数学における発見的論理と数学の学習指導

——G.ポリアとI.ラカトシュに学ぶ——

数学科教育教室　笹　田　昭　三

Logic of Mathematical Discovery and Teaching of Mathematics

Shôzô SASADA

I　はじめに

数学教育の目標や成果を，ⓐ内容学習的な側面とⓑプロセス学習的な側面（数学的考え方，活用能力，態度など）に大きく分けて考えてみる。IEA の調査結果などにもみられるように，日本の数学教育は，ⓐの面では高い成果を挙げているが，ⓑの面では相対的にその弱さを現わしている。しかし，情報化など社会の進展に対応できる人間の育成のためには，どうしてもⓑの面の充実が肝要である。このような反省の上に立って，新学習指導要領の改訂においても，その改善の基本方針の中に「直観力と論理的思考力の育成」「活用能力の育成」「思考過程の重視」「情意面（よさの感得・態度）の強調」を掲げ，とくにⓑの側面を重視し，算数・数学教育の質的改善を図ろうとしている。

算数・数学教育の目標から言えば，学習の結果としての知識・技能も大切であるが，学習のプロセスでその獲得が期待される数学的な考え方や直観力・思考力，活用能力などの能力や態度の育成が一層重要なことである。たしかに，これまでの数学教育の実態は，学習指導においてもそのウェートのおき方にバランスを欠き，とりわけⓑの面で弱点があったと言わざるを得ない。この弱点は何から来たであろうか。その一つに入試準備教育の弊害もあろう。しかしもっと言えば，算数・数学の多くの教師が，数学（算数）とか数学的活動に対する正しい認識が乏しかったこと，さらに「生徒にとって学習とは何か」といった学習・理解についての深い追求をしなかったこと，このようなことが算数・数学の授業を技能習熟に重点をおいた計算指導や「範例→演習」方式の授業に陥らしめたものと考える。このような知識・技能に重点をおいた効率主義・結果主義の授業のあり方から脱却し，学習のプロセスを大事にし，豊かな学習活動が展開できる数学の授業をめざしていくことが，これからの算数・数学教育の重要な課題である。

この小論では，上記の問題意識に立ち，ⓑの側面を重視した数学の学習指導のあり方について論ずる。一つには，数学教育における帰納・類比などの発見的論理の役割と重要性を論じるとともに，数学の学習指導の改善の一つの方向として，発見的推論を主軸とした高校数学での展開例を示す。もう一つは，数学の生成・発展の論理に学ぶことである。I. ラカトシュは，著『証明と反駁』の中で，骨組みだけに化石化した数学ではなく，１つの問題と１つの推測から成長していく非形式的な

数学の成長・発展の論理を展開した。この数学観は，数学の学習指導に対して，さまざまな示唆を与えるものである。そこで，この知見にもとづいた数学の学習指導のあり方について論ずることにする。

II　発見の論理と論証の論理(1)

一つの立言がなされたとき，それに対して二つの問いが生ずる。

① この立言がどのようにして思いつかれたのか？

② この立言を真として受け入れる根拠は何か？

第一の問いは発見についての問いであり，第二の問いは根拠づけについての問いである。この第一の問いに対して説明される推論方法，思考過程，心理的働きが「発見の論理」に関することがらであり，第二の問いに対して説明される推論方法，思考過程が論証の論理すなわち「演繹的論理」である。論理あるいは論理的という言葉は，広い意味と狭い意味に用いられる。論理の狭い意味は，上記②の問いに対するような演繹的論理を指すもので，その典型としていわゆる三段論法や背理法があげられる。記号論理はこの演繹的論理を対象とする。また，広い意味での論理は，第一の問いに対する発見の論理を含め，人間が有効に推論を進める場合に従う方式一般を包括している。

ここでは，論理の意味を広義にとる。すなわち，人間が有効に進める場合に従う方式一般をさす。

$$\text{論理}\begin{cases}\text{論証の論理}\cdots\cdots\cdots\text{演繹的論理}\\ \text{発見の論理}\cdots\cdots\cdots\text{帰納的推論・類比的推論}\end{cases}$$

演繹的論理による推論は，絶対厳密で争う余地がなく，最終的なものである。一方，発見の論理における推論は，蓋然的で争う余地があり，暫定的なものである。しかし，発見の論理は，その蓋然性の代りに，演繹的論理では得られない新しい判断や推測を導入するといった，極めて生産的な面をもっている。この発見の論理の典型として，帰納的推論，類比的推論があるが，これらは数学教育においても重視すべき論理である。

(1) 両者の論理の特徴と働き

一般的に演繹は一般から特殊を導く推論であり，帰納は特殊から一般を推測する論理であり，類比は類似性に着目して特殊から特殊を類推する論理であるといわれている。しかし，これらをもう少し質的に検討し，比較してみたい。次に示すのは，演繹，帰納，類比における，それぞれ正しい素朴な推論の例である。

(a)　演繹　すべての哺乳動物は心臓をもつ。
　　　　　すべての馬は哺乳動物である。
　　　　　――――――――――――――
　　　　　∴　すべての馬は心臓をもつ。

(b)　帰納　いままで観察されたすべての馬は心臓をもっていた。
　　　　　――――――――――――――
　　　　　∴　すべての馬は心臓をもつ。

(c)　類比　すべての馬は心臓をもつ
　　　　　ろばと馬は類似している。
　　　　　――――――――――――――
　　　　　∴　すべてのろばは心臓をもつ。

この例からもわかるように，演繹，帰納，類比を弁別する基本的な特徴がある。

(a)　演繹

（Ｉ）すべての前提が真であれば，結論は必ず真でなければならない。

（II）結論の中にある情報あるいは事実的内容はすべて前提の中に潜在的に含まれている。

(b)　帰納

（Ｉ）すべての前提が真であれば，結論はおそらく真であろう（必然的に真とはいえない)。

（II）結論は，前提には暗々裡にも存在しなかった，新しい情報・事実的内容を含む。

(c)　類比

（Ｉ）すべての前提が真であれば，結論はおそらく真であろう（必然的に真とはいえない)。

（II）結論は，前提には暗々裡にも存在しなかった，新しい情報・事実的内容を含む。

特徴（Ｉ）は自明であるから，ここでは特徴（II）について述べる。(a)の演繹の結論は，すべての馬が心臓をもっていることを主張しているが，これは実質的には，前提の中で既に述べられていることを主張しているにすぎない。第一前提では，すべての哺乳動物が心臓をもっていることを述べ，第二前提において，この哺乳動物の中にすべての馬が含まれていることを述べている。すなわち，前提の中に与えられている情報を少し明確し，再定式化したにすぎない。これに対し，(b)の帰納的推論においては，前提の情報はいままで観察された馬だけを対象とし，結論の情報は未だ観察していない馬をも対象としている。すなわち，この結論は，前提で与えられていない新しい情報をも含んでいる。また，(c)の類比的推論においては，前提には全く含まれていない新しい情報「すべてのろばは心臓をもつ」を導いている。

演繹的推論は，その推論方法が論理的に有効であるならば，前提は結論を完全に裏づけるが，前提の内容を明確にするだけで，実質的には新しい情報を与えない。一方，帰納，類比などの発見的推論は，結論の真実性に度合が存在し，その度合は前提が結論に与える裏づけの大きさ，すなわち帰納の妥当性や類比における関係の類似性に依存する。しかし，発見的推論による結論は，前提に含まれない新しい情報・事実的内容を与える。すなわち，演繹的論理は前提の内容拡大を犠牲にして必然性を確保し，一方発見的論理は必然性を犠牲にして前提の内容拡大を図っているといえる。

	（結論の）真実性	（前提の）内容を拡大するか？
演繹	・前提は結論を完全に裏づける。	・内容拡大しない。 （前提の内容を明確にするだけ）
帰　納 ・ 類　比	・真実性に度合がある。 （帰納の妥当性，関係の類似性に依存する）	・新しい情報（前提にない）をもたらす。

このような両者の論理の特徴のちがいから，演繹的論理と発見的論理は，それぞれ別途の働きをもつ。演繹的論理は前提の内容を明確にするために使用され，帰納や類比などの発見的論理は，知識を拡大するために使用される。

たとえば，数学における論証は演繹的である。定理は公理系を基礎とし，出発点として演繹的に証明される。定理の内容は，既に公理や定義の中で暗々裡に与えられているが，この内容は公理系

の中では完全に明瞭なものになっていない。演繹的論理は，定理の証明という形で，このような公理系の中に埋蔵されている内容を明るみに出すものである。

一方，帰納や類比の論理は，与えられた情報や前提にない新しい内容をも含む結論を引き出すもので，それは実に創造的，生産的である。自然科学者の法則発見，数学者の定理や証明法の発見などは，この論理による場合が多い。しかし，帰納や類比の論理で得られる結論の真実性は蓋然的で，その真実性の保証は演繹的論理にまたなければならない。

(2)　演繹的論理と形式

演繹的体系　数学における主な仕事は，体系内の多くの命題に真・偽の札を対応させることであるが，真，偽の札を付する最初の基準なくして，体系内の命題に真，偽の札を対応さす仕事を押し進めることができない。それゆえ，若干の適当な命題の集合を選び，これらの命題に真の札を与え，これを最初の基準として体系内の命題に真，偽の札を対応していく。このように，真と仮定され，演繹の出発点として選ばれた命題が公理である。公理（系）が確立されると，これを出発点として，体系内の命題に次々に真と偽の札を付する作業が行われるが，この作業を支えるルールが演繹的論理であり，このようにして構造化された系が演繹体系である。

