n}=0$ である。$\dfrac{n^k}{a^n}<\dfrac{n^m}{a^n}$，　x^m は連続関数であるから，だから，

$$0\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}\leqq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(\sqrt[m]{a}\,)^n}\right)^m=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(\sqrt[m]{a}\,)^n}\right)^m=0^m=0$$

である。よって，はさみうちの定理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ を得る。この証明後，次の別解を示した。

［別解］$k<m$ を満たす正の整数 m を選び，$n\to\infty$ だから，$m<n$ と仮定できるから，二項定理を用いて，(二項定理で得られる各項はすべて正の数であることを途中で使って,)

$$\begin{aligned}a^n&=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{(m+1)!}h^{m+1}+\cdots\\&>\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{(m+1)!}h^{m+1}\end{aligned}$$

を得る。よって，

$$0\leqq\frac{n^k}{a^n}<n^{k-m}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)(n-m)}(m+1)!\to 0$$

である。はさみうちの定理より，証明すべきことが成り立つ。なぜならば，$0<n^{k-m}\leqq 1$，　$n-m\to\infty$　$(n\to\infty)$ であるからである。　□

このように，二項定理を用いて証明できること，「$0<r<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^kr^n=0$ は，$a=\dfrac{1}{r}$ とおくと証明できる」ことなどを講義し，重要なので，よく復習しておくようにと話した。試験では $k=2$ の場合を出題し，講義で説明したことが理解されているかを問うた。

$k=2$ のとき，$0<r<1$ より $1<\dfrac{1}{r}=1+h$ $(h>0)$ とおく。二項定理を用いて，

$$\frac{1}{r^n}=\left(\frac{1}{r}\right)^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+\cdots>\frac{h^3}{3!}n(n-1)(n-2)$$

14. $0<r<1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n=0$, $0<\frac{1}{r}<1$, $0<\frac{1}{r^n}<1$, $0<\frac{1}{n^2r^n}<\frac{1}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ よりはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2r^n}=0$

15. r^n は単調減少するので収束する。$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

16. $\lim_{n\to\infty} n^2r^n=\lim_{n\to\infty} n^2 \lim_{n\to\infty} r^n$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ で r は $0<r<1$ なので $r=\frac{1}{m}$ とおく。$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^n$。$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^n$ が証明されたとき，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n$ も 0 となる。$\frac{1}{m}$ は $0<\frac{1}{m}<1$ なので単調減少数列となる。

17. $0<r<1$ であるとき，$\frac{1}{r}>1$ であるので，$\frac{1}{r}-1=h$ とおくと，$(h+1)^n$ において，二項定理を用いると，$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+{}_nC_rh^r>\frac{n(n-1)}{2}h^2$ より，

$$0<r<\frac{2}{n(n-1)}h^2, \qquad 0<r^2<\frac{4}{n^2(n-1)^2}h^4$$

各項に n^2 を掛けて $0<n^2r^2<\frac{4}{(n-1)^2}h^4$。 $\lim_{n\to\infty}\frac{4h^4}{n-1}=0$ より はさみうちの定理より $0<\lim_{n\to\infty} n^2r^n<0$ よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$ であることが証明された。
($0<x<0$ から $x=0$ を結論。$0<a_n<b_n$ であり $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ の定理と混同している)

18. $\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$ になるためには，r^n が $n\to\infty$ で 0 に収束すればよい。$0<r<1$ の範囲で $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0\,(0<r<1)$

19. $\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

20. $0<r<1$ より $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

21. $(n+r)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_kn^{n-k}r^k=n+r+\frac{n(n-1)}{2!}n^{n-2}r^2+\cdots$

22. $0<r<1$ より $0<r^2<1$ であるので，n がどのような数であろうとも $n^2>n^2r^2$ となる。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

23. $0<r<1$, $\lim_{n\to\infty} n^2r^n=\lim_{n\to\infty} n^2\times\lim_{n\to\infty} r^n$。 $\lim_{n\to\infty} r^n=0\,(0<r<1$ より)。よって，$\lim_{n\to\infty} n^2\times 0$ となり $\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

を得る。よって，

$$0 \leqq n^2 r^n < n^2 \cdot \frac{3!}{n(n-1)(n-2)h^3} < \frac{3!}{h^3} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である。はさみうちの定理より，$\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ を得る。

参考文献

[1] 後藤和雄，大学生の数学基礎力ー鳥取大学の数クラスについてー，
鳥取大学 大学教育支援機構 教育センター紀要，第 9 号，平成 24 年 12 月 (2012), 1–10.

[2] 後藤和雄 小島政利，初歩からの微分積分，共立出版，2005

[3] 「大学生数学基本調査」及び日本数学会からの提言，
http://mathsoc.jp/comm/kyoiku/chousa2011 2011 年 4 月から 7 月にかけての全国の大学生 7000 人を対象の調査（数学的素養と論理力）

[4] 「大学生数学基本調査」に基づく数学教育への提言，日本数学会，2012. 2. 21
http://mathsoc.jp/comm/kyoiku/chousa2011/

[5] 大学教育学会第 35 回大会発表要旨集録，テーブル 15 「主体的な学びを促す授業は，学生を主体的にするか」，2013 年 6 月 1 日〜2 日，東北大学

[6] ポリア著 柿内賢信訳，いかにして問題をとくか，丸善，1975
G. Polya, How to solve it: A new aspect of mathematical method(Princeton Science Library), Princeton University Press, 2004.

[7] 吉澤康文，JABEE 審査の話：産業界の視点から，
情報処理，Vol. 53 No. 7 July 2012(通巻 568 号)，2012 年,，pp. 667–673

e-mail address :goto@uec.tottori-u.ac.jp