命題の真偽と推論の妥当性　演繹体系において公理（系）が設定されると，この公理系を出発点として，妥当な演繹的推論を駆使することによって，体系内の真偽を決定する努力がなされる。妥当な推論とは，前提が真ならばその結論も必然的に真でなければならないという推論である。推論の妥当性は前提と結論の間の関係だけに依存し(2)，結論の命題が真であることは推論が妥当であることを保証しない。次に，命題の真偽と推論の妥当性の関係で重要なものを列挙する。

(1)　前提の命題がすべて真で，推論が妥当であれば，その結論の命題は真である。

(2)　推論が妥当であり，その結論の命題が偽であれば，前提の少くとも一つの命題は偽である。

(3)　前提の命題がすべて真で，結論の命題が偽であれば，その推論は妥当でない。

(4)　推論が妥当で，前提の命題の一部または全部が偽の場合は，その結論の真偽は決定できない。

(5)　推論が妥当で，結論が真である場合，それだけでは前提の命題の真偽は決定できない。

このように，結論が真であることは必ずしも推論の妥当性を保証しないし，推論の妥当性もまた必ずしもその結論の真なることを保証しない。妥当性は推論のもつ性質であり，命題の真偽は個々の命題の性質であって(3)，これらは独立の概念である。すなわち，演繹的推論の妥当性は，その推論を構成している命題の内容や真・偽に依存するものでなく，推論の論理的な形式・構造だけによって決定される。ここに，推論の妥当性とその形式との関係の分析が重要であり，それを取り扱うのが記号論理である。

演繹的論理と形式　例えば，次のような二つの推論を取り上げてみる。

(ア)　5が偶数であるならば，5は2で割り切れる。5は2で割り切れない。ゆえに，5は偶数ではない。

(イ)　彼が犯人であるならば，彼はその時刻に現場にいたはずである。彼はその時刻に現場にいなかった。ゆえに，彼は犯人ではない。

(ア)，(イ)の推論は異なる場面の異なる内容についての推論であるが，ともによく用いられる妥当な推論である。(ア)において，p =「5は偶数である」，q =「5は2で割り切れる」とおき，(イ)において，p =「彼は犯人である」，q =「彼はその時刻に現場にいた」とおいて記号化すれば，(ア)，(イ)はともに次のような形式で表される。逆に，p，q として任意の命題を選び，この形式を満たすよう

な推論を作れば，場面も内容も(ア)，(イ)と異なる新しい妥当な推論が得られる。（この場合，前提 $p \to q$，$\sim p$ が真となるような命題 p，q を選べば，結論命題 $\sim q$ も真となる）すなわち，命題 p，q の内容が何であっても，また命題の真偽が何れであろうとも，右記の形式の推論を作れば，妥当な演繹的推論が得られる。このように，演繹的推論においては，命題の内容や事実上の真偽の問題ではなく，重要なことは推論に用いられている命題間の関係や形式である。それゆえ，演繹論理においては，各命題の中味を捨て去って記号化し，それによって論理の構造や法則を明確にすることができる。

$$\begin{array}{r} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

他方，帰納や類比などの発見的論理は命題の内容を重視する。この点にも，発見的論理と演繹的論理の性格を区別する大きな差異がみられる。

妥当な推論と間接証明法　中学校や高等学校の数学の学習でよく用いられる妥当な推論形式としては，次のようなものが挙げられる。その形式に対応する具体例はここでは省略する。

① 簡約の法則

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

② 付加の法則

$$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

③ 三段論法・肯定式

$$\begin{array}{r} p \to q \\ p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

④ 三段論法・否定式

$$\begin{array}{r} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

⑤ 仮言三段論法

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

⑥ 離接三段論法

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \sim q \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

また，与えられた命題を直接証明しないで，これと論理的に同値な命題が真であることを示すことによって，与えられた命題が真であるとする演繹的証明がある。これが間接証明法である。与命題「$p \to q$」と同値な命題の形式としては，次の4つの形式が挙げられる。なお，⑧，⑨は，それぞれ $r = p$，$r = q$ とした⑩の特別な場合とみることができる。

⑦　「$p \to q$」　≡　「$\sim q \to \sim p$」　（対偶法）

⑧　「$p \to q$」　≡　「$p \wedge \sim q \to \sim p$」

⑨　「$p \to q$」　≡　「$p \wedge \sim q \to q$」

⑩　「$p \to q$」　≡　「$p \wedge \sim q \to r \wedge \sim r$」　（背理法）

これらの推論の妥当性や間接証明法の妥当性は，真理表を用いて簡単に検証できる。なお，上記の推論はすべて命題論理の枠内のものである。命題論理は，命題と命題との間の論理的関係を分析し，複合命題の真偽がその中に現われる単純命題の真偽にどのように従属するかを研究する。しかしながら，命題論理だけでは，論理学の目的としては不充分であり，アリストテレスの三段論法も学校数学における簡単な推論も厳密には命題論理の枠内に入らない(4)。論理学の目的を達成するためには，命題をさらに分析し，主語と述語とに分解して考察する必要がある。このように単純命題をさらに主語と述語に分析し，命題の内部構造まで立ち入って考察するのが述語論理である。しかし，本論では，発見の論理と演繹的論理の比較考察を主目的とし，述語論理は取り上げない。

(3) 発見的推論の特質とパターン

帰納的推論の特質　帰納は観察から始まる。実験，実測，単純数え上げなどを通して適当な観察資料を集め，それらを比較，考察する。そして，そこにある断片的な規則性に注意し，散り散りに

なっていた部分から一見まとまった全体を構築する。これが帰納的推論の過程である。

この帰納的推論において最も重要なことは，かたよらない観察と規則性の抽出である。かたよった観察と過小規模の観察は，全体のもつ規則性を十分反映しない。また，規則性の抽出においては，何を捨て，何を抽出するかが問題である。洞察されるべきものは，個々の事実でなく，それらに共通する形式であって，徒らに個々の事実に執着してはいけない。

一般に，帰納的推論においては，有限の観察から無限の（有限でも多量の）対象についての一般的性質を推測する。すなわち，観察された標本の集合（A）は，考察対象の集合（B）に部分集合として内含される。概念における外延・内包の関係と同様に，次のような包攝関係が成り立ち，観察標本の集合Aは考察対象の全体の集合Bより多くの属性（共通性質）を含んでいる。

$$\text{A} \subset \text{B}$$

$$\text{Aの属性} \supset \text{Bの属性}$$

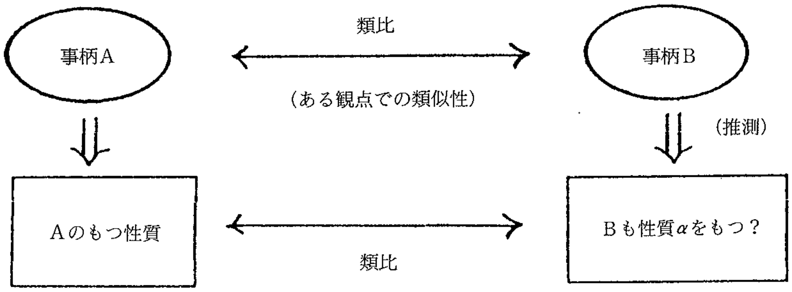
このように，観察された標本の集合は，考察対象のすべてがもつ一般的性質を埋蔵しているが，その他に，標本自身がもつ特殊な雑多の性質をも満足する。したがって，規則性の抽出は，標本がもつ非本質的な特殊な性質を捨て，共通属性の中で本質的なものを抽出しなければならない。そのために，観察データを表示するとか，グラフによって図表示するとか，あるいは数量の関係形式に着目して，観察標本の集合に潜在している一般的性質の顕在化を図るのである。

帰納的推論によって得られたものは何か。それは証明ではない。証明の痕跡でさえない，全くの一つの推測である。すなわち，観察の範囲内での事実の記述と，この記述がその範囲外にも適合するだろうという一つの推測にすぎない[5]。この推測された一般命題は，新たな特別の場合によって確められるごとに信頼性を増すが，追加の検証は単に推測を強化するだけで，証明にならない。したがって，帰納によって得られた諸性質は，かなり有力な根拠をもつものと考えられるが，そのまま真として受け入れることは許されない。

類比的推論の特質　類比による推論は，考察対象A，Bの類似性に注目し，Aの上の性質・理論をBの上に転移させることを図る推論である。この類比的推論で最も重要なことは，一つの類似性の抽出であり，もう一つは，転移を図る性質や理論がこの類似性と密接に関連しているのかということである。

類比における類似性の抽出は，二つの考察対象が単に似ているといった視覚的・感性的段階にとどまってはいけない。推測結果の信頼性を高めるためには，これをさらに一段と高め，同一の形式，概念として同一視できる状態で，推論しなければならない。G.ポリアは，著『帰納と類比』の中で，類比と一般の相似の本質的相異は，類似性を概念的に同一視できる関係でとらえているか否かにあるとしている[6]。たとえば，平面上の三角形は空間内の四面体と類比である。平面上では，３直線は有限な図形を囲むことができる。空間内では，３平面は有限な図形を囲むことができないが，４平面は四面体を囲むことができる。三角形と四面体とがどちらも囲む要素の最小数によって囲まれているという点に関する限り，三角形の平面に対する関係は四面体の空間に対する関係と全く同じとみることができる。したがって，これらは類比である[7]。

次に，転移を図る性質・理論がこの類似性と本質的な関連をもつか否かが重要な問題である。考察対象A，Bの類似性を，AもBも共通の形式（概念・関係・性質）Rをもつととらえたとする。このとき，Aの性質 α が共通形式Rと密接な関連をもつ場合は，「Bも性質 α をもつ」という推測は信頼度が高い。しかし，Aの性質 α が共通形式Rとあまり関連をもたないような場合には，この推測の信頼度は低いものとなる。



このように，類比的推論で重要なことは，第一に，考察対象の類似性を意識し，この類似性の本質を抽出して二つの対象を同一の形式を満足するものとして把握する。第二に，転移を図ろうとする性質が，この共通形式と密接に関連しているか否かを見分けることである。

類比的推論で得られた結果は，帰納の場合と同様に，証明の痕跡すらない一つの推測である。しかし，(1)で論じたように，帰納的推論，類比的推論は，その推論の必然性を犠牲にして，新しい知識や内容の拡大を図る，生産的・創造的推論である。

(4) 科学的推論としての「帰納・類比-演繹」の総合

帰納・類比の発見的推論によって得られる結果は，証明の痕跡のない一つの推測である。帰納の場合は，観察の範囲内での事実の記述と，この記述に基づく洞察がその範囲外にも適合しているだろうという一つの推測である。また，類比の場合は，類似な対象A，Bの考察において，Aにおける性質 α と類似な性質 α' が対象Bにおいて成立するであろうという推測にすぎない。この推論の蓋然性が，学校数学においてこれらの推論が軽視される理由の一つであった。しかしながら，(1)で論じたように，帰納・類比の発見的推論は，結論の真実性を犠牲にしながらも，新しい知識の拡大を図るという，実に生産的・創造的な推論である。

数学の歴史においても，アルキメデスの実験による図形の性質の発見(8)，P.フェルマーの整数論における業績など，多くの定理や証明方法が帰納的推論によって発見されている。とくに，数論における多くの性質が観察によって発見され，その真なることが演繹的証明によって確認されている。また，観察によって得られた数の性質の中には，フェルマーの最終問題(9)やゴールドバッハの推測(10)のように，いまだ未証明のものさえ多くある。また，アルキメデスによる球の表面積に関する定理の発見(11)，L.オイラーの無限級数（平方の逆数の和）の和の発見(12)，など類比的推論による数学上の成果も多い。このように数学的活動においては，帰納・類比などの発見的推論によって数学上の新しい知識・性質が発見，導入され，そこからその真実性の確立のための証明への努力がなされていくのである。このような数学的活動の様態を次に例示する。

「帰納-演繹」の総合　次の問題場面における数学的活動の展開を考える。

「2^x-1 の形（x：整数）の数は，どんなとき素数で，どんなとき合成数か？」

① 帰納による観察

$x \quad = \quad 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9, \ 10$

$2^x - 1 = \quad 1, \ 3, \ 7, \ 15, \ 31, \ 63, \ 127, \ 225, \ 511, \ 1023$

ここまでの観察では，$511 = 7 \times 73$，$1023 = 31 \times 33$であるから

・$x = (2, \ 3, \ 5, \ 7)$：素数のとき，$2^x - 1$は素数である。

・$x = (4, \ 6, \ 8, \ 9, \ 10)$：合成数のとき，$2^x - 1$は合成数である。

② 仮説の設定

(ア)「xが素数のとき，$2^x - 1$は素数である。」

(イ)「xが合成数のとき，$2^x - 1$は合成数である。」

③ 仮説の検討

・$x = 11$のとき，$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$：合成数

よって，仮説(ア)は正しくない。　→　仮説(ア)は棄却される。

・$x = 12, \ 14, \ 15, \ 16, \ 18, \ 20$でも，仮説(イ)が成立することが確められる。

→　仮説(イ)の信頼性が高まる。

④ 演繹的証明

xが合成数だから，$x = uv$（u，v：整数）とおける。

$2^x - 1 = (2^u)^v - 1 = (2^u - 1)\{(2^u)^{v-1} + (2^u)^{v-2} + \cdots\cdots + 2^u + 1\}$

u，$v \geqq 2$だから，$2^u - 1 \geqq 3$，$\{(2^u)^{v-1} + \cdots\cdots\cdots + 2^u + 1\} \geqq 5$である。

$\therefore$　$2^x - 1$は合成数である。

よって，仮説(イ)が立証され，命題(イ)が数学的真理として確立される。

類比による定理の発見　アルキメデスは次のように述べている。

「球はその球の大円を底とし，その半径に等しい高さを有する円錐の4倍であるという定理から，私は，任意の球の表面はその球の大円の4倍であるということを考えついた。なぜなら，任意の円はその円周に等しい辺とその半径に等しい高さを有する三角形に等しいという事実から判断して，私は，同様に，任意の球はその球の大円に等しい底とその半径に等しい高さを有する円錐に等しいと解したからである。」[13]

この文献が示すように，アルキメデスは類比的推論によって，定理「球の表面積は大円の4倍に等しい」を発見し，演繹的にこれを証明している。この類比の実態をいま少し考察してみたい。

円の面積	＝	1×三角形（底辺の長さ：円周，高さ：半径）の面積	………	①
球の体積	＝	4×円錐（底面：大円，高さ：半径）の体積	………	②
円　周	＝	1×円周	………	③
球の表面積	＝	4×？	………	④

アルキメデスは，平面図形である円と立体図形である球の類比に注目し，既知の定理②の類比として，円の面積を①に示すように円周を底辺とし，半径を高さとする三角形の面積としてとらえる。円に対する球と同様に，三角形に対する錐体は類比である。また，この類比の関係において，円周に対する類比の図形は球の表面であるから，①，②の関係を考慮して，③，④式を得る。ここで，①，②の図形の要素「底」の関係に注目すれば，③の円周に対する④の？は大円の面積であろうと推測される。これが，アルキメデスによる類比的推論の実態である。

このように，アルキメデスは，巧みな類比によって球の表面積に関する命題を発見し，これを演繹的に証明している。この数学的な発見も「類比-演繹」の総合によって実現したのである。

III　発見的推論を重視した数学の学習指導

(1)　数学教育における発見的論理の役割

IIで述べたように，帰納・類比などの発見的推論は証明ではない，にもかかわらず，この蓋然的推論は，数学においても，数学教育においても重要な役割を演ずる。

数学におけるその役割は，①包括的な数学的構造を与える公理の抽出・設定，②価値ある数学的命題の発見，③証明法の発見，④新しい数学の研究における類比的思考など，数学における新しいアイデアの創造であろう。

数学教育においては，①問題解決能力を育てる，②概念・法則の意味や理解の教授を助ける，③興味や問題意識をもたせるなど学習の動機づけとなる，④数学的な事柄を統合して統一的に理解する学習を助ける，⑤一般化や拡張の考えの指導を助ける，さらに⑥数学における創造の過程を体験させ，学習者の創造性の開発を助ける，などが発見的論理の果す役割であると考える。

発見的論理は，このような数学教育上の役割や意義をもちながら，過去の数学教育現場では軽視されがちであった。今世紀初頭に起った数学教育改良運動の滲透に伴い，発見的論理の教育的意義が認められ，我国においても，昭和10年頃から数学教育の直観化・具体化の声とともに漸次取り入れられるようになり[14]，さらに，昭和33年の学習指導要領からは，算数・数学教育の目標の中に数学的な考え方の育成が掲げられ，帰納・類比などの発見的推論も重視していくことになっている。しかしながら，そこにおける取り扱いは，発達段階からみて演繹的方法の困難と思える小学校・中学校低学年を対象に行われ，以後の学年においては殆ど省みられていない。また，取り上げられた場合でも，児童・生徒の生活や経験に密着しすぎ，それらは科学的推論に高められていない。

とりわけ，我国の中等教育における数学の授業では，発見的論理の軽視，演繹論理の偏重の傾向がみられる。この傾向を生んでいる根底には，入試準備教育の弊害に加え，次のような数学教師の意識の問題も挙げられよう。

- 指導内容を既成の知識として与えるという考え方。この立場に立てば，演繹的論理を主として，これを与えることができる。
- 授業としては，演繹的論理で説明し，展開していく方が能率的であり，かつ楽である。
- 帰納，類推などは蓋然的で正しくない。これらは必ずしも正しい結論を導かない。つまり，論理・厳密主義の立場である。

このような考え方に基づく学習指導の問題点としては，一つに，指導内容が既成の知識として存在し，生徒がそれを受容していくという学習観であり，もう一つに，数学（指導内容）を出来上がりの論理体系とみる，つまり化石化した数学観が潜んでいることである。

本来学習は，学習者と環境（対象）の相互作用であり，その結果として心身の行動パターンを形成していくものである。すなわち，学習は，学習者の欲求や必要に基づいて対象に働きかけ，その結果として何かを獲得するという，この学習者の「為すこと一受けること」の一まとまりの活動を通して実現されるものである。上記の学習観はこれと対立するものである。指導内容が既成の文化財であるにしても，学習する生徒にとっては新奇なことである。やはり，生徒にとっての学習は，広い意味での創造活動でなければならない。このような観点からも，帰納・類比などの発見的論理を重視して，数学の学習指導を発見的で豊かなものにしていく必要がある。

また，数学に対する見方についても，日本の生徒は，欧米の生徒に比して数学を固定的なものと

みる傾向が強く，数学を柔軟で発展的なものとして把えていないという報告もある。このことも演繹論理偏重に基づく数学の学習指導の結果であると考えられる。数学や数学的活動に対する生徒の正しい認識を培っていくためには，どうしても，II(4)で述べた「帰納・類比-演繹」の総合としての数学的活動や，IVで論ずる「推測→検証→推測の修正→検証→…」といったダイナミックな学習活動を数学の学習指導の中で展開していく必要があると考える。

以上のように考えると，数学の学習指導の中で，数学者や科学者の創造活動の様態を反映させ，演繹的推論だけではなく，帰納・類比などの発見的推論も重視して，数学の学習指導のあり方を改善していく必要がある。G.ポリアも，著『帰納と類比』の中で，「数学が論証的推論を学ぶのに優れた機会を提供していることは誰でも知っている。が，学校の普通課程において，蓋然的推論を学ぶのにそれほどの機会を与えているような科目が一つもない」(15)と述べ，学校教育において発見的論理がおろそかにされてきたことを指摘している。さらに，G.ポリアは，数学が発見的論理の学習に最適であり，発見的推論力はその意識的指導によって高められることをも示唆している(16)。

G.ポリアが主張するように，数学科としては，「証明することを必ず教えよう，だがまあ推測することも教えよう。」の標語のもとに，発見的論理の指導を意識的に行い，生徒の科学的推論能力を高めていくとともに，数学と数学的活動に対する正しい理解を図っていく必要があると考える。すなわち，演繹的推論の外に，(1)帰納的推論と類比的推論の方法・特徴や数学におけるその役割を教える，(2)できるだけ多くのことを生徒に発見させる，(3)結果を推測させ，自分の課題に興味をもたせる，(4)混沌とした対象の中から本質的な形式・関係を抽出する，(5)類比による知識の統合化を図る，などの指導を数学の授業の中で重視していくべきである。

(2) 高校数学における発見的推論の展開例

発見的推論を駆使して，数学の授業を発見的，創造的な学習活動にしていくためには，それにふさわしい問題場面とそれに対する数学的活動の展開が重要である。次に，高校数学で取扱うのが適当と思われる展開例を若干示すことにする。

A． 帰納的推論

（例１）「帰納-演繹」の総合としての数学的活動 （II(4)の例を参照）

（例２） 結果を推測し，そして証明する。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{4n^2-1} = ?$$

【数学的活動】

(1) 帰納的推測

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\Big\downarrow \ \text{（推測）}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{㋐}$$

(2)　推測のテスト

もし，㋐が一般的に真であるとすれば，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{4n^2+1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}=\frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

すなわち，$\dfrac{1}{4(n+1)^2-1}=\dfrac{n+1}{2n+3}-\dfrac{n}{2n+1}$ ……………㋑

が真である筈である。──→　計算すると正しい！

∴　推測㋐は，争う余地がないほど真である！（確信）

(3)　演繹的証明

数学的帰納法を用いる。

- 第１段はよろしい。
- 第２段は，(2)の推測のテストに用いた考えを使うとよいことに気づく。

(4)　より簡単な証明は？

推測のテストにおける㋑式に注意すれば，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n^2-1}$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}-\frac{n-1}{2n-1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

（例３）　$1+2+\cdots\cdots\cdots+n=n\,(n+1)/2$ を既知として，$1^2+2^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$の公式を発見する[17]**。**

【学習活動】

(1)　帰納と推測

$$\begin{array}{rcl}
n & = & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots\cdots \\
1+2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n & = & 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \cdots\cdots\cdots \\
1^2+2^2+\ \cdots\cdots+n^2 & = & 1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ \cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{1^2+2^2+\ \cdots\cdots+n^2}{1+2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n} & = & 1,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3},\ 3,\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{13}{3},\ \cdots\cdots\cdots \\
 & = & \dfrac{3}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3},\ \dfrac{9}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \dfrac{13}{3}
\end{array}$$

↓　（推測）

$$\frac{1^2+2^2+\ \cdots\cdots+n^2}{1+2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$$ ……………………………………㋐

(2)　公式の推測

既知の公式（自然数の和）を用いて，推測㋐から次の公式を推定する。

$$1^2+2^2+\cdots\cdots\cdots n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$ ……………………………㋑

(3)　推測のテスト

・$n=7$，8，9……と，推測㋑を確かめていくことができる。しかし，もっと能率的なテストがないか？

・もし，㋑が一般的に真であるとすれば，

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

すなわち，$(n+1)^2=\frac{1}{6}\{(n+1)(n+2)(2n+3)-n(n+1)(2n+1)\}$

が真である筈である。⟶ 計算すると正しい！

∴ 推測㋑は，争う余地がないほど確信できる！

(4) 演繹的証明 （略）

（例４） 観察資料を数表に整理することによって，一般的性質を抽出する。

凸面体のすべての面の内角の総和 $\Sigma\alpha$ を表す一般式を推定せよ。また，多面体のオイラーの公式 $V-E+F=2$ をもとにして，この推定結果を証明せよ[18]。

【数学的活動】

(1) 手近な例による観察

手近な多面体について，その内角の総和 $\Sigma\alpha$ を計算してみると，次のようになる。

多面体：	立方体	四面体	八面体	五角柱	六角柱
$\Sigma\alpha$ ：	12π	4π	8π	16π	20π

これだけでは，何も注意をひくものがなく，一般的性質を抽出することは困難である。

(2) 資料の整理の工夫と推測

凸多面体であるから，同一頂点に集まる内角の和は2πより小さい。したがって，多面体の頂点の個数をVとすれば， $\Sigma\alpha<2\pi V$ であることに気づく。

この関係を，上記の資料で確認するために，次のような表を作る。

多面体	$\Sigma\alpha$	V	$2V\pi$	$2\pi V-\Sigma\alpha$
立方体	12π	8	16π	4π
四面体	4π	4	8π	4π
八面体	8π	6	12π	4π
五角柱	16π	10	20π	4π
六角柱	20π	12	24π	4π

確かに，$2V\pi$は$\Sigma\alpha$より大きく，かつその差が一定4πである。そこで，次の一般式

$2\pi V-\Sigma\alpha = 4\pi$ ……………………………………………㋒ を推測する。

(3) 追加の検証

さらに，多面体を十二面体，二十面体，ｎ角柱，ｎ角錐と変化させて，推測㋒の追加の検証をする。次表に示すように，これらの場合には㋒が成り立ち，推測㋒は信頼性を増す。

多面体	$\Sigma\alpha$	V	$2V\pi$	$2\pi V-\Sigma\alpha$
十二面体	36π	20	40π	4π

二十面体	20π	12	24π	4π
n 角柱	$(4n-4)\pi$	$2n$	$4n\pi$	4π
n 角錐	$(2n-2)\pi$	$n+1$	$(2n+2)\pi$	4π

(4)　演繹的証明

多面体の頂点の個数をV，辺の個数をE，面の個数をFとすれば，オイラーの公式により

$$V - E + F = 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

①×２−㋐：　$\Sigma\alpha = 2\pi(E-F)$　…………………　㋑

逆に，㋑と①から㋐を導くことができるので，㋑を証明するとよい。

さて，F個の面をf_1，f_2，……，f_Fとし，面f_iがn_i多角形であるとする（i＝1，2……，F)。このとき，n_i多角形の内角の和は　$(n_i-2)\pi$　であるから，多面体の内角の総和は

$$\Sigma\alpha = \sum_{i=1}^{F}(n_i-2)\cdot\pi = \pi\left(\sum_{i=1}^{F}n_i-\sum_{i=1}^{F}2\right)$$
$$= \pi(2E-2F) = 2\pi(E-F)$$

よって，㋑が成り立つ。したがって，推測㋐が真であることが証明された。

B.　類比的推論

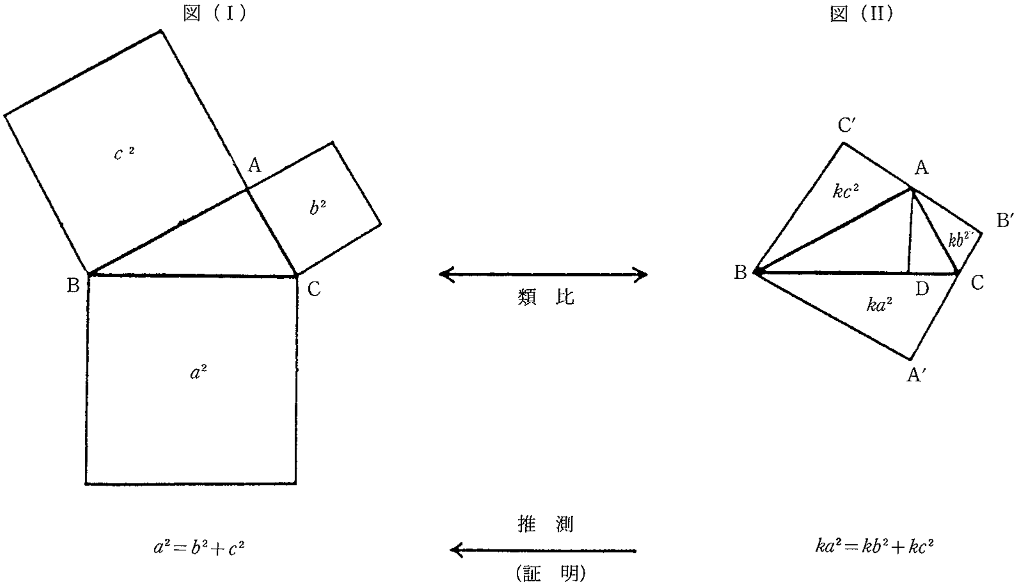
(例１)　類比によるピタゴラスの定理の証明(19)

【数学的活動】

(1)　類比の関係の考察

直角三角形ABCの上に相似な図形（(Ｉ)は正方形，(II)は直角三角形）を作って，(Ｉ)，(II)両者の類比の関係を考察する。このとき，正方形の面積a^2，b^2，c^2の間の関係と直角三角形の面積ka^2，kb^2，kc^2の間の関係とは類比である。

図（Ｉ）　　図（II）



(2)　ka^2，kb^2，kc^2の関係

図（II）において，△ A′BC ≡△ ABC，△ B′AC ≡△ DAC，△ C′BA ≡△ DBA　であるから，△ A′BC=△ B′AC+△ C′BA を得る。　　　∴　$ka^2=kb^2+kc^2$　…………　①

(3)　類比と証明

（I），（II）の類比から，①に対応する（I）の性質として，$a^2=b^2+c^2$ が推測される。しかも，この推測は，①の両辺を k（$\neq 0$）で除することによって得られるから，真である。

（例２）　正三角形と正四面体の類比[20]

(a)　次の定理を証明せよ。

「１点が一つの正三角形の内部にあり，その３辺からそれぞれ x，y，z なる距離にある。このとき，h を正三角形の高さとすれば，$x+y+z=h$ である。」

(b)　正四面体の内部の１点の４つの面からの距離に関する，立体幾何における類比な定理を明確に述べ，かつ証明せよ。

(c)　両方の定理を一般化して，それぞれ平面ないし空間における任意の点に（三角形または四面体の内部の点だけでなく）定理があてはまるようにせよ。明確な記述，および証明を与えよ。

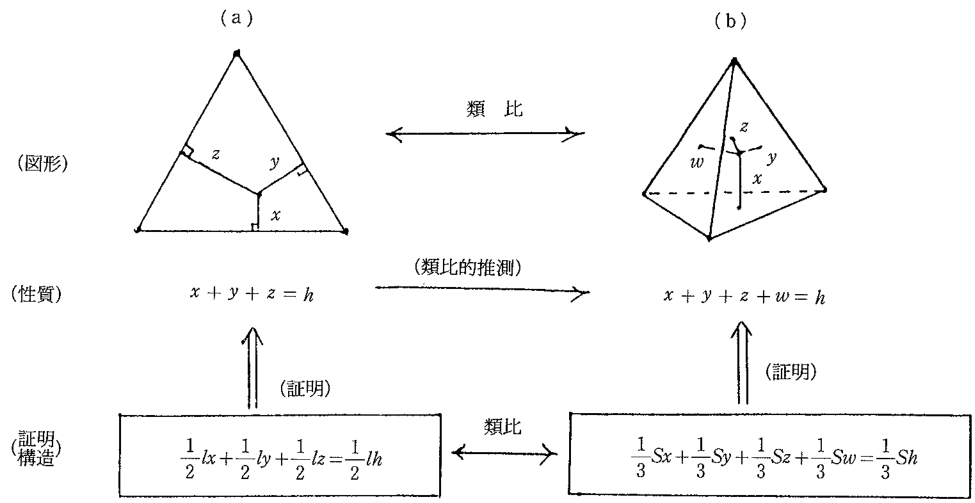
【問題解決の考察】

(a)　正三角形の１辺の長さを l とする。内部の点を３頂点と結んで，三角形を３つの三角形に分割すれば，各々の面積の和は全体の面積を与える。

$$\frac{1}{2}lx+\frac{1}{2}ly+\frac{1}{2}lz=\frac{1}{2}lh \qquad \therefore \quad x+y+z=h$$

(a)と(b)の類比とその考察

(a)と(b)は類比の関係であり，下図に示すように，図形，性質，証明構造の３者に類比的対応がつけられる。この類比の対応に基づいて，類比の性質（定理）を推測し，これを証明する。



(c)　この関係は，(a)，(b)両方の場合において，外部の点に対しても成り立つ。ただし，x，y，z（およびw）の符号を適当にとることを前提としてである。（内部から辺（面）を見るとき＋，外部

から見るときは－とする）

（例３）　問題を構造的・関係的にとらえる。

α，β，γ は三角形の内角を表す。このとき，次のおのおのを証明せよ。

(a)　$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

(b)　$\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

(c)　$\sin4\alpha+\sin4\beta+\sin4\gamma=-4\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma$

【考察の観点と数学的活動】

よくある問題である。しかし，それぞれを独立に証明するのではなく，類比的考察をすることによって，豊かで合理的な数学的活動を展開する。

(1)　類比の関係を見つける。

・左辺の類似な形に注意して，次の類比を考える。

$\left\{\begin{array}{l}(a)\\ \quad \text{の関係}\\ (b)\end{array}\right. \xleftrightarrow[\text{類比}]{} \left\{\begin{array}{l}(b)\\ \quad \text{の関係}\\ (c)\end{array}\right.$

・そこで，「(a)$\Longrightarrow$(b)」を考え，それを「(b)$\Longrightarrow$(c)」の移行に生かすことを考える。

(2)　類比の関係の考察

(a)の場合　$\longrightarrow$　$\underline{\alpha+\beta+\gamma=\pi}$　……………………………　㋐

(b)の場合　$\longrightarrow$　$2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi\neq\pi$

(b)の場合についても，㋐のような関係が欲しい。そこで，次のような変形を工夫する。

(b)の場合　$\longrightarrow$　$(\pi-2\alpha)+(\pi-2\beta)+(\pi-2\gamma)=\pi$　……　㋑

・<u>(a)が成り立つとすれば</u>，α，β，γ の代りにそれぞれ $\pi-2\alpha$，$\pi-2\beta$，$\pi-2\gamma$ を(a)に代入すると(b)式を得るので，<u>(b)が成り立つ</u>。　　$\therefore$　(a)$\Longrightarrow$(b)

・全く同様の考察をする。(b)において，α，β，γ にそれぞれ $\pi-2\alpha$，$\pi-2\beta$，$\pi-2\gamma$ を代入すれば，(c)式を得る。したがって，「(a)$\Longrightarrow$(c)」である。

(3)　問題の証明に生かす。

上の考察から，「(a)：真$\Longrightarrow$(b)：真$\Longrightarrow$(c)：真」である。したがって，一番簡単な(a)を証明しよう。（以下略）

(3)　数学の学習指導における「推測する」ことの重要性

小学校の算数の授業では自分の考えや他者に対する反論を活発に発表していた子ども達が，中１，中２，中３と進むに従って，発言や挙手が少くなり，遂に黙してノートを取るだけという受動的な学習者になっていく。この現象を生んでいる原因は２つある。一つは課題設定であり，もう一つは生徒の推測を軽視していること，さらに言えば生徒に推測させないことである。

人間の思考は直観的思考と分析的思考が相まって進展していくものである。直観的思考による推測・見通しがあって，その検証のための分析的思考が発動する。学習においても，問題解決においても，当初の推測や見通しがあってそれぞれの活動が展開し，推測の検討，推測の修正，……という過程を通して学習や問題解決が達成される。したがって，数学の学習指導では，「推測する」ことを重視して確かな学習展開を構成するとともに，生徒に推測の方法論も指導する必要がある。

Ⅳ　数学の生成・発展の論理と数学の学習指導

1．ラカトシュの数学論と数学の生成・発展の論理

Ⅰ．ラカトシュ（Imere Lakatos　1922-1974）は，著『証明と論駁』(21)の中で，骨組みだけに化石化した数学でなく，１つの問題と１つの推測から始まり，成長していく数学の生成・発展の論理を展開した。この数学観と論理は，数学教育においても重要な意味をもち，数学の学習指導に有益な示唆を与えるものであると考える。

(1)　ラカトシュの数学論

前世紀の後半にカントールやデデキンドの努力で形成された集合論は，哲学的な問題をひき起し，周知のように，論理主義・形成主義・直観主義の３学派が激しく論争しあった。しかし，数学的知識に確実な基礎を与えようとした哲学的プログラムとして，すべての立場は行きつくところまで行ってしまい，議論も出尽した感が強い(22)。そして，今世紀の中葉までに構造論的数学といった，20世紀的な数学スタイルが定着したといってよい。すなわち，ブルバキの『数学原論』が示すように，20世紀における「ユークリッド主義」が成立したのである。だが，数学が目標として受容するこのユークリッド的スタイルは，数学者が日々数学的活動をしている現実をしばしば歪めて伝える。そこで，ラカトシュは現実の数学的発見がどのようにしてなされるかを，多面体に関するオイラーの定理を題材にとって彼の議論を進めたのである(23)。

ラカトシュは，『証明と論駁』の序文の中で，数学の独断的な哲学（論理主義ないし形式主義）は受け入れられないとし，とりわけ「形式主義」を次のように定義し，厳しく攻撃している。

「この学派は，数学をその形式的公理的抽象化と同一視し，数学の哲学を超数学と同一視する。

形式主義は数学の歴史を哲学から切り離す……。形式主義はこれまでふつうの数学として理解されてきたものの大半に数学としての資格を否認し，その成長について何も言えない。……現在の形式主義の支配のもとでは，カントの言葉を言い換えて次のように言いたくなる：哲学の指導を欠いた数学史は盲目となり，数学史の最も入り組んだ現象に背を向けた数学の哲学は空虚である。……」(24)

「このエッセイの目的は数学の方法論に関する幾つかの問題にアプローチすることである。私は「方法論」という言葉をポリアの「発見的論理」とかポパーの「発見の論理学」もしくは「情況の論理学」に近い意味で用いる。……形式主義の数学の哲学は発見の論理学としての方法論に正当な位置を与えていない。形式主義者によると，数学は形式化された数学と同じである。だが，形式化された理論において何が発見できるというのか？……」(25)

「数学史と数学発見の論理，つまり，数学的思考の系統発生学と個体発生学は，形式主義の批判，そして究極には拒否なくしては展開されない。……」(26)

ユークリッド的公理主義をそのまま数学の認識論として見てしまう立場を独断論的と規定するならば，ラカトシュの立場は懐疑論的ないし発見的と規定できよう。またこの立場は，数学を歴史的に見る立場に連なる。ラカトシュは，このような立場から，形式化されない数学が，疑いの余地のない確立された定理を単調に増加させることによって成長するものでなく，証明と論駁の論理によって，思弁と批判による推測の絶えざる改良によって成長するものであることを詳細に示したのである。つまり，ラカトシュの数学観・数学の発展に対する基本的な立場は，佐々木氏が述べているように，次のようなことになる。

「数学の発展は永遠の否定できない真理のしっかりした集積から成り立つものでない。数学の理論も，批判，不確実性や誤り，見落しから決して解放されるものでなく，批判と訂正によって発展するということである。ラカトシュのこの立場は，科学的認識論におけるポパーの思想を受け継ぐものである。」(27)

さらに言えば，従来の数学の哲学が絶対性・無謬性の追究にあったのに対し，ラカトシュは，ポパーの思想を受け継ぎ，数学における可謬性の哲学を展開したのである。

(2)　『論証と論駁』の内容・形式と反例の役割

多面体に関するオイラーの公式　$V-E+F=2$　の歴史を主題にしている。形においては，教室における対話・議論であって，まず教師が，コーシーによるオイラーの公式の伝統的証明（それは，多面体の稜を平面上の網の目に展開して，次々に単一の三角形に還元していくやり方である）を提示する。証明が完了するや否や，生徒はありとあらゆる種類の反例を出す。論争は続く。その証明は何をしたのか。数学において，われわれは何をどのように知ったのか。推測と反例の拒否，定義や補題の修正，推測の改良など，討論が，数学的にも，論理的にも，ますます洗練の度合いを深めていく。このように，理論が眼前で形成されていく様を，疑問が確信に道をゆずり，また新しい疑問に確信が道をゆずっていく様態を，ラカトシュは極めて明瞭に示している。

脚註には，この火花を散らす論争に釣り合うように，オイラー予想に関する歴史的文献が詳細に提供され，本文における討論の数学史的背景が示される。したがって，本文で展開されている教室の対話は，現実の歴史の合理的構成でもある。

とくに，ラカトシュの数学的発見の論理で重要なことは，推測や補題を論駁する「反例」である。ラカトシュはこれを2つに区別している。(28)。

①　局所的反例……議論の１つの段階に挑戦する反例（補題を論駁する例で，必ずしも推測の主要部を論駁しない）

②　大局的反例……議論でなく，結論自体に対する反例（推測それ自身を論駁する例）

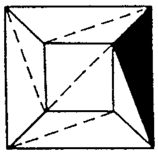
これを本文の事例で説明する。最初に教師が提示した証明は，次の３段階（３つの補題）から成り立っていた(29)。

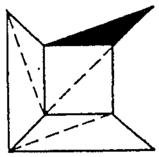
(i)　多面体が薄いゴムでできているという想定のもとでの思考実験をする。面の１つを切り取り，残りの面を破らずに平面上に展開する。原多面体に対して$V-E+F=2$であることは，平面上の網状組織で$V-E+F=1$であることと同値である。

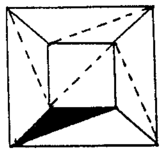
(ii)　この網状組織を三角形分割する。これによって，全体の$V-E+F$は不変である。

(iii)　三角形分割された網状組織から１つ１つの三角形を取り除く。この場合，(a)１つの辺を取り除くか，(b)２つの辺と１つの頂点を取り除くか，の何れかになる。どちらの場合も，$V-E+F$は不変である。この手続きの最後にただ１つの三角形が残る。それゆえ，$V-E+F=1$は真となる。

この証明に対して，次のような反駁がなされる。まず，第３補題の誤りを主張する反例で，「網状組織で内部の三角形から取り除くと，頂点も辺も取り除くことなく１つの三角形を取り除ける」というものである。これは局所的反例である。これは，証明の不充分なことを示すものであるが，推測自体誤っていることを示していないからである。この反例を克服するために，第(iii)段階を「取り除く各段階で境界三角形を取り除く際，(a)，(b)の形態の１つが起こる」と補強・修正することによって，証明を洗練，改良することができる(30)。（次図参照）


(a)


(b)


(反例)

次に，大局的反例による推測批判が展開される。まず，反例「1対の入り子になった立方体によって境界づけられた立体」が提出される。この中空の立体は，第(i)補題を反証すると同時に，V－E＋F＝4となるから，推測の結果も否定する。したがって，これは大局的反例である（局所的反例でもある)。さらに，「1辺が共通である2つの四面体」や「1頂点が共通である2つの四面体」（両例ともV－E＋F＝3だから推測自体を否定する）など数多くの大局的反例が登場する。これらの大局的反例に対して，入念な検討が行われ，推測が修正されていく。それに伴って，多面体の定義もさまざまな角度から検討され，原推測も「単純多面体で，そのすべての面が単連結なものに対して，V－E＋F＝2である。」と改良されていく[31]。

このように，『証明と論駁』では，「反例」「反駁」が重要な役割を果している。ラカトシュによれば，数学では，まず問題もしくは推測から出発して，証明と反例が同時に追究されるというのである。新しい証明は古い反例を説明し，新しい反例は古い証明を覆す。このような成長と発展の途上にある非形式的な数学における証明は，仮定から結論へ途切れることのない正しい推論の連鎖を意味するものでない。むしろ，そこでの証明は，推測をもっともらしく，より説得力のある説明をする，正当化および仕上げを意味し，一方その証明は，反例の圧力のもとで，より詳細に，より精密化されていくものである。

(3) ラカトシュの数学的発見のモデル

ラカトシュは，『証明と論駁』付論1で，オイラー予想のコーシーによる証明のケース・スタディで展開した方法の骨格を再説している。そして，もう一つのケース・スタディ（原始推測：「連続関数の任意の収束級数の極限はそれ自身連続である」)を与え，これを例証している[32]。ラカトシュがそこで示した発見法の骨格（モデル）は，次のようなものである。

「　数学的発見もしくは非形式的数学理論の成長には，1つの単純な様式がある。それは次のような段階から成る。

① 原始的推測

② 証明：原始的推測を部分推測（補題）に分割する思考実験もしくは議論

③ 大局的反例（原始的推測への反例）の出現

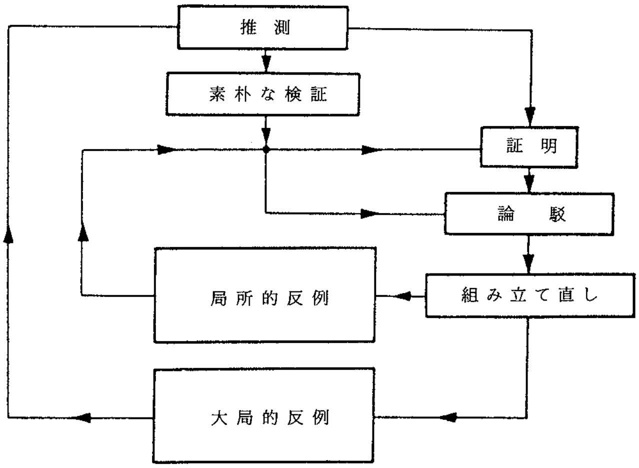
④ 証明の再検討

- 大局的反例が局所的反例となるような「有罪補題」を見つける。
- この有罪補題は前には隠れていたが誤認されていた。これが顕在化され，原始的推測の中に条件として組み込まれる。
- 定理（改良された推測）は新しい証明生成概念を卓絶した新しい特徴として伴い原始的推測を乗り起える。」[33]

この4段階には，局所的反例に関する陳述がない。おそらく，②の証明の段階にこれを含めて考えていると思われる。が，次の局所的反例のステップ

（＊）局所的反例による部分推測と証明の洗練・改良
を挿入，附加することによって，ラカトシュの発見法が一層明確になるものと考える。

P. J. デービスと R. ヘルシュは，ラカトシュの発見法を右図のフローチャートで表現している[34]。この図表現は，ラカトシュの4段階にステップ（＊）を付加した，数学の生成・発展のプロセスを実によく表現している。さらに，両氏は，この方法を自分のクラスの数学の授業に活用し，かなり成功した展開例を同書で紹介している[35]。



また，このモデルは，新事態に直面したとき，人間が行う合理的な問題解決のプロセスを実によく表現している。

2．ラカトシュの数学観と発見法に学ぶ

III(1)で，我国の中学校・高校の数学教育における問題的な傾向として，次の4点があることを，やや大胆であるが，指摘した。また，①，②の問題傾向の根底には，③，④のような数学観・学習観が数学教師の中に根強くあることもその要因の一つであると述べた。

① 内容学習の重視（結果主義・効率主義）　──→　プロセス学習の貧困
② 発見の論理の軽視　──→　演繹的論理偏重
③ 数学観：数学を出来上がりの演繹体系とみる（化石化した数学観）
④ 学習観：指導内容は既成の知識であり，生徒はそれを受容する。

1．でみてきたように，ラカトシュの数学観と発見法（数学の生成・発展の論理）は，この問題傾向①，②，③，④とはまさに対極をなす立場である。我国の数学教育の当面の課題として，①の問題を克服し，プロセス学習を重視した数学の学習指導の改善が掲げられている。その改善のためには，どうしても③，④の意識を変革していく必要があり，また②の授業のあり方も改善していく必要がある。そのためにも，われわれはラカトシュに学び，その数学教育的意味を考えていく必要があると考える。

(1) 数学の学習指導における理解と学習観

W. A. ブラオネルは，「理解の本性」に関する8つの命題を提示し，その中で次のような理解の定義を与えている[36]。

「ある状位に関して，知的に行動し，感じ，思考することができるとき，生徒は理解している」

この定義で重要なことは，理解というものが，まず「状位の存在」，主体の能動的な「状位への知的行動」，さらにその結果として受ける「主体の感性・思考」の3つの条件から成立していることであ

る。上記④の学習観にみられるような，単純で，静的な「受容する」ということで成立するものでない。周知のように，J. ピアジェは，シェマにおける同化と調節で理解・学習を説明し，とりわけ数学の学習では,認知的不均衡を呼び起す矛盾の生起とその解消が必要であることを指摘している。ピアシェの指摘する矛盾の生起とその解消は，ラカトシュの「証明と論駁」のメカニズムそのものである。ここに，理解・学習に関して，ラカトシュの発見法に学ぶことがあると考える。

また，S. I. ブラウンは，「理解」という活動を「内的理解」「外的理解」の２つに区別し，真の理解・認識にはこの２つの理解が必要であるのに，数学教育では，しばしば内的理解のみが重視されることに不満と警告を述べている(37)。「内的理解」とは枠内での教材の理解のことであり，「外的理解」は，数学の外からの数学の理解（数学と事象との関連や応用など）や数学に対する多視点的理解などを指している。そして，内的理解に偏重することによる恐るべき弊害として，生徒の中に「遮断された機械性」がつくり出され，結局，柔軟な見方・考え方の不毛化と問題解決における大きな支障をもたらすとしている。この警告と指摘には，日本の数学教育はもって胆に銘ずべきである。外的理解と多視点的態度を育成していくためにも，ラカトシュの発見法に学び，数学の豊かな学習指導を構築していく必要がある。

(2)　数学観と数学的活動に対する認識

③の数学観は④の学習観を生む。そして，③，④の考え方が相まって学習指導における問題傾向①，②を醸成していく。それゆえ，数学教師の数学観と学習観は極めて重要な意味をもつ。

数学を化石化した体系とみるべきでない。確かに，出来上がりの数学をみるとき，それは公理から出発する演繹的体系である。しかし，ラカトシュによれば，非形式的数学の発展は，１つの推測，１つの問題から出発し，検証と反駁のチェックにさらされ，推測や理論の修正，証明の洗練･改良，などダイナミックな過程を通して発展していくものであるという。数学を歴史的視点からみるとき，また数学者の現実の数学的活動に目を向けるとき,われわれはこのラカトシュの数学観に到達する。このように，数学を，出来上がりの結果としてでなく，生成・発展のプロセスに視点を当ててとらえる立場に立つとき，われわれは，数学の理解・学習についても，ピアジェが指摘する矛盾の生起とその解消という学習観に自然に立つことができる。それによって，数学の学習指導に力動性を与え，子ども達の数学的概念・知識の望ましい構成を促進していくことができる。すなわち，数学教師がラカトシュの数学観の立場に立って数学の学習指導を考えていくことが，前記①，②，③，④の問題傾向を改善・解消していくための第一歩であり，かつそれが確かな道でもあると考える。

また，数学の学習指導における生徒の数学的活動を「計算」「証明」だけに限るような現状はいけない。ラカトシュの発見法に学び，数学の授業において，「推測すること」「推測の検討」「反例による反駁」「推測の修正･改良」などもすぐれた数学的活動として取り上げていく必要がある。このことは，生徒の内に，望ましい数学観を形成していく上でも，また問題解決の能力・態度を形成していく上でも極めて大事なことである。

(3)　問題解決の能力と態度の育成

われわれは，日常生活の問題解決においても，あるいは科学においても，新事態に直面したとき，ある推測から始める。最初の推察は的はずれかも知れないが，それを実際に試みて，その成功や失敗の度合に応じて，大なり小なりの修正をする。観察や類比に頼って推測し，数回の試み，数回の推測の修正の後で，比較的満足な推察に到達する。このような見方や方法論を子ども達の身につけさしていくことは，ころからの教育として極めて大事なことである。また，そのための指導には，内容面から考えても，方法論的面から言っても，数学の授業が適当であると考える。

ラカトシュの「証明と反駁」の方法は，推測と証明，反例・反駁と推測の修正，……というように，上記の問題解決における試行接近と全く同様の過程と手順を踏む。問題解決の能力や態度の育成は，やはり，適切な問題場面で，その問題内容に即した適切・有効な解決活動を体験していくことによってこそ達成していくものと考える。したがって，数学の授業では，適切な問題場面を選び，生徒をして，ラカトシュの発見法で示唆されたような，豊かな数学的活動を展開させていくことは極めて重要なことである。そのためにも，数学教師は，ラカトシュに学び，その発見法が展開できる教材の開発と豊かな討論や解決活動を引き出す学習指導法の研究をしていく必要がある。

(4)　Do Mathematics をめざす学習指導

オランダの数学教育学者 H.フロイデンタールは，数学を精神的活動として把え，数学を学ぶためには学習者の主体的活動が必要であるとし，数学の教授原理として

"The best way to learn an activity is perform it."

をあげている[38]。また，古藤氏は，格言「The best way to learn mathematics is to do mathematics.」を引用し，'Do mathematis'の考えと数学の学習指導で'Do mathematics'の体験さすことの重要性を論じている[39]。さらに，蒲氏は'Do Mathematics'をめざす学習指導の意義とあり方について考察している[40]。

'Do Mathematics'をめざす学習指導とは，「文化遺産としてできあがった，あるいは体系化された数学を伝達・注入するのではなく，生徒自身が課題意識を持ち主体的に追究していく過程を通して，自ら数学の新しい内容やその考え方・方法を見い出し，結果として学習しようとする数学を創り出す[41]」という立場に立つ指導のことである。学習内容は客観的には出来あがりの数学であろう。しかし，学習者である生徒自身にとっては，このような数学も未知のものであり，その学習や探究は新しい法則や概念を創り上げようと努力している数学者の活動と変りがない。また，古藤氏が言われるように，数学の対象とする概念や法則は，すべて人間の思考の産物であるゆえ，これらの認識や理解は，他からの強制で達成されるものでなく，自分自身による判断や推理の能力が関与してこそ，はじめて獲得されるものである。このように考えるとき，生徒が創造的，発展的に数学を自ら創り出していく過程を重視していくという'Do Mathematics'の考えは卓見であり，これからの数学教育でとりわけ強調していかねばならないことである。

'Do Mathematics'をめざす学習指導では，生徒が自ら数学を見つけ出し，創り上げていくような場面に生徒をおき，その状位の中で生徒の意味ある数学的活動を誘発させ，互いに絡ませながら，課題に向って追究していくという姿勢を育てなければならない。この点で，われわれはラカトシュに多くのことを学ぶことができると考える。数学観・学習観については，両者とも軌を一にしており，学習指導のあり方としてはラカトシュの発見法が重要な示唆を与えてくれる。ラカトシュの発見法にいう「推測する」「推測の検討」「反例による反駁」「推測の修正・改良」「証明の精密化」などは，'Do Mathematics'を展開する上で極めて大事な数学的活動であり，生徒に身につけさせたいストラテジーでもある。

'Do Mathematics'を学級という学習集団で展開していく場合，知識を生み出すこと，吟味することが互に刺激しながら，集団の中で共有する意味を形成していくといった，創造的で力動的な相互作用が必要である。このような相互作用を生むには，次のような順序と形態をとるのが自然であり，かつ重要である。まず，議論の場にはじめて出された学習者の考え方（素朴な推測）が提示される。これが①推測の確からしさを強化する確認・保証の活動，②推測に対する反駁の活動，の何れかの数学的に根拠をもった活動で検証される。この検証活動によって数学的議論の前提が形成され，学

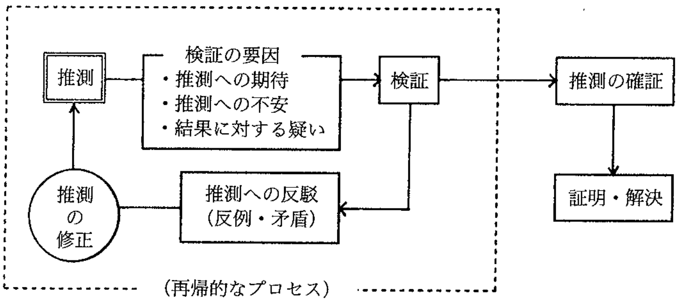
習集団における相互作用を生む。②の活動では，反例・反駁が提示され，それが（素朴な）推測の中にある論理や定義の不完全さや矛盾を明らかにすることによって，議論を形成し，その議論から推測を立て直していく。①の活動では，他の学習者の推測や検証，数学的経験に照らして，その数学的意味や真理性を確信し，数学的知識を共有していく。このような学習活動の展開はまさにラカトシュの発見法そのものである。なお，このようなラカトシュの発見に基づいた数学的ディスカッションの学習モデルの研究として，高橋氏の研究がある(42)。

(5) 思考実験とラカトシュの発見法

昭和62年12月の教育課程審議会の答申で，算数・数学科の改善の基本方針の中の１つに，生徒の思考過程を重視する立場から思考実験などの重視が指摘されている(43)。これは，これまでの算数・数学の指導が，教師による一方的な伝達であったり，具体的操作が手だけの学習になりがちになったりという数学教育の現状の反省からの提言であろう。

古藤氏は，K.ポパーの「思考実験」やG.ポリアの「擬実験」など思考実験の歴史的背景を考察するとともに，学校数学における思考実験のあり方を論じ，問題解決，間接証明法，課題学習，action proof など学校数学の広い分野にわたって，それらと思考実験の関連を詳しく考察している。また，算数・数学の指導の場で，思考実験の考えが効果的な具体場面を提示し，算数・数学科の授業改善のためにも，「思考実験」の観点に立ったダイナミックな学習指導を展開していくことの必要性と意義を述べている(44)。

思考実験は経験的実験ではない。事実より実実でありうるもの，つまり論理的可能性についての実験である。ポパーは，思考実験の用法として批判的・発見的・弁護的用法の３つをあげ，最良の批判的用法の典型としてガリレオが行った落体法則に関する実験をあげている(45)。また，ポリアが言う「擬実験」は，III(4)の「帰納・類比-演繹」の総合で論じたような数学的活動を指している。これらに共通しているのは，まず推測や仮説が提出され，それを実験的態度で検証していくことである。検証の要因としては，推測に対する期待や不安があり，また仮説に対する疑いがある。検証の道は２つに分れる。１つは，反例や矛盾の導出による推測・仮説への反駁である。これによって，仮説が否定され，棄却される。あるいは推測の修正によって，改良推測が提出され，さらにこの検証活動が続けられる。もう１つは，思考実験で推測に対する信頼を高め，その証明や問題解決に向う道である。これらの過程を図表示すれば上図のようになり，これはまさにラカトシュの発見法のプロセスである。



数学的な発見のほとんどが，思考実験によって始まり，思考実験によって進められ，思考実験で確かめられるという。学校数学ではこの部分が欠落している。学校数学においても，出来上がりの数学を学習するだけでなく，さらに実験的態度である「思考実験」を導入し，数学教育の活性化と改善を図っていく必要がある。ここでも，われわれはラカトシュの発見法に学ばねばならない。

以上，数学教育における５つの重要な観点について，ラカトシュの発見法からの示唆とその意義を考察した。この知見に基づいた算数・数学の授業の構築については，今後の課題としたい。

V 結　語

入試準備教育の弊害が日本の学校教育を歪め，とりわけ，中等教育における数学教育がその影響を強く受けている。その現状は，数学の授業が記憶と練習といった注入教授に陥り，プロセス学習的な側面がおろそかにされ，生徒にとって教室が酸欠状態になっていると言わざるを得ない。このような状況を生んだ根底には，外的な社会的要因のほかに，現場の数学教師の「数学観」や「学習観」に対する意識的貧困さもあったのではないかと考える。

数学教育では本来何を大事にしていくべきか。われわれは，日常生活の問題解決においても，あるいは科学においても，新事態に直面したとき，ある推測から始める。最初の推察は的はずれかも知れないが，これを実際に試みて，その成功や失敗の度合いに応じて，大なり小なりの修正をする。観察や類比によって推測し，数回の試み，数回の推測の修正の後で，比較的満足な推察に達する。このような見方や方法論を身につけさすことが，教育では極めて大事なことであり、学校教育では数学科が最適な教科である。数学教育は，単なる知識・技能の習得だけに埋没することなく，このような「推測」や「問題解決」を学習の重要な目標としなければならない。

出来上がりの数学を見るとき，それは公理から出発する演繹体系である。しかし，ラカトシュによれば，数学の生成・発展のプロセスは，推測と証明，反例・反駁，推測の修正，……というように，上記の問題解決における試行接近と全く同様のプロセスであるという。また，数学者の創造的な仕事の結果は演繹的証明で示される。しかし，結果や証明の着想などの多くは，帰納・類比などの蓋然的推論によって，推測され，発見されるのである。

このような観点でみるとき，数学の授業では，数学的な事実の記憶と演繹的な計算と証明の詰め込みに走るのではなく，「推測する」ことや推測に基づいた「試行接近」に十分な余地を与えるべきである。数学の学習指導は，推測や発見に対して適切なプログラムを準備する必要があり，少くとも生徒がもつ推測や発見の芽えを押さえてはいけないものと考える。そのためにも，数学教師が，「数学的活動」とか「理解・学習」というものにもっと健全な認識をもつように，意識変革を求めていく必要があると考える。

本論文では，上記の観点から，数学の学習指導のあり方について論究し，若干の提案をしている。II，IIIではG.ポリアの発見的推論について，その特徴，形式，機能を考察するとともに，数学の学習指導において，この推論を積極的に扱い，重視していくことの意義について論じ，さらに発見的推論と演繹的証明を連動した発見的・創造的な学習活動の展開を，高校数学の事例で提示した。IVでは，I.ラカトシュの数学の発生・発展の論理について考察するとともに，ラカトシュの数学観と発見法が数学教育に重要な示唆を与えるものであることを論じた。

ポリアの発見的推論は，生徒にある根拠に基づいて推測する方法と能力を与えることをねらい，生徒の思考力や創造性の開発に重点がおかれている。それに対し，ラカトシュの発見法は，それだけでなく，学習における数学的活動や授業のあり方に関わる大局的視点と示唆を与えてくれる。

日本の数学教育の当面の課題は数学の学習指導の改善にあるが，それはプロセス学習的な側面を重視したものでなければならない。知識・技能に重点をおいた現状の結果主義・効率主義の授業のあり方から脱却し，学習プロセスを大事にし，豊かな学習活動が展開できる数学の授業をめざしていく必要がある。そのためにも，われわれは，ポリアとラカトシュに学び，よりよい数学の授業を構築していかなければならない。

引用・参考文献

(1) この章は，主として次の文献を参考にしている。
W. C. Salmon（山下正男訳）『論理学』，培風館（1967）
G. Polya（柴垣和三雄訳）『帰納と類比』，丸善（1959）
『発見的推論』，丸善（1960）
笹田昭三 「論理と数学教育」，鳥取大学教育学部研究報告（教育科学）第11巻第2号（1969）
(2)，(3)， W. C. Salmon 論理学，培風館（1967），p. 7
(4) D. Hilbert & W. Ackermann 記号論理学の基礎，大阪教育図書（1954），p.45
(5) G. Polya 帰納と類比，丸善（1959），p. 3
(6) 同上書，p.13
(7) 同上書，p.14
(8) T. L. Heath ギリシャ数学史II，共立全書（1960），pp.230-235
(9) P. J. Davis & R. Hersh（柴垣他訳） 数学的経験，森北出版（1989），p.197
(10) 同上書，pp.166-167
(11) T. L. Heath ギリシャ数学史II，共立全書（1960），p.239
(12) 前掲書(5)，pp.18-22
(13) 前掲書(11) と同じ
(14) 小中正他 数学教育において特に配慮したい点 (2)，鳥取大学学芸学部研究報告 第2巻第2号（1960）
(15) 前掲書(5)，p. 4
(16) 同上書，pp. 5 - 7
(17) 前掲書(5)，pp.121-123
(18) 笹田昭三 理論と数学教育，鳥取大学教育学部研究報告（教育科学）第11巻第2号（1969），pp.57-58
(19) 同上書，p.62
(20) G. Polya 発見的推論，丸善（1960），p.188
(21) I. Lakatos（佐々木力訳） 数学的発見の論理ー証明と論駁ー，共立出版（1980）
(22) 前掲書(9)，pp.334-335
(23) 前掲書(21)，p.200
(24) 同上書，pp. 1 - 2
(25) 同上書，pp. 3 - 4
(26) 同上書，pp. 4 - 5
(27) 佐々木徹郎 I.Lakatos の数学論とその数学教育における意義(1)，数学教育学研究紀要第9号(1983)，p.10
(28) 前掲書(21)，p.13
(29) 同上書，pp. 8 - 9
(30) 同上書，pp.12-15
(31) 同上書，pp.17-44
(32) 同上書，pp.154-171
(33) 同上書，pp.154-155
(34) 前掲書(9)，p.281
(35) 同上書，pp.281-287
(36) 平林一栄 数学教育の活動主義的展開，東洋館出版（1987），pp.286-287
(37) 同上書，pp.303-312
(38) H. Freudenthal Geomenthal Geometry between the Devil and the Deep See, Educational Studies in Math., 1971. p.414
(39) 古藤怜 思考実験と学校数学，数学教育研究（上越教育大学）第3号，(1988)，pp. 1 -10

古藤怜　自ら考える力を伸ばす数学教育，ASG レポート，1984．7，p. 2
(40) 蒲敏裕　Do Math をめざす学習指導，数学教育研究（上越教育大学）第 1 号，(1986)，pp.81-90
(41) 同上書　pp.84-85
(42) 高橋進一　数学的 Discussion とその構造，数学教育論究 Vol.59／50，(1988)，pp.31-33
(43) 文部省　中学校指導書・数学編，大阪書籍，1989，pp. 1 - 2
(44) 前掲書　(39)，pp. 1 -10
(45) K.ポパー（大内・森訳）　科学的発見の論理，下巻，恒星社厚生閣（1976），pp.543-544
前掲書(39)，pp. 2 - 3

(1991年 8 月31日受理)